Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ им. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ПРИБЛИЖЕНИЙ

Направление: 01.03.01 — Математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Бакалаврская работа)

ПРИНЦИП ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ МЕТРИКИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Работа завершена:

«____»_________________2015 г. ____________ Э. Р. Шайхутдинова

Работа проверена:

Научный руководитель

доктор физико-математических наук,

профессор кафедры теории функций и приближений

«____»_________________2015 г. __________________Ф. Г. Авхадиев

Заведующий кафедрой теории функций и приближений

доктор физико-математических наук, профессор

«____»_________________2015 г. __________________Ф. Г. Авхадиев

Казань

2015 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

В основе моей работы лежит геометрия Лобачевского. Имя великого русского математика носит наш институт математики и механики, поэтому мне стало интересно изучить эту тему более подробно. Что же такого сделал Н. И. Лобачевский?

Деятельность Н. И. Лобачевского положила начало процветанию и славе Казанского университета. За двадцать лет своего ректорства Лобачевский сумел превратить его в первоклассное учебное заведение, одно из лучших в России. Он занял свой пост ректора в трудное время. Хотя университет существовал более двадцати лет, фактически он еще очень мало походил на высшее учебное заведение. В разные годы Лобачевский опубликовал несколько блестящих статей по математическому анализу, алгебре и теории вероятностей, а также по механике, физике и астрономии. Но главным делом жизни Лобачевского стало создание неевклидовой геометрии.

В своей работе я рассмотрю геометрию Лобачевского и отвечу на следующий вопрос: чем же геометрия Евклида отличается от геометрии Лобачевского?

Так же рассмотрю некоторые примеры конформных отображений и представлю принцип гиперболической метрики.

Далее, рассмотрю данный принцип в специальных случаях,что составляет самостоятельную часть моих исследований по этой теме.

1. Геометрия Лобачевского.

В школе все изучали такой предмет, как геометрия. Это была геометрия Евклида, основы которой были заложены древнегреческими математиками. Около 2000 лет назад люди увидели труд, ставший основой современной геометрии- "начала"Евклида. В "началах"представлены все геометрические сведения, полученные десятками математиков античности, живших до Евклида. Эти труды были описаны в тридцати томах. Это был единственным учебником, по которому можно было изучить геометрию. Там хорошо описывается пространство, в котором мы живем. Благодаря этому геометрию (как и пространство) назвали Евклидовой. В геометрии Евклида известно 5 аксиом:

1) Аксиома принадлежности: через две точки можно провести одну прямую.

2) Аксиома порядка: среди любых трех точек, лежащих на прямой, есть не более одной точки, лежащая между двух других.

3) Аксиома конгруэнтности (равенства) углов и отрезков: если 2 отрезка (угла) конгруэнтны третьему, то они конгруэнтны между собой.

4) Аксиома непрерывности (Аксиома Архимеда): для $\forall$ отрезков AB и CD $\exists$ конечный набор точек $A_1, A_2, ..., A_n \in AB$ таких, что отрезки $AA_1, A_1A_2, ..., A_{n-1}A_n$ конгруэнтны отрезку D, а точка B лежит между A и A_n.

5) Аксиома параллельных прямых: через любую точку, лежащую вне прямой, можно провести другую прямую, не пересекающую данную, и притом только одну.

С конца 18 века пытались создать геометрию, отличную от геометрии Евклида. Над этим трудились многие ученые, но первооткрывателем в этой области стал русский математик Николай Лобачевский. Первая его работа, заложившая основы неевлидовой геометрии, появилась в 1829 году. Изначально геометрия Лобачевского считалась непригодной к практическому применению, потому что пространство, которое описывается в данной геометрии, не соответствует пространству, в котором мы живем. Однако законы, выведенные Лобачевским, вскоре нашли практическое применение– стало возможным решение многих задач, которые не решаются традиционными способами.

Главное отличие геометрии Лобачевского от геометрии Евклида — в пятом постулате. Пятый постулат геометрии Лобачевского утверждает: если на плоскости лежат прямая и точка, то через эту точку можно провести более одной прямой, не пересекающихся с данной прямой.

