II. **ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

Лекция 9. ТЕНЗОРЫ В ВЕКТОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

9.1. Понятие тензора. Компоненты тензора и закон их преобразования.

Прежде, чем начать изучение теории поверхностей, а затем и теории многообразий, нам необходимо познакомимся с тензорами и с основными тензорными операциями. Начнем с тензоров частного вида — ковариантных тензоров.

Определение.*Пусть* $\boldsymbol{V}$ *— векторное пространство размерности* m. *Ковариантным тензором валентности* q *на* $\boldsymbol{V}$, *где* $q \geq 0$ *— целое неотрицательное число, называется полилинейная функция* $T = T(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_q)$ *от* q *векторных аргументов.*

Таким образом, на каждом наборе векторов $\mathbf{a}_i \in \mathbf{V}$, $(i = 1, 2, \ldots, q)$ мы получаем некоторое число. Полилинейность этой функции означает, что она линейна по каждому аргументу. При $q = 0$ тензор по определению является числом (скаляром).

Вследствие полилинейности тензор достаточно задать на базисе $\{\mathbf{e}_i\}$ пространства $\mathbf{V}$. Значения тензора на наборе базисных векторов

$$T_{i_1 i_2 \ldots i_q} = T(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \mathbf{e}_{i_q}), \quad (1 \leq i_s \leq m) \tag{1}$$

называются *компонентами тензора* в этом базисе. Это m^q чисел. Тогда его значения на произвольных аргументах равны

$$T(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q) = T(a_1^{i_1}\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, a_q^{i_q}\mathbf{e}_{i_q}) = T_{i_1 \ldots i_q} a_1^{i_1} \ldots a_q^{i_q}.$$

Здесь всюду по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до m (правило Эйнштейна). При этом надо иметь ввиду, что если мы выберем другой базис, векторы которого обозначим штрихованными индексами $\mathbf{e}_{i'}$, то изменятся и компоненты тензора. Найдем закон их преобразования. Пусть $\mathbf{e}_{i'} = A_{i'}^{i}\mathbf{e}_i$, где $\det(A_{i'}^{i}) \neq 0$. Тогда, используя полилинейность тензора, получим

$$T_{i'_1 \ldots i'_q} = T_{i_1 \ldots i_q} A_{i'_1}^{i_1} \ldots A_{i'_q}^{i_q}. \tag{2}$$

Такой закон преобразования совокупности чисел называется *тензорным.* Векторное пространство $\mathbf{V}$, а значит и компоненты тензора, в дальнейшем будут считаться вещественными.

Примеры.

1) Если $q = 1$, мы имеем линейную форму $T(\mathbf{a}) = T_i a^i$. Она называется также *ковектором.* Закон преобразования его компонент $T_{i'} = T_i A_{i'}^{i}$. Обратим внимание на то, что он отличен от закона преобразования координат вектора.

2) При $q = 2$ имеем билинейную форму $T(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = T_{ij} a^i b^j$. Примером является скалярное произведение векторов $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Этот тензор называется *метрическим* и в координатах представляется в виде $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = g_{ij} a^i b^j$. Он обладает свойствами симметрии, невырожденности матрицы (g_{ij}) и положительной определенности соответствующей квадратичной формы.

Нам понадобится и более общее понятие тензора. Для этого наряду с $\mathbf{V}$ рассмотрим *сопряженное* векторное (ковекторное) пространство $\mathbf{V}^*$. Напомним, что оно образовано множеством всех линейных форм на $\mathbf{V}$ (ковекторов) с линейными операциями

$$(\xi + \eta)(\mathbf{a}) = \xi(\mathbf{a}) + \eta(\mathbf{a}), \quad (\lambda\xi)(\mathbf{a}) = \lambda\xi(\mathbf{a}), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

и имеет ту же самую размерность m. Если $\{\mathbf{e}_i\}$ — базис в $\mathbf{V}$, то базис сопряженного пространства (кобазис) образован линейными формами $\{\mathbf{e}^i\}$, номера которых будем обозначать верхними индексами. Выберем его так, чтобы выполнялось *условие сопряженности* $e^i(e_j) = \delta^i_j$. Разложение всякой линейной формы по кобазису $\xi = \xi_i \mathbf{e}^i$ дает ее компоненты $\xi_i = \xi(\mathbf{e}_i)$, а значение на любом векторе равно

$$\xi(\mathbf{a}) = \xi(a^i \mathbf{e}_i) = \xi_i a^i. \tag{3}$$

Определение. *Тензором валентности (p, q) на $\boldsymbol{V}$ называется полилинейная функция $T = T(\xi_1, \ldots, \xi_p, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_q)$ от p ковекторных и q векторных аргументов.*

В частности, тензор валентности $(p, 0)$ называется *контравариантным.* В дальнейшем для простоты мы ограничимся рассмотрением, например, тензоров валентности $(1, 2)$.

Если разложить аргументы тензора по базисам соответствующих пространств, то в силу его полилинейности получим

$$T(\xi, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = T^i_{jk} \xi_i a^j b^k\,. \tag{4}$$

Компоненты этого тензора

$$T^i_{jk} = T(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) \tag{5}$$

суть его значения на базисных элементах.

Для того, чтобы получить закон преобразования этих компонент при переходе к другому базису, следует иметь ввиду, что одновременно с преобразованием $\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{e}_i$ базиса в $\mathbf{V}$ преобразуется и сопряженный базис $\mathbf{e}^{i'} = A^{i'}_i \mathbf{e}^i$ с помощью обратной матрицы $A^{-1} = (A^{i'}_i)$ (мы различаем эти матрицы положением штрихованного индекса). Действительно, пусть при этом преобразовании $\mathbf{e}^{i'} = B^{i'}_i \mathbf{e}^i$. Из условия сопряженности преобразованных базисов $\mathbf{e}^{i'}(\mathbf{e}_{j'}) = \delta^{i'}_{j'}$ имеем

$$B^{i'}_i \mathbf{e}^i(A^j_{j'} e_j) = B^{i'}_i A^j_{j'} \delta^i_j = B^{i'}_i A^i_{j'} = \delta^{i'}_{j'},$$

т. е. $BA = E$, откуда и следует, что $B = A^{-1}$. Тогда из (5) получим следующий закон преобразования компонент тензора

$$T^{i'}_{j'k'} = A^{i'}_i T^i_{jk} A^j_{j'} A^k_{k'}. \tag{6}$$

Отсюда вытекает *основное свойство тензора*:

Теорема 1. *Если компоненты тензора равны нулю в каком либо базисе, то они равны нулю и в любом другом базисе.*

Рассмотрим ковариантные или контравариантные тензоры.

Определение. *Тензор называется симметричным, если при транспозиции любой пары своих аргументов (индексов) он не изменяется и кососимметричным, если он изменяет свой знак.*

Тензор может быть симметричным или кососимметричным не по всем аргументам, а лишь по некоторой их части. Условия симметрии или косой симметрии снижают число *существенных* компонент тензора. Так называются компоненты, не равные тождественно нулю и определенные с точностью до знака.

Примеры.

1) Тензор валентности $(1, 1)$ имеет вид $T(\xi, \mathbf{a}) = T^i_j \xi_i a^j$. Его можно отождествить с *линейным оператором* $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ следующим образом: $T(\xi, \mathbf{a}) = \xi(A\mathbf{a})$. Этот оператор в выбранном базисе имеет матрицу (T^i_j), составленную из компонент этого тензора.

2) В частности, тензор $\delta(\xi, \mathbf{a}) = \xi(\mathbf{a})$ соответствует тождественному оператору с единичной матрицей $E = (\delta_i^j)$. Он называется *тензором Кронекера.* Его компоненты δ_j^i равны единице или нулю, в зависимости от того, совпадают или различны его индексы. Отсюда вытекает важное свойство *поглощения* этого тензора при свертывании с другим тензором. Например, $T_{jk}^i \delta_m^k = T_{jm}^i$.

3) Смешанное произведение векторов $\varepsilon = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ в 3-мерном евклидовом пространстве линейно по всем своим сомножителям и поэтому есть тензор валентности $(0, 3)$. Это кососимметричный тензор, ибо при любой транспозиции векторов он изменяет знак. Этот тензор имеет только одну существенную компоненту $\varepsilon_{123} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

9.2. Основные тензорные операции.

Существует ряд операций с тензорами, приводящих снова к тензорным величинам. Простейшими среди них являются две линейные операции.

1) *Сложение тензоров.* Пусть T и S — тензоры одинаковой валентности, например $p = 1$, $q = 2$. Их сумма определяется формулой

$$(T + S)(\xi, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = T(\xi, \mathbf{a}, \mathbf{b}) + S(\xi, \mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Легко видеть, что $T+S$ есть тензор той же валентности. В координатах это выглядит так

$$(T + S)_{ij}^k = T_{ij}^k + S_{ij}^k .$$

2) *Умножение тензора на число* определяется формулой

$$(\lambda T)(\xi, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda T(\xi, \mathbf{a}, \mathbf{b})$$

или в координатах

$$(\lambda T)_{ij}^k = \lambda T_{ij}^k .$$

Это тензор той же валентности. Эти две операции обладают обычными свойствами линейных операций.

3) *Умножение тензоров.* Пусть T — тензор валентности (p_1, q_1) и S — тензор валентности (p_2, q_2). Перемножая их как функции, получим новую функцию $T \otimes S$ (знак тензорного умножения) от p_1+p_2 ковекторных и q_1+q_2 векторных аргументов. Например,

$$(T \otimes S)(\xi, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \eta, \mathbf{c}) = T(\xi, \mathbf{a}, \mathbf{b}) S(\eta, \mathbf{c}).$$

Нетрудно видеть, что эта функция обладает свойством линейности по всем своим аргументам и, следовательно, является тензором. Подставляя сюда базисные векторы, мы увидим, что в координатах дело сводится к перемножению координат этих тензоров

$$K_{ijk}^{lm} = T_{ij}^l S_k^m .$$

Очевидно, тензорное произведение линейно по каждому сомножителю и ассоциативно: $(T \otimes S) \otimes K = T \otimes (S \otimes K)$. Но оно не коммутативно, поскольку тензор $S \otimes T$ имеет другое расположение аргументов. В частности, если S — скаляр, то получим уже рассмотренную выше вторую линейную операцию.

4) *Свертывание тензора.* Эта операция применяется к смешанным тензорам, которые имеют оба типа аргументов. Выберем какую либо пару из них, подставим вместо этих аргументов базисные векторы и просуммируем по их номерам. Например, для тензора $T(\xi, \mathbf{a}, \mathbf{b})$

$$S(\mathbf{b}) = T(\mathbf{e}^k, \mathbf{e}_k, \mathbf{b}).$$

Вследствие произвольности вектора $\mathbf{b}$ получим в координатах

$$S_j = T^k_{kj}$$

(не забудем, что здесь по повторяющемуся индексу идет суммирование). В общем случае получим полилинейную функцию от $q-1$ векторных и $p-1$ ковекторных аргументов, которая обозначается символом $S = \mathrm{tr}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{m}}\mathrm{T}$, где указаны номера тех аргументов, по которым произведено свертывание.

Теорема 2. S *есть тензор валентности* $(p-1, q-1)$.

Доказательство. S есть функция, полилинейная по оставшимся аргументам, но в нее входят базисные векторы и надо доказать, что ее значения не зависят от выбора базиса. Перейдем к новому базису. В нашем примере получим

$$S'(\mathbf{b}) = T(\mathbf{e}^{k'}, \mathbf{e}_{k'}, \mathbf{b}) = T(A^{k'}_i \mathbf{e}^i, A^j_{k'}\mathbf{e}_j, \mathbf{b}) = \delta^j_k T(\mathbf{e}^k, \mathbf{e}_j, \mathbf{b}) = T(e^k, \mathbf{e}_k, \mathbf{b}) = S(\mathbf{b}).$$

В общем случае выкладки аналогичны. $\square$

В практических вычислениях свертывание часто комбинируется с умножением тензоров. Например,

$$\mathrm{tr}^1_3 : \mathrm{T}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{ij}}\mathrm{S}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{m}} \to \mathrm{T}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{ij}}\mathrm{S}^{\mathrm{l}}_{\mathrm{k}}.$$

Пример. Пусть $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ — линейный оператор. Как мы видели, его можно рассматривать как тензор валентности $(1,1)$ с матрицей (A^i_j). Его свертывание $\mathrm{tr}A = A^i_i$ приводит к тензору нулевой валентности, т. е. к числу, которое называется *следом* линейного оператора.

Задача. *Покажите, что свертывание перестановочно с линейными операциями.*

Лекция 10. ТЕНЗОРЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

10.1. Опускание и поднятие индекса.

Евклидово векторное пространство $\mathbb{E} = \mathbb{E}^m$ характеризуется тем, что в нем задано скалярное произведение $g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — симметричный и невырожденный тензор второй валентности с компонентами $g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$. Это обстоятельство позволяет определить линейный изоморфизм векторного пространства $\mathbb{E}$ на сопряженное ему ковекторное пространство $\mathbb{E}^*$ следующим образом. Каждому вектору $\mathbf{a}$ поставим в соответствие линейную форму (ковектор) $\xi_{\mathbf{a}} = \varphi(\mathbf{a})$, значение которой на произвольном векторе $\mathbf{b}$ равно

$$\xi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}). \tag{7}$$

Теорема 3. *Отображение* $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}^*$ *является изометрией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Линейность этого отображения очевидна в силу линейности по $\mathbf{a}$ скалярного произведения. Более того, если $\xi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = 0$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ при произвольном $\mathbf{b}$, откуда $\mathbf{a} = 0$. Поэтому отображение биективно и, следовательно, является линейным изоморфизмом. Этот изоморфизм позволяет определить в $\mathbb{E}^*$ скалярное произведение: если $\xi = \varphi(\mathbf{a})$ и $\eta = \varphi(\mathbf{b})$ – два ковектора, то положим

$$(\varphi(\mathbf{a}), \varphi(\mathbf{b})) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

так что $\mathbb{E}^*$ превращается в евклидово векторное пространство, изометричное исходному. □

Теорема 4. *Если* $\{\boldsymbol{e}_i\}$ *и* $\{\boldsymbol{e}^i\}$ *— сопряженные базисы в* $\mathbb{E}$ *и* $\mathbb{E}^*$, *то* $\varphi(\boldsymbol{e}_i) = g_{ij}\boldsymbol{e}^j$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим образы базисных векторов $\mathbf{e}_i$ — ковекторы $\varphi(\mathbf{e}_i)$. Разложив их по базису сопряженного пространства, получим $\varphi(\mathbf{e}_i) = \lambda_{ij}\mathbf{e}^j$. По определению $\lambda_{ij}\mathbf{e}^j(\mathbf{b}) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{b})$. Положив здесь $\mathbf{b} = \mathbf{e}_k$ и учитывая сопряженность базисов, получим $\lambda_{ik} = g_{ik}$, что доказывает утверждение. □

Запишем отображение φ в координатах, положив в формуле (7) $\mathbf{b} = \mathbf{e}_j$. Получим $\xi(\mathbf{e}_j) = \xi_j = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_j) = g_{ij}a^i$. Координаты ковектора ξ обычно обозначают той же буквой, что и соответствующий ему вектор, но с нижним индексом. При этом соглашении наше отображение запишется в виде

$$a_j = g_{ij}a^i. \tag{8}$$

По этой причине рассматриваемый изоморфизм $\mathbb{E} \to \mathbb{E}^*$ называют *опусканием индекса.* Для того, чтобы записать обратное отображение $\mathbf{a} = \varphi^{-1}(\xi)$, надо разрешить систему (8) относительно координат a^i. Делается это следующим стандартным образом. Рассмотрим матрицу (g^{ij}), обратную к матрице метрического тензора, обозначив ее элементы верхними индексами. Так как $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$, то умножая равенство (8) на компоненты g^{jk} и производя затем свертывание, получим

$$a^k = a_j g^{jk}. \tag{9}$$

Это отображение называется *поднятием индекса.*

Операции опускания и поднятия индекса естественным образом обобщаются на произвольные тензоры. Покажем это на примере тензора $T(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \xi)$ валентности $(1, 2)$. Пусть ковектору ξ соответствует вектор $\mathbf{c}$: $\xi_{\mathbf{c}} = \varphi(\mathbf{c})$. Подставив, получим функцию $T^*(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = T(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \varphi(\mathbf{c}))$, которая полилинейна по всем своим векторным аргументам и, следовательно, является ковариантным тензором валентности $(0, 3)$.

