Задача 2. Привышение скорости

18 января 2020 г.

Задача

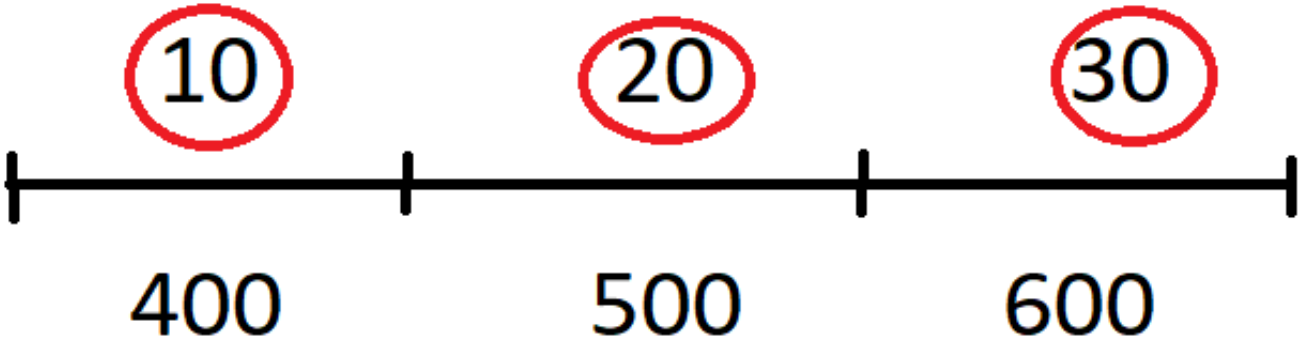
- Есть n отрезков ($n \leq 10$):
  - длина i-го отрезка l_i;
  - ограничение скорости на i-м отрезке v_i.
- Пусть есть привышение скорости на e единиц.
- Есть m диапазонов штрафов ($m \leq 10^5$)
  - При привышении $a_i < e \leq a_{i+1}$;
  - штраф f_i.
- Есть q запросов
  - Момент въезда s_i, момент выезда t_i;
  - Определить гарантированный штраф.

Задача

- Что значит гарантированный штраф?

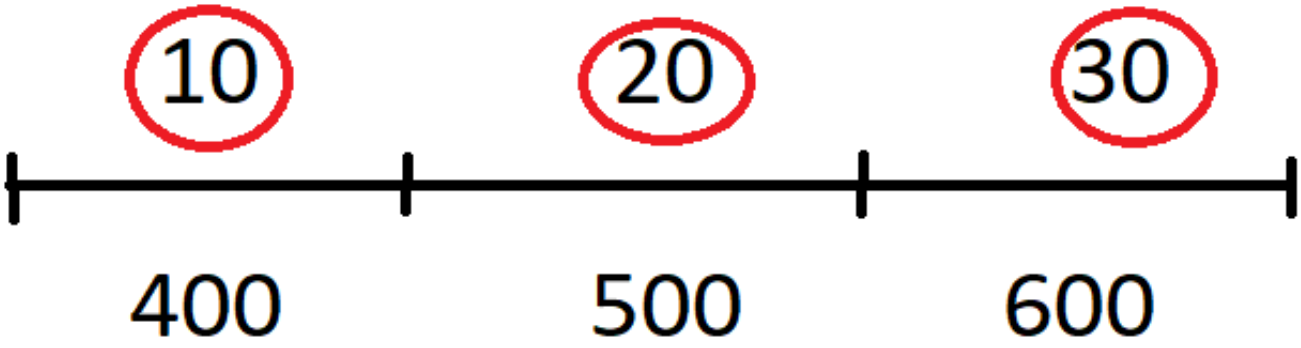
Задача

- Что значит гарантированный штраф?
  - Если автомобиль на каждом участке едет с максимально разрешенной скоростью, то штрафа нет.