Геометрия Лобачевского описывает не плоское пространство, как в геметрии Евклида, а рассматривается гиперболическое пространство. Оно имеет отрицательную кривизну. Вообразить это может быть сложно, но примером таких моделей являются такие геометрические тела, как воронка и седло. Таким образом нужно понять, что геометрия Лобачевского применяется только по отношению к миру с искривленным пространством. Однако космология (наука, изучающая Вселенную) в последние годы приходит к выводу, что пространство, в котором мы живем, можеть обладать отрицательной кривизной, наилучшим образом описываемой именно геометрией Лобачевского.

Рассмотрим некоторые модели геометрии Лобачевского.

2. Модели геометрии Лобачевского.

Итальянский математик Э.Бельтрами в 1868 году заметил поверхность,на которой реализуется геометрия Лобачевского. это поверхность– псевдосфера.

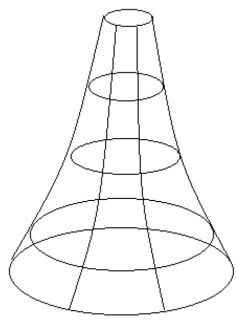

Рис. 1: Псевдосфера

Псевдосфера– это поверхность отрицательной кривизны, которая образуется вращением кривой, называемой трактрисой.

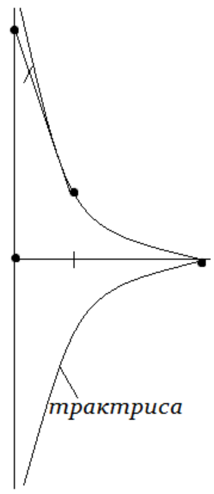

Рис. 2: Трактриса

Если точкам и прямым на конечном куске плоскости Лобачевского сопоставить точки и кратчайшие линии (геодезические — так называют линии, соединяющие кратчайшим путем две точки на поверхности) на псевдосфере и движению в плоскости Лобачевского сопоставлять перемещение фигуры по псевдосфере с изгибанием, то есть деформацией, сохраняющей длины, то всякой теореме геометрии Лобачевского будет отвечать факт, имеющий место на псевдосфере. При этом длины, углы, площади понимаются в смысле естественного измерения их на псевдосфере.

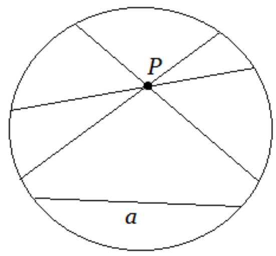

Рис. 3: Модель Клейна

В 1871 году Ф.Клейн изобрел модель плоскости Лобачевского, которая реализуется на части евклидовой плоскости, а именно на внутренности круга. Прямыми являются хорды круга без концов, а точкой — точкка внутри круга. "Движением "назовем любое преобразование круга в себя, которое переводит хорды в хорды. Всякое утверждение геометрии Лобачевского на плоскости есть утверждение евклидовой геометрии, относящееся к фигурам внутри круга. Пятая аксиома Евклида в данном случае не выполняется, так как через точку P проходит бесконечно много прямых, не пересекающихся с данной прямой a.

В 1882 году А.Пуанкаре предложил другую модель плоскости Лобачевского. Рассмотрю её более подробно. Метрика Пуанкаре связана с теорией функций комплексного переменного и дробно-линейными отображениями. В 1777 году Л.Эйлером было заложено начало теории конформного отображения. Она была использована для построения географических карт, то есть для конформного отображения частей сферы на плоскость. В 1822 году К.Гаусс изучил общую задачу конформного отображения одной поверхности на другую. В 1851 году Б.Риман установил условия конформного отображения одной области (поверхности) на другую. Исследование Н.Е Жуковского, С.А Чаплыгина, которые открыли много приложений в аэродинамике и гидродинамике, послужили огромным стимулом для развития теории конформного отображения. Рассмотрим некоторые примеры конформных отображений.

1) Отобразить верхнюю полуплоскость на себя. Для этого нам понадобится линейная функция $w = az + b$, где a, b — комплексные постоянные.

