Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2011, №8, с. 46–55 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421100123\0083*

В.Н. СЕМЕНЧУК, С.Н. ШЕВЧУК

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, У КОТОРЫХ ПРИМАРНЫЕ ПОДГРУППЫ ЛИБО F-СУБНОРМАЛЬНЫ, ЛИБО F-АБНОРМАЛЬНЫ

Аннотация. Изучаются конечные группы, в которых каждая примарная подгруппа либо субнормальна, либо абнормальна относительно классов всех нильпотентных, всех p-замкнутых, всех p-нильпотентных групп. В частности, получено полное описание таких групп.

Ключевые слова: примарные группы, субнормальность, абнормальность, p-нильпотентные группы.

УДК: 512.542

Abstract. We study finite groups whose each primary subgroup is either subnormal or abnormal with respect to classes of all nilpotent, all p-closed, and all p-nilpotent groups. In particular, we completely describe these groups.

Keywords: primary groups, subnormality, abnormality, p-nilpotent groups.

Рассматриваются только конечные группы. В работе [1] было получено описание конечных групп, у которых любая собственная подгруппа либо субнормальна, либо абнормальна. В теории классов конечных групп естественным обобщением субнормальности и абнормальности является понятие $\mathfrak{F}$-субнормальности и $\mathfrak{F}$-абнормальности.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппу K группы G назовем $\mathfrak{F}$-субнормальной, если либо $K = G$, либо существует максимальная цепь

$$G = K_0 \supset K_1 \supset \cdots \supset K_n = K$$

такая, что $(K_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq K_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Подгруппу H группы G назовем $\mathfrak{F}$-абнормальной, если либо $H = G$, либо любая максимальная цепь

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \cdots \supset H_n = H$$

является такой, что $H_i(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} = H_{i-1}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

В работе [2] было исследовано строение конечных групп, у которых любая собственная подгруппа либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна для локальной формации $\mathfrak{F}$. Данная работа посвящена изучению строения конечных групп, у которых любая примарная подгруппа либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна. В частности, получено полное описание таких групп в случае, когда $\mathfrak{F}$ — класс всех нильпотентных, всех p-нильпотентных, всех p-замкнутых групп.

Поступила 16.04.2010

Напомним, что группа, порядок которой есть степень простого числа, называется примарной. Формация $\mathfrak{F}$ — класс групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Локальная формация — формация, замкнутая относительно фраттиниевых расширений. Подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ есть пересечение всех таких подгрупп N группы G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Обозначим через $\pi(\mathfrak{F})$ характеристику формации $\mathfrak{F}$, т. е. множество всех простых чисел, делящих порядки групп из $\mathfrak{F}$.

Все другие определения и обозначения можно найти в [3].

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная наследственная формация. Если в G все примарные подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны, то G — группа одного из следующих типов*:

1) $G \in \mathfrak{F}$;
2) $|G| = p$, *где* $p \notin \pi(\mathfrak{F})$;
3) $\left|G : G^{\mathfrak{F}}\right|$ *делится не менее чем на два различных простых числа.*

Доказательство. Пусть $G \notin \mathfrak{F}$. Предположим, что $G = G^{\mathfrak{F}}$. Согласно условию это возможно только в том случае, когда G — примарная p-подгруппа. Если $p \in \pi(\mathfrak{F})$, то из того факта, что $\mathfrak{F}$ — локальная формация, следует $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Если $p \notin \pi(\mathfrak{F})$, то из того факта, что любая примарная подгруппа из G $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, нетрудно заметить, что $|G| = p$. Пусть $G^{\mathfrak{F}}$ — собственная подгруппа из G. Предположим $\left|G : G^{\mathfrak{F}}\right| = p^{\alpha}$, где p — некоторое простое число. Тогда $G = G^{\mathfrak{F}}G_p$. Согласно условию леммы G_p — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Следовательно, $G_p \subseteq M$, где M — максимальная $\mathfrak{F}$-нормальная подгруппа группы G. Так как $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$, то $G = G_pG^{\mathfrak{F}} \subseteq M$, что невозможно. □

Напомним, что $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка группы G.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная наследственная формация. Пусть G — группа такая, что $G \notin \mathfrak{F}$, $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и любая примарная подгруппа из G либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна в G. Тогда $G^{\mathfrak{F}} \subset G$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. $G^{\mathfrak{F}} = G$. Согласно условию любая силовская p-подгруппа G_p, где $p \in \pi(G)$, является $\mathfrak{F}$-абнормальной в G. Так как $\mathfrak{F}$ — локальная формация, то $G_p \in \mathfrak{F}$ для любого простого числа p из $\pi(G)$. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то любая собственная неединичная подгруппа из G_p $\mathfrak{F}$-субнормальна в G_p, что невозможно. Итак, $|G_p| = p$ для любого простого числа p из $\pi(G)$. Отсюда следует разрешимость группы G. Так как $G_p \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$-абнормальна в G, то по теореме 15.1 ([3], с. 166–167) G_p — $\mathfrak{F}$-проектор группы G. Согласно теореме 15.3 ([3], с. 168–169) все $\mathfrak{F}$-проекторы группы G сопряжены в G. Отсюда нетрудно заметить, что $|G| = p$. А это значит, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. □