Задача

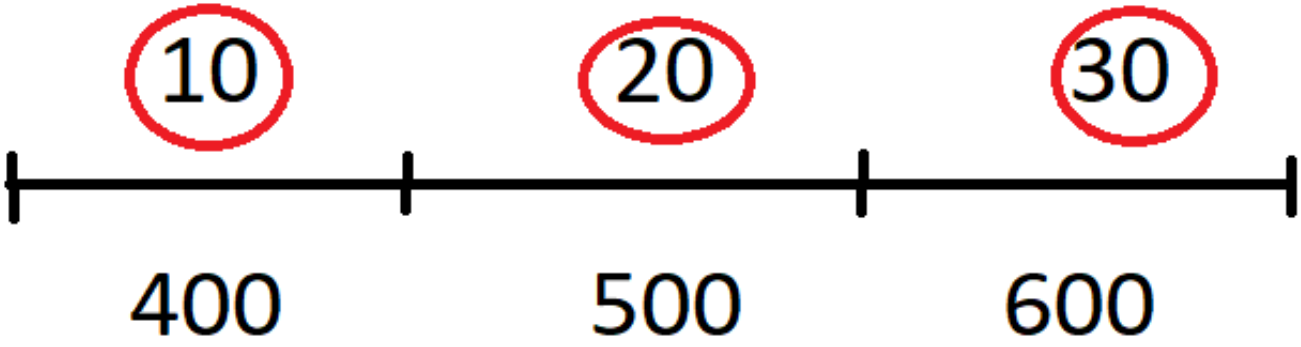
- Что значит гарантированный штраф?
  - Если автомобиль на каждом участке едет с максимально разрешенной скоростью, то штрафа нет.



- Если автомобиль въехал на первый участвок в момент времени $s_i = 10$, то

Задача

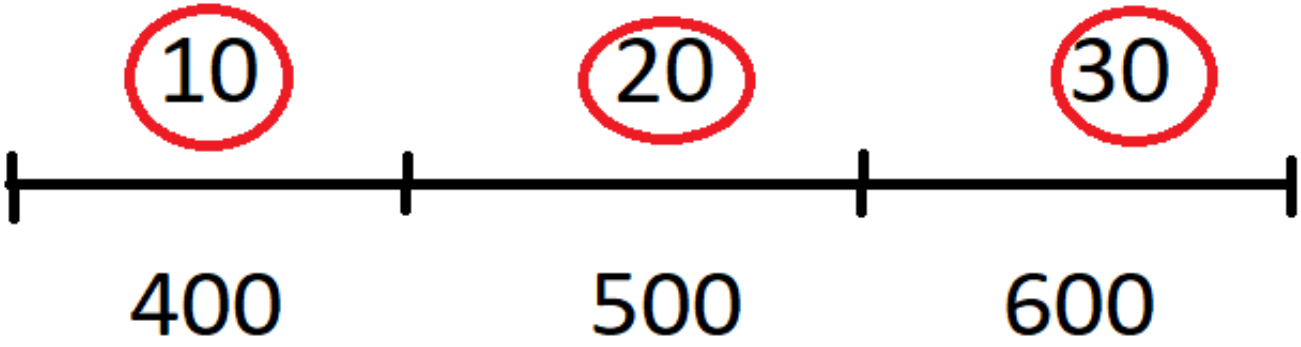
- Что значит гарантированный штраф?
  - Если автомобиль на каждом участке едет с максимально разрешенной скоростью, то штрафа нет.



- Если автомобиль въехал на первый участвок в момент времени $s_i = 10$, то
  - первый участок без штрафа пройдет самое меньшее за 40 “минут”