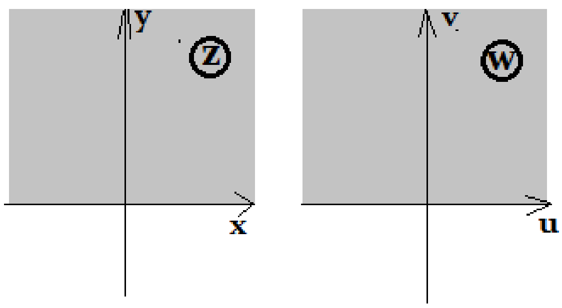

Рис. 4: отображение верхней полуплоскости на себя

2) Отобразить полосу, заключенную между прямыми $x = a$ и $x = a + h$, на полосу $0 < u < 1$, причем $w(a) = 0$.

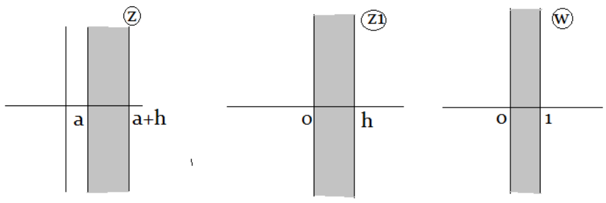

Рис. 5: отображение полосы

Наша исходная полоса в области z. В области z_1 сдвигаем влево нашу исходную полосу на a и получаем $z_1 = z - a$. Последним шагом делим z_1 на h и получаем, что $w = \frac{z-a}{h}$.

3) Рассмотрим дробно-линейное отображение. Оно определяется следующим соотношением: $\frac{az+b}{cz+d}$, где $, b, c, d - --$ фиксированные комплексные числа, при условии, что $ad - bc \neq 0$, это условие накладывается для того чтобы исключить случай сокращения дроби.

Дробно-линейная функция прелбразует совокупность кругов и прямых плоскости z в совокупность кругов и прямых плоскости w.

Необходимо отобразить на вертикальную полосу $0 < Rew < 1$ полуплоскоть $Rez > 0$ с выкинутым кругом $|z - \frac{d}{2}| \leqslant \frac{d}{2}$.

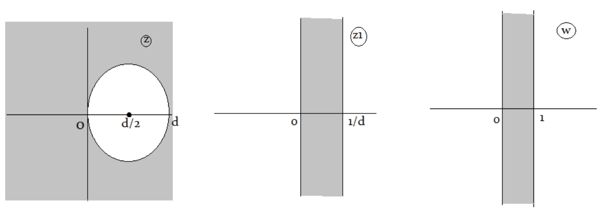

Рис. 6: Пример дробно-линейного отображения

В плоскости z изображено,то что нам дано. В плоскости z_1 распрямим окружность $z_1 = \frac{1}{z}, d \to \frac{1}{d}$ и получим полосу от 0 до $\frac{1}{d}$. В плоскости w умножим z_1 на d и получаем, что $w = z_1 d = \frac{d}{2}$.

Вспомним некоторые определения и теоремы из курса ТфКП.

Определение 0.1 *Если аналитическая функция $w = f(z)$ переводит взаимно однозначно область D_1 плоскости z в область D_2 плоскости w, то говорят, что она осуществляет конформное отображение области D_1 на D_2.*

Определение 0.2 *Функция f является аналитической (голоморфной) в точке $z_0 \in \Omega$, если в этой точке $\exists$ производная $f'(z_0)$*

Определение 0.3 *Говорят, что отображение $f : \Omega \to C$ является конформным и однолистным в Ω,если она конформна в каждой точке этой области и является инъективным отображением.*

Определение 0.4 *Отображение $f : U \to C$, где $U-$область в C, называется комплексно-дифференцируемым в точке $z_0 \in U$, если существует предел*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

который в этом случае называется производной f в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$.

Теорема 1 *(Теорема Римана о конформных отображениях). В любой односвязной области $\Omega \subset C$, граница которой содержит не менее двух точек, существует конформное отображение $f : \Omega \to D, D = \omega : |\omega| < 1$, причем так, что для заранее выбранной точки $z_0 \in \Omega, f(z_0) = 0, f'(z_0) = Ref'(z_0) > 0$.*

3. Модель Пуанкаре.