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная наследственная формация и G — группа такая, что $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Любая примарная подгруппа из G либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна тогда и только тогда, когда G — группа одного из следующих типов*:

1) *любая примарная подгруппа из G $\mathfrak{F}$-субнормальна в G*;

2) *$G = G^{\mathfrak{F}}G_p$, где $G^{\mathfrak{F}}$ — собственная подгруппа группы G, а силовская p-подгруппа G_p группы G $\mathfrak{F}$-абнормальна в G и является минимальным добавлением к $G^{\mathfrak{F}}$ в G, все другие примарные подгруппы G $\mathfrak{F}$-субнормальны в G.*

Доказательство. Необходимость. Если в группе G нет примарных $\mathfrak{F}$-абнормальных подгрупп, то G — группа из п. 1).

Пусть в G существует $\mathfrak{F}$-абнормальная примарная p-подгруппа N, где $p \in \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Так как $\mathfrak{F}$ — локальная формация, то $G_p \in \mathfrak{F}$. Пусть N — собственная подгруппа из G_p.

Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G_p, что невозможно. Итак, $N = G_p$. По лемме 2 $G^{\mathfrak{F}}$ — собственная подгруппа группы G. Покажем, что G_p является минимальным добавлением к $G^{\mathfrak{F}}$ в G. Предположим противное. Тогда в G_p найдется собственная подгруппа K такая, что $G^{\mathfrak{F}}K = G$. Согласно условию K либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна в G. Как показано выше, K не может быть $\mathfrak{F}$-абнормальной подгруппой группы G. Следовательно, K $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Отсюда следует, что K содержится в некоторой максимальной $\mathfrak{F}$-нормальной подгруппе M группы G. Так как $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$, то $G = G^{\mathfrak{F}}K \subseteq M$, что невозможно. Итак, G_p — минимальное добавление к $G^{\mathfrak{F}}$ в G. Пусть L — произвольная примарная подгруппа, отличная от G_p. Согласно условию L либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна в G. Так как либо $L \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, либо $L \subset G_p$, то нетрудно заметить, что L — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G.

Достаточность очевидна. □

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная наследственная разрешимая формация. Если в группе G ($\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$) любая примарная подгруппа либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна, то G — разрешимая группа.*

Доказательство. Пусть в группе G существует примарная $\mathfrak{F}$-субнормальная p-подгруппа H. Так как $\mathfrak{F}$ — разрешимая формация, то нетрудно показать, что G — разрешимая группа. Пусть в группе G все примарные подгруппы $\mathfrak{F}$-абнормальны. Пусть G_p — произвольная силовская p-подгруппа группы G. Так как $p \in \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{F}$ — локальная формация, то $G_p \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что любая собственная подгруппа K из G_p $\mathfrak{F}$-субнормальна в G_p, это противоречит тому, что K — $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа группы G.

Итак, $|G_p| = p$, где p — любое простое число из $\pi(G)$. А это значит, что G — разрешимая группа. □

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная наследственная разрешимая формация. Если любая примарная подгруппа группы G ($\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$) либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна в G, то G — разрешимая группа одного из следующих типов*:

1) *любая примарная подгруппа группы G $\mathfrak{F}$-субнормальна в G*;

2) *$G = G_{p'} \leftthreetimes G_p$, где G_p — $\mathfrak{F}$-проектор группы G, $G_{p'} = G^{\mathfrak{F}}$ и любая примарная подгруппа группы $G_{p'}$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

Доказательство. Согласно лемме 4 G — разрешимая группа.

Пусть в G все примарные подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны. Тогда G — группа из п. 1).

Пусть в G найдется примарная p-подгруппа, которая будет $\mathfrak{F}$-абнормальной в G. Рассмотрим силовскую p-подгруппу G_p группы G. Так как $\mathfrak{F}$ — локальная формация и $p \in \pi(\mathfrak{F})$, то $G_p \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то любая подгруппа из G_p $\mathfrak{F}$-субнормальна в G_p. Отсюда нетрудно заметить, что G_p — $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа группы G. Согласно теореме 15.1 ([3], с. 166–167) $\mathfrak{F}$-абнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа из G является $\mathfrak{F}$-проектором группы G. Итак, G_p — $\mathfrak{F}$-проектор группы G.

Пусть $G^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-корадикал группы G. Тогда $G^{\mathfrak{F}}G_p = G$. Покажем, что $G^{\mathfrak{F}} = G_{p'}$. По лемме 3 $G^{\mathfrak{F}} \subset G$ и G_p является минимальным добавлением к $G^{\mathfrak{F}}$ в G. Следовательно, $G_p^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}} \cap G_p \subseteq \Phi(G_p)$. По лемме Фраттини $G = G^{\mathfrak{F}}N_G(G_{p'}) = C_p^{\mathfrak{F}}G_{p'}N_G(G_{p'}) = G_p^{\mathfrak{F}}N_G(G_{p'})$.