Задача

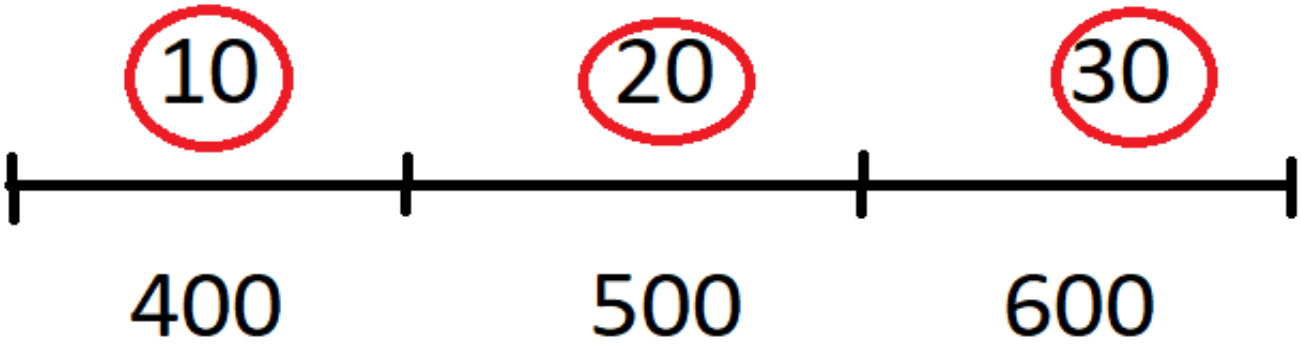
- Что значит гарантированный штраф?
  - Если автомобиль на каждом участке едет с максимально разрешенной скоростью, то штрафа нет.



- Если автомобиль въехал на первый участвок в момент времени $s_i = 10$, то
  - первый участок без штрафа пройдет самое меньшее за 40 “минут”
  - второй за 25 “минут”

Задача

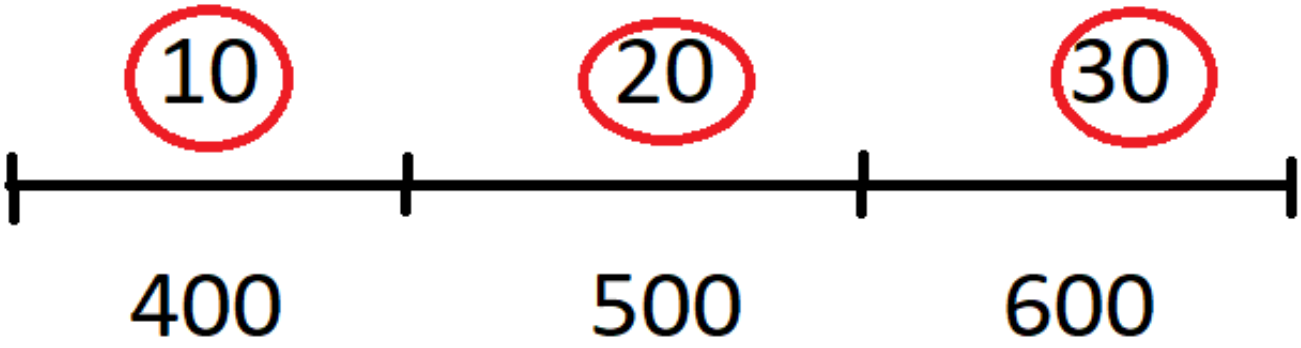
- Что значит гарантированный штраф?
  - Если автомобиль на каждом участке едет с максимально разрешенной скоростью, то штрафа нет.



- Если автомобиль въехал на первый участвок в момент времени $s_i = 10$, то
  - первый участок без штрафа пройдет самое меньшее за 40 “минут”
  - второй за 25 “минут”
  - третий за 20 “минту”

Задача

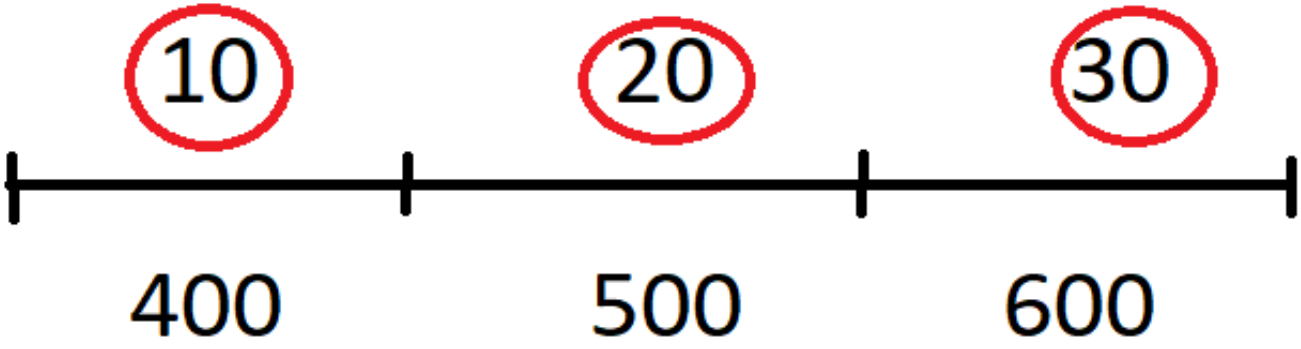
- Что значит гарантированный штраф?
  - Если автомобиль на каждом участке едет с максимально разрешенной скоростью, то штрафа нет.



