Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И МАТ. ЛОГИКИ

Направление: 01.03.01 — Математика,бакалавр математики.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Бакалаврская работа)

Синхронизируемые автоматы

Работа завершена:

«____»______________2015 г. ___________Р.В. Альбахтов

Работа проверена:

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры алгебры и мат. логики

«____»______________2015 г. _______________Ю.А. Альпин

Заведующий кафедрой алгебры и мат. логики
доктор физико-математических наук, профессор

«____»______________2015 г. _______________М. М. Арсланов

Казань — 2015 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.

Данная работа посвящена синхронизируемым автоматам.

Автомат называется *синхронизируемым*, если найдется слово, под действием которого все состояния переходят в одно. Любое слово с таким свойством называется синхронизирующим для автомата.

Синхронизируемые автоматы представляют собой очень простую и естественную модель систем, устойчивых к ошибкам. Они используются во многих прикладных областях (тестирование систем и протоколов, кодирование информации, роботика) и в то же время неожиданным образом возникают в некоторых разделах фундаментальной математики (символическая динамика, теория подстановочных систем и др.).

Условимся для краткости называть автомат с n состояниями *n-автоматом.* В 1964 г. Черни указал серию синхронизируемых n-автоматов с порогом синхронизации $(n-1)^2$. Немного позднее он высказал предположение, что автоматы из этой серии реализуют наихудший (в смысле скорости синхронизации) случай, т. е. что каждый синхронизируемый n-автомат может быть синхронизирован словом длины не более $(n-1)^2$. За этим предположением закрепилось имя *гипотеза Черни*, с помощью которой мы искали синхронизирующее слово в §3. Несмотря на простоту формулировки и усилия многочисленных исследователей, гипотеза Черни остается недоказанной и неопровергнутой уже более 45 лет.

В данной работе мы изучили свойства синхронизируемости с помощью графов и линенйной алгебры. Ввели понятие совместимости и сильной совместимости и доказали свойства этих бинарных отношений на множестве состояний. Определили понятие факторавтомата по разбиению на классы сильной совместимости. Описали автоматы, у которых любые два состояния не совместимы.

§1. Необходимые сведения о конечных автоматах.

Необходимые сведения взяли из источников списка литературы [1] - [3].

Алфавитом называется любое конечное непустое множество X. Его элементы называются *буквами*. Конечные последовательности букв называются *словами*. Мы пользуемся алфавитом, составленным из первых букв латинского алфавита.

Длина $|p|$ слова p равна количеству его букв, причем каждая буква считается столько раз, сколько она встречается в слове, так что, например, длина слова 00100 равна 5. *Пустое слово* обозначаем буквой e. Его длина равна 0. Множество всех слов в алфавите X обозначается через X^*.

Если $p = x_1 \ldots x_k$, $q = y_1 \ldots y_m$, то *конкатенацией* слов p и q называется слово $pq = x_1 \ldots x_k y_1 \ldots y_m$. Для пустого слова e и любого слова p полагаем $ep = pe = p$. Конкатенация — ассоциативная операция с нейтральным элементом (единицей), равным e. Таким образом, множество X^* относительно операции конкатенации образует моноид, то есть полугруппу с единицей.

Автомат — это совокупность (X, S, δ), где X — алфавит, S — непустое множество, элементы которого называются *состояниями* автомата, δ — функция из $S \times X$ в S, она называется *функцией перехода*.

Запись $\delta(s, x) = s'$ читается так: автомат под действием сигнала (буквы) $x \in X$ переходит из состояния s в состояние s'.

Автомат называется *конечным*, если множество его состояний конечное. Автомат удобно изображать в виде орграфа. При этом вершины обозначают состояния, и дуга ведёт из s в $s' \Leftrightarrow \delta(s, x) = s'$ для некоторой буквы x. Все такие буквы считаются метками этой дуги.

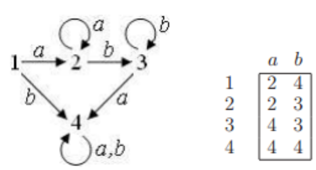

Рисунок 1.

Любой граф с множеством вершин S, дуги которого помечены буквами алфавита X так, что для любой пары $(s,x) \in S \times X$ имеется ровно одна дуга с началом s, помеченная буквой x, определяет автомат. Действительно, будем считать, что конец этой дуги указывает на состояние, в которое автомат переходит из s под действием x. Этим функция перехода полностью определяется.