Компоненты этого тензора обозначают той же буквой, делая различие лишь в расположении индексов

$$T_{ijk} = T^*(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, g_{ks}\mathbf{e}^s) = g_{ks}T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}^s) = g_{ks}T_{ij}^{\cdot\cdot\, s}\,.$$

Таким образом, произошло опускание третьего индекса.

10.2. Дискриминантный тензор.

Сначала о некоторых свойствах кососимметричных тензоров.

Теорема 5. *Если аргументы кососимметричного тензора линейно зависимы, то он обращается в нуль.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала частный случай, когда какая-то пара аргументов кососимметричного тензора $T(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q)$ совпадает, например $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}$. Тогда, сделав их транспозицию, получим $T(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \ldots) = -T(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \ldots)$ и, следовательно, $T(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \ldots) = 0$. Пусть теперь аргументы кососимметричного тензора линейно зависимы и $\mathbf{a}_q = \lambda^1\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda^{q-1}\mathbf{a}_{q-1}$. Тогда

$$T(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q) = \lambda^1 T(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{q-1}, \mathbf{a}_1) + \cdots + \lambda^{q-1} T(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{q-1}, \mathbf{a}_{q-1}).$$

Но каждое из этих слагаемых равно нулю, так как содержит пару совпадающих аргументов. □

Следствие. *Всякий кососимметричный тензор валентности $q > m$ равен нулю.*

Рассмотрим кососимметрический тензор $\varepsilon(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$ максимальной валентности $q = m$. Он имеет только одну существенную компоненту $\varepsilon_{12\ldots m} = \varepsilon(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$. Все остальные ненулевые компоненты $\varepsilon_{i_1\ldots i_m}$ либо с ней совпадают, если подстановка $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_m \end{pmatrix}$ четная, либо отличаются от нее знаком, если она нечетная. Другими словами, $\varepsilon_{12\ldots m}$ является единственной существенной компонентой эого тензора. Отсюда следует, что

$$\varepsilon(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m) = \sum_{\pi} \varepsilon_{i_1\ldots i_m} a_1^{i_1} \ldots a_m^{i_n} = \varepsilon_{1\ldots m}\mathrm{det}(a_j^i).$$

Выберем теперь существенную компоненту этого тензора так, чтобы она была равна ориентированному объему m-мерного параллелепипеда, построенного на базисных векторах $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$. Он положителен или отрицателен в зависимости от ориентации этого базиса. Но, как известно, квадрат этого объема равен определителю Грама

$$\varepsilon_{12\ldots m}^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1^2 & \ldots & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_m) & \ldots & (\mathbf{e}_m^2) \end{vmatrix} = g\,.$$

Таким образом, значение тензора на заданной системе m векторов равно

$$\varepsilon(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m) = \sqrt{g}\ \mathrm{det}(a_j^i). \tag{10}$$

Он называется *дискриминантным тензором* евклидова пространства. Если же система координат прямоугольная, то $g = 1$. В частности, в 3-мерном евклидовом пространстве (10) есть смешанное произведение векторов. В этом случае в декартовых координатах он имеет существенную компоненту $\varepsilon_{123} = \sqrt{g}$.

Аналогично определяется дискриминантный тензор $\varepsilon(\xi_1, \dots \xi_m)$ на сопряженном пространстве. Это контравариантный тензор с компонентами $\varepsilon^{i_1 \dots i_m}$. Его единственная существенная компонента выражается через дискриминант метрического тензора следующим образом $\varepsilon^{1 \dots n} = \frac{1}{\sqrt{g}}$.

Задачи.

1) Покажите, что относительно определенного в теореме 1 скалярного произведения пространства $\mathbb{E}^*$ $(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) = g^{ij}$;

2) Проверьте, что существенная компонента дискриминантного тензора $\varepsilon^{i_1 \dots i_n}$ пространства $\mathbb{E}^*$ равна $\varepsilon^{1 \dots n} = \det(g^{ij}) = \frac{1}{\sqrt{g}}$.

ЛЕКЦИЯ 11. ПОВЕРХНОСТИ В 3-МЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

11.1. Понятие поверхности. Параметрическое, неявное и приведенное уравнения.

Определение. *Подмножество M в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ называется поверхностью, если всякая его точка $A \in M$ обладает такой ε-окрестностью $B(A,\varepsilon)$, что пересечение $M \cap B(A,\varepsilon)$ гомеоморфно некоторой области $Q \in \mathbb{R}^2$ вещественной плоскости.*

Таким образом, с топологической точки зрения поверхность локально устроена как кусок плоскости.

Примеры.

1) Сфера в некоторой ε-окрестности любой своей точки устроена как кусок плоскости. В самом деле, проекция этой окрестности из центра сферы на касательную плоскость в этой точке осуществляет указанный в определении гомеоморфизм.

2) Наоборот, конус в смысле данного определения поверхностью не является. Его вершина есть особая точка, любая окрестность которой не удовлетворяет указанному условию.

Более общим и наиболее употребительным является следующее

Определение. *Параметризованной поверхностью класса C^k в евклидовом $\mathbb{E}^3$ называется C^k-отображение $\boldsymbol{r} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{E}^3$ области вещественной плоскости в это пространство.*

Образ $\mathbf{r}(U) \subset \mathbb{E}^3$ называется *носителем* поверхности. Таким образом, параметризованная поверхность задается векторной функцией двух скалярных аргументов $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1,u^2)$, $(u^1,u^2) \in U$ или в координатах

$$x = x(u^1,u^2), \quad y = y(u^1,u^2), \quad z = z(u^1,u^2). \tag{11}$$

Мы часто будем применять также обозначения $u^1 = u, u^2 = v$. Эти соотношения называются *параметрическими уравнениями* поверхности, а переменные u^i *криволинейными координатами.* Точка параметризованной поверхности называется *регулярной*, если в этой точке регулярна задающая ее векторная функция. Напомним, это означает, что ранг якобиевой матрицы

$$J = \begin{pmatrix} \partial_1 x & \partial_1 y & \partial_1 z \\ \partial_2 x & \partial_2 y & \partial_2 z \end{pmatrix} \tag{12}$$

равен двум. Как мы увидим, это условие гарантирует, что в окрестности регулярных точек поверхность диффеоморфна некоторой области на плоскости.

Следует иметь ввиду, что один и тот же носитель или разные области поверхности могут быть заданы разными параметрическими уравнениями. Тогда возникают преобразования криволинейных координат, определяемые гладкими функциями $u' = f(u,v)$, $v' = g(u,v)$ с ненулевым якобианом.

Пример. Найдем параметрические уравнения сферы радиуса a. Выбрав прямоугольные координаты с началом в центре сферы, радиус-вектор $\mathbf{r} = \vec{OA}$ ее произвольной точки A разложим на две составляющие: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + z\mathbf{k}$, где $\mathbf{r}_1$ — ортогональная проекция вектора $\mathbf{r}$ на плоскость XY. Пусть $0 \le \varphi < 2\pi$ — ориентированный угол, образуемый осью X с вектором $\mathbf{r}_1$ (долгота). Тогда его можно записать в виде $\mathbf{r}_1 = \lambda\mathbf{e}(\varphi)$ и, следовательно, $\mathbf{r} = \lambda\mathbf{e}(\varphi) + z\mathbf{k}$. Если ввести ориентированный угол θ, образуемый вектором $\mathbf{r}$ с плоскостью XY, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (широта), то получим

$\lambda = a\cos\theta\,, z = a\sin\theta\,.$ В итоге мы нашли следующее параметрическое уравнение сферы

$$\mathbf{r}(\theta,\varphi) = a(\cos\theta\mathbf{e}(\varphi) + \sin\theta\mathbf{k})\,.$$

Углы θ и φ называются географическими координатами на сфере. Полученная векторная функция не всюду регулярна: ранг якобиевой матрицы

$$J = \begin{pmatrix} -a\sin\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi & a\cos\theta \\ -a\cos\theta\sin\varphi & a\cos\theta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

падает при $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$. Это северный и южный полюсы сферы. Таким образом, найденная нами параметризация регулярна лишь в области на сфере, получаемой после исключения этих двух диаметрально противоположных точек.

Поверхность можно задать также уравнением вида

$$F(x,y,z) = 0, \tag{13}$$

которое называется *неявным уравнением* поверхности. Однако, такое уравнение не всегда задает поверхность.

Теорема 6. *Непустое подмножество* $M = \{(x,y,z) : F(x,y,z) = 0\}$ *евклидова пространства есть поверхность, если: 1) Функция* F *дифференцируема; 2) В точках этого множества* $\mathrm{gradF}\Big|_{\mathrm{M}} \neq 0\,.$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из теоремы о неявнх функциях. В силу заданных условий якобиева матрица $J = (F_x, F_y, F_z)$ имеет в точках множества, удовлетворяющих уравнению $F = 0$, максимальный ранг, равный единице. По теореме о неявной функции для каждой его точки существует окрестность, в которой уравнение $F = 0$ локально разрешимо относительно одной из переменных. Если, например, отлична от нуля производная F_z, это уравнение можно (локально) разрешить относительно переменной z. Тогда получим $z = f(x,y) : F(x,y,f(x,y)) \equiv 0$, где $f(x,y)$— дифференцируемая функция, определенная в некоторой области U плоскости XY. Такое уравнение называется *приведенным уравнением* поверхности. Оно всегда задает поверхность с носителем $\Gamma = \big\{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{E}^3\big\}$, $(x,y) \in U$. Гомеоморфизм на область U задается ортогональной проекцией на плоскость XY. $\square$

От приведенного уравнения уже просто перейти к параметрическому. Нужно координаты x и y задать как произвольные гладкие функции двух параметров u, v с ненулевым якобианом. Тогда получим

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = f(x(u,v), y(u,v)).$$

Иногда достаточно положить $x = u,\ y = v$.

Пример.

Сфера имеет неявное уравнение $F = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$. Градиент этой функции равен $\mathrm{grad}F = (2x, 2y, 2z)$ и на сфере нигде не обращается в нуль. Рассмотрим, например, подмножество точек сферы, в которых $z \neq 0$. Это подмножество исключает точки экватора и состоит из двух областей — верхней ($z > 0$) и нижней ($z < 0$) полусфер. Разрешая уравнение относительно z, получим $z = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Если мы положим $x = a\cos\theta\cos\varphi,\ y = a\cos\theta\sin\varphi$, то тогда $z = a\sin\theta$. Это уже знакомые нам параметрические уравнения сферы в географических координатах.

11.2. Пути на поверхности. Координатная сеть и натуральный репер.

Вернемся к регулярно параметризованной поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, где переменные u, v пробегают область $U \subset \mathbb{R}^2$. Рассмотрим регулярную кривую γ в этой области с параметрическими уравнениями

$$u = u(t),\ v = v(t). \tag{14}$$

На поверхности ей соответствует параметризованная кривая Γ с радиусом-вектором

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t)). \tag{15}$$

Таким образом, мы получили параметризованную кривую на поверхности, которую, чтобы подчеркнуть ее принадлежность поверхности, будем называть *путем.* Уравнения (14) его вполне определяют и мы будем называть их, в отличие от (15), *внутренними уравнениями* этого пути.

В частности, рассмотрим в области U 1-параметрическое семейство параллельных прямых $v = c_2 = \mathrm{const}$. На поверхности получим 1-параметрическое семейство путей с уравнениями $\mathbf{r}(u) = \mathbf{r}(u, c_2)$. Аналогично, семейству $u = c_1 = \mathrm{const}$ соответствует 1-параметрическое семейство путей с уравнениями $\mathbf{r}(v) = \mathbf{r}(c_1, v)$. Эти семейства, вдоль которых изменяется только одна криволинейная координата, называются *координатными линиями.* В совокупности они образуют так называемую *координатную сеть.*

Пример. Рассмотрим сферу и ее параметрическое уравнение

$$\mathbf{r} = a(\cos\theta\mathbf{e}(\varphi) + \sin\theta\mathbf{k}).$$

Пути, для которых постоянна долгота ($\varphi = c_2$) образуют на ней 1-параметрическое семейство меридианов с уравнениями $\mathbf{r}(\theta) = a(\cos\theta\mathbf{e}(c_2) + \sin\theta\mathbf{k})$, а кривые постоянной широты ($\theta = c_1$) – 1-параметрическое семейство параллелей, уравнения которых $\mathbf{r}(\varphi) = a(\cos c_1\mathbf{e}(\varphi) + \sin c_1\mathbf{k})$. Эти пути образуют на сфере географическую сеть. Она соответствует декартовой сети прямоугольника $0 \leq \varphi < \pi,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ на плоскости. Обратим внимание на то, что в северном и южном полюсах, которые при этой параметризации не являются регулярными точками, правильность географической сети нарушается.

11.3. Касательная плоскость и нормаль поверхности.

Определение. *Вектор* $\boldsymbol{a}$ *называется касательным вектором поверхности в точке* $A \in M$, *если он является касательным вектором некоторого пути* $\boldsymbol{p}(t)$ *на поверхности, проходящего через эту точку:* $\boldsymbol{p}'_A = \boldsymbol{a}$.

Возникает вопрос: что представляет собой множество таких векторов в данной точке поверхности? Справедлива

Теорема 7. *Если точка* A *параметризованной поверхности регулярна, то множество всех касательных векторов в этой точке есть 2-мерное векторное пространство* $T_A M$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольный гладкий путь Γ, проходящий через заданную точку A поверхности $\mathbf{r}(u, v)$. Параметрическое уравнение пути имеет вид $\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$, где $u(0) = u,\ v(0) = v$, а касательный вектор равен $\mathbf{a}_A = \mathbf{r}_i \frac{du^i}{dt}\Big|_{t=0} = \mathbf{r}_1 u' + \mathbf{r}_2 v'$, где производные вычислены в этой же точке. Отсюда следует, что он является линейной комбинацией двух векторов $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, которые в регулярной точке линейно независимы. Действительно, поскольку $\mathbf{r}_1 = (x_u, y_u, z_u), \mathbf{r}_2 =$

(x_v, y_v, z_v), то условие их линейной независимости равносильно независимости строк якобиевой матрицы (12). Это значит, что векторы $\mathbf{a}$ принадлежат 2-мерному векторному пространству. Пусть теперь $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{r}_1 + \mu\mathbf{r}_2$ — произвольный вектор этого пространства. Тогда существует путь, касательным вектором которого он является. Например, путь с внутренними уравнениями $u(t) = u + \lambda t$, $v(t) = v + \mu t$. Таким образом, касательные векторы путей, проходящих через заданную точку, образуют векторное пространство $T_A M$ размерности два с базисом $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$. $\square$

Определение. $T_A M$ *называется касательным векторным пространством в точке* $A \in M$, *а его базис* $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$ — *натуральным базисом в этой точке. Плоскость, проходящая через данную точку с направляющим пространством* $T_A M$, *называется касательной плоскостью поверхности в точке* A.

Обычно касательная плоскость обозначается тем же символом $T_A M$. Векторы натурального базиса вместе с точкой A образуют *натуральный репер* и имеют простой смысл: в силу своего определения они являются касательными векторами координатных линий, проходящих через данную точку. Прямая, проходящая через данную точку и ортогональная касательной плоскости называется *нормалью поверхности* в этой точке.

Найдем уравнения касательной плоскости. Вектор нормали ортогонален векторам натурального репера и поэтому $\mathbf{N} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$. Его компоненты (N_1, N_2, N_3) есть миноры второго порядка матрицы (12). Поэтому уравнение касательной плоскости в точке $\mathbf{r}(u, v)$ имеет вид

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}(u, v), \mathbf{N}) = 0 \tag{16}$$

или в координатах

$$\begin{vmatrix} X - x(u,v) & Y - y(u,v) & Z - z(u,v) \\ x_u(u,v) & y_u(u,v) & z_u(u,v) \\ x_v(u,v) & y_v(u,v) & z_v(u,v) \end{vmatrix} = 0 .$$

Зная вектор $\mathbf{N}$, несложно записать и уравнение нормали.

Рассмотрим случай, когда поверхность задана неявным уравнением.

