# Задача 5. Максимальное произведение

18 января 2020 г.

# Задача

- Есть $n$ чисел $a_1, \ldots, a_n$.

# Задача

- Есть $n$ чисел $a_1, \ldots, a_n$.
- Необходимо найти такое $i$, что
  - $(a_1 + \cdots + a_i) \cdot (a_i + \cdots + a_n)$ максимально.

# Решение за $O(n^2)$

- Перебираем все $i = 1, \ldots, n$

# Решение за $O(n^2)$

- Перебираем все $i = 1, \ldots, n$
  - Находим сумму $s_1 = a_1 + \cdots + a_i$.

# Решение за $O(n^2)$

- Перебираем все $i = 1, \ldots, n$
  - Находим сумму $s_1 = a_1 + \cdots + a_i$.
  - Находим сумму $s_2 = a_{i+1} + \cdots + a_n$.

# Решение за $O(n^2)$

- Перебираем все $i = 1, \ldots, n$
  - Находим сумму $s_1 = a_1 + \cdots + a_i$.
  - Находим сумму $s_2 = a_{i+1} + \cdots + a_n$.
  - Находим максимум среди $s_1 \cdot s_2$

# Решение за $O(n^2)$

- Перебираем все $i = 1, \ldots, n$
  - Находим сумму $s_1 = a_1 + \cdots + a_i$.
  - Находим сумму $s_2 = a_{i+1} + \cdots + a_n$.
  - Находим максимум среди $s_1 \cdot s_2$
- Временная сложность: $n$ шагов для перебора $i$ и $n$ шагов для нахождения суммы. Итого: $O(n^2)$

# Решение за $O(n^2)$

- Перебираем все $i = 1, \ldots, n$
  - Находим сумму $s_1 = a_1 + \cdots + a_i$.
  - Находим сумму $s_2 = a_{i+1} + \cdots + a_n$.
  - Находим максимум среди $s_1 \cdot s_2$
- Временная сложность: $n$ шагов для перебора $i$ и $n$ шагов для нахождения суммы. Итого: $O(n^2)$

## Замечание

- Ограничения:
  - $n \leq 2 \cdot 10^5$, $a_i \leq 10^9$,

# Решение за $O(n^2)$

- Перебираем все $i = 1, \ldots, n$
  - Находим сумму $s_1 = a_1 + \cdots + a_i$.
  - Находим сумму $s_2 = a_{i+1} + \cdots + a_n$.
  - Находим максимум среди $s_1 \cdot s_2$
- Временная сложность: $n$ шагов для перебора $i$ и $n$ шагов для нахождения суммы. Итого: $O(n^2)$

## Замечание

- Ограничения:
  - $n \leq 2 \cdot 10^5$, $a_i \leq 10^9$,
  - $s_1, s_2 \leq 10^{14}$,

# Решение за $O(n^2)$

- Перебираем все $i = 1, \ldots, n$
  - Находим сумму $s_1 = a_1 + \cdots + a_i$.
  - Находим сумму $s_2 = a_{i+1} + \cdots + a_n$.
  - Находим максимум среди $s_1 \cdot s_2$
- Временная сложность: $n$ шагов для перебора $i$ и $n$ шагов для нахождения суммы. Итого: $O(n^2)$

## Замечание

- Ограничения:
  - $n \leq 2 \cdot 10^5$, $a_i \leq 10^9$,
  - $s_1, s_2 \leq 10^{14}$,
  - $s_1 \cdot s_2 \leq 10^{28}$.

# Решение за $O(n^2)$

- Перебираем все $i = 1, \ldots, n$
  - Находим сумму $s_1 = a_1 + \cdots + a_i$.
  - Находим сумму $s_2 = a_{i+1} + \cdots + a_n$.
  - Находим максимум среди $s_1 \cdot s_2$
- Временная сложность: $n$ шагов для перебора $i$ и $n$ шагов для нахождения суммы. Итого: $O(n^2)$

## Замечание

- Ограничения:
  - $n \leq 2 \cdot 10^5$, $a_i \leq 10^9$,
  - $s_1, s_2 \leq 10^{14}$,
  - $s_1 \cdot s_2 \leq 10^{28}$.
- Что можно делать?
  - Python,
  - BigInteger в Java,
  - __int128 в C++,
  - длинная арифметика.

# Решение за $O(n)$

- Посчитаем сначала сумму $s = a_1 + \cdots + a_n$.

# Решение за $O(n)$

- Посчитаем сначала сумму $s = a_1 + \cdots + a_n$.
- Изначально $s_1 = 0$, $s_2 = s$.

# Решение за $O(n)$

- Посчитаем сначала сумму $s = a_1 + \cdots + a_n$.
- Изначально $s_1 = 0$, $s_2 = s$.
- Перебираем все $i = 1, \ldots, n$:

# Решение за $O(n)$

- Посчитаем сначала сумму $s = a_1 + \cdots + a_n$.
- Изначально $s_1 = 0$, $s_2 = s$.
- Перебираем все $i = 1, \ldots, n$:
  - Потдерживаем $s_1 = s_1 + a_i$.

# Решение за $O(n)$

- Посчитаем сначала сумму $s = a_1 + \cdots + a_n$.
- Изначально $s_1 = 0$, $s_2 = s$.
- Перебираем все $i = 1, \ldots, n$:
  - Потдерживаем $s_1 = s_1 + a_i$.
  - Потдерживаем $s_2 = s_2 - a_i$.