Если $N_G(G_{p'}) \neq G$, то это противоречит тому, что $G_p^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(G_p)$. Следовательно, $G_{p'}$ нормальна в G. Отсюда следует $G_{p'} = G^{\mathfrak{F}}$. Так как $G^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, то, очевидно, все примарные подгруппы из $G^{\mathfrak{F}}$ $\mathfrak{F}$-субнормальны в G. □

Напомним, что наследственная формация $\mathfrak{F}$ называется сверхрадикальной, если она замкнута относительно произведений $\mathfrak{F}$-субнормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп.

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная наследственная сверхрадикальная формация. Пусть G — группа, у которой любая примарная подгруппа либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна. Тогда любая разрешимая $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа H такая, что $\pi(H) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, принадлежит $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть H — примарная p-подгруппа группы G. Так как $p \in \pi(H) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{F}$ — локальная формация, то $H \in \mathfrak{F}$. Пусть теперь $|\pi(H)| > 1$. Так как H — разрешимая группа, то $H = H_{p_1}H_{p_2}\dots H_{p_n}$. Так как H — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, то любая силовская подгруппа H_{p_i} $\mathfrak{F}$-субнормальна в H для любого $i = 1, 2, \dots, n$. Так как $\mathfrak{F}$ — сверхрадикальная формация, то $H_{p_1}H_{p_2} \in \mathfrak{F}$. По теореме 2 из [4] $H_{p_1}H_{p_2}$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа H. Так как $\mathfrak{F}$ — сверхрадикальная формация, то $H_{p_1}H_{p_2}H_{p_3} \in \mathfrak{F}$. Продолжая аналогичный процесс, получаем, что $H \in \mathfrak{F}$. □

Обозначим через $\mathfrak{S}_\pi$ класс всех разрешимых π-групп, где π — произвольное непустое множество простых чисел. Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Обозначим через I произвольное непустое подмножество из $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F} = \bigcap\limits_{(i,j)\in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}\mathfrak{S}_{\pi_j}$. Любая примарная подгруппа группы G ($\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$) либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна тогда и только тогда, когда G — группа одного из следующих типов*:

1) $G \in \mathfrak{F}$;

2) $G = G_{q'} \leftthreetimes G_q$, *где* $G_{q'} = G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, G_q — *$\mathfrak{F}$-проектор G, G_q — циклическая подгруппа, и любая ее максимальная подгруппа нормальна в G.*

Доказательство. Необходимость. Так как $\mathfrak{F}$ — разрешимая формация, то G — разрешимая группа по лемме 4.

Пусть $G \notin \mathfrak{F}$. Рассмотрим следующие два случая.

1. $G^{\mathfrak{F}}$ — собственная подгруппа группы G. Так как $G^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G и $\pi(G^{\mathfrak{F}}) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, то $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ по лемме 6.

Пусть H — $\mathfrak{F}$-проектор группы G. Пусть H_1 и H_2 — несопряженные максимальные подгруппы H. Тогда
$$G = G^{\mathfrak{F}}H_1G^{\mathfrak{F}}H_2.$$
Очевидно, $G^{\mathfrak{F}}H_1$ и $G^{\mathfrak{F}}H_2$ — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G. По лемме 6 имеем $G^{\mathfrak{F}}H_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$. Так как $\mathfrak{F}$ — сверхрадикальная формация, то $G \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Итак, H — циклическая q-группа. Очевидно, G_q — $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа группы G и $G_q \in \mathfrak{F}$. По теореме 15.1 ([3], с. 166–167) G_q — $\mathfrak{F}$-проектор группы G. Согласно теореме 15.3 ([3], с. 168–169) $H = G_q$.

Индукцией по порядку группы покажем, что $|G^{\mathfrak{F}}|$ не делится на q. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G из $G^{\mathfrak{F}}$. Пусть N — p-группа ($p \neq q$). Если $G/N \in \mathfrak{F}$, то $N = G^{\mathfrak{F}}$. Пусть $G/N \notin \mathfrak{F}$. По индукции $|G^{\mathfrak{F}}/N|$ не делится на q. Но тогда и $|G^{\mathfrak{F}}|$ не делится на q.

Пусть теперь N — q-группа. Если $\Phi(G) \neq 1$, то по индукции $|G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G)|$ не делится на q. Если $G^{\mathfrak{F}}$ не делится на q, то по лемме 4.4 ([3], с. 37) $G^{\mathfrak{F}}Q \times K$, где Q — содержащаяся в $\Phi(G)$ силовская q-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$. Тогда
$$(G/K)^{\mathfrak{F}} = QK/K \subseteq \Phi(G/K).$$
Отсюда в силу локальности формации $\mathfrak{F}$ получаем $G/K \in \mathfrak{F}$. Но тогда $G^{\mathfrak{F}} \subseteq K$, что невозможно. Значит, $\Phi(G) = 1$. Поэтому $G = N \times M = NM_qM_{q'}$. Так как $N \subseteq \Phi(G_q)$, то $G = M$, что невозможно. Итак, $G^{\mathfrak{F}} = G_{q'}$.

