Том 148, кн. 4 Физико-математические науки *2006*

УДК 517.956

О ЗАДАЧАХ СО СМЕЩЕНИЯМИ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Е.А. Уткина

Аннотация

Рассматриваются уравнения

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{k} a_{ij}(x,y)\, D_x^i D_y^j u(x,y) = 0, \quad k = 1, 2,$$

первое из которых является обобщением уравнения Аллера, а второе – уравнения Буссинеска – Лява. В прямоугольнике $D = \{x, y \in (0,1)\}$ исследуются задачи об отыскании регулярных решений рассматриваемых уравнений по заданным линейным соотношениям, каждое из которых связывает между собой значения искомой функции в точках, лежащих на границе D и внутри этой области. В терминах коэффициентов указанных соотношений выведены условия, достаточные для однозначной разрешимости сформулированных задач.

Начало систематических исследований задач со смещениями в граничных условиях было положено публикациями [1–3]. В [1,2] обсуждаемые граничные условия появились в результате теоретического обобщения задачи Трикоми, а в [3] – на основе модели задачи, связанной с электронным рассеянием. Важную роль в привлечении интереса к изучению подобных задач сыграла статья [4], где эти задачи характеризовались как качественно новые и возникающие при решении современных проблем физики. К настоящему времени сложилось интенсивно развивающееся направление теоретических исследований таких задач для различных типов уравнений с частными производными. Наиболее близкой к теме настоящей статьи является работа [5], в которой для псевдопараболического уравнения высокого порядка изучена задача с аналогом условия А.А. Самарского.

Здесь мы рассматриваем следующие варианты уравнения из [5]:

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{1} a_{ij}(x,y)\, D_x^i D_y^j u(x,y) = 0, \tag{1}$$

где $a_{21} \equiv 1$, $a_{ij} \in C^{i,j}\left(\overline{D}\right)$, и

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} a_{ij}(x,y)\, D_x^i D_y^j u(x,y) = 0 \tag{2}$$

где $a_{22} \equiv 1$, $a_{ij} \in C^{i,j}\left(\overline{D}\right)$, $D_t^k \varphi \equiv \partial^k \varphi / \partial t^k$ при $k = 1, 2, \ldots$, а D_t^0 – оператор тождественного преобразования. Так, (1) содержит в себе уравнение Аллера, описывающее процесс поглощения влаги корнями растений [3], а (2) – уравнение Буссинеска–Лява, моделирующее продольные волны в тонком упругом стержне с учетом эффектов поперечной инерции [4]. В отличие от [5], в настоящей работе речь идет о задачах, в которых условия смещения содержат как граничные, так и внутренние точки области.

1. Задача для уравнения (1)

Для точек, лежащих на границе и внутри области $D = \{(x, y \in (0,1))\}$, введем обозначения

$$b_1 = (x, 0),\ \ b_2 = (0, x),\ \ b_3 = (x, x),\ \ b_4 = (1-x, 0),\ \ b_5 = (0, 1-x),\ \ b_6 = (1-x, 1-x).$$

Точки, получаемые из b_k заменой x на y, обозначим через c_k.

Задача 1. *Требуется найти функцию* $u(x,y) \in C^{2,1}(D) \bigcap C^{0,0}\left(\overline{D}\right)$, *являющуюся в* D *решением уравнения* (1) *и удовлетворяющую следующим трем условиям:*

$$\alpha_{10}(x)\,u(b_1) + \alpha_{01}(x)\,u(b_2) + \alpha_{11}(x)\,u(b_3) + \alpha_{10}^1(1-x)\,u(b_4) + \\ + \alpha_{01}^1(1-x)\,u(b_5) + \alpha_{11}^1(1-x)\,u(b_6) = \psi_1(x), \quad x \in [0,1],$$

$$\beta_{10}(y)\,u(c_1) + \beta_{01}(y)\,u(c_2) + \beta_{11}(y)\,u(c_3) + \beta_{10}^1(1-y)\,u(c_4) + \\ + \beta_{01}^1(1-y)\,u(c_5) + \beta_{11}^1(1-y)\,u(c_6) = \psi_2(x), \quad y \in [0,1], \tag{3}$$

$$\gamma_{10}(x)\,u(b_1) + \gamma_{01}(x)\,u(b_2) + \gamma_{11}(x)\,u(b_3) + \gamma_{10}^1(1-x)\,u(b_4) + \\ + \gamma_{01}^1(1-x)\,u(b_5) + \gamma_{11}^1(1-x)\,u(b_6) = \psi_3(x), \quad x \in [0,1].$$

При этом на отрезках своего определения $\alpha_{ij},\ \alpha_{ij}^1,\ \beta_{ij},\ \beta_{ij}^1,\ \gamma_{ij},\ \gamma_{ij}^1 \in C$.

