Задача 6. Планирование участков

a, b, c, d – натуральные числа,

$$a\,b - c\,d = n, \quad a > c, \quad b > d, \quad a \neq x, \quad b \neq x$$

Отметим, что

$$c \geq 1,\ d \geq 1,\ a \geq 2,\ b \geq 2$$

Идея решения – перебор

Найдем ограничения на **a, b**

$$n = a\,b - c\,d > a\,b - a\,d = a\,(b - d) \geq a$$

т.к. $a > c$ т.к. $b > d$ или $b - d \geq 1$

Таким образом, $n > a$

Аналогично $n > b$

Итак перебираем

a, b от **2** до **n – 1** (поверяя **a ≠x, b≠x**),

c от **1** до **a – 1**, **d** от **1** до **b – 1**,

проверяя $a\,b - c\,d = n$, получим решение второй подзадачи за $O(n^4)$

Улучшение перебора

Перебираем только **a, b, c**

a, b от **2** до **n – 1** (поверяя **a ≠x, b≠x**),

c от **1** до **a – 1**

d находим из уравнения **a b – c d = n**

$$d = (a\,b - n)/c,$$

проверяя, что **d –** натуральное (в противном случае данный выбор **a, b, c** не подходит) и

$$1 \le d < b$$

получим решение подзадачи **4** за $O(n^3)$

Полное решение

Перебираем **a, b** и, например, $\mathbf{k = a - c}$
при этом $\mathbf{c = a - k}$, $\mathbf{d = (a\,b - n)/(a - k)}$

Зачем?

$$\mathbf{n = a\,b - c\,d = (a - c)b + c(b - d) > (a - c)b,}$$

т.к. $\mathbf{c(b - d) > 0}$

Отсюда

$$\mathbf{1 \le k = a - c < n/b}$$

Итак, перебираем **a, b, k**

a от **2** до **n – 1** (поверяя **a ≠x**)

и для каждого значения **a** будет перебираться приблизительно

$$n/2+n/3+\ldots+n/(n-1) = n(1/2+1/3+\ldots+1/(n-1))$$

пар чисел **b ≠x, k** **(1 ≤ k < n/b)**

Отметим, что

$$1/2+1/3+\ldots+1 /(n-1) \approx \log(n)$$ при **n >> 1**

Тогда общее время работы алгоритма

$$O(n^2 \log(n)),$$

что дает решение подзадачи 6

Вопросы?