Вернемся к метрике Пуанкаре. Модель Пуанкаре реализована на круговых преобразованиях. Существуют разновидности модели — в круге (стереографическая проекция) и на полуплоскости для планиметрии Лобачевского. В модели Пуанкаре углы изображаются обычными углами (то есть модель Пуанкаре конформна) в отличие от модели Клейна.

Рассмотрим модель Пуанкаре на полуплоскости. В этой модели за плоскость Лбачевского принимается верхняя полуплоскость. Точки Лобачевского — точки полуплоскости, прямые Лобачевского — полуокружности, перпендикулярные к оси абсцисс(центр лежит на оси x) или лучи, перпендикулярные к оси абсцисс.

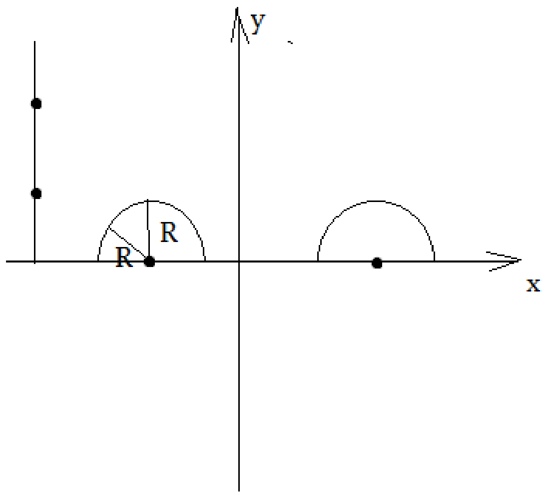

Рис. 7: отображение полосы

Пусть x, y — оси абсцисс и ординат. Метрика ds плоскости Лобачевского в данном случае имеет вид: $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ — евклидов элемент дуги.

Рассмотрим равносильную модель в круге $D = z \in C : |z| < 1$.

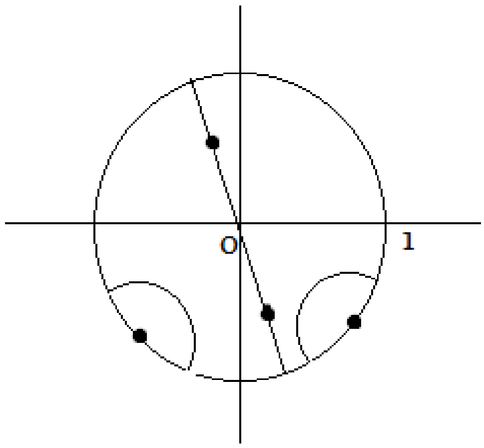

Рис. 8: отображение полосы

Роль плоскости Лобачевского играет единичный круг $D = z \in C : |z| < 1$. Роль точек играют точки, роль прямых Лобачевского–диаметры круга D и дуги окружностей, перепендикулярные к окружности D. Эта геометрия пораждается метрикой Пуанкаре,когда диффиринциальный элемент дуги равен следующему соотношению $d\delta = \frac{dz}{1-|z|^2}$, где $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = r$.

Имеем: $|dz| = |dx + idy| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = ds$-евклидов элемент дуги. Обозначим через $x = x(t), y = y(t)$ и получим $ds = \sqrt{x'(t) + y'(t)}dt = \sqrt{[x'(t) + y'(t)](dt)^2} = \sqrt{(x'(t)dt)^2 + (y'(t)dt)^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Таким образом, $|dz| = |ds|$.

Как доказал Пуанкаре, $d\delta = \frac{dz}{1-|z|^2}$. Рассмотрим эту геометрию в круге D, порожденную метрикой Пуанкаре $d\delta = \frac{dz}{1-|z|^2}, |z| < 1$ и докажем следующую теорему.