- Если автомобиль въехал на первый участвок в момент времени $s_i = 10$, то
  - первый участок без штрафа пройдет самое меньшее за 40 “минут”
  - второй за 25 “минут”
  - третий за 20 “минту”
- если автомобиль въезжает в момент времени $t_i \geq 10 + 40 + 25 + 20 = 95$, то штраф мы назначить не можем!

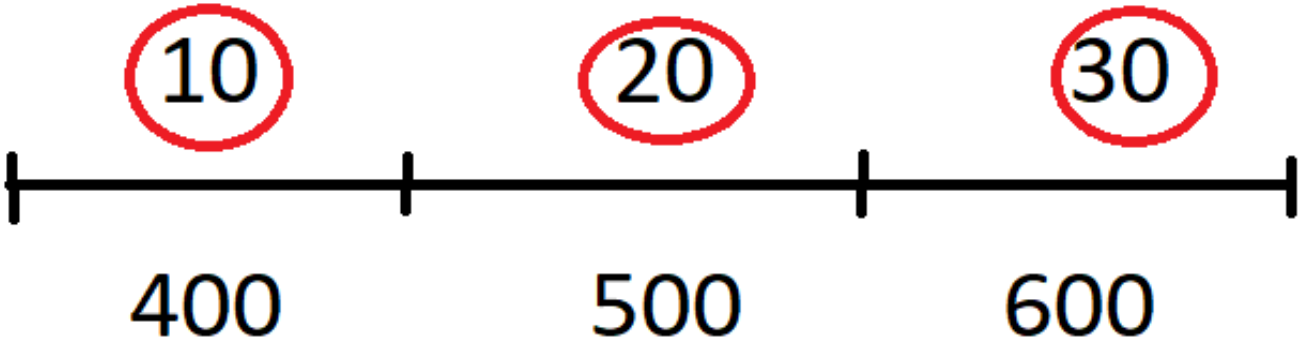
Задача

- Что значит гарантированный штраф?
  - Если автомобиль на каждом участке едет с максимально разрешенной скоростью, то штрафа нет.



Задача

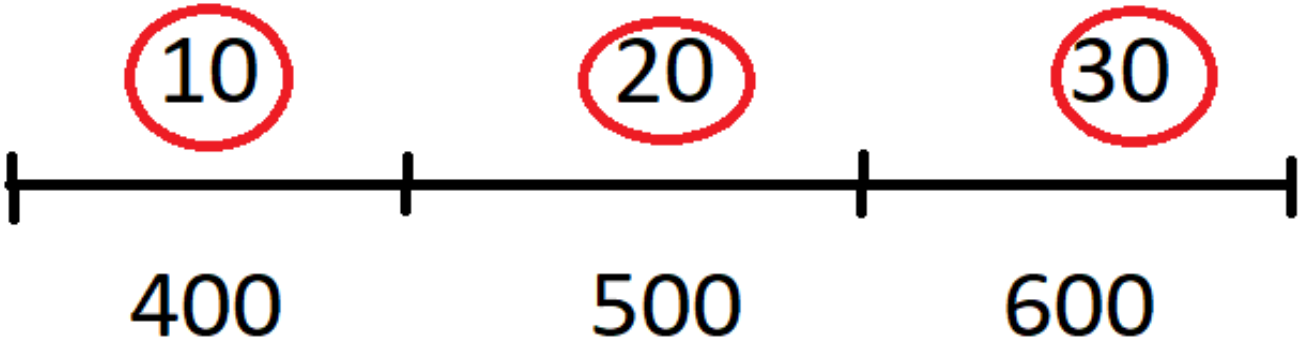
- Что значит гарантированный штраф?
  - Если автомобиль на каждом участке едет с максимально разрешенной скоростью, то штрафа нет.



