Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по информатике

Казань, 16-18 января 2020 г.

Задача «Сломанный калькулятор»

Постановка задачи

- Дано целое положительное число n $(1 \leqslant n \leqslant 2 \cdot 10^9)$.
- Разрешается выполнять две операции: умножение на любое положительное число и извлечение корня.
- Найти наименьшее число, которое можно получить из n с помощью этих операций.
- Найти минимальное число операций для получения этого наименьшего числа.

Основные темы задачи:

- теория чисел;
- факторизация;
- операции с простыми делителями.

Решение. Подзадача 1

Перебор (для $n \leqslant 100$)

- Раскладываем число n на простые множители.
- Простые множители не исчезают после применения указанных операций.
- Наименьшее число будет содержать те же простые делители, что и в числе n.
- Показатели (степени) этих делителей не меньше 1.

Решение. Подзадача 1

Перебор (для $n \leqslant 100$)

- Раскладываем число n на простые множители.
- Простые множители не исчезают после применения указанных операций.
- Наименьшее число будет содержать те же простые делители, что и в числе n.
- Показатели (степени) этих делителей не меньше 1.

Решение. Подзадача 1

Перебор (для $n \leqslant 100$)

- Раскладываем число n на простые множители.
- Простые множители не исчезают после применения указанных операций.
- Наименьшее число будет содержать те же простые делители, что и в числе n.
- Показатели (степени) этих делителей не меньше 1.

Решение. Подзадача 1

Перебор (для $n \leqslant 100$)

- Раскладываем число n на простые множители.
- Простые множители не исчезают после применения указанных операций.
- Наименьшее число будет содержать те же простые делители, что и в числе n.
- Показатели (степени) этих делителей не меньше 1.

Решение. Подзадача 1

Перебор (для $n \leqslant 100$)

- Некоторые простые множители могут входить в разложение n с нечётными степенями.
- Для такого n операция извлечения корня неприменима.
- Применяя операцию умножению, можно добиться, чтобы у полученного произведения все делители имели *чётную* степень.
- Применяем операцию извлечения корня, и с полученным результатом рассуждаем аналогично.

Решение. Подзадача 1

Перебор (для $n \leqslant 100$)

- Некоторые простые множители могут входить в разложение n с нечётными степенями.
- Для такого n операция извлечения корня неприменима.
- Применяя операцию умножению, можно добиться, чтобы у полученного произведения все делители имели *чётную* степень.
- Применяем операцию извлечения корня, и с полученным результатом рассуждаем аналогично.

Решение. Подзадача 1

Перебор (для $n \leqslant 100$)

- Некоторые простые множители могут входить в разложение n с нечётными степенями.
- Для такого n операция извлечения корня неприменима.
- Применяя операцию умножению, можно добиться, чтобы у полученного произведения все делители имели *чётную* степень.
- Применяем операцию извлечения корня, и с полученным результатом рассуждаем аналогично.

Решение. Подзадача 1

Перебор (для $n \leqslant 100$)

- Некоторые простые множители могут входить в разложение n с нечётными степенями.
- Для такого n операция извлечения корня неприменима.
- Применяя операцию умножению, можно добиться, чтобы у полученного произведения все делители имели *чётную* степень.
- Применяем операцию извлечения корня, и с полученным результатом рассуждаем аналогично.

Решение. Подзадача 1

Перебор (для $n \leqslant 100$)

- Комбинируя операции умножения и операции извлечения корня, приходим к наименьшему числу за минимальное число операций.
- Это решение проходит первую группу тестов — 30 *баллов*.

Решение. Подзадача 1

Перебор (для $n \leqslant 100$)

- Комбинируя операции умножения и операции извлечения корня, приходим к наименьшему числу за минимальное число операций.
- Это решение проходит первую группу тестов — 30 *баллов*.

Решение. Подзадачи 2 и 3

Факторизация

- Разложим исходное число $n > 1$ на простые множители:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_m$ — различные простые делители n.

- При любых операциях показатели $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ будут всегда не меньше 1, поэтому наименьшее число будет равно $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m$.
- Случай $n = p^\alpha$. Если $\alpha = 2^s$, то с помощью s операций извлечения корня получим наименьшее число p:

$$p^\alpha \to p^{\alpha/2} \to p^{\alpha/2^2} \to \ldots \to p^{\alpha/2^s} = p.$$

Решение. Подзадачи 2 и 3

Факторизация

- Разложим исходное число $n > 1$ на простые множители:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m},$$

  где p_1, p_2, …, p_m — различные простые делители n.
- При любых операциях показатели α_1, α_2, …, α_m будут всегда не меньше 1, поэтому наименьшее число будет равно $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m$.
- Случай $n = p^\alpha$. Если $\alpha = 2^s$, то с помощью s операций извлечения корня получим наименьшее число p:

$$p^\alpha \to p^{\alpha/2} \to p^{\alpha/2^2} \to \ldots \to p^{\alpha/2^s} = p.$$

