Region analysis

1 тур, 3 задача

Максим Ягафаров

18.01.2020

Постановка задачи

- Дан массив a_i длины n
- Необходимо вычислить s_i $\forall i \in [1, n]$, где s_i - сумма кол-ва различных элементов, на каждом подмассиве a длины i

Медленное решение

- Перебираем подмассивы, решаем для каждого задачу отдельно с помощью set или sort
- $O(n^3 \cdot \log n)$

Решение за квадрат на лог

- Также вычислим ответ (кол-во различных чисел) для каждого подмассива. Для фиксированного l будем перебирать r начиная с l до $n-1$, подерживая при этом set всех чисел на текущем подотрезке $[l, r]$ (увеличивая r на 1 добавляем число a_r в set). Таким образом размер сэта будет ответом для текущего подотрезка.
- $O(n^2 \cdot \log n)$

Решение за квадрат

- Улучшим предыдущее решение, избавившись от set. Для этого будем считать кол-во первых вхождений каждого числа в отрезке (очевидно это эквивалентно уникальному кол-ву чисел на отрезке)
- Для этого подсчитаем массив $left_i = \max(j) : (j < i, a_j = a_i)$ или -1, если такого не существует. Считать его можно с помощью map и цикла.
- Вхождение является первым в отрезок $[l, r]$ если $l \leq i \leq r, left_i < l$
- Соотвтественно в предыдущем решении вместо сета достаточно хранить количество первых вхождений для текущего отрезка
- $O(n^2)$

Быстрое решение

- Представим ответ в виде $s_i = cnt \cdot (n - i + 1) - f_i$, где cnt - кол-во различных числел во всем массиве, $f_i = \sum g_{i,j}$, где $g_{i,j}$ - колво отрезков длины i в которые не входит ни одно число j
- Вопрос только в том как посчитать f_i
- Рассмотрим индекс i. Каждый подотрезок отрезка $[left_i + 1, i - 1]$ не сожержит число a_i - соответсвенно их нужно учесть в f_i. Пусть $d = i - left_i - 1$, в наш отрезок входит один подотрезок длины d, два длины $d - 1$, три $d - 2$ и так далее. (Также нужно рассмотреть отрезки суффиксы от самого правого вхождения числа до n)
- то есть должно выполниться $f_d += 1$, $f_{d-1} += 2$ ...
- Видно что решение свелось в прибавлению арифметической прогрессии на отрезке (в данном на случае префиксе)

Быстрое решение

- Прибавление арифметической прогрессии на отрезке (когда результат нужно восстановить после выполнения всех прибавлений) - стандартная задача
- Пусть cnt_d - это кол-во прогрессий, которые прибавляются к префиксу d (шаг у всех 1)
- Будем итерироваться от n до 1, поддерживая $curf$ - текущее значение f_i, $curcnt$ - кол-во прогрессий, которые уже начались. Понятно что i-ой итерации должно производиться следующее $curcnt \mathrel{+}= cnt_i$, $curf \mathrel{+}= curcnt$ (так как каждая прогрессия увеличивается на 1)
- $O(n \cdot \log n)$