Данную задачу будем исследовать путем ее редукции к однозначно разрешимой задаче Гурса с граничными условиями

$$u(0,y) = \varphi(y), \quad u_x(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(x,0) = \psi(x), \tag{4}$$

решение которой определяется используемыми в дальнейших рассуждениях формулами:

$$u(x,y) = \varphi(y) + \int_{x_0}^{x} h(\alpha, y)\, d\alpha, \tag{5}$$

$$h(x,y) = R(x,y_0,x,y)\,\psi'(x) + R(x_0,y,x,y)\,\varphi_1(y) - M(x,y_0,x,y)\,\psi(x) - \\ - M(x_0,y,x,y)\,\varphi(y) + M(x_0,y_0,x,y)\,\psi(x_0) - R(x_0,y_0,x,y)\,\psi'(x) + \\ + \int_{y_0}^{y} \left[P(x_0,\beta,x,y)\,\varphi(\beta) - N(x_0,\beta,x,y)\,\varphi_1(\beta)\right] d\beta + \int_{x_0}^{x} Q(\alpha,y_0,x,y)\,\psi(\alpha)\, d\alpha. \tag{6}$$

Здесь R – функция Римана, а

$$M = R_x - bR, \quad N = R_y - aR,$$

$$P = R_{xy} - (aR)_x - (bR)_y + cR, \quad Q = R_{xx} - (bR)_x + dR.$$

Формулы (5), (6) взяты из [7], здесь они приведены для удобства читателя. Эти же соотношения можно рассматривать при произвольных φ, φ_1, ψ как общее представление решений уравнения (1). В самом деле, взяв любое решение $u(x, y)$, мы всегда можем вычислить правые части (4), а затем подставить их в (5), (6).

Для реализации указанной выше редукции введем вектор $\Phi(x) = [u(b_1), u(b_2), u(b_3)]$ и будем использовать условия (3), полагая во втором из них $y = x$. В результате придем к векторно-матричному линейному алгебраическому уравнению, содержащему в качестве неизвестных $\Phi(x)$ и $\Phi(1-x)$:

$$A(x)\,\Phi(x) + B(1-x)\,\Phi(1-x) = \Psi(x), \tag{7}$$

где $\Psi(x)$ – известный вектор, составленный из правых частей условий (3). Элементами матриц A, B являются коэффициенты из условий (3) при значениях искомой функции в точках с индексами $k = 1, 2, 3$ и $k = 4, 5, 6$ соответственно.

Если

$$\Delta(x, 1-x) = \det\begin{bmatrix} A(x) & B(1-x) \\ B(x) & A(1-x) \end{bmatrix} \neq 0, \tag{8}$$

то (7) имеет единственное решение, записываемое с помощью любой из формул

$$\Phi(x) = \frac{\det\begin{bmatrix} \Psi(x) & B(1-x) \\ \Psi(1-x) & A(1-x) \end{bmatrix}}{\Delta(x, 1-x)}, \tag{9}$$

$$\Phi(1-x) = \frac{\det\begin{bmatrix} A(x) & \Psi(x) \\ B(x) & \Psi(1-x) \end{bmatrix}}{\Delta(x, 1-x)}. \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что (9) и (10) представляют собой фактически одну и ту же формулу: при перестановке местами аргументов x и $1-x$ в правой части (10), мы получаем (9). Из непрерывности искомого решения следует условие согласования

$$\varphi(0) = \psi(0), \tag{11}$$

которое мы будем считать выполненным.