Теорема 3.1. *Метрика Пуанкаре является конформно инвариантной, то есть имеет место следующее тождество:*

$$\frac{|dz|}{1-|z|^2} = \frac{|d\xi|}{1-|\xi|^2}$$

для всех точек $z, \xi \in D$, *если* $z = T(\xi), |\xi| < 1$, *причем* $T : D \to D$ *– конформное отображение круга* D *на себя.*

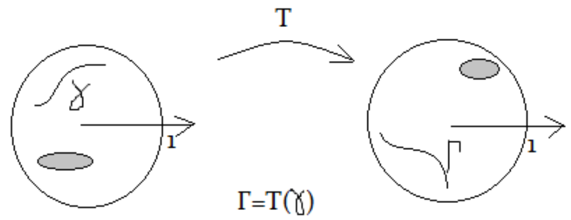

Рис. 9: Отображение круга на круг.

Данная теорема означает, что длина кривой γ равна длине кривой Г, если считать длины по метрике Пуанкаре. Кривая Г получается из кривой γ сдвигом и поворотом.

Доказательство теоремы. Из курса ТФКП мы знаем, что любое конформное отображение D на себя можно задать формулой:

$$z = T(\xi) = e^{i\alpha}\frac{\xi - \xi_0}{1 - \xi\bar{\xi_0}}(1),$$

где $\alpha-$ вещественное число, ξ_0- комплексное число, $|\xi_0| < 1$.

Вспомним,что $d\delta = \frac{dz}{1-|z|^2}$. Оно верно тогда и только тогда, когда $|\frac{dz}{d\xi}|(1 - |\xi|^2) = 1 - |z|^2$. Рассмотрим $|\frac{dz}{d\xi}| = |T'(\xi)| = |\frac{1-\bar{\xi}_0\xi+(\xi-\xi_0)\bar{\xi}_0}{(1-\bar{\xi}_0\xi)^2}| = |\frac{1-\xi_0\bar{\xi}_0}{(1-\bar{\xi}_0\xi)^2}|$. Получаем, что $|\frac{dz}{d\xi}| = \frac{1-|\xi_0|}{|1-\bar{\xi}_0\xi|^2}$. Далее рассмотрим $1 - |z|^2 = 1 - |\frac{\xi-xi_0}{1-\bar{\xi}_0\xi}|^2 = \frac{(1-\bar{\xi}_0\xi)(1-\xi_0\bar{\xi})-(\xi-\xi_0)(\bar{\xi}-\bar{\xi}_0)}{|1-\bar{\xi}_0\xi|^2}$. Расскрываем скобки и получаем, что $1 - |z|^2 = \frac{1-|\xi_0|^2}{|1-\bar{\xi}_0\xi|^2}(1 - |\xi|^2) = |\frac{dz}{d\xi}|(1 - |\xi|^2)$.

Теорема 3.2. *Гиперболическое расстояние между двумя точками $x_1, x_2 \in D$ определяется формулой*

$$\rho_D(x_1, x_2) = \frac{1}{2}ln\frac{1+t}{1-t}, t = |\frac{x_1 - x_2}{1 - \tilde{x}_1 x_2}|.$$

Действительно,преобразование

$$w = T(z) = e^{i\alpha}\frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z}$$

и конформное преобразование метрики дают равенство $\rho_D(z_1, z_2) = \rho_D(0, t)$. Вычислим следующую велечину:

$$\rho_D(0, t) = \int_a^b \frac{dr}{1 - r^2} = \frac{1}{2}ln\frac{1+t}{1-t}.$$

4. Принцип гиперболической метрики.

Рассмотрим однолистное конформное $F : D \to \Omega$. Обозначим через $w = F(z)$ соответствующую голоморфную функцию со значениями в Ω. Область Ω превратим в плоскость Лобачевского, определив в ней $\lambda_\Omega(w)$ – – коэффициент метрики Пуанкаре:

$$\lambda_\Omega(w)|dw| = \lambda_D(z)|dz|, \forall z \in D, w \in \Omega.$$

Имеем,

$$\lambda_\Omega(F(z))|F'(z)| = \frac{1}{1-|z|^2}, \forall z \in D.$$

Получаем, что

$$\lambda_\Omega(w) = \frac{|F'(F^{-1}(w))|^{-1}}{1-|F^{-1}(w)|^2}, \forall w \in \Omega.$$