Теорема 8. *Нормальный вектор поверхности с неявным уравнением* $F(x, y, z) = 0$ *есть градиент* $\mathrm{grad} F$, *вычисленный в данной точке этой поверхности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (x, y, z) — координаты точки на поверхности и $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ — проходящий через нее при $t = 0$ регулярно параметризованный путь. Имеем тождество $F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$. Дифференцируя его, получим новое тождество

$$(\mathrm{grad} F, \mathbf{r}') = F_x x'(t) + F_y y'(t) + F_z z'(t) \equiv 0.$$

Рассмотрим его при $t = 0$. Пусть в этой точке $\mathrm{grad} F \neq 0$. Тогда полученное равенство означает, что вектор $\mathrm{grad} F = (F_x, F_y, F_z)$ ортогонален касательному вектору пути в этой точке. Но в силу произвольности выбора такого пути этот вектор ортогонален касательной плоскости и, следовательно, является нормальным вектором поверхности. Уравнение касательной плоскости тогда имеет вид $(\mathbf{R} - \mathbf{r}(u, v), \mathrm{grad} F) = 0$ или в координатах

$$F_x(X - x) + F_y(Y - y) + F_z(Z - z) = 0. \tag{17}$$

Если же в данной точке $\mathrm{grad} F = 0$, касательная плоскость становится неопределенной. Такие точки называются *особыми точками* поверхности и в дальнейшем мы будем исключать их из рассмотрения.

ЛЕКЦИЯ 12. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВИДЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ

12.1. Поверхности вращения.

Рассмотрим некоторые специальные виды поверхностей.

Определение. *Поверхность вращения — это поверхность, образованная вращением кривой вокруг некоторой оси.*

Для простоты кривую Γ выберем плоскую, а ось вращения выберем в плоскости этой кривой. Выберем в пространстве прямоугольную систему координат и пусть осью вращения является ось Z, а кривая расположена в плоскости ξZ, где ξ — ось, принадлежащая плоскости XY. Единичные векторы $\mathbf{e}$ и $\mathbf{k}$ осей ξ и Z вместе с началом координат образуют ортонормированный репер. Всякая линия, принадлежащая этой плоскости, имеет параметрическое уравнение $\mathbf{r}(t) = \xi(t)\mathbf{e}+$ z(t)$\mathbf{k}$. Будем теперь вращать эту плоскость вокруг оси Z. Тогда вектор $\mathbf{k}$ не изменится, а из вектора $\mathbf{e}$ получим первую круговую векторную функцию $\mathbf{e}(\varphi)$. В результате

$$\mathbf{r}(t,\varphi) = \xi(t)\mathbf{e}(\varphi) + z(t)\mathbf{k}. \tag{18}$$

Это и есть параметрическое уравнение поверхности вращения. В координатах

$$x = \xi(t)\cos\varphi,\ y = \xi(t)\sin\varphi,\ z = z(t).$$

Пути $\varphi = c_2$ называются *меридианами.* Они получаются в результате вращения исходной кривой. Пути $t = c_2$ — это окружности с центром на оси Z. Они являются траекториями точек исходной кривой при ее вращении и называются *параллелями* поверхности вращения. Отметим, что полученная координатная сеть является ортогональной. Из уравнений поверхности следует $x^2 + y^2 = \xi^2(t)$. Значит, радиусы параллелей равны $|\xi(t)|$. Исключая параметр t, получим неявное уравнение поверхности вращения в виде $F(x^2 + y^2, z) = 0$.

Примеры.

1) В плоскости ξZ рассмотрим окружность радиуса a с центром в начале координат. Ее параметрические уравнения $\xi = a\cos t$, $z = a\sin t$. При вращении вокруг оси Z получим уже знакомую нам сферу с параметрическим уравнением $\mathbf{r}(t,\varphi) = a(\cos t\mathbf{e}(\varphi) + \sin t\mathbf{k})$, где t,φ — географические координаты.

2) Обобщим предыдущий пример. В плоскости ξZ рассмотрим окружность радиуса a, но с центром в точке $(b, 0)$. Ее параметрические уравнения $\xi = b + a\cos t,\ z = a\sin t$. В результате вращения вокруг оси Z получим тор

$$\mathbf{r}(t,\varphi) = (b + a\cos t)\mathbf{e}(\varphi) + a\sin t\mathbf{k}.$$

12.2. Винтовые поверхности.

Определение. *Винтовыми называются поверхности, полученные вращением плоской кривой* Γ *вокруг оси, расположенной в ее плоскости, и одновременным переносом этой кривой вдоль той же оси со скоростью, пропорциональной углу поворота.*

Таким образом, поверхность образована в результате винтового движения заданной кривой, откуда и происходит название поверхности. Для того, чтобы получить ее параметрическое уравнение, мы опять зададим исходную кривую Γ в плоскости ξZ с ортонормированным репером $\{\mathbf{e},\mathbf{k}\}$: $\mathbf{r}(t) = \xi(t)\mathbf{e} + z(t)\mathbf{k}$. Тогда при вращении вектор $\mathbf{e}$ порождает первую круговую векторную функцию $\mathbf{e}(\varphi)$, а в результате переноса вдоль оси Z функция $z(t)$ заменится на функцию $z(t) + a\varphi$, получив приращение на слагаемое, пропорциональное углу поворота. При этом коэффициент $a = \mathrm{const}$ есть отношение линейной скорости переноса и угловой скорости вращения. В результате получим следующее параметрическое уравнение

$$\mathbf{r} = \xi(t)\mathbf{e}(\varphi) + (z(t) + a\varphi)\mathbf{k}\,. \tag{19}$$

В координатах

$$x = \xi(t)\cos\varphi,\ y = \xi(t)\sin\varphi,\ z = z(t) + a\varphi.$$

В этом случае координатная сеть уже не ортогональна. Пути $\varphi = c_2$ — это последовательные положения исходной кривой, а пути $t = c_1$ образованы траекториями ее точек. Это винтовые линии. Отметим, что при $a = 0$ снова получаем поверхность вращения.

Пример. В плоскости XZ зададим прямую с уравнением $x(t) = t$, $z(t) = 0$. Это ось X. При ее винтовом движении получается поверхность, называемая *геликоидом.* Его уравнение

$$\mathbf{r} = t\mathbf{e}(\varphi) + a\varphi\mathbf{k}\,.$$

Координатная сеть состоит из прямолинейных образующих $\varphi = c_2$ и винтовых линий $t = c_1$.

12.3. Линейчатые и развертывающиеся поверхности.

Определение. *Линейчатой называется поверхность, образованная движением прямой (образующей), скользящей по заданной кривой (направляющей).*

Для того, чтобы получить ее уравнение, зададим параметризованную кривую (направляющую) $\Gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ и пусть $\mathbf{a}(t)$ — единичный вектор, задающий в точках этой кривой направление прямолинейных образующих. Тогда уравнение линейчатой поверхности запишется как 1-параметрическое семейство прямых, параметризованное параметром t

$$\mathbf{R}(t, v) = \mathbf{r}(t) + v\mathbf{a}(t). \tag{20}$$

Здесь $-\infty < v < \infty$ — параметр образующих.

Примеры.

1) Пусть направляющей линией является прямая. По ней с постоянной скоростью v скользит ортогональная к ней образующая, вращаясь вокруг направляющей с постоянной угловой скоростью ω. В результате образуется линейчатая поверхность. Найдем ее уравнение. Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы направляющей была ось Z, а начальное положение образующей совпадало с осью X. За время t прямая повернется на угол $\varphi = \omega t$ и будет иметь направление вектора $\mathbf{e}(\varphi)$, а точка ее пересечения с осью Z определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}(t) = vt\mathbf{k} = b\varphi\mathbf{k}$, где $b = \frac{v}{\omega}$. Согласно уравнению (20) получим $\mathbf{R} = v\mathbf{e}(\varphi) + b\varphi\mathbf{k}$. Нетрудно видеть, что эта поверхность является геликоидом.

2) Другими примерами линейчатых поверхностей являются цилиндрические и конические поверхности, однополостный гиперболоид, гиперболический параболоид. Как известно из аналитической геометрии, две последних несут на себе два 1-параметрических семейства прямолинейных образующих.

Определение. *Линейчатая поверхность называется развертывающейся, если ее касательная плоскость постоянна вдоль образующих.*

Найдем условие, выделяющее этот класс поверхностей среди линейчатых. Из уравнения (20) вычислим производные $\mathbf{R}_t = \mathbf{r}'(t) + v\mathbf{a}'(t), \mathbf{R}_v = \mathbf{a}(t)$. Следовательно, нормальный вектор поверхности равен

$$\mathbf{N} = [\mathbf{R}_t, \mathbf{R}_v] = [\mathbf{r}'(t), \mathbf{a}(t)] + v[\mathbf{a}'(t), \mathbf{a}(t)].$$

При движении точки вдоль образующей линейчатой поверхности, когда $t = \mathrm{const}$, этот вектор зависит только от v. В силу теоремы о коллинеарных векторных функциях (лекц. 2) он сохраняет постоянное направление тогда и только тогда, когда $[\mathbf{N}, \mathbf{N}_v] = 0$. Вычислим это векторное произведение

$$[\mathbf{N}, \mathbf{N}_v] = [[\mathbf{r}', \mathbf{a}], [\mathbf{a}', \mathbf{a}]] = \mathbf{a}(\mathbf{r}', \mathbf{a}', \mathbf{a}).$$

Отсюда следует

Теорема 9. *Для того, чтобы линейчатая поверхность (20) была развертывающейся, необходимо и достаточно, чтобы смешанное произведение* $(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}') = 0$.

Из определения развертывающейся поверхности следует, что множество ее касательных плоскостей зависит не от двух, как обычно, а только от одного параметра t. Другими словами, такая поверхность есть огибающая 1-параметрического семейства плоскостей. Можно доказать, что и обратно, огибающей всякого 1-параметрического семейства плоскостей, если она существует, является развертывающаяся поверхность.

Известна классификация развертывающихся поверхностей [2]. Их три типа. В самом деле, будем искать огибающую Γ 1-параметрического семейства ее прямолинейных образующих. Эта огибающая определяется так же, как и на плоскости. Если она существует, то называется *ребром возврата* поверхности. В этом случае поверхность образована множеством касательных прямых пространственной кривой Γ и называется *поверхностью касательных*. В этом случае уравнение этой поверхности имеет вид $\mathbf{R} = \mathbf{r}(t) + v\mathbf{r}'(t)$. Во-вторых, может случиться, что ребро возврата вырождается в точку и тогда мы имеем дело с конической поверхностью. Тогда $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 = \mathrm{const}$, вследствие чего уравнение конуса имеет вид $\mathbf{R} = \mathbf{r}_0 + v\mathbf{a}(t)$. Наконец, можно показать, что если ребра возврата не существует, то $\mathbf{a} = \mathrm{const}$ и, следовательно, образующие поверхности параллельны. Это цилиндрическая поверхность с уравнением $\mathbf{R} = \mathbf{r}(t) + v\mathbf{a}$. Легко видеть, что во всех трех перечисленных случаях условие доказанной теоремы выполнено.

ЛЕКЦИЯ 13. ПЕРВАЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ФОРМА ПОВЕРХНОСТИ

13.1. Тензорные поля на поверхности.

Пусть задана повехность M . Говоря о тензорных полях на поверхности, мы начнем с более простого случая.

Определение. *Векторным полем на поверхности M (или в области $U \subset M$) называется отображение, которое каждой точке $A \in M$ ставит в соответствие вектор $\boldsymbol{a}_{A} \in T_A M$ в касательной плоскости этой точки.*

Если на поверхности заданы криволинейные координаты, то в каждой ее точке определен натуральный репер $\{\mathbf{r}_i\}$, $(i = 1, 2)$ и тогда векторное поле можно записать в виде $\mathbf{a} = a^i(u^1, u^2)\mathbf{r}_i$. Оно определяется, следовательно, двумя функциями $a^i(u^1, u^2)$ – компонентами векторного поля. Векторное поле называется *гладким*, если эти функции гладкие.

Определение. *Интегральным путем или траекторией векторного поля называется путь $\Gamma : \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t)$, касательные векторы которого в точках пути совпадают с векторами этого поля:* $\mathbf{p}' = \mathbf{a}\Big|_{\Gamma}$.

В координатах

$$\frac{du^i}{dt} = a^i(u^k(t)) \,. \tag{21}$$

Таким образом, нахождение интегральных путей на поверхности сводится к интегрированию системы (21) двух обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). В силу теоремы Коши через каждую точку $A \in M$ поверхности проходит единственный интегральный путь векторного поля, определенный в некотором максимальном интервале (a, b) .

На практике способом отыскания решений часто является нахождение первых интегралов системы (21), т. е. таких функций $F(u, v)$, которые постоянны вдоль интегральных линий: $F(u(t), v(t)) = \mathrm{const}$. В этом случае интегральные пути могут быть определены неявными уравнениями, задающими 1-параметрическое семейтво $F(u, v) = \mathrm{const}$.

Аналогичным образом определяются тензорные поля на поверхности. Для этого наряду с касательными плоскостями надо рассмотреть кокасательные плоскости T^*M .

Определение. *Тензорное поле валентности на поверхности M есть отображение $A \in M \to F_A(\alpha^1, \ldots, \alpha^p, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_q,)$, которое всякой ее точке ставит в соответствие тензор с аргументами из касательной и кокасательной плоскостей.*

В координатах тензорное поле задается своими компонентами — набором m^{p+q} функций, которые в каждой точке являются значениями тензора на базисных векторах и ковекторах. Например, при $p = 1, q = 2$

$$F^i_{jk}(u, v) = F_A(\mathbf{e}^i, \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k),$$

где ковекторы $\mathbf{e}^i$ образуют репер, сопряженный натуральному реперу $\{\mathbf{r}_j\}$. Тензорное поле называется гладким, если эти функции гладкие. При переходе к другой параметризации компоненты тензорного поля изменяются тензорному закону

$$F^{i'}_{j'k'}(u'v') = f^{i'}_i F^i_{jk}(u, v) f^j_{j'} f^k_{k'} \,,$$

где $f^{i'}_i(u^k) = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}$ и $f^i_{i'}(u^{k'}) = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}$ — элементы якобивой матрицы преобразования и обратной к ней. Из этой формулы следует, что обращение тензорного поля в нуль не зависит от выбора координат. Этот факт имеет принципиально важное значение.

Для тензорных полей выполнимы все те алгебраические операции, которые мы рассмотрели ранее: сложение и умножение тензорных полей, свертывание, поднятие и опускание индексов. Все они выполняются поточечно. Более того тензорное поле можно умножить на функцию, поскольку в каждой точке эта операция сводится к умножению на число.

13.2. Определение первой фундаментальной формы.

Для каждой пары касательных векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_A M$ поверхности M рассмотрим их скалярное произведение. Пусть в натуральном репере $\mathbf{a} = a^i(u,v)\mathbf{r}_i$, $\mathbf{b} = b^i(u,v)\mathbf{r}_i$. Тогда скалярное произведение равно

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a^i\mathbf{r}_i, b^j\mathbf{r}_j) = (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)a^i b^j,$$

где идет двойное суммирование. Это симметричная билинейная форма

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = g_{ij}a^i b^j, \tag{22}$$

которая называется *первой фундаментальной формой* или *метрическим тензором* поверхности. В силу билинейности скалярного произведения это симметричное ковариантное тензорное поле второй валентности. Его компоненты $g_{ij}(u,v) = (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ суть гладкие функции точки, которые при преобразовании координат на поверхности изменяются по тензорному закону

$$g_{i'j'}(u^{k'}) = g_{ij}(u^k) f^i_{i'} f^j_{j'}\,, \quad f^i_{i'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\,.$$

Если положить $\mathbf{b} = \mathbf{a}$, то получим *первую квадратичную форму.* Так как для всякого ненулевого вектора скалярный квадрат $\mathbf{a}^2 = g_{ij}a^i a^j > 0$, то эта форма является, кроме того,положительно определенной и как следствие этого ее определитель $g = \det(g_{ij}) > 0$.

Первую квадратичную форму записывают также в другом виде. Если мы рассмотрим дифференциалы $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_i du^i$ и вычислим их скалярный квадрат, то получим [2]

$$d\mathbf{r}^2 = g_{ij}du^i du^j. \tag{23}$$

Связь с предыдущим выражением устанавливается выражением для дифференциала (лекц. 1): $d\mathbf{r}(\mathbf{a}) = \mathbf{r}_i a^i$.

Как найти первую фундаментальную форму, если поверхность задана неявным уравнением $F(x,y,z) = 0$? Для этого надо записать это уравнение в приведенной форме $z = f(x,y)$, а затем перейти к параметрическому виду: $\mathbf{r} = (x, y, f(x,y))$. Тогда имеем $\mathbf{r}_1 = (1, 0, f'_x)$, $\mathbf{r}_2 = (0, 1, f'_y)$ и поэтому ее коэффициенты равны

$$g_{11} = 1 + (f'_x)^2,\ g_{12} = f'_x f'_y,\ g_{22} = 1 + (f'_y)^2.$$

Примеры.