- Если $s_i = 20$, то

Задача

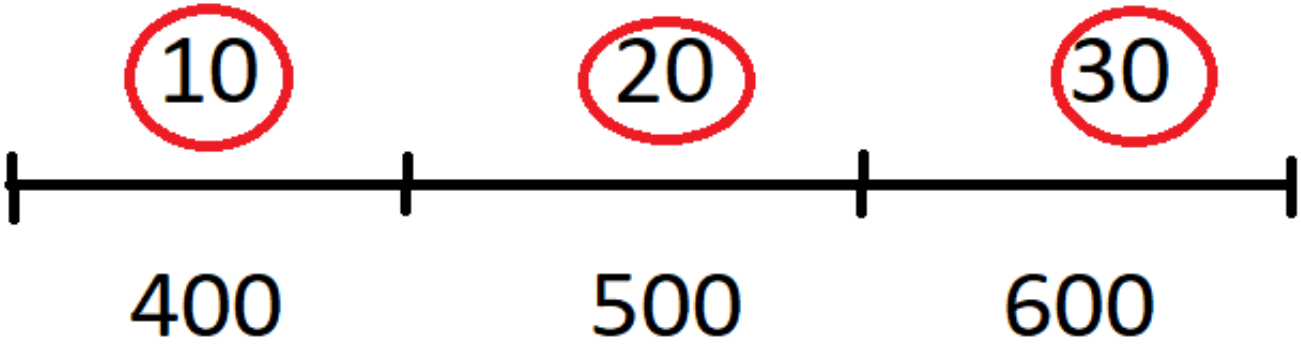
- Что значит гарантированный штраф?
  - Если автомобиль на каждом участке едет с максимально разрешенной скоростью, то штрафа нет.



- Если $s_i = 20$, то
- если автомобиль выедет в момент времени $t_i \geq 20 + (40 + 25 + 20) = 105$, то штраф мы назначить не можем!

Задача

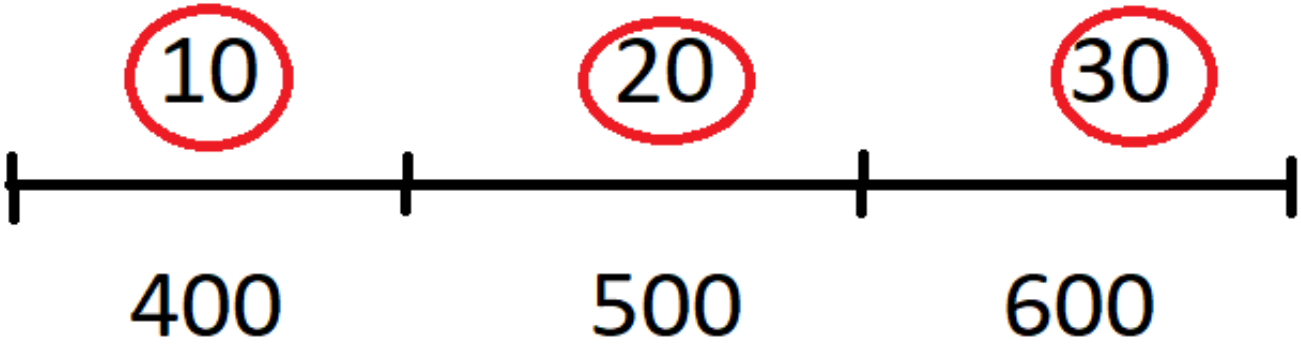
- Что значит гарантированный штраф?
  - Если автомобиль на каждом участке едет с максимально разрешенной скоростью, то штрафа нет.