# Решение за $O(n)$

- Посчитаем сначала сумму $s = a_1 + \cdots + a_n$.
- Изначально $s_1 = 0$, $s_2 = s$.
- Перебираем все $i = 1, \ldots, n$:
  - Потдерживаем $s_1 = s_1 + a_i$.
  - Потдерживаем $s_2 = s_2 - a_i$.
  - Находим максимум среди $s_1 \cdot s_2$.

# Решение за $O(n)$

- Посчитаем сначала сумму $s = a_1 + \cdots + a_n$.
- Изначально $s_1 = 0$, $s_2 = s$.
- Перебираем все $i = 1, \ldots, n$:
  - Потдерживаем $s_1 = s_1 + a_i$.
  - Потдерживаем $s_2 = s_2 - a_i$.
  - Находим максимум среди $s_1 \cdot s_2$.
- Временная сложность: $n$ шагов для перебора $i$ и $O(1)$ шагов для нахождения суммы. Итого: $O(n)$.

# Решение за $O(n)$

- Посчитаем сначала сумму $s = a_1 + \cdots + a_n$.
- Изначально $s_1 = 0$, $s_2 = s$.
- Перебираем все $i = 1, \ldots, n$:
  - Потдерживаем $s_1 = s_1 + a_i$.
  - Потдерживаем $s_2 = s_2 - a_i$.
  - Находим максимум среди $s_1 \cdot s_2$.
- Временная сложность: $n$ шагов для перебора $i$ и $O(1)$ шагов для нахождения суммы. Итого: $O(n)$.
- Все также длинная арифметика :(

# Решение за $O(n)$ без длинной арифметики. Все $a_i$ равны

- Все $a_j = a$.

# Решение за $O(n)$ без длинной арифметики. Все $a_i$ равны

- Все $a_j = a$.
- Тогда $s_1 = a_1 + \cdots + a_i = i \cdot a$, $s_2 = a_{i+1} + \cdots + a_n = (n - i) \cdot a$.

# Решение за $O(n)$ без длинной арифметики. Все $a_i$ равны

- Все $a_j = a$.
- Тогда $s_1 = a_1 + \cdots + a_i = i \cdot a$, $s_2 = a_{i+1} + \cdots + a_n = (n - i) \cdot a$.
- Максимизация $s_1 \cdot s_2 = i \cdot (n - i)a^2$.

# Решение за $O(n)$ без длинной арифметики. Все $a_i$ равны

- Все $a_j = a$.
- Тогда $s_1 = a_1 + \cdots + a_i = i \cdot a$, $s_2 = a_{i+1} + \cdots + a_n = (n - i) \cdot a$.
- Максимизация $s_1 \cdot s_2 = i \cdot (n - i)a^2$.
- Получается, что надо максимизировать $i(n - i)$.

# Решение за $O(n)$ без длинной арифметики. Все $a_i$ равны

- Все $a_j = a$.
- Тогда $s_1 = a_1 + \cdots + a_i = i \cdot a$, $s_2 = a_{i+1} + \cdots + a_n = (n - i) \cdot a$.
- Максимизация $s_1 \cdot s_2 = i \cdot (n - i)a^2$.
- Получается, что надо максимизировать $i(n - i)$.
- Известно, что максимум достигается для $i = n - i$.
  - Для четных $n$ получаем $i = n/2$;
  - для нечетных $n$ получаем $i = (n - 1)/2$.

# Решение за $O(n)$ без длинной арифметики.

- - Пусть $s = a_1 + \cdots + a_n$

# Решение за $O(n)$ без длинной арифметики.

- - Пусть $s = a_1 + \cdots + a_n$
  - Максимизация $s_1 \cdot s_2 = s_1 \cdot (s - s_1)$.

# Решение за $O(n)$ без длинной арифметики.

- - Пусть $s = a_1 + \cdots + a_n$
  - Максимизация $s_1 \cdot s_2 = s_1 \cdot (s - s_1)$.
  - Максимум достигается для $s_1 = (s - s_1)$, т.е. $s_1 = s/2$.

# Решение за $O(n)$ без длинной арифметики.

- - Пусть $s = a_1 + \cdots + a_n$
  - Максимизация $s_1 \cdot s_2 = s_1 \cdot (s - s_1)$.
  - Максимум достигается для $s_1 = (s - s_1)$, т.е. $s_1 = s/2$.
  - Ищем $s_1$ так, чтоло как можно ближе к $s/2$.

# Решение за $O(n)$ без длинной арифметики.

- - Пусть $s = a_1 + \cdots + a_n$
  - Максимизация $s_1 \cdot s_2 = s_1 \cdot (s - s_1)$.
  - Максимум достигается для $s_1 = (s - s_1)$, т.е. $s_1 = s/2$.
  - Ищем $s_1$ так, чтоло как можно ближе к $s/2$.
  - Находим $i$ такое, что $|s_1 - s/2|$ как можно меньше, где $s_1 = a_1 + \cdots + a_i$.

# Решение за $O(n)$ без длинной арифметики.

- - Пусть $s = a_1 + \cdots + a_n$
  - Максимизация $s_1 \cdot s_2 = s_1 \cdot (s - s_1)$.
  - Максимум достигается для $s_1 = (s - s_1)$, т.е. $s_1 = s/2$.
  - Ищем $s_1$ так, чтоло как можно ближе к $s/2$.
  - Находим $i$ такое, что $|s_1 - s/2|$ как можно меньше, где $s_1 = a_1 + \cdots + a_i$.
- Итоговое решение:
  - $s = a_1 + \cdots + a_n$
  - Изначально $s_1 = 0$
  - Перебирае все $i = 1, \ldots, n$
    - Потдерживаем $s_1 = s_1 + a_i$.
    - Находим минимум среди $|s_1 - s|$

Вопросы?