Следовательно,

$$|F'(z)| = \frac{\lambda_\Omega(z)}{\lambda_D(w)}.$$

Лемма 2 *(Лемма Шварца). Пусть $w = \varphi(z)$ голоморфна в круге $|z| < 1$ и удовлетворяет условиям: $\varphi(0) = 0$ и $|\varphi(z)| \leqslant 1, |z| < 1$. Тогда*

1) $|\varphi(z)| \leqslant |z|, 0 < |z| < 1,$

2) $|\varphi'(0)| \leqslant 1.$

Равенство в этих неравенствах имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi(z) = e^{i\alpha}z, \alpha$ — вещественное число.

Теорема 4.1. *Пусть $\omega = f(z)$ — голоморфная функция, определенная в области D и $f(D) \subset \Omega$. Тогда*

$$|f'(z)| \leq \frac{\lambda_D(z)}{\lambda_\Omega(f(z))}, z \in D.$$

Равенство в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда f однолистное конформное отображение D на Ω.

Доказательство.

Рассмотрим две области D и Ω. В области D возьмем произвольную точку z_0 и заффиксируем ее и пусть $\omega_0 = f(z_0)$. Воспользуемся теоремой Римана о конформных

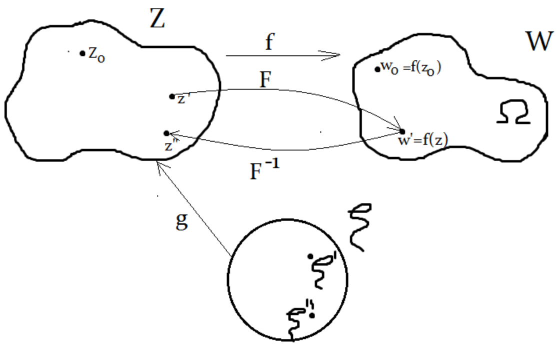

Рис. 10: принцип гиперболической метрики

отображениях. Тогда существует такое однолистное конформное отображение $F : D \to \Omega$, что $F(z_0) = \omega_0$. Далее, рассмотрим еще одно конформное отображение g. И еще раз воспользуемся теоремой Римана о конформных отображениях. Тогда существует конформное отображение $g : S \to D$ и $g(0) = z_0$.

Введем еще одну вспомогательную функцию $\varphi(\xi)$. Обозначим ее следующим образом

$$\varphi(\xi) = g^{-1}(F^{-1}(f(g(\xi)))) \Leftrightarrow f(g(\xi)) = F(g(\varphi(\xi))).$$

Найдем значение функции в нуле, то есть $\varphi(0) = g^{-1}(F^{-1}(f(g(0)))) = g^{-1}(F^{-1}(f(z_0))) = g^{-1}(F^{-1}(\omega_0)) = g^{-1}(z_0) = 0$.

Имеем, $\varphi - |\xi| < 1$ и $|\varphi(\xi)| < 1, \varphi(0) = 0$. Выполнены все условия леммы Шварца, значит к φ можем применить лемму Шварца (пункт 2), т.е $|\varphi'(0)| \leqslant 1$. Возьмем производную от следующего выражения: $f(g(\xi)) = F(g(\varphi(\xi)))$. Получаем

$$f'(g(\xi))g'(\xi) = F'(g(\varphi(\xi)))g'(\varphi(\xi))\varphi'(\xi).$$

Найдем значение выражения в точке $\xi = 0$ и получим

$$f'(z_0)g'(0) = F'(z_0)g'(0)\varphi'(0),$$

следовательно $|\varphi'(0)| \leqslant 1 \Leftrightarrow |f'(z_0)| \leqslant |F'(z_0)|$. Получаем требуемую оценку

$$|f'(z_0)| \leqslant |F'(z_0)| = \frac{\lambda_D(z_0)}{\lambda_\Omega(\omega_0)} = \frac{\lambda_D(z_0)}{\lambda_\Omega(f(z_0))}$$

.