Осталось определить $\varphi_1(y)$. Подставляем в (5) значение $y = x$:

$$u(x, x) = \varphi(x) + \int_0^x h(\alpha, x)\, d\alpha.$$

Учитывая то, что $u(x, x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ уже известны, приходим с учетом (6) к уравнению Вольтерра второго рода

$$\varphi_1(x)\int_0^x R(0, x, \alpha, x)\, d\alpha - \int_0^x \left(\int_0^x N(0, \beta, \alpha, x)\, d\alpha\right)\varphi_1(\beta)\, d\beta = u(x, x) - \varphi(x) -$$
$$- \int_0^x [\, R(\alpha, 0, \alpha, y)\,\psi'(\alpha) - M(\alpha, 0, \alpha, y)\,\psi(\alpha) - M(0, x, \alpha, x)\,\varphi(x) +$$
$$+ M(0, 0, \alpha, x)\,\psi(0) - R(0, 0, \alpha, x)\,\psi'(\alpha) + \int_0^x P(0, \beta, \alpha, x)\,\varphi(\beta)\,]\, d\beta d\alpha,$$

где неизвестной является $\varphi_1(x)$. Хорошо известно [10], что оно однозначно разрешимо.

Таким образом, верна

Теорема 1. ***Задача 1*** *при выполнении условий* (8), (11) *однозначно разрешима.*

2. Задача для уравнения (2)

Здесь в условиях смещения, кроме уже введенных выше b_k, c_k, участвуют точки $(x, 1-x)$, $(1-x, x)$.

Задача 2. *Найти функцию* $u(x,y) \in C^{2,2}(D) \bigcap C^{0,0}(\overline{D})$, *являющуюся в* D *решением уравнения* (2) *и удовлетворяющую условиям*

$$\alpha_{10}(x)\, u(x, 1-x) + \alpha_{01}(x)\, u(1-x, x) + \\ + \alpha_{01}^1(x)\, u_x(b_2) + \alpha_{10}^1(x)\, u_y(b_1) = \psi_1(x), \quad x \in [0,1],$$

$$\beta_{10}(y)\, u(y, 1-y) + \beta_{01}(y)\, u(1-y, y) + \\ \beta_{01}^1(y)\, u_x(c_2) + \beta_{10}^1(y)\, u_y(c_1) = \psi_2(y), \quad y \in [0,1], \tag{12}$$

$$\gamma_{10}(x)\, u(x, 1-x) + \gamma_{01}(x)\, u(1-x, x) + \\ + \gamma_{01}^1(x)\, u_x(b_2) + \gamma_{10}^1(x)\, u_y(b_1) = \psi_3(x), \quad x \in [0,1],$$

$$\delta_{10}(y)\, u(y, 1-y) + \delta_{01}(y)\, u(1-y, y) + \\ + \delta_{01}^1(y)\, u_x(c_2) + \delta_{10}^1(y)\, u_y(c_1) = \psi_4(y), \quad y \in [0,1].$$

Рассуждаем по схеме п. 1. Роль формул (5), (6) здесь играют

$$u(x,y) = \varphi(y) + \psi(x) - \varphi(0) + \int\limits_0^x \int\limits_0^y h(\alpha, \beta, \alpha, \beta)\, d\beta d\alpha, \tag{13}$$

$$h(x,y,x,y) = \psi_1'(x)\, R(x,0) + \varphi_1'(y)\, R(0,y) - \varphi_1'(0)\, R(0,0) - \varphi_1(y)\, P(0,y) - \\ - \psi'(x)\, P(x,0) + \varphi_1(0)\, P(0,0) - \varphi'(y)\, N(0,y) - \psi_1(x)\, N(x,0) + \\ + \psi_1(0)\, N(0,0) + \varphi(y)\, N(0,y) + \psi(x)\, T(x,0) - \psi(0)\, T(0,0) - \\ - \int\limits_0^y [\varphi(\beta)\, F_1(0,\beta) - \varphi_1(\beta)\, Q(0,\beta)]\, d\beta - \int\limits_0^x [\psi(\alpha)\, F_2(\alpha,0) - \psi_1(\alpha)\, K(\alpha,0)]\, d\beta,$$