Вместо $\delta(s,x) = s'$ удобнее писать $s\delta(x) = s'$. Тем самым каждой букве x сопоставляется преобразование $\delta(x) : S \to S$. Слову $p = x_1 x_2 \ldots x_k$ сопоставим произведение преобразований

$$\delta(p) = \delta(x_1)\delta(x_2)\ldots\delta(x_k).$$

Положим, что $\delta(e)$ — тождественное преобразование. Таким образом, конкатенации pq слов p и q отвечает произведение соответствующих преобразований, то есть $\delta(pq) = \delta(p)\delta(q)$. Тем самым, множество $\{\delta(p), p \in X^*\}$ преобразований множества S образует мультипликативный моноид. Назовём его *моноидом автомата* (X, S, δ).

Определение 1.Введём на множестве состояний $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ бинарное отношение совместимости. Будем говорить, что состояния i, j совместимы автоматом, если существует слово p, которое переводит автомат из состояний i и j в одно и то же состояние, то есть

$$i\delta(p) = j\delta(p).$$

Слово p совмещает состояния множества $M \subseteq S$, если оно переводит автомат из любого состояния множества M в одно и то же состояние. Будем говорить короче: p совмещает M.

Важный частный случай — когда M — двухэлементное множество.

Другой важный случай — когда M — множество всех состояний автомата. Слово, совмещающее все состояния, то есть переводящее автомат из любого состояния в некоторое одно и то же состояние, называется *синхронизирующим*. Не для всякого автомата существует синхронизирующее слово. Но если оно существует, то автомат называется *синхронизируемым.* Синхронизирующим словом для автомата, граф которого изображен на рисунке 1, является слово вида $p = ...ba....$

Пример не синхронизируемого автомата:

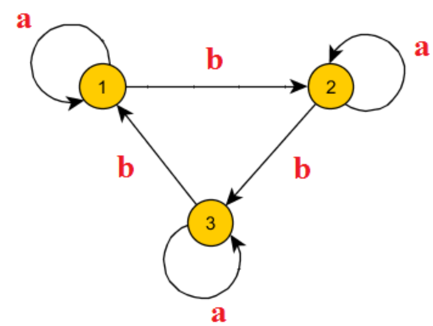

Рисунок 2.

§2. Три теоремы о синхронизируемых автоматах

Лемма 1. Если p совмещает M, то и любое слово вида pq совмещает M.

Доказательство. Мы имеем автомат, имеющий k состояний из множества $M = \{i_1, i_2, ..., i_k\}$, которые совмещены таким образом(словом p):

$$i_1\delta(p) = i_2\delta(p) = i_3\delta(p) = ... = i_k\delta(p) = j.$$

Значит p совмещает M. Совмещая словом p все k состояний множества M, мы остановимся на одном совместном состояние j(В графе: пройдя слово p из каждой вершины, мы остановимся на вершине j). И какое слово q мы не использовали бы дальше, оно будет переводить состояние j в другое одинаковое для всех состояние, то есть

$$i_1\delta(pq) = i_2\delta(pq) = i_3\delta(pq) = ... = i_k\delta(pq).$$

А это значит, что слово вида pq совмещает M.

Теорема 1. *Автомат синхронизируем тогда и только тогда, когда любые два его состояния совместимы.*

Доказательство. Необходимость условия теоремы очевидна: если автомат синхронизируем, то синхронизирующее слово p по определению совмещает любые два состояния i, j.

Начало доказательства достаточности: пусть слово p_1 совмещает состояния 1 и 2, то есть

$$1\delta(p_1) = 2\delta(p_1). \tag{1}$$

Рассмотрим состояния $1\delta(p_1)$ и $3\delta(p_1)$. Они совместимы некоторым словом p_2. Тогда слово p_1p_2 совмещает состояния 1, 2 и 3, так как учитывая (1) и лемму 1, имеем

$$1\delta(p_1p_2) = 2\delta(p_1p_2) = 3\delta(p_1p_2). \tag{2}$$

Рассмотрим состояния $1\delta(p_1p_2)$ и $4\delta(p_1p_2)$. Они совместимы некоторым словом p_3. Тогда слово $p_1p_2p_3$ совмещает состояния 1, 2, 3 и 4, так как учитывая (2) и лемму 1, имеем

$$1\delta(p_1p_2p_3) = 2\delta(p_1p_2p_3) = 3\delta(p_1p_2p_3) = 4\delta(p_1p_2p_3). \tag{3}$$

Рассматривая и совмещая дальше все состояния нашего автомата, мы получим:

$$1\delta(p_1p_2p_3...p_k) = 2\delta(p_1p_2p_3...p_k) = 3\delta(p_1p_2p_3...p_k) =$$

$$= 4\delta(p_1p_2p_3...p_k) = ... = n\delta(p_1p_2p_3...p_k),$$

где $k = n - 1$.