Покажем, что максимальная подгруппа G_q^* из G_q нормальна в группе G. По лемме 6 $G_{q'}G_q^* \in \mathfrak{F}$. Очевидно, $G_{q'}G_q^*$ — нормальная подгруппа в группе G. Рассмотрим подгруппу $G_pG_q^*$, где $p \neq q$. Очевидно, G_p нормальна в $G_pG_q^*$. Предположим, что $N_G(G_q^*) \neq G_pG_q^*$. Так как $G_pG_q^* \in \mathfrak{F}$, то

$$G_pG_q^*/F_p(G_pG_q^*) \in f(p),$$

где f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Поэтому $q \in \pi(f(p))$. Так как $\mathfrak{F}$ — разрешимая наследственная сверхрадикальная формация, то по теореме 1 из [4] она имеет следующее строение:

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{F})} \mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{S}_{\pi(f(p))} \bigcap \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})}.$$

Отсюда формация $\mathfrak{F}$ имеет локальный экран h такой, что для любого p из $\pi(\mathfrak{F})$

$$h(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}.$$

Так как $G_pG_q/F_q(G_pG_q) \in h(p)$ и $G_pG_q/F_p(G_pG_q) \in h(q)$, то $G_pG_q \in \mathfrak{F}$. Так как G_q — $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа из группы G, то G_qG_p — $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа из G. По теореме 15.1 ([3], с. 166–167) G_pG_q — $\mathfrak{F}$-проектор группы G, что невозможно. Итак, G_q^* нормальна в $G_pG_q^*$, где p — любое простое число из $\pi(G)$. Таким образом, G_q^* — нормальная подгруппа группы G.

2. Пусть $G^{\mathfrak{F}} = G$. Тогда G — разрешимая группа согласно лемме 4. Пусть p — произвольное простое число из $\pi(G)$, G_p — силовская p-подгруппа группы G. Нетрудно заметить, что G_p — $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа группы G. Очевидно, $G_p \in \mathfrak{F}$. По теореме 15.1 ([3], с. 166–167) G_p — $\mathfrak{F}$-проектор группы G. По теореме 15.5 ([3], с. 170) $\mathfrak{F}$-проектор группы G сопряжен. Отсюда нетрудно показать, что G — примарная группа. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$, это противоречит тому, что $G^{\mathfrak{F}} = G$. Рассматриваемый случай невозможен.

Достаточность. Пусть G — группа из п. 1) теоремы 1. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то в G любая примарная подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.

Пусть G — группа из п. 2) теоремы 1. Пусть K — произвольная примарная подгруппа группы G. Если $K = G_q$, то K — $\mathfrak{F}$-проектор группы G. Это значит, что K — $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа группы G. Пусть K — собственная подгруппа из G_q. Тогда $K \subseteq G_{q'} \times G_q^*$, где $G_{q'} = G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, G_q^* — максимальная подгруппа из G_q. Очевидно, $G_{q'} \times G_q^*$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Так как $G_{q'} \times G_q^* \in \mathfrak{F}$, то K — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа из G. Если K — p-группа, где $p \neq q$, то $K \subseteq G_{q'}$. Как и выше, легко показать, что K — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. □

Следствие. Любая примарная подгруппа в группе G либо абнормальна, либо субнормальна тогда и только тогда, когда G — группа одного из следующих типов:

1) G — нильпотентная группа;

2) $G = G_{q'} \leftthreetimes G_q$, где $G_{q'} = G^{\mathfrak{F}}$ нильпотентна, G_q — циклическая подгруппа Картера, и любая ее максимальная подгруппа нормальна в G.

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Если в группе G силовская p-подгруппа G_p $\mathfrak{F}$-субнормальная в G, где $p \notin \pi(\mathfrak{F})$, то G — p-замкнутая группа.*

Доказательство. Пусть $p \notin \pi(\mathfrak{F})$ и G_p — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Тогда согласно определению $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы либо $G_p = G$, либо существует максимальная цепь

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \cdots \supseteq H_n = G_p$$

такая, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

По индукции следует, что H_1 — p-замкнутая группа. Так как H_1 — максимальная $\mathfrak{F}$-нормальная подгруппа группы G, то $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H_1$. Поскольку $p \notin \pi(\mathfrak{F})$, то $G_p \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. $G^{\mathfrak{F}}$ p-замкнута, и поэтому нетрудно заметить, что и G p-замкнута. □

Лемма 8. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация. Пусть G — группа, у которой любая примарная подгруппа либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна, а H — собственная $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа G. Тогда либо $\pi(H) \cap \pi'(\mathfrak{F}) = \varnothing$, либо $\pi(H) \cap \pi'(\mathfrak{F}) = \{p\}$, H — p-замкнутая группа и $|H_p| = p$.*

Доказательство. Пусть H — собственная $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G и H_p — силовская p-подгруппа из H, где $p \notin \pi(\mathfrak{F})$. В силу леммы 7 H_p — нормальная подгруппа из H.

