Региональный этап всероссийской олимпиады школьников по информатике, 2020

Россия, Иннополис

15 — 18 января 2019

Задача 8 «Плакаты»

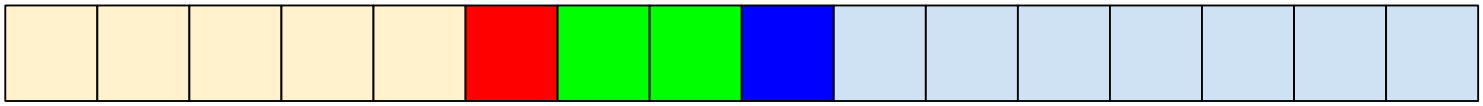
- Автор задачи — Алексей Толстиков
- Автор разбора — Нияз Нигматуллин

Постановка задачи

- Задан циклический массив из n неотрицательных чисел.
- Требуется выбрать числа максимальной суммы,
  - чтобы не было четырех подряд идущих выбранных.
- В массиве проводятся изменения одного числа.
- После каждого изменения нужно называть максимальную сумму.

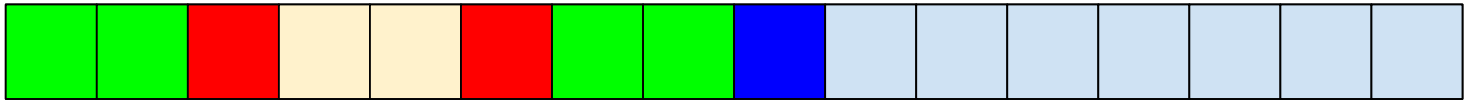
Динамическое программирование

- Пусть нужно посчитать ответ один раз.
- И массив **не** цикличный.
- $f_{i,k}$ — максимальная сумма чисел,
  - если мы рассматриваем только первые i чисел,
  - числа $i, i-1, \ldots, i-k+1$ выбраны,
  - число $i-k$ не выбрано,
  - $k \leqslant 3$.
- $f_{i,k} = a_i + f_{i-1,k-1}$, если $k > 0$
- $f_{i,0} = \max\limits_{j \leqslant 3} f_{i-1,j}$.

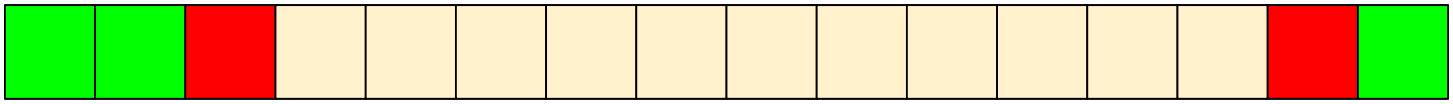


Динамическое программирование

- Вернемся к циклическому массиву.
- Переберем сколько выбрано в начале массива: s.
- Начнем вычислять с $f_{s,k}$.



- В конце у нас будет $f_{n,k}$



  - Вычисляем для всех $0 \leqslant s \leqslant 3$
  - Ответ для одного s: $\max\limits_{s+k<4} f_{n,k}$

Динамическое программирование

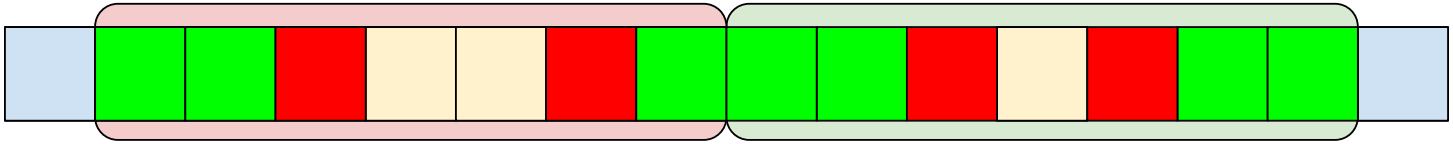
- Итого 4 раза вычисляем функцию f.
- Функция f вычисляется за $\mathcal{O}(n)$.
- Получается решение за $\mathcal{O}(n \cdot q)$.
  - После каждого изменения в массиве заново решаем.
- Подзадачи 1, 2, 3 и 4 решены.

Полное решение

- Применим дерево отрезков.
- Рассмотрим функцию на отрезке $f(L, R, s, k)$:
  - рассмотрим элементы $L \leqslant i \leqslant R$;
  - элементы $L, L+1, \ldots, L+s-1$ выбраны;
  - элементы $R, R-1, \ldots, R-k+1$ выбраны;
  - элементы $L+s, R-k$ не выбраны;
  - $0 \leqslant s, k \leqslant 3$;
  - значение — максимальная сумма выбранных элементов на отрезке $[L, R]$.

Полное решение

- В вершине дерева отрезков 16 значений:
  - для всех пар (s, k).
- Объединять отрезки (a, b) и (c, d):
  - можно, если $b + c < 4$;
  - получается отрезок (a, d).
- Объединены отрезки $(2, 1)$ и $(2, 2)$:



- Ответом будет: $\max\limits_{0 \leqslant s,k \leqslant 3} f(1, n, s, k)$

Полное решение

- Вычисление одного значения f за $\mathcal{O}(\log n)$.
- Изменение одного элемента за $\mathcal{O}(\log n)$.
- Итого решение за $\mathcal{O}(n \log n)$.
- С немаленькой константой
  - каждое объединение двух отрезков за 256 операций;
    - на объединения $256 \cdot n \log n$.
  - ответ требует 16 вычислений на отрезке;
    - неаккуратно можно сделать за $16 \cdot 256 \cdot \log n$.
    - можно реализовать дерево так, чтобы в корне хранились $f(1, n, s, k)$ для всех s, k.

Подзадачи 1 и 2: $n \leqslant 10$

- Можно было перебрать все подмножества массива и проверить
- $\mathcal{O}(2^n \cdot n \cdot q)$.

Вопросы?