А это значит,что наш автомат синхронизируемый, синхронизирующее слово $t = p_1p_2p_3...p_k$. Что и требовалось доказать.

Теорема 2. Если существует слово, совмещающее состояния i, j, автомата с n состояниями, то кратчайшее такое слово имеет длину не больше, чем $(n^2 - n)/2$.

Доказательство. Пусть слово $p = x_1x_2 \dots x_k$ — **самое короткое слово,** совмещающее состояния i, j. Рассмотрим две последовательности состояний:

$$i, i\delta(x_1), i\delta(x_1x_2) \dots, i\delta(x_1x_2, \dots, x_{k-1}), i\delta(x_1x_2 \dots x_k) = i\delta(p), \tag{4}$$

$$j, j\delta(x_1), j\delta(x_1x_2) \dots, j\delta(x_1x_2, \dots, x_{k-1}), j\delta(x_1x_2 \dots x_k) = j\delta(p), \tag{5}$$

причём $i\delta(p) = j\delta(p)$.

Запишем две последовательности (4) и (5) в виде одной последовательности столбцов высоты 2:

$$\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i\delta(x_1) \\ j\delta(x_1) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} i\delta(x_1x_2, \dots, x_{k-1}) \\ j\delta(x_1x_2, \dots, x_{k-1}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i\delta(p) \\ j\delta(p) \end{pmatrix} \tag{6}$$

Согласно определению слова p в каждом столбце, кроме последнего, элементы различны.

Докажем вначале, что в последовательности (6) нет одинаковых столбцов. Предположим противное. Это значит, что в слове p есть такие начальные подслова p_1 и p_1p_2 ($p_2 \neq e$), что

$$\begin{pmatrix} i\delta(p_1) \\ j\delta(p_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\delta(p_1p_2) \\ j\delta(p_1p_2) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Но тогда слово p можно представить в виде $p = p_1p_2p_3$, причём в силу равенства (7) имеем

$$i\delta(p) = i\delta(p_1p_3), j\delta(p) = j\delta(p_1p_3),$$

то есть слово p_1p_3, более короткое, чем p, совмещает состояния i и j. Пришли к противоречию. Пока что мы доказали, что в последовательности (6) все столбцы различны. А так как различных столбцов, (внутри которых, напомним, элементы неравны) не больше, чем $n^2 - n$, то кратчайшее совмещающее слово не длиннее, чем $n^2 - n$.

На самом деле в последовательности (6) не только нет равных столбцов, но нет и столбцов, совпадающих "с точностью до переворачивания". То есть не существует начальных подслов p_1 и p_1p_2 ($p_2 \neq e$), таких, что

$$\begin{pmatrix} i\delta(p_1) \\ j\delta(p_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j\delta(p_1p_2) \\ i\delta(p_1p_2) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Действительно, если допустить, что

$$i\delta(p_1) = j\delta(p_1p_2), j\delta(p_1) = i\delta(p_1p_2),$$

то

$$i\delta(p_1p_3) = j\delta(p_1p_2p_3) = j\delta(p),$$

$$j\delta(p_1p_3) = i\delta(p_1p_2p_3) = i\delta(p).$$

Опять пришли к противоречию: слово p_1p_3, более короткое, чем p, совмещает состояния i и j.

Таким образом, кратчайшее слово, совмещающее два состояния не может быть длиннее, чем количество различных неупорядоченных пар(т.е 2-х элементных подмножеств) состояний. Это количество, как известно, равно $(n^2 - n)/2$. Теорема доказана.

Следующая теорема описывает синхронизируемые автоматы в линейно-алгебраических терминах. Моноид автомата можно задать с помощью матриц. Сопоставим преобразованию $\delta(p)$ (0,1)-матрицу $A(p)$ с элементами

$$a_{ij}(p) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{if } i\delta(p) = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{9}$$

Заметим, что все матрицы $A(p)$ имеют в каждой строке ровно одну единицу.

Легко доказать, что отображение $\delta(p) \rightarrow A(p)$ инъективно($p \neq q \Rightarrow A(p) \neq A(q)$) и удовлетворяет условию гомоморфизма $\delta(pq) \rightarrow A(p)A(q)$.

Лемма 2. Пусть $A = (a_{ij})$ — (0,1)-матрица, имеющая в каждой строке ровно одну единицу. Тогда rkA равен числу различных строк A.