Решение. Подзадачи 2 и 3

Факторизация

- Разложим исходное число $n > 1$ на простые множители:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m},$$

  где p_1, p_2, …, p_m — различные простые делители n.
- При любых операциях показатели α_1, α_2, …, α_m будут всегда не меньше 1, поэтому наименьшее число будет равно $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m$.
- Случай $n = p^\alpha$. Если $\alpha = 2^s$, то с помощью s операций извлечения корня получим наименьшее число p:

$$p^\alpha \to p^{\alpha/2} \to p^{\alpha/2^2} \to \ldots \to p^{\alpha/2^s} = p.$$

Решение. Подзадачи 2 и 3

Факторизация

- Если же $2^{s-1} < \alpha < 2^s$, то с помощью одной операции умножения на число $p^{2^s-\alpha}$ увеличиваем этот показатель до значения 2^s.
- Затем с помощью s операций извлечения корня получим число p. Всего потребуется $1+s$ операций:

$$p^\alpha \to p^\alpha \times p^{2^s-\alpha} = p^{2^s} \to \sqrt{p^{2^s}} = p^{2^{s-1}} \to \ldots \to p^{2^0} = p.$$

Решение. Подзадачи 2 и 3

Факторизация

- Если же $2^{s-1} < \alpha < 2^s$, то с помощью одной операции умножения на число $p^{2^s-\alpha}$ увеличиваем этот показатель до значения 2^s.
- Затем с помощью s операций извлечения корня получим число p. Всего потребуется $1 + s$ операций:

$$p^\alpha \to p^\alpha \times p^{2^s-\alpha} = p^{2^s} \to \sqrt{p^{2^s}} = p^{2^{s-1}} \to \ldots \to p^{2^0} = p.$$

Решение. Подзадачи 2 и 3

Факторизация

- Пусть n имеет более одного простого множителя. Среди показателей α_1, α_2, ..., α_m выбираем *наибольший* — α_k.
- Если $2^{s-1} < \alpha_k < 2^s$, умножаем n на такое число, после которого все показатели α_i будут равны 2^s.
- С помощью ещё s операций извлечения корня получаем наименьшее число. Наименьшее число операций равно $1 + s$.
- Если же все показатели α_i совпадают с $\alpha_k = 2^s$, то наименьшее число операций будет равно s.

Решение. Подзадачи 2 и 3

Факторизация

- Пусть n имеет более одного простого множителя. Среди показателей α_1, α_2, …, α_m выбираем *наибольший* — α_k.
- Если $2^{s-1} < \alpha_k < 2^s$, умножаем n на такое число, после которого все показатели α_i будут равны 2^s.
- С помощью ещё s операций извлечения корня получаем наименьшее число. Наименьшее число операций равно $1 + s$.
- Если же все показатели α_i совпадают с $\alpha_k = 2^s$, то наименьшее число операций будет равно s.

Решение. Подзадачи 2 и 3

Факторизация

- Пусть n имеет более одного простого множителя. Среди показателей α_1, α_2, ..., α_m выбираем *наибольший* — α_k.
- Если $2^{s-1} < \alpha_k < 2^s$, умножаем n на такое число, после которого все показатели α_i будут равны 2^s.
- С помощью ещё s операций извлечения корня получаем наименьшее число. Наименьшее число операций равно $1 + s$.
- Если же все показатели α_i совпадают с $\alpha_k = 2^s$, то наименьшее число операций будет равно s.

Решение. Подзадачи 2 и 3

Факторизация

- Пусть n имеет более одного простого множителя. Среди показателей α_1, α_2, …, α_m выбираем *наибольший* — α_k.
- Если $2^{s-1} < \alpha_k < 2^s$, умножаем n на такое число, после которого все показатели α_i будут равны 2^s.
- С помощью ещё s операций извлечения корня получаем наименьшее число. Наименьшее число операций равно $1 + s$.
- Если же все показатели α_i совпадают с $\alpha_k = 2^s$, то наименьшее число операций будет равно s.

Решение. Подзадачи 2 и 3

Факторизация

- Решение имеет сложность $O(\sqrt{n})$.
- В зависимости от технической реализации процедуры разложения на простые множители оно набирает 60 *баллов* или 100 *баллов*..

Решение. Подзадачи 2 и 3

Факторизация

- Решение имеет сложность $O(\sqrt{n})$.
- В зависимости от технической реализации процедуры разложения на простые множители оно набирает 60 *баллов* или 100 *баллов*..

Собственно, всё...

Вопросы?