1) Особенно простой вид первая фундаментальная форма принимает на плоскости. Если выбрать прямоугольные координаты, то $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ и тогда $d\mathbf{r}^2 = dx^2 + dy^2$. Матрица $G = (g_{ij})$ является единичной. Выберем теперь полярные координаты, в которых $\mathbf{r} = r\mathbf{e}(\theta)$. В этом случае $d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}(\theta) + r\mathbf{g}(\theta)d\theta$. Тогда имеем $d\mathbf{r}^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ и, таким образом, $g_{11} = 1,\ g_{12} = 0,\ g_{22} = r^2$.

2) Рассмотрим сферу радиуса a с центром в начале координат. Ее уравнение в географических координатах имеет вид

$$\mathbf{r} = a(\cos\theta\mathbf{e}(\varphi) + \sin\theta\mathbf{k}).$$

Вычисляя частные производные, получим

$$\mathbf{r}_1 = a(-\sin\theta\mathbf{e}(\varphi) + \cos\theta\mathbf{k}), \quad \mathbf{r}_2 = a\cos\theta\mathbf{g}(\varphi).$$

Тогда

$$g_{11} = a^2,\ g_{12} = 0,\ g_{22} = a^2\cos^2\theta$$

и, следовательно,

$$d\mathbf{r}^2 = a^2(d\theta^2 + \cos^2\theta d\varphi^2)\,.$$

Знание первой фундаментальной формы дает возможность решать на поверхности задачи, связанные с измерениями, не выходя в 3-мерное пространство. Этот факт, доказанный Гауссом, имеет принципиальное значение. Рассмотрим некоторые из таких задач.

13.3. Длина пути на поверхности и угол между путями.

Пусть на параметризованной поверхности задан путь Γ своими внутренними уравнениями $u^i = u^i(t)$. Подставляя их в уравнение поверхности, получим параметрическое уравнение этого пути в пространстве $\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(u^1(t), u^2(t))$. Как нам известно, длина дуги вычисляется по формуле (лекц. 3)

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{p}'(t)|dt\,.$$

Но $\mathbf{p}' = \mathbf{r}_i\frac{du^i}{dt}$ и, следовательно,

$$\mathbf{p}'^2 = g_{ij}(u^k(t))\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}\,.$$

В результате получим

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}(u^k(t))u^{i\prime}u^{j\prime}}dt\,. \tag{24}$$

Итак, вычисление длины пути на поверхности может быть произведено только с помощью первой фундаментальной формы.

Пример. Пусть известно, что некоторая поверхность имеет первую квадратичную форму $d\mathbf{r}^2 = a^2du^2 + dv^2$, $a = \mathrm{const}$ и на ней задан путь с внутренним уравнением $v = bu$, $(b = \mathrm{const})$. Подсчитаем длину его дуги в пределах $0 \le t \le 2\pi$. Запишем сначала параметрические уравнения пути, выбрав u за параметр: $u = t, v = bt$. Тогда вдоль пути имеем $d\mathbf{r}^2 = (a^2 + b^2)dt^2$, откуда согласно формуле (24) получим

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Рассмотренная здесь первая фундаментальная форма реализуется, например, на поверхности прямого кругового цилиндра с параметрическим уравнением $\mathbf{r} = a\mathbf{e}(v) + u\mathbf{k}$. Действительно, так как $\mathbf{r}_1 = a\mathbf{g}(v), \mathbf{r}_2 = \mathbf{k}$, то $g_{11} = a^2, g_{12} = 0, g_{22} = 1$. Это коэффициенты приведенной выше квадратичной формы, а заданный путь есть винтовая линия этого цилиндра.

Следующая задача — об измерении углов на поверхности. Пусть Γ_1, Γ_2 — два пути на поверхности, заданные внутренними уравнениями $u^i = u_1^i(t)$ и $u^i = u_2^i(\tau)$. Тогда радиусы-векторы этих путей равны

$$\mathbf{p}_1(t) = \mathbf{r}(u_1^1(t), u_1^2(t))\,, \quad \mathbf{p}_2(\tau) = \mathbf{r}(u_2^1(\tau), u_2^2(\tau))\,.$$

Предположим, что эти пути пересекаются в точке $A : u_1^i(t) = u_2^i(\tau)$. Из этих двух уравнений, если они имеют решение, мы можем найти значения параметров t и τ, соответствующие точке пересечения, а значит и саму эту точку.

Определение. *Угол между путями на поверхности — это угол между их касательными векторами в точке пересечения.*
Косинус этого угла равен

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2)}{|\mathbf{p}'_1||\mathbf{p}'_2|}\Big|_A,$$

где производные вычислены в точке пересечения. Запишем это выражение в координатах. Так как $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{r}_i \frac{du_1^i}{dt}$ и аналогично $\mathbf{p}'_2 = \mathbf{r}_i \frac{du_2^i}{d\tau}$, скалярное произведение этих двух векторов в точке (u^i) равно

$$(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) = g_{ij} \frac{du_1^i}{dt} \frac{du_2^j}{d\tau}.$$

В результате получим формулу

$$\cos\theta = \frac{g_{ij} u'^i_1 u'^j_2}{\sqrt{g_{ij} u'^i_1 u'^j_1}\sqrt{g_{ij} u'^i_2 u'^j_2}}\Big|_A, \tag{25}$$

где производные берутся по соответствующим параметрам. Мы видим, что здесь опять используются только внутренние уравнения путей и коэффициенты первой фундаментальной формы.

Пример. Вернемся к рассмотренному выше примеру поверхности с первой фундаментальной формой $d\mathbf{r}^2 = a^2 du^2 + dv^2$ и найдем угол, который путь $u_1 = t,\ v_1 = bt$ образует с координатными линиями $u_2 = c, v_2 = \tau$, $c = \mathrm{const}$. Например, в случае цилиндра это винтовая линия и прямолинейные образующие. Точка пересечения имеет координаты (c, bc). Вычисляя производные, получим $u'_1 = 1,\ v'_1 = b$, $u'_2 = 0, v'_2 = 1$. Тогда формула (25) дает следующий результат: $\cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Таким образом, искомый угол не зависит от выбора константы c, а только от формы винтовой линии.

13.4. Площадь области на поверхности.

Пусть задана параметризованная поверхность и на ней рассматривается некоторая область $Q \subset M$, ограниченная кусочно-гладким замкнутым путем Γ. Вычислим площадь этой области [2]. Разобьем эту область конечной сетью координатных путей $u_\alpha = \mathrm{const}, (\alpha = 1, \dots m)$ и $v_\beta = \mathrm{const}, (\beta = 1, \dots n)$ на малые криволинейные параллелограммы. Рассмотрим один из них $Q_{\alpha\beta}$ с вершинами

$$(u_\alpha, v_\beta),\ (u_\alpha + \Delta u_\alpha, v_\beta),\ (u_\alpha, v_\beta + \Delta v_\beta),\ (u_\alpha + \Delta u_\alpha, v_\beta + \Delta v_\beta)$$

и подсчитаем его площадь $\Delta\sigma_{\alpha\beta}$. Для этого рассмотрим радиусы-векторы этих точек и их разности

$$\mathbf{r}(u_\alpha + \Delta u_\alpha, v_\beta) - \mathbf{r}(u_\alpha, v_\beta) = \mathbf{r}_1(u_\alpha, v_\beta)\Delta u_\alpha + \mathbf{0}'_2,$$
$$\mathbf{r}(u_\alpha, v_\beta + \Delta v_\beta) - \mathbf{r}(u_\alpha, v_\beta) = \mathbf{r}_2(u_\alpha, v_\beta)\Delta v_\beta + \mathbf{0}''_2,$$

где $\mathbf{0}'_2$, $\mathbf{0}''_2$ — малые второго порядка. Векторы $\mathbf{r}_1(u_\alpha, v_\beta)\Delta u_\alpha$ и $\mathbf{r}_2(u_\alpha, v_\beta)\Delta v_\beta$ касаются координатных линий и образуют плоский параллелограмм в касательной плоскости точки (u_α, v_β). Его площадь мы можем подсчитать с помощью векторного произведения. Площадь исходного параллелограмма отличается от нее на малые третьего порядка

$$\Delta\sigma_{\alpha\beta} = |[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]|\Delta u_\alpha \Delta v_\beta + \mathbf{0}_3.$$

Составим интегральную сумму и перейдем к пределу при $\Delta u_\alpha \to 0, \Delta u_\beta \to 0$

$$\sigma = \lim \sum_{\alpha,\beta} \{ |[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]| \Delta u_\alpha \Delta v_\beta + \mathbf{0}_3 \} .$$

Если этот предел существует, то он дает двойной интеграл по рассматриваемой области

$$\sigma = \int_Q |[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]| du dv .$$

Займемся теперь подынтегральным выражением. Так как

$$[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]^2 = \mathbf{r}_1^2 \mathbf{r}_2^2 \sin^2\theta = \mathbf{r}_1^2 \mathbf{r}_2^2 - (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)^2 = g_{11} g_{22} - g_{12},$$

то окончательно имеем

$$\sigma = \int_Q \sqrt{g}\, du dv\,, \quad g = \det(g_{ij}). \tag{26}$$

Полученный результат показывает, что эта задача измерения опять решается с помощью лишь первой фундаментальной формы.

Пример. Подсчитаем площадь сферического сектора, ограниченного парой меридианов, например, $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_\circ$. Мы уже установили, что для сферы радиуса a в географических координатах

$$g_{11} = a^2,\ g_{12} = 0,\ g_{22} = a^2 \cos^2\theta$$

и, следовательно, $g = a^4 \cos^2\theta$. Тогда

$$\sigma = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\varphi_\circ} \cos\theta d\theta d\varphi\, .$$

Вычисляя, получим $\sigma = 2a^2\varphi_\circ$. В частности, площадь всей сферы равна $\sigma = 4\pi a^2$.

ЛЕКЦИЯ 14. ОТОБРАЖЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

14.1. Отображение поверхностей и его дифференциал.

Пусть M и M^* — две гладкие регулярно параметризованные поверхности в евклидовом пространстве с уравнениями

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad \mathbf{r}^* = \mathbf{r}^*(u^*, v^*).$$

Всякое отображение $f : M \to M^*$ точке $(u, v) \in M$ ставит в соответствие точку $(u^*, v^*) \in M^*$ и локально, в выбранных параметризациях записывается в виде (далее мы применяем индексные обозначения $u = u^1, v = u^2$)

$$f : u^{*i} = f^i(u^j). \tag{27}$$

Отображение f называется гладким, если гладки представляющие его функции $f^i(u^1, u^2)$.

Задача. *Покажите, что гладкость отображения не зависит от выбора параметризаций поверхностей.*

Примеры.

1) *Стереографическим* называется отображение сферы S^2 с фиксированной точкой (полюсом) $N \in S^2$, которое всякой точке сферы $A \neq N$ ставит в соответствие точку пересечения прямой NA с плоскостью π, не проходящей через полюс. Выберем для простоты сферу единичного радиуса с центром в начале координат, полюс $N(0, 0, 1)$ на оси Z и в качестве плоскости π плоскость XY. Тогда для точки $A(x, y, z)$ сферы имеем $\overrightarrow{NA} = (x, y, z - 1)$, а уравнение прямой NA имеет вид $X = (t + 1)x, Y = (t + 1)y, Z = z + t(z - 1)$. Точка ее пересечения с плоскостью $Z = 0$ соответствует значению параметра $t = \frac{z}{1-z}$ и имеет координаты $X = \frac{x}{1-z}$, $Y = \frac{y}{1-z}$. Учитывая, что точка A принадлежит сфере и выбирая на ней, например, географические координаты, получим

$$X = \frac{\cos\theta\cos\varphi}{1 - \sin\theta}, \quad Y = \frac{\cos\theta\sin\varphi}{1 - \sin\theta}.$$

В области $S^2 \setminus N$ отображение $(\theta, \varphi) \to (X, Y)$ является диффеоморфизмом.

2) Рассмотрим гладкую регулярно параметризованную поверхность M и сферу единичного радиуса. В точке $A \in M$ рассмотрим единичный вектор нормали $\mathbf{m}$ и поставим этой точке в соответствие точку сферы $A^* \in S^2$, определяемую радиусом-вектором $\mathbf{m}$. Мы получим гладкое отображение $M \to S^2$, определяемое формулой

$$\mathbf{m}(u.v) = \frac{[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]}{|[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]|}.$$

Оно называется *сферическим отображением* поверхности M. Например, 1-полостному гиперболоиду вращения соответствует на сфере полоса, ограниченная двумя параллелями, симметричными относительно экваториальной плоскости. Ширина этой полосы зависит, как легко видеть, от асимптотического конуса гиперболоида. Другой пример — сферическое отображение цилиндрической поверхности имеет своим образом кривую на сфере, поскольку в этом случае вектор $\mathbf{m}$, не изменяясь вдоль прямолинейных образующих цилиндра, зависит лишь от одного параметра. Такая же картина имеет место и для любой развертывающейся поверхности.

Справедлива

Теорема 10. *Со всяким гладким отображением (27) связано линейное отображение касательных пространств в соответствующих точках* $df : T_A M \to T_{A^*}M^*$, *матрицей которого относительно натуральных реперов является якобиева матрица*

$$(f^i_j) = \begin{pmatrix} \partial_1 f^1 & \partial_2 f^1 \\ \partial_1 f^2 & \partial_2 f^2 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Оно называется *дифференциалом* данного отображения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим на поверхности M точку $A(u^i)$ и проходящий через нее при $t = 0$ гладкий путь Γ с внутренними уравнениями $u^i = u^i(t)$. Его радиус-вектор $\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}(u^i(t))$. В этой точке он имеет касательный вектор $\mathbf{a} = \mathbf{p}'(0)$, который в натуральном репере имеет координаты $a^i = (\frac{du^i}{dt})(0)$. В результате отображения мы получим на M^* путь $\Gamma^* : \mathbf{p}^*(t) = f(\mathbf{p}(t))$, который в точке $t = 0$ имеет касательный вектор $\mathbf{a}^* = \mathbf{p}^{*\prime}(0)$. Таким образом, получаем отображение касательных пространств $df : T_A M \to T_{f(A)}M^*$, при котором всякому вектору $\mathbf{a} \in T_A M$ соответствует вектор $\mathbf{a}^* = df(\mathbf{a})$. Запишем его в координатах. Дифференцируя по t соотношение между путями и полагая затем $t = 0$, получим

$$a^{*i} = \frac{df^i(u^j(t))}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{\partial f^i}{\partial u^j}\frac{du^j}{dt}\Big|_{|t=0} = f^i_j(u,v)a^j.$$

Это искомое линейное отображение касательных пространств. □

Отображение f называется *регулярным*, если якобиева матрица имеет максимальный ранг $r = 2$. В этом случае отображения df касательных пространств являются линейными изоморфизмами. Тогда в силу теоремы об обратной функции для каждой точки существует окрестность U, в которой отображение f_U является диффеоморфизмом. Поэтому регулярные отображения поверхностей являются *локальными диффеоморфизмами.*

Теорема 11. *Если отображение регулярно, то в окрестностях соответствующих точек параметризации поверхностей можно выбрать так, чтобы соответствующие точки имели одинаковые координаты. Тогда локально отображение запишется в виде:* $f_U : u^{*i} = u^i$.

Такие координаты называются *согласованными с отображением.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в координатах, определенных в окрестностях $U \subset M$ и $f(U) \subset M^*$, отображение имеет вид $f_U : u^{*i} = f^i(u^j)$. Выберем в окрестности U поверхности M новые координаты $\tilde{u}^i = f^i(u^j)$. Тогда в этих координатах отображение запишется в виде $u^{*i} = \tilde{u}^i$. □

14.2. Изометрия и изгибание поверхностей.

Пусть f — диффеоморфизм поверхности M на поверхность M^*.

Определение. *Диффеоморфизм* $f : M \to M^*$ *называется изометрией, если его дифференциал* $df : T_A M \to T_{f(A)}M^*$ *сохраняет скалярное произведение:*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (df(\mathbf{a}), df(\mathbf{b})), \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_A M. \tag{29}$$

При локальном диффеоморфизме говорят о локальной изометрии.