Доказательство. Рангом матрицы называется максимальное число линейно независимых строк. Множество строк называется линейно независимым, если ни одна из них не выражается линейно через другие. Так как наша матрица имеет в каждой строке ровно одну единицу(остальные нули), значит в нашем случае линейно независимые строки это различные строки. Что и требовалось доказать.

Теорема 3. Автомат синхронизируем тогда и только тогда, когда моноид $\{A(p), p \in X^*\}$ содержит матрицу ранга 1.

Доказательство.

Необходимость. Автомат является синхронизируемым, когда он некоторым словом p переводится из каждого состояния i в определенное состояние j. Матрица $A(p)$ такого слова будет иметь все нулевые столбцы, кроме одного. Если $i\delta(p) = j$ для любых i, то $j-$ый столбец будет полностью состоять из единиц. А ранг такой матрицы равен 1.

Достаточность. Ранг матрицы равен 1, значит все строки матрицы линейно зависимы. Для (0,1)-матрицы строки линейно зависимы, когда в каждой строке(столбце) в определенном столбце(строке) стоит единица(остальные нули). Например, матрица $A(p)$ может иметь вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & .... & \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix},$$

если слово p переводит автомат из любого состояния в состояние 2. В общем случае единицы стоят в j-ом столбце, который отвечает за состояние, в котором совмещены все состояния, пройдя синхронизирующее слово p. То есть если

$$1\delta(p) = 2\delta(p) = ... = n\delta(p) = j$$

Исходя из этого утверждения и определения $A(p)$-матрицы, можно сказать, что автомат, ранг матрицы моноида которого равен 1, является синхронизируемым. Теорема доказана.

Следствие 1. Если для автомата матрицы $A(x)$ для всех букв $x \in X$ невырожденны, то есть их ранг равен n, то автомат несинхронизируем.

Доказательство. Из курса алгебры известно, что произведение невырожденных матриц является невырожденной матрицей. Следовательно, для нашего автомата и любого слова $p = x_1 x_2 \dots x_k$ матрица

$$A(p) = A(x_1)A(x_2)\dots A(x_k)$$

невырожденна (её ранг равен n). Согласно теореме 3 такой автомат несинхронизируем.

Для графа автомата, изображенного на рисунке 2 матрицы $A(x)$ равны:

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Данные матрицы невырожденные, то есть их ранг равен n, исходя из следствия1 получаем, что автомат несинхронизируем.

§3. Поиск синхронизирующего слова для автомата с 5-ю состояниями

Согласно гипотезе Черны любой синхронизируемый автомат с n состояниями обладает синхронизирующим словом длины не более $(n-1)^2$. За годы, прошедшие с тех пор, было предпринято множество попыток доказать или опровергнуть эту гипотезу, но ни одна из них не увенчалась успехом. Найдём синхронизирующее слово длины 10 для автомата с 5-ю состояниями на прилагаемом рисунке.

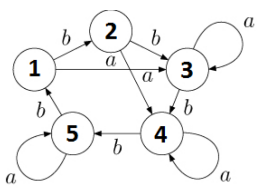

Рисунок 3.

Рисунок к рассуждению:

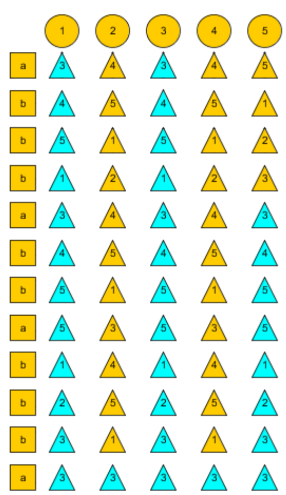

Рисунок 4.(Первая строка — состояния, первый столбец — слово, падающее на вход. Бирюзовые треугольники это совмещенные состояния)

Рассуждение: Мы имеем орграф с 5-ю вершинами. Использовать первой букву b для нахождения синхронизирующего слова, я не вижу смысла, так как она просто переводит все состояния "по кругу". Значит первой буквой я беру a. Тем самым мы совместили состояния из вершин 1 и 3, 2 и 4. Использовать второй буквой букву a нет смысла, так как состояния под действием этой буквы преходят в эти же состояния(так как это петли), значит мы используем второй буквой букву b. Я заметил, что совмещает состояния лишь буква a, но совмещает лишь состояния из вершин 1 и 3, 2 и 4. Я использовал еще дважды букву b, для того чтобы мы остановились в состояниях 1 и 3 для их совмещения. Дальше используя букву a, мы совместили еще два состояния. Теперь мы находимся в вершинах 3 и 4. Как минимум следующие два хода использовать букву a нет смысла, так как она ничего не меняет, значит следующие две буквы будут b. Далее я использую a, опираясь на то, что совместить можно только те состояния, которые находяться друг от друга на расстояние одной вершины(1 и 3, 2 и 4). Тем самым мы получаем состояния в вершинах 3 и 5. Теперь остается перевести их в вершины 1 и 3. Это мы делаем, используя три раза букву b. После этого мы просто совмещаем остальные два состояния с помощью буквы a и получаем синхронизирующее слово:

$$p = abbbabbabbba$$

§4. Факторизация частично синхронизируемых автоматов.

