Задача 1. Разность квадратов

$$n = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

n – неотрицательное целое число (**$0 \le n \le 2^{60}$**)

x, y – натуральные числа (**$1 \le x, y \le 2^{62} - 1$**)

$$x+y > 0$$

$$x-y \ge 0$$

$$x+y > x-y$$

Сведение уравнения

$$n = (x+y)(x-y)$$

к двум уравнениям на **x, y**

Пусть $n = 1 \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \ldots \cdot P_j$,

где $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_j$ - простые множители.

Тогда

a) $x+y = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \ldots \cdot P_j$

$x-y = 1$

b) $x+y = P_2 \cdot P_4 \cdot \ldots \cdot P_j$

$x-y = P_1 \cdot P_3$

c) $x+y = P_4 \cdot P_5 \cdot \ldots \cdot P_j$

$x-y = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3$

d) **и так далее**

Посмотрим, к чему приводит вариант

а) $\mathbf{x+y = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \ldots \cdot P_j = n}$

$\mathbf{x-y = 1}$

Если сложить эти два уравнения, получим

$$\mathbf{2 \cdot x = n + 1}$$

или $\mathbf{x = (n + 1)/2 \rightarrow y = (n - 1)/2}$

Это значит мы нашли решение для нечетных значений $\mathbf{n \geq 3}$ (т.к. $\mathbf{y = (n - 1)/2 \geq 1}$)

Случаи с $\mathbf{n < 3}$ можно рассмотреть отдельно

Если **n** – четное число, т.е.

$$n = 2 \cdot k = (x+y)(x-y),$$

то напрашивается рассмотрение варианта

$x+y = k$ ($k > 2$, т.к. $x+y > x-y$)

$x-y = 2$

Тогда сумма этих двух уравнений дает

$$2 \cdot x = k + 2 \text{ или } x = (k + 2)/2,$$

$$y = (k - 2)/2$$

Эти соотношения определяют решение, если **k** – четное число и $k \geq 4$, т.е.

$$k = 2 \cdot s,$$

$$n = 4 \cdot s, \text{ где } s = 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Среди четных чисел **n** мы рассмотрели

$$n = 2\cdot k = 2\cdot(2\cdot s)$$

Рассмотрим теперь оставшиеся четные **n** вида

$$n = 2\cdot(2\cdot s+1), \text{ где } s = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Нечетное число ($2\cdot s+1$) можно представить в виде произведения простых нечетных множителей

$$2\cdot s+1 = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_m$$

(если хотя бы одно из чисел $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$ четное, то и $2\cdot s+1$ – четное)

Тогда $n = 2\cdot(2\cdot s+1) = 2\cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_m$

Итак

$$n = 2\cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_m = (x+y)\cdot(x-y),$$

где $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$ – нечетные числа.

Тогда

$$x + y = A, \qquad x - y = B,$$

где **A** есть число равное произведению некоторых множителей числа **n**, а **B** есть число равное произведению других (не входящих в **A**) множителей числа **n**. Понятно, что двойка входит либо в **A**, либо в **B** и, следовательно, одно из этих чисел четное, другое нечетное.

Складывая уравнения

$$x + y = A, \qquad x - y = B,$$

получим

$$2 \cdot x = A + B$$ – нечетное число

и

$$x = (A + B)/2$$ – не натуральное число

Т.е. в случае

$$n = 2 \cdot (2 \cdot s + 1)$$

Задача решений не имеет.

Итак

1) для нечетных значений $n \geq 3$

$$x = (n + 1)/2, \quad y = (n - 1)/2$$

2) для $n = 4 \cdot s$, где $s = 2, 3, 4, 5, \ldots$

$$x = s + 1, \quad y = s - 1$$

3) для $n = 2 \cdot (2 \cdot s + 1)$, где $s = 1, 2, 3, 4, \ldots$

решений нет

Оставшиеся случаи:

4) $n = 0 = (x+y)(x-y) \rightarrow x = y$, например $x = y = 1$

5) $n = 1 = (x+y)(x-y) \rightarrow$ решений нет

6) $n = 2 = (x+y)(x-y) \rightarrow$ решений нет

7) $n = 4 = (x+y)(x-y) \rightarrow$ решений нет

Вопросы?