Теорема 12. *Диффеоморфизм является изометрией тогда и только тогда, когда компоненты метрических тензоров в координатах, согласованных с отображением, совпадают:* $g_{ij}(u,v) = g^*_{ij}(u,v)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем соотношение (29) в координатах

$$g_{ij}a^i b^j = g^*_{km} f^k_i f^m_j a^i b^j \,,$$

откуда в силу произвольности векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

$$g_{ij}(u^s) = g^*_{km}(u^{*s}) f^k_i f^m_j .$$

Выберем теперь на поверхностях согласованные с отображением координаты, в которых $f : u^{*i} = u^i$. Тогда якобиева матрица диффеоморфизма становится единичной и ее компоненты $f^i_k = \delta^i_k$. Наше равенство принимает вид $g_{ij}(u^s) = g^*_{ij}(u^s)$. Достаточность этого признака очевидна. □

В дальнейшем, если не оговорено противное, при рассмотрении диффеоморфизмов и, в частности, изометрий мы будем использовать согласованные координаты. Следующая теорема дает геометрическую характеристику изометрии.

Теорема 13. *Диффеоморфизм является изометрией тогда и только тогда, когда равны длины дуг соответствующих путей:* $s = s^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть поверхности изометричны и отнесены к согласованным координатам. Тогда соответствующие пути имеют одинаковые уравнения $u^i = u^i(t)$, а поскольку их метрические тензоры в этих координатах совпадают, то длины дуг соответствующих путей вычисляются по одной и той же формуле

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}(u^k(t)) u^{i\prime} u^{j\prime}}\, dt.$$

Следовательно, они равны. Обратно, пусть соответствующие при отображении дуги путей равны: $s = s^*$, т. е. при одинаковых пределах

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}(u^k(t)) u^{i\prime} u^{j\prime}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g^*_{ij}(u^k(t)) u^{i\prime} u^{j\prime}} dt.$$

Тогда в силу произвольности этих пределов подынтегральные выражения равны, а в силу произвольности в выборе путей и, следовательно, функций $u^k(t)$, равны и компоненты метрических тензоров. Согласно теореме (12) это означает, что поверхности изометричны. □

Частным случаем изометрии является *изгибание поверхности.* Это ее такая гладкая деформация, при которой сохраняются длины дуг путей на поверхности. Аналитически изгибание задают формулой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v, \lambda)$, где векторная функция гладко зависит от некоторого параметра λ.

Определение. *Две поверхности называются* наложимыми*, если существует изгибание одной поверхности на другую.*

Из теоремы (13) следует, что наложимые поверхности изометричны и, значит, их первые фундаментальные формы совпадают. Обратное верно лишь локально. Например, сфера в целом не допускает изгибания, хотя локально это возможно.

Пример. Рассмотрим прямой круговой цилиндр $x^2 + y^2 = 1$ и на нем область, определенную неравенствами $x > 0, y > 0, 0 < z < 1$. Параметризуем цилиндр уравнением $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{e}(\varphi) + v\mathbf{k}$. Для заданной области параметры изменяются в пределах $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $0 < v < 1$. В этих координатах первая квадратичная форма цилиндра имеет вид $d\bar{\mathbf{r}}^2 = d\varphi^2 + dv^2$. С другой стороны, рассмотрим плоскость, которая в прямоугольных координатах имеет радиус-вектор $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ и первую квадратичную форму $d\mathbf{r}^2 = dx^2 + dy^2$. Отсюда видно, что отображение, задаваемое равенствами $x = \varphi,\ y = v$ является изометрией рассматриваемой области цилиндра на прямоугольную область $0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < 1$ плоскости. Значит, эти поверхности изометричны. Более того, очевидно, цилиндр наложим на плоскость.

Возникает вопрос, какие вообще поверхности наложимы на плоскость? Оказывается, имеет место [2]

Теорема 14. *Поверхность наложима на плоскость тогда и только тогда, когда она является развертывающейся.*

К этому классу поверхностей относятся цилиндрические и конические поверхности, а также поверхности касательных пространственной кривой. Утверждение теоремы мы оставим без доказательства.

14.3. Понятие о внутренней геометрии поверхности.

К.Ф. Гаусс в 1828 г. среди всех свойств поверхности выделил те, которые зависят только от ее первой фундаментальной формы. Совокупность таких свойств образуют ее *внутреннюю геометрию*. Отсюда следует, что изометричные (в частности, наложимые) поверхности имеют одинаковую внутреннюю геометрию. В частности, внутренняя геометрия поверхности не изменяется при ее изгибании. Например, внутренняя геометрия развертывающихся поверхностей (и только их!) совпадает с внутренней геометрии плоскости.

Учитывая полученные нами результаты, отметим некоторые из свойств, принадлежащих внутренней геометрии поверхности.

1) Длина дуги пути на поверхности.

2) Угол между двумя путями в точке их пересечения.

3) Площадь области на поверхности, ограниченной кусочно-гладким замкнутым путем.

В дальнейшем мы найдем и другие свойства поверхности, которые относятся к ее внутренней геометрии.

Лекция 15. ДЕРИВАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ

15.1. Сопровождающий репер и деривационные уравнения поверхности.

Изучая бирегулярные кривые в евклидовом пространстве, мы присоединяли к каждой точке кривой сопровождающий репер и, изучая его движение вдоль кривой, выяснили, что строение кривой в окрестности данной точки определяется двумя функциями — кривизной и кручением. Аналогичный метод мы применим и в случае поверхности. Пусть $M : \mathbf{r} = r(u^i)$ — регулярно параметризованная поверхность. Начнем с определения сопровождающего репера.

Определение. *Сопровождающим репером поверхности в точке* $\boldsymbol{r}(u^1, u^2) \in M$ *называется репер* $\{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{m}\}$ *, где* $\boldsymbol{r}_i = \partial_i \boldsymbol{r}$ *— векторы натурального репера касательной плоскости в этой точке,* $\boldsymbol{m}$ *— единичный вектор нормали.*

Напомним, что вектор $\mathbf{N} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$ направлен по нормали к поверхности и поэтому

$$\mathbf{m} = \frac{[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]}{|[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]|} = \frac{[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]}{\sqrt{g}} .$$

При смещении из точки $\mathbf{r}(u^i)$ в точку $\mathbf{r}'(u^i + h^i)$ сопровождающий репер изменяется в соответствии со строением поверхности в окрестности исходной точки. Так как

$$\mathbf{r}_j(u^k + h^k) = \mathbf{r}_j(u^k) + h^i \partial_i \mathbf{r}_j(u^k) + \mathbf{0}'_2 , \quad \mathbf{m}(u^k + h^k) = \mathbf{m}(u^k) + h^i \partial_i \mathbf{m}(u^k) + \mathbf{0}''_2 ,$$

то главной своей части это изменение определяется первыми производными $\partial_i \mathbf{r}_j$ и $\partial_i \mathbf{m}$ векторов сопровождающего репера по криволинейным координатам. Разлагая их в линейные комбинации по векторам исходного репера, получим соотношения, которые называются *деривационными уравнениями* поверхности

$$\begin{array}{llcll} a) & \partial_i \mathbf{r}_j & = & \Gamma^k_{ij} \mathbf{r}_k & + \quad h_{ij} \mathbf{m} , \\ b) & \partial_i \mathbf{m} & = & -W^k_i \mathbf{r}_k . & \end{array} \tag{30}$$

Здесь мы учли, что нормальный вектор $\mathbf{m}$ единичный. Поэтому его дифференциал, а значит и производные ортогональны к нему и лежат в касательной плоскости. Коэффициенты этих уравнений — функции криволинейных координат (u^1, u^2) . Задача состоит в том, чтобы найти эти коэффициенты и выяснить их геометрический смысл.

15.2. Вторая фундаментальная форма поверхности.

Займемся сначала первой серией уравнений. Заметим, что так как $\partial_i \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_{ij}$ суть вторые частные производные радиуса-вектора поверхности, они симметричны по индексам ij . Следовательно, симметричны по этим индексам и коэффициенты, стоящие в правой части уравнений: $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$, $h_{ij} = h_{ji}$. Умножая их скалярно на единичный вектор нормали и учитывая, что $(\mathbf{r}_k, \mathbf{m}) = 0$, получим

$$h_{ij} = (\mathbf{m}, \mathbf{r}_{ij}) = -(\partial_i \mathbf{m}, \mathbf{r}_j). \tag{31}$$

Эти коэффициенты определяют на поверхности симметричную билинейную форму

$$h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = h_{ij} a^i b^j, \tag{32}$$

которая называется *второй фундаментальной формой* поверхности. Эта форма представляет собой симметричное дважды ковариантное тензорное поле на поверхности с компонентами $h_{ij}(u,v)$, которые при переходе к другой параметризации преобразуются по тензорному закону. Наряду с (32) рассматривают также *вторую квадратичную форму* поверхности $h(\mathbf{a},\mathbf{a})$, которую часто записывают в виде $\varphi_2 = h_{ij}du^i du^j$.

Примеры.

1) Для плоскости нормальный вектор $\mathbf{m} = \mathrm{const}$. Поэтому $h_{ij} = -(\partial_i \mathbf{m}, \mathbf{r}_j) = 0$.

2) Найдем вторую квадратичную форму геликоида $\mathbf{r} = u\mathbf{e}(v) + av\mathbf{k}$. Нам понадобятся производные первого и второго порядка радиуса-вектора. Имеем

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{e}(v), \quad \mathbf{r}_2 = u\mathbf{g}(v) + a\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_{11} = 0, \quad \mathbf{r}_{12} = \mathbf{g}(v), \quad \mathbf{r}_{22} = -u\mathbf{e}(v).$$

Так как $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = u\mathbf{k} - a\mathbf{g}$, то единичный вектор нормали равен

$$\mathbf{m} = \frac{u\mathbf{k} - a\mathbf{g}}{\sqrt{u^2 + a^2}}.$$

Вычисляя коэффициенты (31), получим

$$h_{11} = 0, \quad h_{12} = -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}}, \quad h_{22} = 0.$$

Следовательно, вторая кадратичная форма геликоида имеет вид

$$\varphi_2 = -\frac{2adudv}{\sqrt{u^2 + a^2}}.$$

15.3. Оператор Вейнгартена.

Рассмотрим теперь уравнения (b) системы (30). Если умножить их скалярно на векторы $\mathbf{r}_j$, получим

$$(\partial_i \mathbf{m}, \mathbf{r}_j) = -W_i^s g_{sj}.$$

Но согласно формуле (31) $(\partial_i \mathbf{m}, \mathbf{r}_j) = -(\mathbf{m}, \mathbf{r}_{ij}) = -h_{ij}$. Поэтому

$$h_{ij} = W_i^s g_{sj}. \tag{33}$$

Таким образом, для нахождения коэффициентов W_i^k уравнений (30b) мы получили систему линейных уравнений. Свертывая их с компонентами g^{jm} тензора, обратного к метрическому, и учитывая, что $g_{sj}g^{jm} = \delta_s^m$, разрешим эту систему относительно коэффициентов W_j^i

$$W_i^k = g^{kj} h_{ij}. \tag{34}$$

Эти коэффициенты определяют в касательной плоскости каждой точки поверхности некоторый линейный оператор $\tilde{\mathbf{a}} = W\mathbf{a}$: $\tilde{a}^i = W_j^i a^j$, который называется *оператором Вейнгартена*. Нетрудно видеть, что это тензор валентности $(1,1)$. Для того, чтобы установить его свойства, рассмотрим вторую фундаментальную форму (32) и подставим туда ее коэффициенты из (33). Получим $h_{ij}a^i b^j = g_{sj} W_i^s a^i b^j$ или

$$h(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (W\mathbf{a},\mathbf{b}). \tag{35}$$

Это значит, что W является линейным оператором, *присоединенным* ко второй фундаментальной форме.

Теорема 15. *Оператор Вейнгартена является самосопряженным*:

$$(W\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, W\mathbf{b}), \quad \forall\, \mathbf{a},\mathbf{b} \in T_{\mathbf{r}}M.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это его свойство является непосредственным следствием симметрии первой и второй фундаментальных форм. Действительно, из (35) при любом выборе касательных векторов имеем

$$(W\mathbf{a},\mathbf{b}) = h(\mathbf{a},\mathbf{b}) = h(\mathbf{b},\mathbf{a}) = (W\mathbf{b},\mathbf{a}) = (\mathbf{a}, W\mathbf{b}). \quad \Box$$

Выясним, как он действует на векторы касательной плоскости. Для этого вторую билинейную форму (32), используя выражения (31) для ее коэффициетов, запишем в виде

$$h(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (W\mathbf{a},\mathbf{b}) = -(a^i\partial_i\mathbf{m},\mathbf{b}) = -(d\mathbf{m}(\mathbf{a}),\mathbf{b}).$$

Отсюда, учитывая произвольность в выборе вектора $\mathbf{b}$, получим

$$W\mathbf{a} = -d\mathbf{m}(\mathbf{a}) = -a^i\partial_i\mathbf{m}. \tag{36}$$

Это, взятая с противоположным знаком, производная единичного вектора нормали в направлении вектора $\mathbf{a} \in T_AM$. Итак, оператор Вейнгартена преобразует всякий вектор $\mathbf{a} \in T_AM$ в вектор $-d\mathbf{m}(\mathbf{a}) \in T_AM$, который в силу условия $|\mathbf{m}| = 1$, снова принадлежит касательной плоскости.

Что касается трехиндексных коэффициентов уравнений (a), то мы отложим их рассмотрение до лекции 18.

Примеры.

1) Для сферы радиуса R $\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}}{R}$, а его дифференциал равен $d\mathbf{m} = \frac{d\mathbf{r}}{R}$. Следовательно, для всякого вектора $\mathbf{a}$ касательной плоскости $W\mathbf{a} = -\frac{d\mathbf{r}(\mathbf{a})}{R}$, а так как $d\mathbf{r}(\mathbf{a}) = a^i\mathbf{r}_i = \mathbf{a}$, то $W\mathbf{a} = -\frac{\mathbf{a}}{R}$. Это гомотетия второго рода.

2) Рассмотрим геликоид $\mathbf{r} = u\mathbf{e}(v) + av\mathbf{k}$, $a = \mathrm{const}$. Его единичный вектор нормали мы уже нашли в п. 15.2, пр.2: $\mathbf{m} = \frac{u\mathbf{k} - a\mathbf{g}}{\sqrt{u^2+a^2}}$. Вычислим его производные

$$\partial_1\mathbf{m} = \frac{au\mathbf{g}(v) + a^2\mathbf{k}}{(u^2+a^2)^{3/2}} = \frac{a\mathbf{r}_2}{(u^2+a^2)^{3/2}}, \quad \partial_2\mathbf{m} = \frac{a\mathbf{e}(v)}{(u^2+a^2)^{1/2}} = \frac{a\mathbf{r}_1}{(u^2+a^2)^{1/2}}.$$

Тогда из деривационных уравнений следует, что

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{(u^2+a^2)^{3/2}} \\ -\frac{a}{(u^2+a^2)^{1/2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Лекция 16. НОРМАЛЬНАЯ КРИВИЗНА

16.1. Нормальная кривизна.

Пусть Γ — бирегулярный путь на поверхности, $u^i = u^i(s)$ — его внутренние уравнения, отнесенные к натуральному параметру, и $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(u^i(s))$ — радиус-вектор этого пути. Касательный вектор $\dot{\mathbf{r}}$ лежит в касательной плоскости T_AM. Рассмотрим вектор кривизны $\ddot{\mathbf{r}} = k(s)\mathbf{n}$. Как мы знаем, вместе с касательным вектором он определяет соприкасающуюся плоскость Π пути (п. 7.2). Изучим вопрос о взаимном расположении соприкасающейся и касательной плоскостей в точках пути и выясним, как это влияет на его свойства.

Определение. *Нормальной кривизной пути на поверхности называется ортогональная проекция его вектора кривизны на нормаль к поверхности*: $k_n = \mathrm{pr}_{\mathbf{m}}\ddot{\mathbf{r}}$. Следовательно, эта проекция равна

$$k_n = (\mathbf{m}, \ddot{\mathbf{r}}). \tag{37}$$

Обратная величина $R_n = \frac{1}{k_n}$ называется *радиусом нормальной кривизны.*

Найдем формулу для вычисления нормальной кривизны в координатах. Имеем

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_i\dot{u}^i, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j + \mathbf{r}_i\ddot{u}^i.$$

Тогда из (37), учитывая, что $(\mathbf{m}, \mathbf{r}_i) = 0$, получим

$$k_n = (\mathbf{m}, \mathbf{r}_{ij})\dot{u}^i\dot{u}^j = h_{ij}(u^k)\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\,. \tag{38}$$

Из полученных формул вытекает важный вывод: *нормальная кривизна зависит лишь от точки поверхности и направления касательной в этой точке*. Значит, все пути, проходящие через ту же точку и имеющие общую касательную имеют одну и ту же нормальную кривизну. Поэтому, отвлекаясь от исходного пути, мы можем в данной точке задать произвольный единичный вектор в касательной плоскости $\mathbf{e} \in T_AM$ и тогда

$$k_n(\mathbf{e}) = h(\mathbf{e}, \mathbf{e}). \tag{39}$$

Эта формула задает значения нормальной кривизны в данной точке в зависимости от направления в касательной плоскости.