Очевидно, что отношение совместимости рефлексивно и симметрично. Однако, оно не всегда транзитивно. Следовательно, отношение совместимости не всегда является эквивалентностью. Для доказательства рассмотрим автомат с входным алфавитом $X = \{a, b, c, d\}$ и матрицами перехода

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A(c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A(d) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

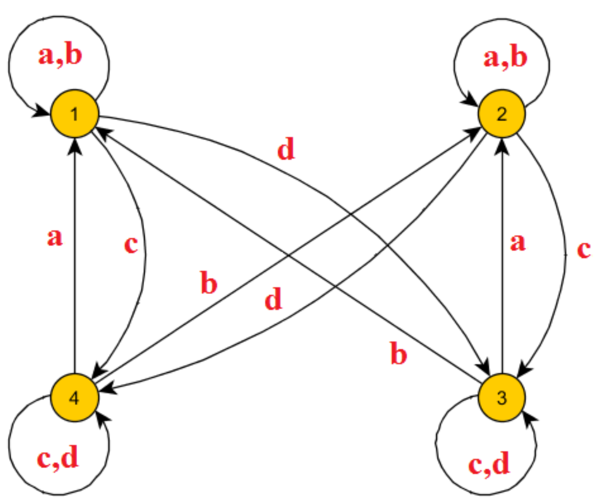

Рисунок 5.

Теорема 1. Отношение совместимости состояний рефлексивно, симметрично, но в общем случае не транзитивно.

Доказательство. Очевидно, что отношение совместимости рефлексивно и симметрично.

Докажем, что оно не всегда транзитивно. Рассмотрим пример с состояниями 1, 2 и 3 нашего графа, изображенного на рисунке 5.

Состояния 1 и 3 совместимы, то есть существует слово p_1, которое переводит автомат из состояний 1 и 3 в одно и то же состояние:

$$1\delta(p_1) = 3\delta(p_1).$$

Найдем такое слово на графе. Это слово вида: $p_1 = d...$

Данное слово начинается с буквы d, а дальше идет любая последовательность букв из алфавита.

Состояния 3 и 2 тоже совместимы, то есть существует слово p_2, которое переводит автомат из состояний 3 и 2 в одно и то же состояние:

$$3\delta(p_2) = 2\delta(p_2).$$

Попробуем найти такое слово на графе. Это слово вида: $p_2 = a...$

Данное слово начинается с буквы a, а дальше идет любая последовательность букв из алфавита.

Допустим состояния 1 и 2 тоже совместимы, то есть существует слово p_3, которое переводит автомат из состояний 1 и 2 в одно и то же состояние, то есть:

$$1\delta(p_3) = 2\delta(p_3).$$

У нас есть теорема, доказанная ранее, в которой говорится, что если существует слово, совмещающее состояния 1 и 2 автомата с n состояниями, то кратчайшее такое слово имеет длину не более, чем $(n^2 - n)/2$. В нашем случае при $n = 4$, получаем $(16 - 4)/2 = 6$. То есть нужно показать, что словом такой длины нельзя совместить состояния 1 и 2. Попробуем найти такое совмещающее слово.

Использовать в совмещающем словое первыми буквами a, b нет смысла, так как и первое, и в второе состояние под действием этих букв передут в эти же состояния. Тогда попробуем использовать первой буквой нашего слова - букву c : она переводит состояние 1 в состояние 4, а состояние 2 в состояние 3. В качестве второй буквы использовать буквы c и d нет смысла, так как и первое, и в второе состояние под действием этих букв передут в эти же состояния. Так же нет смысла использовать букву a, которая вернет нас в исходное положение в обоих случаях. Остается только буква d. Использовав 2 буквы cb, мы перевели состояние 1 в состояние 2 и наоборот. То есть мы вернулись в начало, использовав 2 буквы нашего слова. Такого быть не должно.