Предположим, что $\pi(H) \cap \pi'(\mathfrak{F}) = \{p, q\}$, где p и q — различные простые числа. Как показано выше, H_p и H_q — нормальные силовские подгруппы в H. Так как H — собственная $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, то согласно условию леммы H_p и H_q — $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G. Рассмотрим подгруппу H_pH_q. Очевидно, H_p — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа из H_pH_q, что невозможно, так как p и q не принадлежат $\pi(\mathfrak{F})$.

Покажем, что $|H_p| = p$. Предположим противное. Тогда в H_p найдется неединичная собственная подгруппа K. Согласно условию K либо $\mathfrak{F}$-субнормальная, либо $\mathfrak{F}$-абнормальная. Если K — $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа G, то и H_p —$\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа группы G, что невозможно. Итак, K — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Тогда K $\mathfrak{F}$-субнормальная в H_p, что невозможно, так как $p \notin \pi(\mathfrak{F})$. Итак, $|H_p| = p$. □

Лемма 9. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация, G — разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа с единичной подгруппой Фраттини. Тогда любая примарная подгруппа из G либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна.*

Доказательство. По теореме 24.1 ([3], с. 232) $G^{\mathfrak{F}}$ — примарная p-группа. Пусть N — произвольная примарная группа. Рассмотрим подгруппу $G^{\mathfrak{F}}N$. Если $G^{\mathfrak{F}}N \neq G$, то $G^{\mathfrak{F}}N \in \mathfrak{F}$ и любая подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}N$ также принадлежит $\mathfrak{F}$. Отсюда следует, что N — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}N$. Очевидно, $G^{\mathfrak{F}}N$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Тогда N — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G.

Пусть $G = G^{\mathfrak{F}}N$. Если N — p-группа, то G — p-группа. Так как $\mathfrak{F}$ — локальная формация, то $G \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Так как $\Phi(G) = 1$, то согласно теореме 24.2 ([3], с. 232–234) $G^{\mathfrak{F}}$ — минимальная нормальная подгруппа. Отсюда нетрудно заметить, что N — $\mathfrak{F}$-проектор группы G. А это значит, что N — $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа группы G. □

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F} = \bigcap_{(i,j)\in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}\mathfrak{S}_{\pi_j}$. Любая примарная подгруппа группы G либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна тогда и только тогда, когда G — группа одного из следующих типов*:

1) $G \in \mathfrak{F}$;

2) *$G = G_{q'} \rtimes G_q$, где $G_{q'} = G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, G_q — $\mathfrak{F}$-проектор G, G_q — циклическая подгруппа, и любая ее максимальная подгруппа нормальна в G*;

3) *$G = G_p \rtimes G_q$, где $p \notin \pi(\mathfrak{F})$, $q \in \pi(\mathfrak{F})$ и $|G_p| = p$, $|G_q| = q$*;

4) *G — $\pi'(\mathfrak{F})$-группа*;

5) *$G = G_{p'}G_p$, где $p \in \pi(\mathfrak{F})$, $\pi(G_{p'}) \subseteq \pi'(\mathfrak{F})$, $|G_p| = p$, G_p — $\mathfrak{F}$-проектор группы G, $N_G(K)$ — p'-группа, где K — любая p'-подгруппа из G.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $G \notin \mathfrak{F}$. Рассмотрим следующие два случая.

1. Пусть $G^{\mathfrak{F}}$ — собственная подгруппа группы G. Если $\pi(G^{\mathfrak{F}}) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, то $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. В силу теоремы 1 G — группа из п. 1) или п. 2). Если $\pi(G^{\mathfrak{F}}) \nsubseteq \pi(\mathfrak{F})$, то найдется простое

число $p \in \pi(G^{\mathfrak{F}})\backslash\pi(\mathfrak{F})$. Очевидно, $G_p \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Так как $G^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, то G_p — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Согласно лемме 7 G — p-замкнутая группа. Ввиду леммы 8 нетрудно показать, что $G = G_p \leftthreetimes G_{p'}$, где $|G_p| = p$, $\pi(G_{p'}) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. По теореме 1 $G_{p'}$ — разрешимая группа. Отсюда следует, что группа G разрешима.

Покажем, что $G = G_p \leftthreetimes G_q$. Предположим, что $|\pi(G)| \geq 3$. Тогда $|G|$ делится не менее чем на три различных простых числа p, q, r. Если G_q $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то она будет $\mathfrak{F}$-субнормальна и в G_pG_q, что невозможно, так как $p \notin \pi(\mathfrak{F})$. Итак, G_q, G_r — $\mathfrak{F}$-абнормальные подгруппы G. Так как $q, r \in \pi(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{F}$ — локальная формация, то G_p, G_q принадлежат $\mathfrak{F}$. По теореме 15.1 ([3], с. 166–167) они являются $\mathfrak{F}$-проекторами группы G. По теореме 15.5 ([3], с. 170) они сопряжены, что невозможно. Покажем, что $|G_q| = q$. Предположим противное. Тогда в G_q найдется неединичная собственная подгруппа K, которая будет $\mathfrak{F}$-субнормальной в G. Тогда K $\mathfrak{F}$-субнормальна в G_pK, что невозможно.

