Региональный этап всероссийской олимпиады школьников по информатике, 2020

Россия, Иннополис

15 — 18 января 2019

Задача 4 «Олимпиада для роботов»

- Авторы задачи — Александра Дроздова и Рамазан Рахматуллин
- Автор разбора — Нияз Нигматуллин

Постановка задачи

- Задано m булевых формул из n переменных, в которых есть операции «И» и «ИЛИ», и скобки.
- j-я переменная в i-й формуле, это сравнение $x_{i,j} < z_j$
- Каждая переменная в каждой формуле встречается ровно один раз.
- Пример формулы:
  - $(((x_{1,1} < z_1)\ \texttt{and}\ (x_{1,2} < z_2))\ \texttt{or}\ ((x_{1,3} < z_3)\ \texttt{and}\ (x_{1,4} < z_4)))$.
- $x_{i,j}$ для разных i, но одинаковых j, различны
- Требуется найти значения $z_1, z_2, \ldots, z_n$
  - чтобы ровно k формул были истинны

Общая идея

- Если увеличивать z_i, то переменные в формулах:
  - либо не изменяются;
  - либо 0 может стать 1;
  - но 1 **не может** стать 0.
- Если увеличивать z_i, то значения формул:
  - либо не изменяются;
  - либо значение 0 может стать 1;
  - но значение 1 **не может** стать 0.
- Если взять z_i, и увеличить z_i на единицу, то:
  - значение не более одной формулы изменится с 0 на 1.
- Это значит:
  - начать с $z_i = 0$, для всех i;
  - увеличивать любые z_i на 1;
  - пока число истинных формул не станет ровно k.

Общая идея

- Будем брать $z_1, z_2, \ldots, z_n$ в таком порядке.
- Сначала z_1 будем увеличивать на 1
  - либо пока число истинных формул не стало ровно k;
  - либо пока z_1 не стало равно m.
- Если $z_1 = m$, то переходим к z_2, и так далее
- Если число истинных формул стало k, то ответ
- Решение за $\mathcal{O}(n \cdot m \cdot n \cdot m)$:
  - делаем, как описано выше: $\leqslant n \cdot m$ увеличений;
  - после увеличения пересчитываем все формулы;
  - m формул, каждая пересчитывается за $\mathcal{O}(n)$;
  - решили подзадачу 1 ($n \leqslant 2$, $m \leqslant 10^3$);
  - получили 10 баллов.

Подзадача 6: $n \leqslant 100$

- Делаем как раньше: $\leqslant n \cdot m$ увеличений;
- значение не более одной формулы изменится:
  - если отсортировать $x_{i,j}$ для конкретного j;
  - в таком порядке $x_{i,j} < z_j$ будет менять значение.
- после увеличения пересчитываем одну формулу.
- Решение за $\mathcal{O}(n^2 \cdot m)$.
- Решили еще подзадачи 2, 3 и 6.
- Получили 50 баллов.

Полное решение

- Посмотрим на наше решение.
- Если посмотреть на значения:
  - $(x_{i,1} < z_1), (x_{i,2} < z_2), \ldots, (x_{i,n} < z_n)$
- То в процессе нашего решения значения имеют вид:
  - $1, 1, \ldots 1, 0, 0, \ldots 0$;
  - то есть сначала несколько 1, а потом несколько 0.
- Для каждой формулы найдем:
  - сколько 1 должно быть, чтобы значение стало 1.
- Это можно сделать двоичным поиском.
- Назовем это значение для формулы i: s_i.

Полное решение

- Делаем как раньше: $\leqslant n \cdot m$ увеличений;
- значение не более одной формулы изменится:
- после увеличения у одной формулы число истинных переменных увеличится на один.
- Число истинных переменных для формулы i: t_i.
- Если $t_i \geqslant s_i$, то формула истинна.
- Поддерживаем t_i, увеличивая когда надо на 1.
- Решение за $\mathcal{O}(n \cdot m \cdot \log n)$.

Полное решение за $\mathcal{O}(nm)$

- Формула задана в формате дерева разбора.
- Делаем как раньше: $\leqslant n \cdot m$ увеличений;
- значение не более одной формулы изменится;
- значение одной переменной одной формулы изменяется.
- Изменим значение формулы и пойдем вверх по дереву разбора.
  - значение вершины не изменилось $\to$ прервем.
  - значение корня изменилось $\to$ формула истинна.
- Каждая вершина деревьев изменится один раз.
- Решение за суммарный размер деревьев: $\mathcal{O}(nm)$.

Подзадача 3: $n \leqslant 10$, $m \leqslant 2$

- Можно перебрать все различные значения z_i
- $z_i \in \{0, 1, 2\}$
- $\leqslant 3$ значения для каждого z_i
- Перебрать все возможные и вычислить: $\mathcal{O}(3^n \cdot n)$.

Подзадачи 4 и 5

- В подзадаче 4, в формуле i значения $x_{i,j} = i - 1$.
  - сделаем $z_i = k$ для всех i;
  - ровно k формул удовлетворится.
- В подзадаче 5, все операции — «И».
  - установим $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ равным m;
  - $z_n = k$;
  - ровно k формул удовлетворится.

Вопросы?