Попробуем первой буквой нашего совмещающего слова взять не c, а букву d. Мы переведем состояние 1 в состояние 3, а состояние 2 в состояние 4. В качестве второй буквы использовать буквы c и d нет смысла, так как и первое, и в второе состояние под действием этих букв передут в эти же состояния. Так же нет смысла использовать букву b, которая вернет нас в исходное положение в обоих случаях. Значит, используем букву a. Использовав 2 буквы da, мы перевели состояние 1 в состояние 2 и наоборот. То есть мы вернулись в начало, использовав 2 буквы нашего слова. Такого быть не должно.

Таким образом, анализ показал, что не существует слова длины 6, совмещающего состояния 1 и 2.

Мы получили:

1) Состояния 1 и 3 совместимы: $1\delta(p_1) = 3\delta(p_1)$.

2) Состояния 3 и 2 совместимы: $3\delta(p_2) = 2\delta(p_2)$.

3) Состояния 1 и 2 несовместимы: $1\delta(p_3) = 2\delta(p_3)$.

Из этого следует, что для автомата отношение совместимости в общем случае не транзитивно. ч.т.д.

Определение 2. Теперь введём на множестве состояний бинарное отношение сильной совместимости. Будем говорить, что состояния i, j сильно совместимы автоматом, если состояния i, j совместимы автоматом и больше того: при любом слове p состояния $i\delta(p)$ и $j\delta(p)$ тоже совместимы автоматом.

Отношение сильной совместимости S: запись iSj означает, что состояния i, j сильно совместимы.

Определение 3. Автомат, у которого хотя бы два состояния являются сильно совместимыми, называется частично синхронизируемым.

Теорема 2. Для любого автомата отношение сильной совместимости состояний рефлексивно, симметрично и транзитивно, то есть является эквивалентностью.

Доказательство: Рефлексивность очевидна:

$$i\delta(p) = i\delta(p),$$

для любого p, для любого i. Симметричность также очевидна:

$$i\delta(p) = j\delta(p) \to j\delta(p) = i\delta(p),$$

для любого p, для любых i, j.

Докажем транзитивность. Покажем, что если состояние i сильно совместимо с состоянием j и состояние j сильно совместимо с k, то i сильно совместимо с k. Пусть p - произвольное слово. Нужно доказать, что состояния $i\delta(p)$ и $k\delta(p)$ совместимы. Состояния $i\delta(p)$ и $j\delta(p)$ совместимы некоторым словом q, так как i и j сильно совместимы. Состояния $j\delta(pq)$ и $k\delta(pq)$ совместимы некоторым словом r, так как j и k сильно совместимы. Но так как $i\delta(pq) = j\delta(pq)$, то слово qr совмещает состояния $i\delta(p)$ и $k\delta(p)$, что и требовалось доказать.

Проиллюстрируем доказательство следующим рисунком:

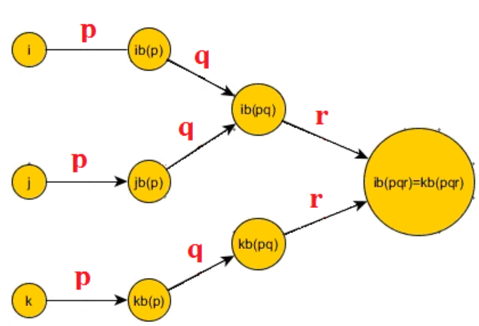

Рисунок 6.

Докажем, что для нашего автомата, изображенного на рисунке 5, любые два состояния не являются сильно совместимыми. Рассмотрим не сильно совместимость состояний, а просто совместимость их. В задаче №1 мы доказали, что совместимы между собой только состояния: 1 и 4, 1 и 3, 2 и 3, 2 и 4. Состояния 1 и 2, 3 и 4 не совместимы. Из любой пары состояний нашего автомата под действием какого-то слова p мы можем попасть в пары состояний 1 и 2, 3 и 4. Которые не совместимы, а значит и не сильно совместимы. Пара состояний 1 и 4 под действием слова b переходит в пару 1 и 2.

$$1\delta(b) \to 1,$$

$$4\delta(b) \to 2.$$

Пара состояний 1 и 3 под действием слова a переходит в пару 1 и 2.

$$1\delta(a) \to 1,$$

$$3\delta(a) \to 2.$$

Пара состояний 2 и 4 под действием слова a переходит в пару 1 и 2.

$$2\delta(a) \to 2,$$

$$4\delta(a) \to 1.$$

Пара состояний 2 и 3 под действием слова b переходит в пару 1 и 2.

$$2\delta(b) \to 2,$$

$$3\delta(b) \to 1.$$

Пара состояний 3 и 4 под действием слова a переходит в пару 1 и 2.

$$3\delta(a) \to 2,$$

$$4\delta(a) \to 1.$$

Значит для нашего автомата, изображенного на рисунке 5, любые два состояния не являются сильно совместимыми.