2. Пусть $G^{\mathfrak{F}} = G$. Если $\pi(G) \subseteq \pi'(\mathfrak{F})$, то G — группа из п. 4).

Пусть $\pi(G) \cap \pi(\mathfrak{F}) \neq \varnothing$ и p — произвольное число из $\pi(G) \cap \pi(\mathfrak{F})$. Очевидно, любая примарная подгруппа из G $\mathfrak{F}$-абнормальна в G. Пусть G_p — силовская p-подгруппа из G. Так как $\mathfrak{F}$ — локальная формация, то $G_p \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то собственная неединичная подгруппа из G_p $\mathfrak{F}$-субнормальна в G_p, что невозможно. Итак, $|G_p| = p$, где p — любое простое число из $\pi(G) \cap \pi(\mathfrak{F})$. Отсюда следует $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимость группы G.

По теореме 15.1 ([3], с. 166–167) G_p — $\mathfrak{F}$-проектор группы G. По теореме 15.5 ([3], с. 170) $\mathfrak{F}$-проекторы группы G сопряжены. А это значит, что $G{=}G_{p'}G_p$, где $p \in \pi(\mathfrak{F})$, $\pi(G_{p'}) \subseteq \pi'(\mathfrak{F})$.

Пусть K — произвольная p'-группа. Покажем, что $N_G(K)$ — p'-подгруппа. Предположим противное. Тогда рассмотрим подгруппу $K \leftthreetimes T$, где T — p-группа. Так как $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $\mathfrak{F}$ — локальная формация, то $T \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что K — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа из $K \leftthreetimes T$, что невозможно, так как $G^{\mathfrak{F}} = G$.

Достаточность. Пусть G — группа из п. 1). Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то любая подгруппа из G $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.

Пусть G — группа из п. 2). Согласно теореме 1 любая примарная подгруппа из G либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна.

Пусть G — группа из п. 3). Очевидно, G_p — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G, а G_q — $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа группы G.

Пусть G — группа из п. 4). Тогда в ней любая собственная неединичная подгруппа $\mathfrak{F}$-абнормальна в G.

Пусть G — группа из п. 5) и K — произвольная примарная подгруппа G. Если K — p-группа, то $K = G_p$ — $\mathfrak{F}$-проектор G. Следовательно, K $\mathfrak{F}$-абнормальна в G. Пусть K — p'-группа. Так как $N_G(K)$ — $\pi'(\mathfrak{F})$-группа, то нетрудно показать, что K — $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа группы G. □

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех p-замкнутых групп. Любая примарная подгруппа группы G либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна тогда и только тогда, когда G — группа одного из следующих типов*:

1) *G — p-замкнутая группа*;

2) *$G = G_{p'} \leftthreetimes G_p$, где $G_{p'} = G^{\mathfrak{F}}$, G_p — циклическая подгруппа Картера и любая максимальная подгруппа из G_p нормальна в G.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G — группа, у которой любая примарная подгруппа либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна. Пусть G не является p-замкнутой группой. Рассмотрим следующие два случая.

1. $G^{\mathfrak{F}} = G$. Тогда согласно условию любая силовская q-подгруппа G_q, где q — любое простое число из $\pi(G)$, является $\mathfrak{F}$-абнормальной в G. Покажем, что $|G_q| = q$. Если $|G_q| = q^{\alpha}$, где $\alpha > 1$, то в G_q найдется примарная собственная подгруппа N. Так как $G_q \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G_q. Тогда согласно теореме 3 подгруппа N $\mathfrak{F}$ субнормальна в G, что невозможно. Итак, G — группа, у которой порядок любой силовской подгруппы есть простое число. Отсюда следует, что G — разрешимая группа. Так как любая силовская подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{F}$ и является $\mathfrak{F}$-абнормальной в G, то по теореме 15.1 ([3], с. 166–167) она является $\mathfrak{F}$-проектором. Так как в разрешимой группе все $\mathfrak{F}$-проекторы сопряжены, то G — группа простого порядка. Но тогда G — p-замкнутая группа, что невозможно.

2. $G^{\mathfrak{F}}$ — неединичная собственная подгруппа группы G. Очевидно, $G^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Пусть $G_q^{\mathfrak{F}}$ — силовская q-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$, где q — любое простое число из $\pi(G^{\mathfrak{F}})$. Нетрудно заметить, что $G_q^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Но тогда $G_q^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в $G^{\mathfrak{F}}$. По теореме 1 из [5] $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Если индекс $\left|G : G^{\mathfrak{F}}\right|$ не делится на p, то $G_p \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Так как $G^{\mathfrak{F}}$ — p-замкнутая подгруппа, то G — p-замкнутая группа, что невозможно. Если в группе G все силовские подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны, то по теореме 1 из [5] G — p-замкнутая подгруппа группы G, что невозможно. Пусть G_r — $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа группы G. Покажем, что $G = G^{\mathfrak{F}}G_r$. Если $G^{\mathfrak{F}}G_r$ — собственная подгруппа группы G, то $G^{\mathfrak{F}}G_r$ содержится в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Очевидно, M $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Получили противоречие. Итак, $G = G^{\mathfrak{F}}G_r$. Если $r \neq p$, то индекс $\left|G : G^{\mathfrak{F}}\right|$ не делится на p. Как показано выше, в этом случае G — p-замкнутая группа, что невозможно.

