Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по информатике

Казань, 16-18 января 2020 г.

Задача «Шпион, выйди вон!»

Постановка задачи

- Дан массив из n целых чисел. Все числа от 1 до 10^9.
- Каждое элемент встречается в массиве ровно k раз, за исключением одного числа, которое входит в массив менее k раз.
- Найти это исключительное число.

Основные темы задачи:

- битовые операции;
- битовые суммы;
- сортировка.

Решение. Подзадача 1

Случай $k = 2$

Ответ в задаче — результат побитовой операции XOR всех чисел.

- Одинаковые биты при XOR-суммировании взаимно уничтожаются.
- Если какой-то бит в искомом числе равен 0 (или 1), то у XOR-суммы всей последовательности соответствующий бит также будет равен нулю (или единице).
- Такое решение оценивается в 20 *баллов*.

Решение. Подзадача 1

Случай $k = 2$

Ответ в задаче — результат побитовой операции `XOR` всех чисел.

- Одинаковые биты при `XOR`-суммировании взаимно уничтожаются.
- Если какой-то бит в искомом числе равен `0` (или `1`), то у `XOR`-суммы всей последовательности соответствующий бит также будет равен нулю (или единице).
- Такое решение оценивается в 20 *баллов*.

Решение. Подзадача 1

Случай $k = 2$

Ответ в задаче — результат побитовой операции `XOR` всех чисел.

- Одинаковые биты при `XOR`-суммировании взаимно уничтожаются.
- Если какой-то бит в искомом числе равен `0` (или `1`), то у `XOR`-суммы всей последовательности соответствующий бит также будет равен нулю (или единице).
- Такое решение оценивается в 20 *баллов*.

Решение. Подзадачи 2 и 3

Случай $k = 3$ и $k = 4$

- Подсчитаем сумму битов в каждом двоичном разряде чисел.
- Если эта сумма делится на 3 ($k = 3$) или на 4 ($k = 4$), в искомом числе соответствующий бит равен 0.
- Иначе, этот бит в искомом числе равен 1.
- Такое решение оценивается в 60 *баллов*.

Решение. Подзадачи 2 и 3

Случай $k = 3$ и $k = 4$

- Подсчитаем сумму битов в каждом двоичном разряде чисел.
- Если эта сумма делится на 3 ($k = 3$) или на 4 ($k = 4$), в искомом числе соответствующий бит равен 0.
- Иначе, этот бит в искомом числе равен 1.
- Такое решение оценивается в 60 *баллов*.

Решение. Подзадачи 2 и 3

Случай $k = 3$ и $k = 4$

- Подсчитаем сумму битов в каждом двоичном разряде чисел.
- Если эта сумма делится на 3 ($k = 3$) или на 4 ($k = 4$), в искомом числе соответствующий бит равен 0.
- Иначе, этот бит в искомом числе равен 1.
- Такое решение оценивается в 60 *баллов*.

Решение. Подзадачи 2 и 3

Случай $k = 3$ и $k = 4$

- Подсчитаем сумму битов в каждом двоичном разряде чисел.
- Если эта сумма делится на 3 ($k = 3$) или на 4 ($k = 4$), в искомом числе соответствующий бит равен 0.
- Иначе, этот бит в искомом числе равен 1.
- Такое решение оценивается в 60 *баллов*.

Полное решение. Сортировка

Сортировка массива

- Отсортируем исходный массив.
- Будем сравнивать соседние числа массива.
- Находим количество вхождений в массив каждого элемента.
- Если значение счётчика меньше k, номер шпиона найден, иначе переходим к просмотру следующего числа.
- Сложность решения — $O(n \log n)$.
- Такое решение набирает 100 *баллов*.

Полное решение. Сортировка

Сортировка массива

- Отсортируем исходный массив.
- Будем сравнивать соседние числа массива.
- Находим количество вхождений в массив каждого элемента.
- Если значение счётчика меньше k, номер шпиона найден, иначе переходим к просмотру следующего числа.
- Сложность решения — $O(n \log n)$.
- Такое решение набирает 100 *баллов*.