- Если $s_i = 20$, то
- если автомобиль выедет в момент времени $t_i \geq 20 + (40 + 25 + 20) = 105$, то штраф мы назначить не можем!
  - Если привышение будет на 5, то время прохождения дороги $t_i \geq 20 + (\frac{400}{15} + \frac{500}{25} + \frac{600}{35}) = 83.8095$

Задача

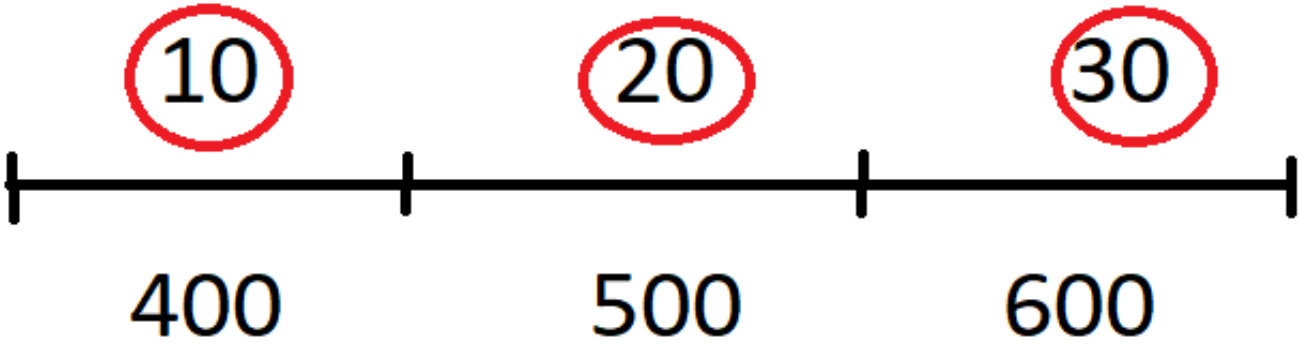
- Что значит гарантированный штраф?
  - Если автомобиль на каждом участке едет с максимально разрешенной скоростью, то штрафа нет.



- Если $s_i = 20$, то
- если автомобиль выедет в момент времени $t_i \geq 20 + (40 + 25 + 20) = 105$, то штраф мы назначить не можем!
  - Если привышение будет на 5, то время прохождения дороги $t_i \geq 20 + (\frac{400}{15} + \frac{500}{25} + \frac{600}{35}) = 83.8095$
  - Если привышение будет на 11, то время прохождения дороги $t_i \geq 20 + (\frac{400}{21} + \frac{500}{31} + \frac{600}{41}) = 69.8108$

Задача

- Что значит гарантированный штраф?
  - Если автомобиль на каждом участке едет с максимально разрешенной скоростью, то штрафа нет.



- Если $s_i = 20$, то
- если автомобиль выедет в момент времени $t_i \geq 20 + (40 + 25 + 20) = 105$, то штраф мы назначить не можем!
  - Если привышение будет на 5, то время прохождения дороги $t_i \geq 20 + (\frac{400}{15} + \frac{500}{25} + \frac{600}{35}) = 83.8095$
  - Если привышение будет на 11, то время прохождения дороги $t_i \geq 20 + (\frac{400}{21} + \frac{500}{31} + \frac{600}{41}) = 69.8108$
  - при привышении на e, время выезда будет $t = \sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{v_i + e}$

Решение за $O(qmn)$

Замечание

- Если штраф f_j назначают за $a_{j-1} < e \leq a_j$, то выгоднее привышать на a_j.

Решение за $O(qmn)$

Замечание

- Если штраф f_j назначают за $a_{j-1} < e \leq a_j$, то выгоднее привышать на a_j.
- Если мы хотим проверить, нет ли у нас штрафа f_j, то достаточно проверить, что $t_i \leq time + s_i$, где $time = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{l_k}{v_k + a_j}$

Решение за $O(qmn)$

Замечание

- Если штраф f_j назначают за $a_{j-1} < e \leq a_j$, то выгоднее привышать на a_j.
- Если мы хотим проверить, нет ли у нас штрафа f_j, то достаточно проверить, что $t_i \leq time + s_i$, где $time = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{l_k}{v_k + a_j}$

- Рассмотрм все запросы с номером $i = 1, \ldots, q$

Решение за $O(qmn)$

Замечание

- Если штраф f_j назначают за $a_{j-1} < e \leq a_j$, то выгоднее привышать на a_j.
- Если мы хотим проверить, нет ли у нас штрафа f_j, то достаточно проверить, что $t_i \leq time + s_i$, где $time = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{l_k}{v_k + a_j}$

- Рассмотрм все запросы с номером $i = 1, \ldots, q$
  - для каждого запроса просмотрим нужен ли штраф вообще? т.е. $s_i + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{l_k}{v_k} \geq t_i$?