Итак, $G = G^{\mathfrak{F}}G_p$. Так как $G^{\mathfrak{F}}$ — p-замкнутая группа, то $G^{\mathfrak{F}}$ — p-разрешимая группа. Отсюда следует, что G — p-разрешимая группа. Рассмотрим подгруппу $G_{p'}$. Очевидно, $G_{p'} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Покажем, что G_p является добавлением к $G^{\mathfrak{F}}$ в G. Действительно, пусть K — собственная подгруппа из G_p. Так как $G_p \in \mathfrak{F}$, то K — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в G_p, а значит, согласно условию K — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Следовательно, K содержится в некоторой максимальной $\mathfrak{F}$-нормальной подгруппе M группы G. Так как $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$, то $G^{\mathfrak{F}}K \subseteq M$. А это значит, что $G^{\mathfrak{F}}K \neq G$. Отсюда $G_p^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}} \cap G_p \subseteq \Phi(G_p)$.

По лемме Фраттини $G = G^{\mathfrak{F}}N_G(G_{p'}) = G_{p'}G_p^{\mathfrak{F}}N_G(G_{p'}) = N_G(G_{p'})$. Итак, $G = G_{p'} \rtimes G_p$, где $G_{p'} = G^{\mathfrak{F}}$. Покажем, что G_p — циклическая группа. Предположим противное. Тогда в G_q найдутся несопряженные максимальные подгруппы M_1 и M_2. Очевидно, $G_{p'}M_1$ и $G_{p'}M_2$ — собственные нормальные подгруппы группы G. Нетрудно заметить, что силовские подгруппы из $G_{p'}M_i$, $i = 1, 2$, $\mathfrak{F}$-субнормальны. Согласно теореме 1 из [5] $G_{p'}M_i$, $i = 1, 2$, p-замкнуты. Отсюда G p-замкнута. Получили противоречие. Так как G_p $\mathfrak{F}$-абнормальна в G, то нетрудно заметить, что $N_G(G_p) = G_p$. Следовательно, G_p — подгруппа Картера.

Пусть G_p^* — максимальная подгруппа из G_p. Покажем, что G_p^* — нормальная подгруппа группы G. Очевидно, $G_{p'}G_p^*$ — нормальная подгруппа группы G. Нетрудно заметить, что любая силовская подгруппа из $G_{p'}G_p^*$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в $G_{p'}G_p^*$. Отсюда по теореме 1 из [5] $G_{p'}G_p^*$ p-замкнута. А это значит, что G_p^* — нормальная подгруппа группы G.

Достаточность. Пусть G — группа из п. 1). Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то любая подгруппа из G $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.

Пусть G — группа из п. 2). Пусть N — произвольная примарная q-подгруппа группы G. Если $q \neq p$, то $N \subseteq G_{p'} = G^{\mathfrak{F}}$. Очевидно, N $\mathfrak{F}$-субнормальна в $G^{\mathfrak{F}}$, а $G^{\mathfrak{F}}$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Но тогда N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Пусть $q = p$. Если N — собственная подгруппа из G_p, то $N \subseteq G_p^*$. Так как G_p^* нормальна в G и $G_p^* \in \mathfrak{F}$, то нетрудно показать, что N

— $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Покажем, что G_p — $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа группы G. Пусть M — произвольная максимальная подгруппа группы G, содержащая G_p. Очевидно, M — $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа группы G. По индукции нетрудно показать, что G_p — $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа из M. А это значит, что G_p — $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа группы G. □

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех p-нильпотентных групп. Любая примарная подгруппа группы G либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна тогда и только тогда, когда G — группа одного из следующих типов*:

1) *G — p-нильпотентная группа*;

2) *$G = G_p \leftthreetimes G_q$, где $q \neq p$, G_q — циклическая подгруппа Картера, любая максимальная подгруппа из G_q нормальна в G, $G_p = G^{\mathfrak{F}}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G не является p-нильпотентной группой. Рассмотрим следующие два случая.

1. $G^{\mathfrak{F}} = G$. Как и в теореме 3, нетрудно доказать, что G — группа простого порядка. Это значит, что G p-нильпотентна, что невозможно.