16.2. Теорема Менье.

Итак, все пути, проходящие через данную точку в заданном направлении имеют одну и ту же нормальную кривизну. Мы можем ограничиться лишь плоскими путями. Последние получим так. Возьмем прямую в касательной плоскости T_AM, проходящую через точку A с направляющим вектором $\mathbf{e}$ и рассмотрим пучок плоскостей $\{\Pi\}$, осью которого является данная прямая. Пересекая ими поверхность, получим пучок плоских путей $\{\Gamma\}$, для которых секущие плоскости являются соприкасающимися. Все эти сечения имеют одну и ту же нормальную кривизну (39). Среди них выделим *нормальное сечение* Π_0, проходящее через нормаль к поверхности. Оно содержит векторы $\mathbf{e}$ и $\mathbf{m}$, причем для определенности ориентируем поверхность так, чтобы вектор нормали $\mathbf{m}$ был направлен в сторону вогнутости сечения и тогда он совпадет с единичным вектором $\mathbf{n}$ главной нормали пути Γ_0.

С другой стороны, каждое плоское сечение имеют некоторую кривизну $k(s) > 0$ в точке A и соответствующий центр кривизны. Для того, чтобы установить связь между величинами k_n и k, рассмотрим два сечения — одно из них нормальное, а другое наклонное к нему под некоторым углом. Тогда справедлива

Теорема 16. (Менье) *Ортогональная проекция центра кривизны нормального сечения поверхности на плоскость наклонного сечения с той же касательной есть центр кривизны этого наклонного сечения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через θ угол между нормальным и наклонным сечениями. Это угол между их главными нормалями, т. е. между векторами $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$. Значит, $\cos\theta = (\mathbf{m}, \mathbf{n})$. По определению нормальной кривизны $k_n = (\mathbf{m}, \ddot{r}) = k(s)(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = k(s)\cos\theta$. Итак, связь между кривизной и нормальной кривизной аналитически определяется формулой

$$k_n = k(s)\cos\theta. \qquad (40)$$

Переписав ее в терминах радиусов кривизны, получим $R = R_n \cos\theta$, откуда и следует утверждение теоремы. □

Эта теорема имеет простой геометрический смысл.

Следствие. *Центры кривизны пучка плоских сечений поверхности с общей касательной расположены на окружности в их общей нормальной плоскости, которая своим диаметром имеет отрезок между точкой поверхности и центром кривизны нормального сечения. Следовательно, длина этого диаметра равна* $|R_n|$.

16.3. Главные направления и главные кривизны поверхности.

В лекции 15 был определен оператор Вейнгартена (36) — линейный оператор, действующий в касательных плоскостях поверхности.

Определение. *Главными направлениями поверхности в данной точке называются главные направления оператора Вейнгартена.*

Как известно, главные направления любого линейного оператора задаются его собственными векторами, которые определяются условием

$$W\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p} \qquad (41)$$

или в координатах $W^i_k p^k = \lambda p^i$. Следовательно, для нахождения координат собственных векторов мы имеем систему линейных однородных уравнений

$$(W^i_k - \lambda\delta^i_k)p^k = 0, \qquad (42)$$

где δ^i_k — символы Кронекера. Эта система имеет ненулевое решение лишь тогда, когда ее определитель нулевой, т. е. при условии

$$\begin{vmatrix} W^1_1 - \lambda & W^1_2 \\ W^2_1 & W^2_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Мы получили характеристическое уравнение для нахождения собственных значений оператора W, при которых существует ненулевое решение $\mathbf{p} = (p^1, p^2)$ однородной системы (42). Раскрывая определитель, запишем характеристическое уравнение в виде

$$\lambda^2 - 2H\lambda + K = 0. \qquad (43)$$

Пусть $\lambda = k_1$ и $\lambda = k_2$ корни этого уравнения. Они называются *главными кривизнами* поверхности. Важно отметить, что так как оператор Вейнгартена самосопряженный, главные кривизны а значит и отвечающие им собственные векторы всегда вещественны. Каждой из главных кривизн соответствует по крайней мере один собственный вектор $\mathbf{p}$ оператора W — решение системы (42).

Рассмотрим случаи, которые здесь могут представиться.

1) $k_1 \neq k_2$. В этом случае собственные векторы ортогональны. Действительно, так как оператор Вейнгартена самосопряженный, то $(W\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = (\mathbf{p}_1, W\mathbf{p}_2)$. Отсюда следует $(k_1 - k_2)(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = 0$ и поэтому $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = 0$.

2) $k_1 = k_2 \neq 0$. Этот случай возникает, если в данной точке поверхности $K = H^2$. Такая точка называется *сферической* или *омбилической*, а любое направление в ней является главным. В самом деле, пусть $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ — два линейно независимых собственных вектора, соответствующих главной кривизне $k = k_1 = k_2$. Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{p}_1 + \beta\mathbf{p}_2$ в касательной плоскости этой точки. Тогда $W\mathbf{a} = k(\alpha\mathbf{p}_1 + \beta\mathbf{p}_2) = k\mathbf{a}$, т. е. оператор Вейнгартена является гомотетией касательной плоскости.

3) Если одна из главных кривизн равна нулю, то соответствующий собственный вектор удовлетворяет условию $W\mathbf{p} = 0$. Задаваемое им направление называется *асимптотическими*. В этом случае мы имеем $(W\mathbf{p}, \mathbf{p}) = h(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = 0$.

4) Если же $k_1 = k_2 = 0$, то $W(\mathbf{a}) = -d\mathbf{m}(\mathbf{a}) = 0$ для любого вектора $\mathbf{a} \in T_AM$ и, значит, $\mathbf{m} = \mathrm{const}$. Следовательно, поверхность является либо плоскостью, либо частью плоскости.

Примеры.

1) Рассматривая оператор Вейнгартена на сфере (лекц. 15, пр. 1), мы видели, что на ней в каждой точке реализуется второй случай. Обратно, можно показать, что если в *каждой* точке поверхности ненулевые главные кривизны совпадают, то эта поверхность есть либо сфера, либо область сферы.

2) Для геликоида матрицу оператора Вейнгартена мы уже вычислили (лекц. 15, пр. 2)

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{(u^2+a^2)^{3/2}} \\ -\frac{a}{(u^2+a^2)^{1/2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 - \frac{a^2}{(u^2+a^2)} = 0$. Значит, главные кривизны равны $k_{1,2} = \pm\frac{a}{u^2+a^2}$.

16.4. Средняя и гауссова кривизны.

Обратимся теперь к коэффициентам характеристического уравнения (43). По теореме Виета $2H = k_1 + k_2$, $K = k_1k_2$. С другой стороны, эти коэффициенты можно вычислить непосредственно через компоненты оператора Вейнгартена

$$2H = \mathrm{tr}W = W_1^1 + W_2^2, \quad K = \det W. \tag{44}$$

Величина $2H$ называется *средней кривизной*, а K — *гауссовой* или *полной кривизной* поверхности.

Гауссову, среднюю и главные кривизны можно найти непосредственно с помощью первой и второй фундаментальных форм. Связь между оператором Вейнгартена и второй фундаментальной формой определяется формулой (35). Если поэтому вектор $\mathbf{a}$ имеет главное направление, то в силу (41)

$$h(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0.$$

Запишем это условие в координатах и учтем, что оно должно выполняться при любом выборе вектора $\mathbf{b}$. В результате получим систему двух линейных однородных уравнений для координат вектора $\mathbf{a}$

$$(h_{ij} - \lambda g_{ij})a^i = 0. \tag{45}$$

Поскольку эта система должна иметь ненулевое решение, имеем

$$\begin{vmatrix} h_{11}-\lambda g_{11} & h_{12}-\lambda g_{12} \\ h_{12}-\lambda g_{12} & h_{22}-\lambda g_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{46}$$

Мы снова получили характеристическое уравнение для нахождения главных кривизн. После раскрытия определителя и приведения полученного квадратного уравнения к каноническому виду (43) найдем

$$K = \frac{h}{g}, \quad 2H = \frac{g_{22}h_{11} - 2g_{12}h_{12} + g_{11}h_{22}}{g}. \tag{47}$$

Обратим внимание на то, что так как $g = \det(g_{ij}) > 0$, знак определителя $h = \det(h_{ij})$ второй фундаментальной формы совпадает со знаком гауссовой кривизны.

Выражение для средней кривизны можно записать более компактно, если учесть, что матрица, обратная к матрице 1-й фундаментальной формы имеет вид

$$(g^{ij}) = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$2H = g^{ij}h_{ij}.$$

Поверхности, для которых средняя кривизна равна нулю, называются *минимальными.* Такое название они получили потому, что из всех поверхностей, натянутых на данный замкнутый контур Γ в пространстве, минимальные поверхности имеют наименьшую площадь. Другими словами, функционал площади

$$\sigma = \int_Q \sqrt{g}\, dudv, \quad g = \det(g_{ij}),$$

где Q — область, ограниченная контуром Γ, для минимальной поверхности достигает своего минимального значения. Такие поверхности вследствие сил поверхностного натяжения реализуются, например, в виде мыльных пленок.

Примеры.

1) Покажем, что *всякая развертывающаяся поверхность имеет нулевую гауссову кривизну.* Действительно, всякая развертывающаяся поверхность имеет уравнение $\mathbf{R} = \mathbf{r}(t) + v\mathbf{a}(t)$, где — орт $\mathbf{a}$ прямолинейных образующих должен удовлетворять условию $(\mathbf{r}', \mathbf{a}, \mathbf{a}') = 0$ (лекц. 12, теор. 9). В силу формулы (47) нам достаточно показать, что дискриминант второй билинейной формы $h = h_{11}h_{22} - h_{12}^2 = 0$. Имеем

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{r}' + v\mathbf{a}', \quad \mathbf{R}_v = \mathbf{a}, \quad \mathbf{R}_{tt} = \mathbf{r}'' + v\mathbf{a}'', \quad \mathbf{R}_{tv} = \mathbf{a}', \quad \mathbf{R}_{vv} = 0.$$

Единичный вектор нормали равен $\mathbf{m} = \frac{1}{|\mathbf{N}|}([\mathbf{r}', \mathbf{a}] + v[\mathbf{a}', \mathbf{a}])$. Отсюда $h_{22} = 0$ и поэтому $h = -h_{12}^2$. Следовательно, нужно подсчитать только коэффициент h_{12}. Имеем $h_{12} = \frac{1}{|\mathbf{N}|}(\mathbf{r}', \mathbf{a}, \mathbf{a}') = 0$. Поэтому $h = 0$ и, следовательно, $K = 0$.

2) Для рассмотренного в п. 16.3, пр. 2 геликоида средняя кривизна $2H = k_1 + k_2 = 0$, гауссова кривизна $K = k_1k_2 = -\frac{a^2}{(u^2+a^2)^2}$. Таким образом, это минимальная поверхность отрицательной гауссовой кривизны.

Лекция 17. ЛОКАЛЬНОЕ СТРОЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ

17.1. Теорема Эйлера.

Теорема Эйлера устанавливает зависимость нормальной кривизны поверхности от главных кривизн. Ориентируем поверхность так, чтобы тройка векторов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{m}\}$ имела правую ориентацию.

Теорема 17. (Эйлера) *Нормальная кривизна в произвольном направлении выражается через главные кривизны и угол, который это направление образует с первым главным направлением, по формуле*

$$k_n(\mathbf{e}) = k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В заданной точке регулярной поверхности рассмотрим ортонормированный репер $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, где $\mathbf{e}_i$ — орты главных направлений. Тогда орт любого направления можно задать вектором $\mathbf{e} = \cos\varphi\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\mathbf{e}_2$, образующим угол φ с первым главным направлением. Рассмотрим нормальную кривизну в этом направлении: $k_n(\mathbf{e}) = h(\mathbf{e}, \mathbf{e})$. Учитывая разложение вектора $\mathbf{e}$ по ортам главных направлений, билинейность второй фундаментальной формы и ее симметрию, получим

$$k_n(\mathbf{e}) = h(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)\cos^2\varphi + 2h(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\cos\varphi\sin\varphi + h(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)\sin^2\varphi.$$

Здесь по определению второй фундаментальной формы и главных направлений

$$h(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = (W\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = k_1\mathbf{e}_1^2 = k_1,$$
$$h(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = (W\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = k_2\mathbf{e}_2^2 = k_2,$$
$$h(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (W\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = k_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0,$$

откуда и следует формула Эйлера. □

Следствие. *Главные кривизны поверхности суть значения нормальной кривизны в главных направлениях.*

Действительно, из формулы Эйлера главные кривизны получаются при значениях угла $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$, соответствующих первому и второму главным направлениям.

17.2. Строение поверхности в окрестности данной точки.

Формула Эйлера позволит нам разобраться в том, как устроена поверхность локально, в окрестности данной точки. Для этого рассмотрим пучок плоскостей $\Pi(\varphi)$, осью которого является нормаль поверхности. Здесь, как и выше, φ — ориентированный угол, который эта плоскость образует с первым главным направлением. Плоскости этого пучка определяют нормальные сечения поверхности, для которых эти плоскости являются соприкасающимися. Рассмотрим вектор кривизны этих сечений и напомним, что он всегда направлен в сторону вогнутости сечения. В любом случае $\ddot{\mathbf{r}} = \varepsilon k\mathbf{m}$, где $\varepsilon = +1$, если по отношению к нормали сечение вогнутое и $\varepsilon = -1$, если оно выпуклое. Обратимся теперь к формуле Эйлера и рассмотрим различные случаи.

1) Пусть гауссова кривизна поверхности в данной точке $K > 0$. Так как $K = k_1k_2$, то в этом случае главные кривизны имеют одинаковый знак. Пусть для определенности $k_1 = \frac{1}{a^2} > 0$ и $k_2 = \frac{1}{b^2} > 0$ (случай, когда они обе отрицательны, приводит к аналогичному результату). Тогда формула Эйлера примет вид

$$k_n(\mathbf{e}) = \frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\,.$$

Таким образом, в любом направлении $k_n(\mathbf{e}) > 0$. Асимптотических направлений нет. Такая точка называется *точкой эллиптического типа*. Так как в этом случае $k_n = (\mathbf{m}, \ddot{\mathbf{r}}) = \varepsilon k \mathbf{m}^2 > 0$, то $\varepsilon = 1$ и, значит, все нормальные сечения вогнуты в сторону нормали. Это говорит о том, что в окрестности эллиптической точки поверхность имеет чашеобразное строение.

2) Пусть в рассматриваемой точке $K < 0$. Главные кривизны имеют разный знак. Положив для определенности $k_1 = \frac{1}{a^2} > 0$, $k_2 = -\frac{1}{b^2} < 0$, получим

$$k_n(\mathbf{e}) = \frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\,.$$

Значит, нормальная кривизна может иметь разный знак и обращается в нуль при двух значениях угла: $\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{b}{a}$. Следовательно, имеется два различных асимптотических направления. Эти два направления разбивают все нормальные сечения на выпуклые и вогнутые по отношению к выбранному направлению нормали. Значит, в окрестности данной точки поверхность имеет седлообразное строение. Это *точка гиперболического типа*.

3) Рассмотрим случай, когда $K = k_1 k_2 = 0$. Пусть только одна из главных кривизн обращается в нуль, например $k_2 = 0$. Положим $k_1 = \frac{1}{a^2}$. Тогда по формуле Эйлера $k_n(\mathbf{e}) = \frac{\cos^2\varphi}{a^2} \geq 0$. Мы имеем лишь одно асимптотическое направление при $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Одновременно оно является и главным. Все нормальные сечения вогнуты в сторону нормали, кроме одного — асимптотического. Говорят, что точка имеет *параболический тип*.

4) Если обе главные кривизны равны нулю, то $k_n(\mathbf{e}) \equiv 0$. Каждое направление в данной точке является асимптотическим и главным одновременно. Такая точка называется *точкой уплощения*. Из таких точек состоит плоскость.

17.3. Теорема Гаусса.

Особо важное значение в теории поверхностей имеет гауссова кривизна в силу следующей теоремы, которую мы приведем без доказательства.