Приведем пример автомата, для которого отношение сильной совместимости нетривиально. Отношения эквивалентности на множестве считаются тривиальными, если:

а) всякий элемент множества эквивалентен лишь самому себе,

б) все элементы множества эквивалентны между собой.

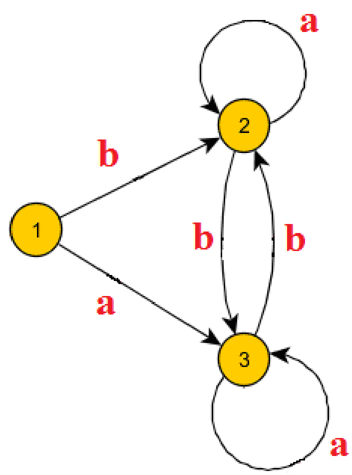

Рисунок 7.

Состояния 1 и 3 данного автомата сильно совместимы, так как состояния $1\delta(p)$ и $3\delta(p)$ совместимыми для любого слова q.

Состояние 2 данного автомата сильно совместимо лишь самим собой.

Теорема 3. Отношение сильной совместимости устойчиво, это значит, что если iSj, тогда $i\delta(x)Sj\delta(x)$ для любой буквы x из X.

Доказательство: Требуется доказать, что при любом p из X состояния $i\delta(xp)$ и $j\delta(xp)$ совместимы некоторым словом q. Но это вытекает из сильной совместимости состояний i и j.

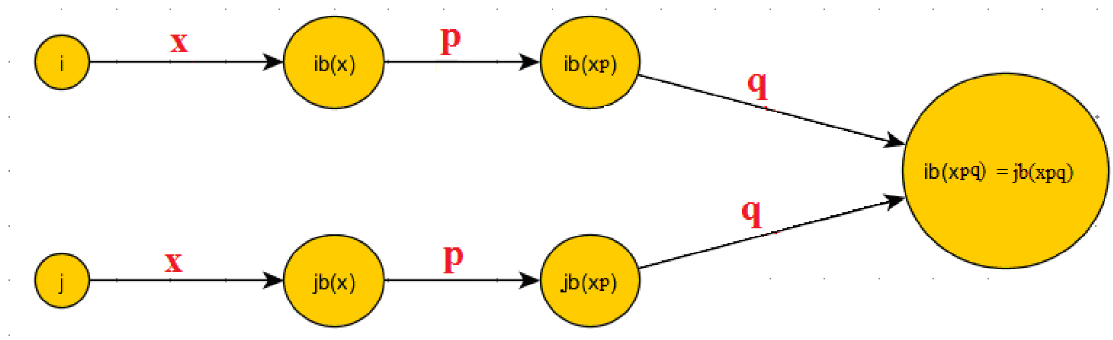

Рисунок 8.

По рисунку видно, что $i\delta(x)Sj\delta(x)$.

Благодаря теореме 3 корректно определяются *факторавтоматы по отношению* S.

Определение 4. Состояния факторавтомата — классы S - эквивалентности, функция перехода определяется равенством: $[i]\delta(x) = [i\delta(x)]$.

Определение 5. Число классов сильной совместимости назовем *индексом несинхронизируемости автомата.* Другими словами индекс несинхронизируемости - это максимальное число состояний, любые два из которых не являются сильно совместимыми.

Определение 6. Частично-перестановочный автомат — автомат, любые два различные состояния которого не являются сильно совместимыми.

Определение частично-перестановочного автомата не исключает возможности существования совместимых состояний в автомате.

Любой факторавтомат по постраению является частично-перестановочным.

Пример такого автомата был приведен ранее на рисунке 5.

Приведем пример факторизации автомата.

Граф автомата:

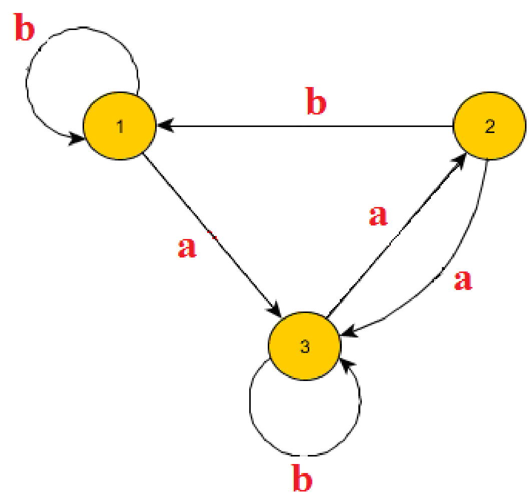

Рисунок 10.