2. Пусть $G^{\mathfrak{F}}$ — неединичная собственная подгруппа группы G. Как и в теореме 3, нетрудно показать, что $G^{\mathfrak{F}}$ — p-нильпотентная подгруппа. Если в группе G все силовские подгруппы $\mathfrak{F}$-субнормальны в G, то по теореме 1 из [5] G p-нильпотентна, что невозможно. Итак, в группе G найдется силовская подгруппа G_q, которая $\mathfrak{F}$-абнормальна в G. Покажем, что $G^{\mathfrak{F}}G_q = G$. Предположим противное. Тогда $G^{\mathfrak{F}}G_q$ содержится в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Так как $G^{\mathfrak{F}} \subseteq M$, то M $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, что невозможно. Если $q = p$, то из того, что $G^{\mathfrak{F}}$ p-нильпотентна, нетрудно показать, что G p-нильпотентна, что невозможно. Итак, $q \neq p$. Очевидно, $p \in \pi(G^{\mathfrak{F}})$.

Покажем, что $G^{\mathfrak{F}}$ — p-группа. Так как $G^{\mathfrak{F}}$ p-нильпотентна, то G p-разрешима. Ясно, что G_q содержится в некоторой $G_{p'}$. Если $|G_{p'}|$ делится на простое число $r \neq q$, то G_q — собственная подгруппа $G_{p'}$, что невозможно ввиду $\mathfrak{F}$-абнормальной подгруппы G_q в G. Итак, $G = G_pG_q$. Покажем, что $G_p = G^{\mathfrak{F}}$. Как и в теореме 3, нетрудно показать, что G_q является минимальным добавлением к $G^{\mathfrak{F}}$ в G. Отсюда $G_q^{\mathfrak{F}} \subseteq G^* \cap G_q \subseteq \Phi(G_q)$. По лемме Фраттини

$$G = G^{\mathfrak{F}}N_G(G_p) = G_q^{\mathfrak{F}}G_pN_G(G_p) = G_q^{\mathfrak{F}}N_G(G_p).$$

Так как $G_q^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(G_q)$, то $N_G(G_p) = G$. Следовательно, G_p нормальна в G и, значит, $G^{\mathfrak{F}} = G_p$.

Покажем, что G_q — циклическая подгруппа. Предположим противное. Тогда в G_q найдутся две максимальные несопряженные подгруппы M_1 и M_2. Так как M_i $\mathfrak{F}$-субнормальна в G_q, то согласно условию M_i — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа группы G. Следовательно, $G^{\mathfrak{F}}M_i$ содержится в некоторой максимальной $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппе группы G. Нетрудно показать, что $G^{\mathfrak{F}}M_i$ p-нильпотентна, $i = 1, 2$. Так как $\mathfrak{F}$ — сверхрадикальная формация и $G = G^{\mathfrak{F}}M_1G^{\mathfrak{F}}M_2$, то $G \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Покажем, что максимальная подгруппа G_q^* из G_q нормальна в G. Рассмотрим подгруппу $G^{\mathfrak{F}}G_q^* = H$. Нетрудно заметить, что $G^{\mathfrak{F}}G_q^*$ нормальна в G.

Ясно, что $G^{\mathfrak{F}} = G_p$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в H. Так как G_q^* $\mathfrak{F}$-субнормальна в G_q, то согласно условию она $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, а значит, и в H. По теореме 1 из [5] $G_pG_q^*$ p-нильпотентна. Отсюда G_q^* нормальна в G.

Покажем, что G_q — подгруппа Картера. Для этого надо показать, что $N_G(G_q) = G_q$. Предположим противное. Тогда $N_G(G_q) = T\lambda G_q$, где T — p-подгруппа. Так как $N_G(G_q)$ p-нильпотентна, то G_q $\mathfrak{F}$-субнормальна в $N_G(G_q)$, что невозможно.

Достаточность доказывается аналогично теореме 3. □

Литература

[1] Ebert G., Bauman S. *A note on subnormal and abnormal chains*, J. Algebra, **36** (2), 287–293 (1975).

[2] Семенчук В.Н. *Строение конечных групп с $\mathfrak{F}$-абнормальными или $\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами*, Вопр. алгебры (Изд-во "Университетское", Минск, 1985), №2, с. 50–55.

[3] Шеметков Л.А. *Формации конечных групп* (Наука, М., 1978).

[4] Семенчук В.Н. *Об одной проблеме в теории формаций*, Весцi АН Беларусi, №3, 25–29 (1996).

[5] Семенчук В.Н., Шевчук С.Н. *О произведении классов конечных групп*, Изв. Гомельск. гос. ун-та **6** (51), 162-163 (2008).

В.Н. Семенчук

профессор, заведующий кафедрой высшей математики,
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, д. 104, г. Гомель, 246019, Республика Беларусь,

`e-mail:` kolenchukova@gsu.by

С.Н. Шевчук

аспирант, кафедра алгебры и геометрии,
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, д. 104, г. Гомель, 246019, Республика Беларусь,

`e-mail:` sshauchuk@gmail.com

V.N. Semenchuk

Professor, Head of the Chair of Higher Mathematics,
Gomel State University,
104 Sovetskaya str., Gomel, 246019 Republic of Belarus,

`e-mail:` kolenchukova@gsu.by

S.N. Shevchuk

Postgraduate, Chair of Algebra and Geometry,
Gomel State University,
104 Sovetskaya str., Gomel, 246019 Republic of Belarus,

`e-mail:` sshauchuk@gmail.com