Теорема 18. (Гаусса) *Гауссова кривизна поверхности может быть выражена через коэффициенты только первой фундаментальной формы и их частные производные первого и второго порядка*:

$$K = K(g_{ij},\, \partial_k g_{ij},\, \partial_{km} g_{ij}).$$

Таким образом, гауссова кривизна принадлежит внутренней геометрии поверхности. Аналитически это выражение довольно сложное и мы приведем его лишь для случая, когда координатная сеть на поверхности ортогональная и, следовательно, $g_{12} = 0$. Положив $g_{11} = A^2$, $g_{22} = B^2$, имеем

$$K = -\frac{1}{AB}\left\{\left(\frac{B_u}{A}\right)_u + \left(\frac{A_v}{B}\right)_v\right\}. \tag{48}$$

Следствие. *Если поверхности изометричны, то они имеют (в соответствующих координатах) одну и ту же гауссову кривизну.*

Примеры.

1) Для плоскости $\mathbf{m} = \text{const}$ и поэтому оператор Вейнгартена $W = 0$. Следовательно, ее гауссова кривизна $K = 0$. Такую же кривизну, как мы видели, имеют все развертывающиеся поверхности. Позже будет доказано, что они изометричны плоскости (или ее части).

2) Рассмотрим сферу радиуса $a : \mathbf{r} = a(\cos\theta \mathbf{e}(\varphi) + \sin\theta \mathbf{k})$. Ее первая квадратичная форма найдена в п. 13.2, пр. 2, а компоненты метрического тензора в географических координатах имеют вид $g_{11} = a^2$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = a^2\cos^2\theta$. Поэтому $A = a$, $B = a\cos\theta$ и по формуле (48) получим $K = \frac{1}{a^2}$. Таким образом, сфера — это поверхность постоянной положительной гауссовой кривизны.

3) Из поверхностей второго порядка эллипсоид (в частности, сфера), двуполостный гиперболоид и эллиптический параболоид имеют положительную гауссову кривизну. Поверхности отрицательной кривизны — 1-полостный гиперболоид, гиперболический параболоид. Цилиндры и конус второго порядка являются развертывающимися поверхностями и потому, как уже было сказано, имеют нулевую гауссову кривизну..

4) Тор есть поверхность, образованная вращением окружности радиуса a, центр которой удален от оси вращения на расстоянии $b > a$ (п. 12.1, пр. 2). Его параметрическое уравнение $\mathbf{r}(\theta,\varphi) = (a\cos\theta + b)\mathbf{e}(\varphi) + b\sin\theta\mathbf{k}$. Найдем первую фундаментальную форму. Имеем

$$\mathbf{r}_1 = a(-\sin\theta\mathbf{e}(\varphi) + \cos\theta\mathbf{k}), \quad \mathbf{r}_2 = (a\cos\theta + b)\mathbf{g}(\varphi),$$

откуда

$$g_{11} = a^2, \quad g_{22} = (a\cos\theta + b)^2.$$

Так как координатная сеть ортогональна, то мы можем вычислить гауссову кривизну тора, используя формулу (48). Учитывая, что в рассматриваемом примере $A = a$, $B = a\cos\theta + b > 0$, получим

$$K = \frac{\cos\theta}{a(a\cos\theta + b)}.$$

Так как $a\cos\theta + b > 0$, знак гауссовой кривизны зависит лишь от знака $\cos\theta$, откуда следует, что она положительна при $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, отрицательна при $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ и обращается в нуль при $\pm\frac{\pi}{2}$. Следовательно, на торе имеются точки всех трех типов: эллиптические — это его внешняя область, гиперболические, образующие внутреннюю область и параболические, которые разделяют эти области двумя окружностями.

Лекция 18. АБСОЛЮТНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ И КОВАРИАНТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ.

18.1. Символы Кристоффеля.

Рассмотрим теперь деривационные уравнения (30) (лекц. 15) и займемся нахождением коэффициентов Γ_{ij}^{k}. Умножим эти уравнения скалярно на векторы натурального репера $\mathbf{r}_k$. Учтем их ортогональность вектору нормали и то, что $(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_k) = g_{sk}$ — компоненты первой фундаментальной формы. Тогда получим

$$(\mathbf{r}_k, \partial_i \mathbf{r}_j) = \Gamma_{ij}^{s} g_{sk}.$$

Приведем эти уравнения к несколько другому виду. Если продифференцировать скалярные произведения $(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j) = g_{kj}$ с помощью оператора частного дифференцирования $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u^i}$, получим

$$(\partial_i \mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j) + (\mathbf{r}_k, \partial_i \mathbf{r}_j) = \partial_i g_{kj}\,.$$

Таким образом,

$$\Gamma_{ik}^{s}\, g_{sj} + \Gamma_{ij}^{s}\, g_{sk} = \partial_i\, g_{kj}\,. \tag{49}$$

Покажем, что эта линейная система имеет единственное решение и найдем его. Делается это так. Перепишем уравнения (49) еще дважды, сделав циклическую перестановку нижних индексов: $ijk \to jki \to kij$. В результате получим

$$\Gamma_{ji}^{s}\, g_{sk} + \Gamma_{jk}^{s}\, g_{si} = \partial_j\, g_{ik}\,,$$

$$\Gamma_{kj}^{s}\, g_{si} + \Gamma_{ki}^{s}\, g_{sj} = \partial_k\, g_{ji}\,.$$

Сложим все эти три соотношения со знаками $+-+$. С учетом симметрии коэффициентов g_{ij} и Γ_{ij}^{s} по нижним индексам, придем к уравнениям

$$2\Gamma_{ik}^{s} g_{sj} = \partial_i g_{kj} + \partial_k g_{ji} - \partial_j g_{ik}\,.$$

Осталось сделать последний шаг, выразив отсюда коэффициенты Γ_{ik}^{s}. Заметим, что в этих уравнениях идет суммирование по повторяющемуся индексу $s = 1, 2$. Рассмотрим матрицу (g^{ij}), обратную к матрице (g_{ij}). Их компоненты связаны соотношением $g_{sj} g^{jm} = \delta_s^m$. Если поэтому свернуть полученные уравнения с g^{jm}, то получим следующий результат

$$\Gamma_{ij}^{m} = \frac{1}{2} g^{mk} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}). \tag{50}$$

Эти коэффициенты называются *символами Кристоффеля*. Как видим, они выражаются только через коэффициенты первой квадратичной формы и их частные производные первого порядка.

Примеры.

1) Первая квадратичная форма плоскости в произвольных декартовых координатах $\{0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ имеет постоянные коэффициенты $g_{ij} = (\mathbf{e}_i, e_j) = \mathrm{const}$. Поэтому все символы Кристоффеля $\Gamma_{ij}^{m} = 0$.

2) Точки той же плоскости, отнесенной к полярным координатам, имеют радиус-вектор $\mathbf{r} = r\mathbf{e}(\theta)$. Тогда $d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}(\theta) + r\mathbf{g}(\theta) d\theta$. Следовательно ее первая квадратичная форма имеет вид $d\mathbf{r}^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ с коэффициентами $g_{11} = 1, g_{12} = 0, g_{22} = r^2$,

(здесь $u^1 = r, u^2 = \theta$). Подсчитаем символы Кристоффеля этой метрики. Из частных производных отлична от нуля лишь одна: $\partial_1 g_{22} = 2r$. Компоненты обратной матрицы равны $g^{11} = 1, g^{12} = 0, g^{22} = \frac{1}{r^2}$. Поэтому отличны от нуля лишь

$$\Gamma^1_{22} = -r,\, \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}$$

18.2. Абсолютный дифференциал векторного поля.

Параллельное перенесение вектора в евклидовом пространстве имеет абсолютный характер в том смысле, что оно не зависит от пути перенесения. Аналитически оно определяется условием $d\mathbf{a} = 0$. На поверхности такое перенесение невозможно. Нашей целью является определить аналог такого перенесения. Для этого нам нужно определить понятие дифференциала векторного поля.

В лекции 13 мы видели, что определение алгебраических операций с тензорными полями на поверхности непосредственно переносится из тензорной алгебры и не встречает никаких затруднений. Иначе обстоит дело с их дифференцированием. Пусть на поверхности задано векторное поле $\mathbf{a} = a^i\mathbf{r}_i$. Тогда его дифференциал $d\mathbf{a}$ уже не принадлежит, вообще говоря, касательной плоскости и, значит, не является векторным полем на поверхности. В самом деле, мы имеем $d\mathbf{a} = da^j\mathbf{r}_j + a^j d\mathbf{r}_j$. Но в силу деривационных уравнений (30)

$$d\mathbf{r}_j = \partial_i \mathbf{r}_j du^i = (\Gamma^k_{ij}\mathbf{r}_k + h_{ij}\mathbf{m})du^i\,,$$

откуда

$$d\mathbf{a} = (da^k + \Gamma^k_{ij}du^i a^j)\mathbf{r}_k + h_{ij}du^i a^j\mathbf{m}.$$

Как видим, здесь кроме касательной присутствует также нормальная составляющая дифференциала. Поэтому естественным является следующее обобщение этого понятия

Определение. *Абсолютным дифференциалом векторного поля на поверхности называется оператор ∇ , который всякому гладкому векторному полю $\boldsymbol{a}$ на поверхности ставит в соответствие векторное поле*

$$\nabla\mathbf{a} = \mathrm{pr}_{_T} d\mathbf{a}\,. \tag{51}$$

Здесь $\mathrm{pr}_{_T}$ означает ортогональную проекцию на касательную плоскость. Отсюда вытекает, что в координатах

$$\nabla\mathbf{a} = (da^k + \Gamma^k_{ij}du^i a^j)\mathbf{r}_k\,. \tag{52}$$

Теорема 19. *Абсолютный дифференциал векторного поля есть линейный дифференциальный оператор: для любой пары гладких векторных полей $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ и гладкой функции F на M :*

1) $\nabla(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda\nabla\mathbf{a} + \mu\nabla\mathbf{b}$, $\quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
2) $\nabla(F\mathbf{a}) = f\nabla\mathbf{a} + dF\mathbf{a}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эти свойства вытекают непосредственно из аналогичных свойств обычного дифференциала и свойств ортогональной проекции, которая является линейным отображением:

$$\nabla(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \mathrm{pr}_{_T} d(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) = \lambda \mathrm{pr}_{_T} d(\mathbf{a}) + \mu \mathrm{pr}_{_T} d(\mathbf{b}) = \lambda\nabla\mathbf{a} + \mu\nabla\mathbf{b},$$

$$\nabla(F\mathbf{a}) = \mathrm{pr}_{_T} d(F\mathbf{a}) = \mathrm{pr}_{_T}(dF\mathbf{a} + Fd\mathbf{a}) = dF\mathbf{a} + F\mathrm{pr}_{_T}\mathbf{a} = dF\mathbf{a} + F\nabla\mathbf{a}. \quad \square$$

18.3. Ковариантные производные.

Если на поверхности задано векторное поле $\mathbf{h}(u^i)$, то дифференциалы функций в формуле (52) можно вычислить в направлении этого поля. Учитывая, что $da^k(\mathbf{h}) = h^i \partial_i a^k$ и $du^i(\mathbf{h}) = h^i$, получим векторное поле

$$\nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{a} = h^i(\partial_i a^k + \Gamma^k_{ij} a^j)\mathbf{r}_k \tag{53}$$

с координатами

$$\nabla_{\mathbf{h}} a^k = h^i(\partial_i a^k + \Gamma^k_{ij} a^j) := h^i \nabla_i a^k. \tag{54}$$

Определение. *Дифференциальный оператор $\nabla_{\boldsymbol{h}}$ называется ковариантной производной в направлении векторного поля $\boldsymbol{h}$.*

Свойства абсолютного дифференциала, приведенные в теореме (19), справедливы и для ковариантных производных. Заметим также, что оператор (54) линейно зависит от $\mathbf{h}$:

$$\nabla_{f\mathbf{h}_1 + g\mathbf{h}_2} \mathbf{a} = f \nabla_{\mathbf{h}_1} \mathbf{a} + g \nabla_{\mathbf{h}_2} \mathbf{a}.$$

В частности, ковариантные производные в направлении векторов натурального репера $\mathbf{r}_i = (\delta^k_i)$, т. е. в направлении координатных линий, сводятся к выражениям

$$\nabla_i a^k = \partial_i a^k + \Gamma^k_{ij} a^j),$$

которые являются аналогами частных производных.

Лекция 19. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПЕРЕНЕСЕНИЕ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПУТИ.

19.1. Параллельное перенесение вектора по поверхности.

Определим теперь параллельное перенесение на поверхности следующим образом. Пусть $\Gamma(t)$ — путь на поверхности M и $u^i = u^i(t)$ — его внутренние уравнения. Рассмотрим векторное поле $\mathbf{a}(t)$ в точках этого пути: $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(u^i(t))$ и расссмотрим его ковариантную производную в направлении касательного вектора $\mathbf{h} : h^j = \frac{du^j}{dt}$. Учитывая определение ковариантной производной (53), получим

$$\frac{\nabla \mathbf{a}}{dt} = \mathrm{pr}_{_T} \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \Big(\frac{da^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}(u^s(t))\frac{du^i}{dt} a^j(t)\Big)\mathbf{r}_k\,. \tag{55}$$

Определение. *Дифференциальный оператор $\frac{\nabla}{dt}$ называется ковариантной производной вдоль пути Γ .*

Определение. *Векторное поле $\boldsymbol{a}$ называется параллельным вдоль заданного пути Γ , если его ковариантная производная вдоль этого пути равна нулю*:

$$\frac{\nabla a^k}{dt} = \frac{da^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}(u^s(t))\frac{du^i}{dt} a^j(t) = 0\,. \tag{56}$$

Установим некоторые свойства параллельного перенесения. Мы увидим, что оно обладает важнейшими свойствами обычного перенесения в евклидовом пространстве.

Теорема 20. *Пусть A и B — две точки поверхности, соединенные кусочно-гладким путем Γ , и в точке A задан вектор $\boldsymbol{a} \in T_A M$. Тогда в точке B существует единственный вектор $\boldsymbol{b}$, параллельный данному.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть путь $\Gamma(t)$ задан уравнениями $u^k = u^k(t)$ и $\Gamma(0) = A$, $\Gamma(1) = B$. Рассмотрим систему (56) обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных функций $a^k(t)$. Мы имеем начальное условие: в точке A задан вектор $\mathbf{a}(0) = \mathbf{a}$. Тогда согласно теореме Коши существует единственное решение этой системы, продолжаемое до значения $t = 1$. Положив $\mathbf{b} = \mathbf{a}(1)$, получим доказательство теоремы. $\square$

Доказанное означает, что вдоль заданного пути определены отображения касательных пространств $P(0,t) : T_A M \to T_{A(t)} M$ для любого $0 \le t \le 1$, при котором исходному вектору $\mathbf{a}$ сопоставляется вектор $\mathbf{a}(t)$. При этом теорема справедлива и для кусочно гладкого пути. В самом деле, если имеется особая точка, то получив в ней вектор, параллельный данному, мы можем продолжить процесс параллельного перенесения, приняв этот вектор в качестве начального.