Решение за $O(qmn)$

Замечание

- Если штраф f_j назначают за $a_{j-1} < e \leq a_j$, то выгоднее привышать на a_j.
- Если мы хотим проверить, нет ли у нас штрафа f_j, то достаточно проверить, что $t_i \leq time + s_i$, где $time = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{l_k}{v_k + a_j}$

- Рассмотрм все запросы с номером $i = 1, \ldots, q$
  - для каждого запроса просмотрим нужен ли штраф вообще? т.е. $s_i + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{l_k}{v_k} \geq t_i$?
  - Если штраф нужен, то среди $j = 1, \ldots, m$ ищем:
    - минимальный j такой, что $s_i + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{l_k}{v_k + a_j} \geq t_i$?

Решение за $O(qmn)$

Замечание

- Если штраф f_j назначают за $a_{j-1} < e \leq a_j$, то выгоднее привышать на a_j.
- Если мы хотим проверить, нет ли у нас штрафа f_j, то достаточно проверить, что $t_i \leq time + s_i$, где $time = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{l_k}{v_k + a_j}$

- Рассмотрм все запросы с номером $i = 1, \ldots, q$
  - для каждого запроса просмотрим нужен ли штраф вообще? т.е. $s_i + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{l_k}{v_k} \geq t_i$?
  - Если штраф нужен, то среди $j = 1, \ldots, m$ ищем:
    - минимальный j такой, что $s_i + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{l_k}{v_k + a_j} \geq t_i$?
- Временная сложность: q запросов по m штрафов по n отрезков. Итого: $O(qmn)$

Решение за $O(qn \log m)$

Замечание

- Заметим, что при увеличении привышения скорости e уменьшается время прохождения дороги.

Решение за $O(qn \log m)$

Замечание

- Заметим, что при увеличении привышения скорости e уменьшается время прохождения дороги.
- Если минимальное привышение — это a_{j_0}, то

Решение за $O(qn \log m)$

Замечание

- Заметим, что при увеличении привышения скорости e уменьшается время прохождения дороги.
- Если минимальное привышение — это a_{j_0}, то
  - для $j \leq j_0 : s_i + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{l_k}{v_k + a_j} \geq t_i$
  - для $j > j_0 : s_i + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{l_k}{v_k + a_j} < t_i$.

Решение за $O(qn \log m)$

Замечание

- Заметим, что при увеличении привышения скорости e уменьшается время прохождения дороги.
- Если минимальное привышение — это a_{j_0}, то
  - для $j \leq j_0 : s_i + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{l_k}{v_k + a_j} \geq t_i$
  - для $j > j_0 : s_i + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{l_k}{v_k + a_j} < t_i$.
- То есть, у нас монотонная функция и мы можем использовать бинарный поиск.

Решение за $O(qn \log m)$

- Рассмотрм все запросы с номером $i = 1, \ldots, q$
  - для каждого запроса просмотрим нужен ли штраф вообще? т.е. $s_i + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{l_k}{v_k} \geq t_i$?
  - Если штраф нужен, то среди $j = 1, \ldots, m$ ищем бинарным поиском:
    - минимальный j такой, что $s_i + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{l_k}{v_k + a_j} \geq t_i$?

Решение за $O(qn \log m)$

- Рассмотрм все запросы с номером $i = 1, \ldots, q$
  - для каждого запроса просмотрим нужен ли штраф вообще? т.е. $s_i + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{l_k}{v_k} \geq t_i$?
  - Если штраф нужен, то среди $j = 1, \ldots, m$ ищем бинарным поиском:
    - минимальный j такой, что $s_i + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{l_k}{v_k + a_j} \geq t_i$?
- Временная сложность: q запросов, бинарный поиск по штрафам — это $\log m$ и по n отрезков. Итого: $O(qn \log m)$

Вопросы?