Полное решение. Сортировка

Сортировка массива

- Отсортируем исходный массив.
- Будем сравнивать соседние числа массива.
- Находим количество вхождений в массив каждого элемента.
- Если значение счётчика меньше k, номер шпиона найден, иначе переходим к просмотру следующего числа.
- Сложность решения — $O(n \log n)$.
- Такое решение набирает 100 *баллов*.

Полное решение. Сортировка

Сортировка массива

- Отсортируем исходный массив.
- Будем сравнивать соседние числа массива.
- Находим количество вхождений в массив каждого элемента.
- Если значение счётчика меньше k, номер шпиона найден, иначе переходим к просмотру следующего числа.
- Сложность решения — $O(n \log n)$.
- Такое решение набирает 100 *баллов*.

Полное решение. Сортировка

Сортировка массива

- Отсортируем исходный массив.
- Будем сравнивать соседние числа массива.
- Находим количество вхождений в массив каждого элемента.
- Если значение счётчика меньше k, номер шпиона найден, иначе переходим к просмотру следующего числа.
- Сложность решения — $O(n \log n)$.
- Такое решение набирает 100 *баллов*.

Полное решение. Сортировка

Сортировка массива

- Отсортируем исходный массив.
- Будем сравнивать соседние числа массива.
- Находим количество вхождений в массив каждого элемента.
- Если значение счётчика меньше k, номер шпиона найден, иначе переходим к просмотру следующего числа.
- Сложность решения — $O(n \log n)$.
- Такое решение набирает 100 *баллов*.

Полное решение. Побитовые суммы

Побитовые суммы

- Посчитаем сумму битов в *каждом* разряде для всех чисел исходного массива.
- Если эта сумма делится на k, то в искомом числе соответствующий бит равен 0.
- Иначе, этот бит в искомом числе равен 1.
- Если значение счётчика меньше k, номер шпиона найден, иначе переходим к просмотру следующего числа.
- Такое решение набирает 100 *баллов*.

Полное решение. Побитовые суммы

Побитовые суммы

- Посчитаем сумму битов в *каждом* разряде для всех чисел исходного массива.
- Если эта сумма делится на k, то в искомом числе соответствующий бит равен 0.
- Иначе, этот бит в искомом числе равен 1.
- Если значение счётчика меньше k, номер шпиона найден, иначе переходим к просмотру следующего числа.
- Такое решение набирает 100 *баллов*.

Полное решение. Побитовые суммы

Побитовые суммы

- Посчитаем сумму битов в *каждом* разряде для всех чисел исходного массива.
- Если эта сумма делится на k, то в искомом числе соответствующий бит равен 0.
- Иначе, этот бит в искомом числе равен 1.
- Если значение счётчика меньше k, номер шпиона найден, иначе переходим к просмотру следующего числа.
- Такое решение набирает 100 *баллов*.

Полное решение. Побитовые суммы

Побитовые суммы

- Посчитаем сумму битов в *каждом* разряде для всех чисел исходного массива.
- Если эта сумма делится на k, то в искомом числе соответствующий бит равен 0.
- Иначе, этот бит в искомом числе равен 1.
- Если значение счётчика меньше k, номер шпиона найден, иначе переходим к просмотру следующего числа.
- Такое решение набирает 100 *баллов*.

Полное решение. Побитовые суммы

Побитовые суммы

- Посчитаем сумму битов в *каждом* разряде для всех чисел исходного массива.
- Если эта сумма делится на k, то в искомом числе соответствующий бит равен 0.
- Иначе, этот бит в искомом числе равен 1.
- Если значение счётчика меньше k, номер шпиона найден, иначе переходим к просмотру следующего числа.
- Такое решение набирает 100 *баллов*.

Собственно, всё...

Вопросы?