Граф факторавтомата:

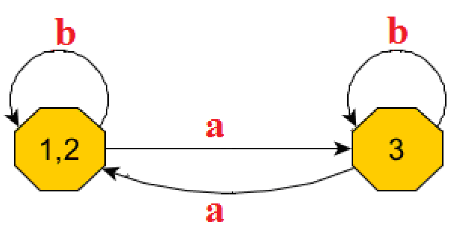

Рисунок 11.

Определение 7. Перестановочный автомат — автомат, любые два различных состояния которого не совместимы друг с другом. Точнее: если состояния i, j совместимы, то $i = j$. Факторавтомат такого автомата совпадает с самим автоматом.

Пример перестановочного автомата:

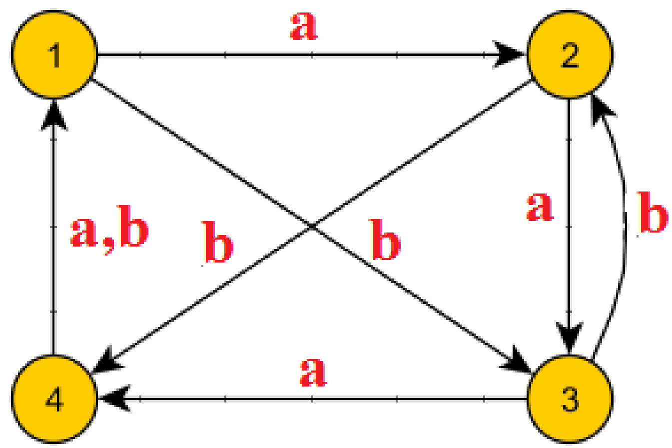

Рисунок 12.

Матрицы перехода:

$$A(a)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\ A(b)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Теорема 4. Если для автомата матрицы $A(x)$ для всех букв $x \in X$ невырожденны, то есть их ранг равен n, то любые два состояния несовместимы. Верно и обратное утверждение.

Доказательство:

Доказательство основано на том, что $rkA(x) = n \leftrightarrow$ строки $A(x)$ различны, то есть $A(x)$ - матрица перестановки, она имеет ровно одну единицу в каждой строке и каждом столбце. Из курса алгебры известно, что произведение невырожденных матриц является невырожденной матрицей.

Следовательно, для нашего автомата и любого слова $p = x_1 x_2 \dots x_k$ матрица

$$A(p) = A(x_1)A(x_2)\dots A(x_k)$$

невырожденна (её ранг равен n).

Необходимость. Для автомата матрицы $A(x)$ для всех букв $x \in X$ невырожденны, то есть их ранг равен n, то любые два состояния несовместимы.

Ранг матрицы равен n, значит все строки матрицы линейно независимы. Для $(0,1)$-матрицы строки линейно независимы, когда все строки различны. Допустим что любые два состояния совместимы. Любые два состояния автомата являются совместимыми, когда они под действием некоторого слова p переходят в определенное состояние j. В матрице A(p) такого моноида в нескольких строках в j-ом столбце будут стоять единицы, остальные нули. Появятся одинаковые строки в матрице, они линейно зависимы. А ранг такой матрице меньше n. Противоречие.

Достаточность. Если любые два состояния несовместимы, то для автомата матрицы $A(x)$ для всех букв $x \in X$ невырожденны, то есть их ранг равен n. Любые два состояния несовместимы, то есть никакое слово p не переводит любые два состояния в одно определенное. На матрице это будет выгядет так, что каждая строка и каждый столбец будет содержать лишь одну единицу, остальные нули. Все эти строки(столбцы) будут линейно независимы, то есть ранг такой матрицы равен n. Ч.т.д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю.А. Альпин, С.Н Ильин. Дискретная математика: графы и автоматы. Издательство КГУ(2007).

2. Видео-лекции и конспект лекций проф. М.В. Волкова о синхронизируемых автоматах.

http://kadm.imkn.urfu.ru/pages.php?id=automata.

3. Д.С. Ананичев, М.В. Волков, В.В. Гусев. Примитивные орграфы с большими экспонентами и медленно синхронизируемые автоматы. Записки научных семинаров ПОМИ, том 402. (2012)