Случай равенства в данном неравенстве рассмотрим пункт равенства в лемме Шварца.Равенство в лемме Шварца достигается тогда и только тогда, когда $\varphi(z) = e^{i\alpha}z, \alpha$-вещественное число. Получаем, что $f(g(\xi)) = F(g(e^{i\alpha}(\xi)))$.

Рассмотрим $z = g(\xi)$, тогда $\xi = g^{-1}(z)$. Следовательно, $f(z) = F(g(e^{i\alpha}g^{-1}(z)))$. Обозначим через $\psi(z) = g(e^{i\alpha}g^{-1}(z))$- конформное отображение D на D. Таким образом, $f(z)$ определяет одно из однолистных конформных отображений D на Ω.

5. Коэффициенты гиперболической метрики.

Принцип гиперболической метрики справедлив для произвольных гиперболических областей.

А мы рассмотрим конкретные области. Перед нами стоит задача написать конкретные неравенства для областей, используя общую теорему. Для этого необходимо найти коэффициенты гиперболической метрики для заданных областей. Рассмотрим следующие области:

1)Круг (рис.1)

2) Верхняя полуплоскость (рис.2)

3) Полоса (рис.3)

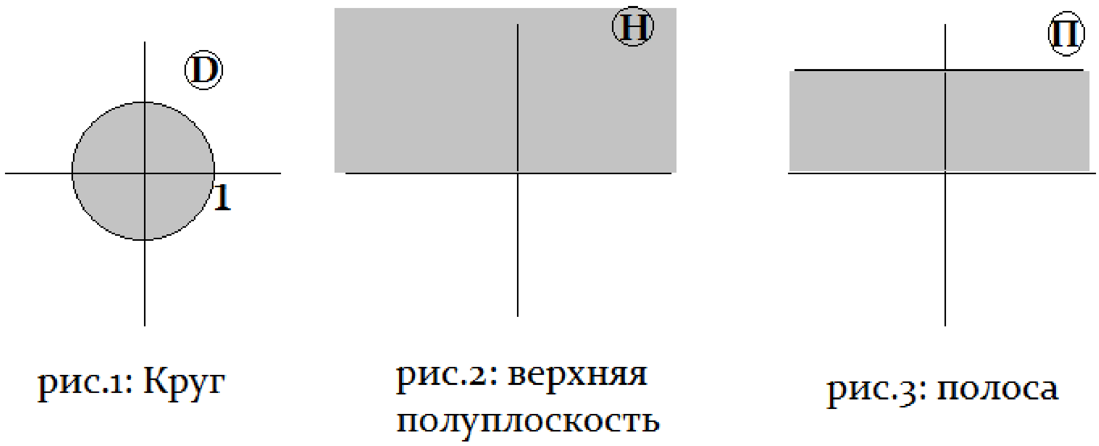

Рис. 11: Области

По определению коэффициент гиперболической метрики для круга имеет вид:

$$\lambda_D(\xi) = \frac{1}{1 - |\xi|^2}, \xi \in D.$$

Найдем коэффициент для верхней полуплоскости.

Имеем, что

$$\lambda_D(\xi) = \frac{1}{1 - |\xi|^2}, \xi \in D.$$

Рассмотрим конформное отображение $f : D \to H$ и вычислим коэффициент метрики пуанкаре для верхней полуплоскости $\lambda_H(z)$

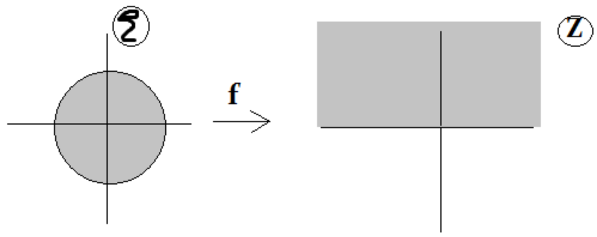

Рис. 12: Конформное отображение круга на верхнюю полуплоскость

В качестве f можно взять функцию $f(\xi) = \frac{1+\xi}{1-\xi}$. Сделаем замену $\xi = e^{i\theta}$ и и получим, что $f(e^{i\theta}) = i\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = i\frac{cos\frac{\theta}{2}}{-2sin\frac{\theta}{2}} = ctg\frac{\theta}{2}$.