(в качестве второй пары аргументов выступают x, y), где

$$N = R_x - a_{12}R, \quad P = R_y - a_{21}R, \quad K = N_x + a_{02}R, \quad Q = P_y + a_{20}R, \\ T = R_{xy} - (a_{21}R)_x - (a_{12}R)_y + a_{11}R, \quad F_1 = T_y + (a_{20}R)_x - a_{10}R, \\ F_2 = T_x + (a_{02}R)_y - a_{01}R,$$

а функции $\varphi(y)$, $\varphi_1(y)$, $\psi(x)$, $\psi_1(x)$ есть граничные значения Гурса:

$$\begin{aligned} &u(0,y)=\varphi(y), \quad u_x(0,y)=\varphi_1(y), \\ &u(x,0)=\psi(x), \quad u_y(x,0)=\psi_1(x). \end{aligned} \tag{14}$$

Найдем указанные значения.

Полагая во втором и четвертом уравнении (12) $y=x$, получим систему алгебраических уравнений для нахождения (14_2), (14_4), а также $u(x,1-x)$, $u(1-x,x)$. Ее решение записывается с помощью формул Крамера при выполнении условия

$$\det A \neq 0, \tag{15}$$

где элементы матрицы A есть коэффициенты из (12). Подставляя далее в (13) вместо аргументов (x,y) наборы $(x,1-x)$, $(1-x,x)$, получим систему интегральных уравнений для нахождения (14_1), (14_3), которая с учетом обозначения $\Phi(x)=[\varphi(x),\psi(x)]$ примет вид векторно-матричного уравнения

$$A_1(x)\,\Phi(1-x)+A_2(x)\,\Phi(x)+\int\limits_0^{1-x}A_3(\xi)\,\Phi(\xi)\,d\xi+\int\limits_0^{x}A_4(\xi)\,\Phi(\xi)\,d\xi=\Psi(x),$$

правая часть которого известна с точностью до константы $u(0,0)$:

$$A_k=\left\|d_{ij}^k\right\|(k=1,2,3,4,i,j=1,2), \quad d_{11}^1=1-\int\limits_0^x N(0,1-x,\xi,1-x)\,d\xi, \quad d_{12}^1=0,$$

$$d_{21}^1=0, \quad d_{22}^1=1-\int\limits_0^x P(1-x,0,1-x,\eta)\,d\eta+\int\limits_0^x P(0,0,0,\eta)\,d\eta, \quad d_{11}^2=0,$$

$$d_{12}^2=1-\int\limits_0^{1-x}P(x,0,x,\eta)\,d\eta+\int\limits_0^{1-x}P(0,0,0,\eta)\,d\eta,$$

$$d_{21}^2=1-\int\limits_0^{1-x}N(0,1-x,\xi,1-x)\,d\eta, \quad d_{22}^2=0,$$

$$d_{11}^3=\int\limits_0^x(N_y(\xi,0,\xi,\eta)+N(0,\eta,\xi,\eta)-(1-x-\eta)\,F_1(0,\beta))d\xi, \quad d_{12}^3=0, \quad d_{21}^3=0,$$

$$d_{22}^3=\int\limits_0^x(P(\xi,0,\xi,\eta)+T(\xi,0,\xi,\eta)-(x-\xi)\,F_2(\xi,0,x,\beta))d\eta,$$

$$d_{11}^4=0, \quad d_{12}^4=\int\limits_0^{1-x}(P(\xi,0,\xi,\eta)+T(\xi,0,\xi,\eta)-(x-\xi)\,F_2(\xi,0,x,\beta))d\eta,$$

$$d_{21}^4=\int\limits_0^{1-x}(N_y(\xi,0,\xi,\eta)+N(0,\eta,\xi,\eta)-(x-\eta)\,F_1(0,\beta))d\xi, \quad d_{22}^4=0.$$

Обычно интегральные уравнения изучаются в виде, разрешенном относительно искомой функции. Для этого будем требовать, чтобы

$$\det A_2(x)\neq 0 \tag{16}$$

Таким образом, речь идет о разрешимости системы

$$\Phi(x) = A_2^{-1}(x)\,\Psi(x) - A_2^{-1}(x)\,A_1(x)\,\Phi(1-x) - \\ - A_2^{-1}(x)\int\limits_0^{1-x} A_3(\xi)\,\Phi(\xi)\,d\xi - A_2^{-1}(x)\int\limits_0^{x} A_4(\xi)\,\Phi(\xi)\,d\xi$$