Для нахождения $\lambda_H(z)$ возьмем функцию $z = i\frac{1+\xi}{1-\xi}$, тогда $\xi = \frac{iz+1}{iz-1} = g(z)$ и $1 - |g(z)|^2 = 1 - \frac{(iz+1)(-i\bar{z}+1)}{(iz-1)(-i\bar{z}-1)} = \frac{2i(\bar{z}-z)}{|iz-1|^2}$ Найдем производную

$$g'(z) = \frac{i(iz-1) - i(iz+1)}{(iz-1)^2} = \frac{-z-i+z-i}{-z^2-2iz+1} = -\frac{2i}{(iz-1)^2}.$$

Тогда $|g'(z)| = \frac{2}{|iz-1|^2}$. Следовательно,

$$\lambda_H(z) = \frac{2}{|iz-1|^2}\frac{|iz-1|^2}{2i(\bar{z}-z)} = \frac{1}{i(\bar{z}-z)} = \frac{1}{\text{ß}(x-iy-x-iy)} = \frac{1}{2y}.$$

Далее, найдем коэффициент метрики Пуанкаре для полосы. По определению имеем следующее тождество:

$$\lambda_P(z)|dz| = \lambda_H(w)|dw|.$$

Тогда

$$\lambda_P(z) = \lambda_H(w)|\frac{dw}{dz}| = \frac{1}{2V}|e^z| = \frac{|e^z|}{2Ime^z} = \frac{1}{2siny}.$$

Мы нашли коэффициенты метрики Пуанкаре для круга,полосы и верхней полуплоскости. Далее, рассмотрим конкретное неравенство для конкретных областей, используя общую теорему.

1. Рассмотрю случай, когда $\Omega_1 = \Omega_2 = D$. Функция f голоморфна в круге D и $f(D) \in D$. Тогда

$$|f'(z)| \leqslant \frac{\lambda_D(z)}{\lambda_D(f(z))} = \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}.$$

2. Рассмотрим случай, когда $\Omega_1 = P, \Omega_2 = H.$ Получаем, что

$$|f'(z)| \leqslant \frac{\lambda_P(z)}{\lambda_H(f(z))} = 12siny\frac{2Imf(z)}{1} = \frac{Imf(z)}{siny}.$$

3. Для $\lambda_1 = H, \lambda_2 = D$ получаю :

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1-|f(z)|^2}{2y}.$$

4. Для $\lambda_1 = D, \lambda_2 = H$ получаю:

$$|f'(z)| \leqslant \frac{\lambda_D(z)}{\lambda_P(f(z))} = \frac{2sin(Imf(z))}{1-|z|^2}.$$

5. Для $\lambda_1 = P, \lambda_2 = D$ получаю :

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1-|f(z)|^2}{2siny}.$$

В заключении хотелось бы сказать, что геометрия Лобачевского очень интересная тема. Казалась бы, геометрия, построенная на тех же аксиомах, что и геометрия Евклида и разница лишь в пятой аксиоме. Но данная аксиома является ключевым моментом в данной геометрии. Она связана с конформными отображениями, аналитическими функциями, оценками производных и многими другими интересными вещами.

Конформные отображения имеют применения во многих прикладных задачах. Основные приложения связаны с краевыми задачами, возникающими при изучении сплошных сред различной физической природы, например, при описании характеристик течения жидкости, электрических или магнитных полей, распределения напряжений

Список литературы

[1] Ф. Г. Авхадиев. Введение в геометрическую теорию функций. Учебное пособие. Казань: Казан.ун-т, 2012. — 127 с.

[2] Е. Н. Сосов. Геометрия Лобачевского и ее применение в специальной теории относительности. Учебное пособие. 2012. — 38 с.

[3] В. В. Славский. Оценка коэффициента квазиконформности области через кривизну квазигиперболической метрики. 1999. — 965 с.

[4] М. Гумин. Геометрия Лобачевского 2011. — 20 с.

[5] С. Стоилов. Теория функций комплексного переменного. С.Стоилов . 1954. — 358 с.