или, в операторном виде (с понятным обозначением K),

$$\Phi - K\Phi = A_2^{-1}\Psi_0. \qquad (17)$$

Норму матриц определим по формуле [8, с. 410]

$$\|A\| = \max_i \sum_j \max_D |a_{ij}|\,.$$

Пусть выполняется оценка $\left\|A_2^{-1}A_i\right\| < M$ $(i = 1,3,4)$, где $M > 0$ – некоторая постоянная. Проверим сначала, что оператор K непрерывен на множестве заданных на D непрерывных вектор-функций. Пусть φ_1, φ_2 – непрерывные вектор-функции. Тогда

$$\|K\varphi_1 - K\varphi_2\| < 3Mx\,\|\varphi_1 - \varphi_2\| < 3M\,\|\varphi_1 - \varphi_2\|\,.$$

Очевидно, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \varepsilon/(3M)$ такое, что из условия $\|\omega_1 - \omega_2\| < \delta$ следует $\|K\omega_1 - K\omega_2\| < \varepsilon$. Непрерывность оператора K доказана.

Покажем, что некоторая степень K является сжимающим отображением. Действительно,

$$\left\|K^2\varphi_1 - K^2\varphi_2\right\| < (3M)^2\,\frac{1}{2!}\,\|\varphi_1 - \varphi_2\|\,,\ldots,$$
$$\|K^n\varphi_1 - K^n\varphi_2\| < (3M)^n\,\frac{1}{n!}\,\|\varphi_1 - \varphi_2\|\,.$$

При некотором n Имеем

$$\frac{(3M)^n}{n!} < 1,$$

следовательно, K^n является сжимающим оператором. Известно [9, с. 82], если K – непрерывное отображение полного метрического пространства в себя такое, что некоторая степень K является сжатием, то уравнение

$$\omega - K\omega = 0$$

имеет единственное решение (в нашем случае – нулевое). Но тогда (17) имеет единственное решение в классе непрерывных векторных функций.

Таким образом, мы доказали существование редукции рассматриваемой задачи к задаче Гурса (2), (14), являющейся однозначно разрешимой. В случае, когда

$$a_{00}(0,0) \neq 0, \qquad (18)$$

$u(0,0)$ определяется из формулы (2), то есть редукция оказывается однозначной. Таким образом, справедлива

Теорема 2. ***Задача 2*** *при выполнении условий* (15), (16), (18) *однозначно разрешима.*

Summary

E.A. Utkina. On problems with displacement in boundary conditions for two partial differential equations.

In the present paper the system

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{k} a_{ij}\,(x,y)\,D_x^i D_y^j u\,(x,y)=0, \quad k=1,2,$$

is investigated. The first equation of this system is the generalization of Aller's equation, and the second one is the generalization of Boussinesq – Love's equation. We consider the problems of finding the regular solutions of this system in the rectangle $D=\{x,y\in(0,1)\}$ by using the given linear relationships. The each of these relationships connect a values of unknown function in the boundary and the interior points of D We obtain the sufficient conditions of existence of unique solutions of the considered problems in the terms of the coefficients of the above mentioned relationships.

Литература

1. *Жегалов В.И.* Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1962. – Т. 122, кн. 3. –С. 3–16.
2. *Нахушев А.М.* О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5, № 1. – С. 44–59.
3. *Бицадзе А.В., Самарский А.А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. – 1969. – Т. 183, № 4. – С. 739–740.
4. *Самарский А.А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 11. – С. 1925–1935.
5. *Солдатов А.П., Шхануков М.Х.* Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // ДАН СССР. – 1987. – Т. 297, № 3. – С. 547–552.
6. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.
7. *Жегалов В.И., Миронов А.Н.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. – Казань: Казан. матем. о-во, 2001. – 226 с.
8. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
9. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
10. *Мюнтц Г.* Интегральные уравнения. Часть 1. Линейные уравнения Вольтерра. – М.-Л.: ГТТИ, 1934. – 330 с.

Поступила в редакцию
18.12.06

Уткина Елена Анатольевна – кандидат физико-математических наук, доцент Филиала Казанского государственного университета в г. Зеленодольске.