Теорема 21. *Параллельное перенесение $P(\Gamma) : T_A M \to T_B M$ является линейным изоморфизмом касательных пространств вдоль заданного пути.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Линейность отображения $P(0,1)$ следует из того, что система (56) линейна и поэтому ее решение линейно зависит от начального вектора. Более того, это отображение биективно, поскольку оно обратимо: параллельное перенесение $P(1,0)$ вдоль пути $\Gamma^{-1}(t) = \Gamma(1-t)$ обратно рассмотренному. $\square$

Теорема 22. (Риччи) *Отображение касательных пространств при параллельном перенесении является изометрией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что это означает сохранение скалярного произведения векторов. Пусть $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{b}(t)$ — два векторных поля, параллельных вдоль пути Γ: $\frac{\nabla \mathbf{a}}{dt} = 0$, $\frac{\nabla \mathbf{b}}{dt} = 0$. Рассмотрим их скалярное произведение — функцию $f(t) = (\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t))$. Дифференцируя ее, получим

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)) = \Big(\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}(t)\Big) + \Big(\mathbf{a}(t), \frac{d\mathbf{b}}{dt}\Big).$$

Производные векторных полей разложим на касательную и нормальную составляющие. Тогда

$$\Big(\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}(t)\Big) = \Big(\mathrm{pr}_{\scriptscriptstyle T}\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathrm{pr}_{\scriptscriptstyle N}\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}\Big) = \Big(\mathrm{pr}_{\scriptscriptstyle T}\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}\Big) + \Big(\mathrm{pr}_{\scriptscriptstyle N}\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}\Big) = \Big(\mathrm{pr}_{\scriptscriptstyle T}\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}\Big) = \Big(\frac{\nabla\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}(t)\Big)$$

и аналогично

$$\Big(\mathbf{a}(t), \frac{d\mathbf{b}}{dt}\Big) = \Big(\mathbf{a}(t), \frac{\nabla\mathbf{b}}{dt}\Big).$$

В итоге имеем

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)) = \Big(\frac{\nabla\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b}\Big) + \Big(\mathbf{a}, \frac{\nabla\mathbf{b}}{dt}\Big) = 0.$$

Это доказывает теорему. □

Следствие. *При параллельном перенесении сохраняется модуль вектора и угол между векторами.*

Пример. Рассмотрим геликоид $\mathbf{r} = u\mathbf{e}(v) + v\mathbf{k}$ и на нем винтовую линию Γ: $u = 1, v = t$. В точке $A(1,0)$ этой линии при $t = 0$ зададим вектор $\mathbf{a} = (a^1, a^2)$ и будем переносить его параллельно вдоль винтовой линии. Так как компоненты метрического тензора геликоида равны $g_{11} = 1, g_{12} = 0, g_{22} = 1 + u^2$, то имеем следующие ненулевые символы Кристоффеля этой поверхности $\Gamma^1_{22} = -u$, $\Gamma^2_{12} = \frac{u}{u^2+1}$. Вдоль заданной винтовой линии $\Gamma^1_{22} = -1$, $\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}$. Тогда система (56) принимает вид

$$\frac{da^1}{dt} - a^2 = 0 \qquad \frac{da^2}{dt} + \frac{1}{2}a^1 = 0\,,$$

откуда

$$\frac{d^2a^1}{dt^2} + \frac{1}{2}a^1 = 0.$$

Поэтому имеем общее решение

$$a^1(t) = c_1\cos\frac{t}{\sqrt{2}} + c_2\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\,, \quad a^2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(-c_1\sin\frac{t}{\sqrt{2}} + c_2\cos\frac{t}{\sqrt{2}}\Big)\,.$$

Учитывая начальное условие, получим следующие значения констант интегрирования: $c_1 = a^1$, $c_2 = a^2$.

19.2. Геодезические пути.

Прямые линии на плоскости обладают характерным для них свойством: их направляющий вектор переносится вдоль них параллельно. Это свойство мы положим в снову при определении следующих замечательных линий на поверхности:

Определение. *Гладкий путь на поверхности называется геодезическим, если его единичный касательный вектор параллелен вдоль этого пути.*

Отнесем геодезический путь Γ к натуральному параметру. Тогда $a^k = \frac{du^k}{ds}$ — координаты его единичного касательного векторного поля. В силу формулы (55) ковариантная производная этого поля вдоль Γ равна

$$\frac{\nabla a^k}{ds} = \frac{da^k}{ds} + a^j(s)\Gamma^k_{ij}(u^m(s))\frac{du^i}{ds}\,.$$

Поэтому условие его параллельности вдоль этого пути имеет вид

$$\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij}(u^s(s))\,\frac{du^i}{ds}\,\frac{du^j}{ds} = 0. \tag{57}$$

Это система двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Так как в эти уравнения входят только символы Кристоффеля, которые выражаются через метрический тензор поверхности, мы получаем важный вывод: *понятие геодезического пути на поверхности относится к ее внутренней геометрии.*

Дифференциальные уравнения геодезических (57), исключив параметр s, можно свести к одному уравнению. Для этого будем искать уравнение геодезической в *приведенном* виде $v = v(u)$. Тогда при $\dot u \neq 0$, учитывая, что $\frac{ds}{du} = \frac{1}{\dot u}$, имеем

$$\frac{dv}{du} = \frac{\dot v}{\dot u}, \quad \frac{d^2v}{du^2} = \frac{\ddot v\dot u - \dot v\ddot u}{(\dot u)^3}\,.$$

Распишем уравнения геодезических подробнее, полагая $u^1 = u, u^2 = v$:

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{ds^2} + \Gamma^1_{11}(\frac{du}{ds})^2 + 2\Gamma^1_{12}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \Gamma^1_{22}(\frac{dv}{ds})^2 & = & 0\,, \\ \frac{d^2v}{ds^2} + \Gamma^2_{11}(\frac{du}{ds})^2 + 2\Gamma^2_{12}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \Gamma^2_{22}(\frac{dv}{ds})^2 & = & 0\,. \end{cases}$$

Тогда после некоторых выкладок получим

$$\frac{d^2v}{du^2} = \Gamma^1_{22}\Big(\frac{dv}{du}\Big)^3 + (2\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22})\Big(\frac{dv}{du}\Big)^2 + (\Gamma^1_{11} - 2\Gamma^2_{12})\frac{dv}{du} - \Gamma^2_{11}\,. \tag{58}$$

Кроме того, следует иметь ввиду, что мы отбросили случай $\dot u = 0$, т. е решение $u = \mathrm{const}$.

Теорема 23. *Через всякую точку регулярно параметризованной поверхности в каждом заданном направлении проходит единственный геодезический путь.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме Коши о существовании и единственности решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений нормального вида (58), при задании начальных условий $v(u_0) = c_1, \frac{dv}{du}(u_0) = c_2$ существует единственное решение $v = v(u)$, определенное в некоторой окрестности $|u - c_1| < \varepsilon$. Это и доказывает теорему. $\square$.

Следствие. *Множество всех геодезических путей на поверхности зависит от двух параметров.*

Полезно заметить, что таким же свойством обладает и множество всех прямых на плоскости.

Пример. Рассмотрим прямой круговой цилиндр $\mathbf{r}(\varphi, z) = a\mathbf{e}(\varphi) + z\mathbf{k}$. Коэффициенты его первой фундаментальной формы $g_{11} = a^2, g_{12} = 0, g_{22} = 1$ постоянны. Поэтому все символы Кристоффеля в этих координатах равны нулю. Уравнение (58) принимает вид $\frac{d^2z}{d\varphi^2} = 0$ с решением $z = c_1\varphi + c_2$. Подставив найденную функцию в уравнение цилиндра, получим

$$\mathbf{r}(\varphi) = a\mathbf{e}(\varphi) + (c_1\varphi + c_2)\mathbf{k}.$$

Это винтовые линии. Кроме того, геодезическими цилиндра являются прямолинейные образующие $\varphi = \mathrm{const}$.

Как мы, цилиндрические поверхности наложимы на плоскость и их внутренние геометрии совпадают. При наложении прямого кругового цилиндра на плоскость по формулам $x = a\varphi, z = z$ винтовым линиям соответствуют прямые с уравнениями $z(x) = \frac{c_1}{a}x + c_2$.

19.3. Геодезическая кривизна пути на поверхности.

Пусть $\Gamma : u^i = u^i(s)$ — путь на поверхности M, отнесенный к натуральному параметру и $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(u^i(s))$ — его радиус-вектор. Вектор первой производной $\mathbf{e} = \dot{\mathbf{r}}$ является единичным касательным вектором и поэтому всегда принадлежит касательной плоскости точки $\mathbf{r}(s)$. Рассмотрим вторую производную — вектор кривизны $\ddot{\mathbf{r}}$ этого пути.

Определение. *Геодезической кривизной пути* Γ *на поверхности* M *называется модуль проекции его вектора кривизны на касательную плоскость в соответствующей точке:*

$$k_g = |\mathrm{pr}_{_T}\ddot{\mathbf{r}}|. \tag{59}$$

Для того, чтобы получить эффективную формулу для вычисления геодезической кривизны, рассмотрим единичный вектор $\mathbf{a} = [\mathbf{m}, \dot{\mathbf{r}}]$. Он лежит в касательной плоскости, дополняя единичные векторы нормали $\mathbf{m}$ и касательной $\dot{\mathbf{r}}$ до правого ортонормированного репера. Тогда $k_g = |\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\ddot{\mathbf{r}}| = |(\mathbf{a}, \ddot{\mathbf{r}})|$ и, таким образом, получаем формулу

$$k_g = |(\mathbf{m}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})|\,. \tag{60}$$

Как вычислить геодезическую кривизну, если путь Γ задан в произвольной параметризации $\mathbf{r}(t)$? Для этого используем формулы перехода от натурального параметра к произвольному

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}'\dot{t}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}''(\dot{t})^2 + \mathbf{r}'\ddot{t},$$

откуда $[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}] = [\mathbf{r}', \mathbf{r}''](\dot{t})^3$ и, следовательно, $k_g = |(\mathbf{m}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'')||\dot{t}|^3$. Но $|\dot{t}| = \frac{1}{|\mathbf{r}'|}$ и, таким образом,

$$k_g = \frac{|(\mathbf{m}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'')|}{|\mathbf{r}'|^3}\,. \tag{61}$$

Докажем теперь еще одно свойство геодезических путей.

Теорема 24. *Путь* Γ *на поверхности является* геодезическим *тогда и только тогда, когда его геодезическая кривизна равна нулю*: $k_g = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть геодезическая кривизна пути на поверхности (59) равна нулю

$$\mathrm{pr}_{_T}\ddot{\mathbf{r}} = 0. \tag{62}$$

Запишем это равенство в координатах. Так как $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(u^i(s))$, то

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_i\dot{u}^i, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j + \mathbf{r}_i\ddot{u}^i.$$

Но в силу деривационных уравнений (30)

$$\mathbf{r}_{ij} = \Gamma^k_{ij}\mathbf{r}_k + h_{ij}\mathbf{m}.$$

Поэтому вектор второй производной принимает вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{u}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j)\mathbf{r}_k + (h_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j)\mathbf{m}\,.$$

Здесь первое слагаемое — касательная, а второе — нормальная составляюшая этого вектора. Следовательно, при обращении геодезической кривизны в нуль имеем

$$\frac{d^2u^k}{ds^2} + \Gamma^k_{ij}(u^m(s))\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} = 0. \tag{63}$$

Но это есть как раз система уравнений (57), определяющая геодезические пути. Обратное, очевидно, также справедливо. $\square$

Из формулы (62) непосредственно вытекает, что геодезические пути на поверхности обладают следующими свойствами:

1) Вектор кривизны $\ddot{\mathbf{r}}$ в каждой точке геодезического пути направлен по нормали к поверхности. Действительно, из $\mathrm{pr}_T \ddot{\mathbf{r}} = 0$ следует $\ddot{\mathbf{r}} = \lambda \mathbf{m}$;

2) Соприкасающаяся плоскость геодезического пути в каждой его точке ортогональна касательной плоскости поверхности — она проходит через вектор нормали $\mathbf{m}$;

3) Кривизна геодезического пути равна модулю его нормальной кривизны: $k = |k_n|$. В самом деле, проекция вектора кривизны на нормаль к поверхности является нормальной кривизной k_n всякого пути. Но $|\ddot{\mathbf{r}}| = k$ есть кривизна кривой. Следовательно, между всеми этими кривизнами имеется простое соотношение $k_n^2 + k_g^2 = k^2$, откуда и вытекает утверждение.

4) Всякая прямая на поверхности является геодезической, так как в этом случае вектор кривизны $\ddot{\mathbf{r}} = 0$.

Пример. Рассмотрим плоские сечения сферы диаметральными плоскостями — большие окружности. Как и для всякой плоской кривой, эти плоскости являются соприкасающимися плоскостями сечений. А так как в каждой точке они содержат нормаль сферы, то эти сечения являются ее геодезическими путями.

Лекция 20. ПОВЕРХНОСТИ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

20.1. Полугеодезические координаты на поверхности. Геодезические пути на поверхности можно использовать для того, чтобы ввести в некоторой ее области специальные *полугеодезические* координаты, в которых вычисления и формулы существенно упрощаются. В этой лекции мы используем их для того, чтобы дать локальное описание поверхностей постоянной гауссовой кривизны.

Определение. *Координатная сеть на поверхности M называется полугеодезической, если она образована 1-параметрическим семейством геодезических путей и их ортогональными траекториями.*

Для того, чтобы построить полугеодезическую систему координат, выберем на поверхности произвольную точку O (начало) и проведем через нее какой-нибудь геодезический путь β (база). Отложим на β от точки O ориентированную дугу s и через ее конец проведем геодезический путь в направлении, ортогональном базе. В результате получим 1-параметрическое семейство геодезических $\{\Gamma_s\}$. Отнесем их к натуральному параметру u, который будем отсчитывать от базы. Рассмотрим теперь ортогональные траектории этого семейства, вдоль которых будем изменять другой параметр v. В частности, при $u = 0$ мы имеем базу, на которой, как уже было сказано, параметр v выбран натуральным.

Теорема 25. *В полугеодезических координатах первая квадратичная форма поверхности имеет вид*

$$d\mathbf{r}^2 = du^2 + B^2(u,v)dv^2 \,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу ортогональности сети коэффициент $g_{12} = 0$, поэтому первая квадратичная форма должна иметь вид

$$d\mathbf{r}^2 = g_{11}du^2 + g_{22}dv^2 \,,$$

где $g_{11} > 0, g_{22} > 0$ — положительные функции от u, v. Рассмотрим далее 1-параметрическое семейство геодезических. Отнесенные к натуральному параметру, они имеют уравнения (63)

$$\ddot{u} + \Gamma^1_{11}\dot{u}^2 + 2\Gamma^1_{12}\dot{u}\dot{v} + \Gamma^1_{22}\dot{v}^2 = 0 \,, \quad \ddot{v} + \Gamma^2_{11}\dot{u}^2 + 2\Gamma^2_{12}\dot{u}\dot{v} + \Gamma^2_{22}\dot{v}^2 = 0 \,. \tag{64}$$

По условию эти уравнения должны удовлетворяться при $v = \mathrm{const}$ и $u = s$. После подстановки этих значений в уравнения геодезических получим $\Gamma^1_{11} = 0$, $\Gamma^2_{11} = 0$. Учитывая выражения для символов Кристоффеля, отсюда получаем следующие условия на метрику

$$2\Gamma^1_{11} = g^{11}\partial_1 g_{11} = 0, \quad 2\Gamma^2_{11} = -g^{22}\partial_2 g_{11} = 0 \,.$$

Это значит, что $g_{11} = c^2 = \mathrm{const}$ и тогда $d\mathbf{r}^2 = c^2du^2 + g_{22}dv^2$. Но вдоль геодезических $v = \mathrm{const}$ мы имеем $u = s$. Следовательно, $d\mathbf{r}^2 = c^2ds^2$ и поэтому $c^2 = 1$. Вследствие этого $d\mathbf{r}^2 = du^2 + g_{22}dv^2$. Осталось положить $g_{22} = B^2$. □

Следствие. *Любые две ортогональные траектории полугеодезических координат отсекают на путях геодезического семейства $\{\Gamma_s\}$ дуги равной длины.*

В самом деле, вдоль геодезических $v = \mathrm{const}$ и $ds = du$. Длина дуги любой из них, заключенная между двумя ортогональными траекториями, равна $s = \int_{u_1}^{u_2} du = u_2 - u_1$. Таким образом, она не зависит от v и, следовательно, от выбора геодезической.

Примеры.

1) Простейшим примером полугедезических координат являются прямоугольные координаты на плоскости. Здесь оба семейства координатных линий образовано прямыми — геодезическими плоскости. Другим примером таких координат на плоскости

являются полярные координаты. Здесь мы имеем пучок прямых (геодезических) и их ортогональные траектории — окружности.

2) Используя предыдущий пример, легко построить полугеодезические координаты на развертывающихся поверхностях. Полугедезическая сеть соответствует сети прямоугольных или полярных координат при их наложении на плоскость.

3) Менее тривиальным примером служат географические координаты на сфере. В самом деле, меридианы сферы образуют 1-параметрическое семейство ее больших окружностей — геодезических, а параллели являются ортогональными траекториями этого семейства. Базой этих координат является экватор.

20.2. Поверхности постоянной кривизны.

Мы займемся сейчас замечательным классом поверхностей, сыгравшим в истории математики важную роль.

Определение. *Поверхность M называется поверхностью постоянной кривизны, если ее гауссова кривизна постоянна:* $K = \mathrm{const}$.

Нашей целью является найти первые фундаментальные формы таких поверхностей и тем самым дать их полную классификацию с точки зрения внутренней геометрии. Имеет место

Теорема 26. *Первая квадратичная форма всякой поверхности постоянной кривизны может быть приведена к одному из трех следующих канонических видов:*

$$\begin{array}{llll} 1. & K = & 0, & d\mathbf{r}^2 = du^2 + dv^2\,; \\ 2. & K = & \frac{1}{a^2} > 0, & d\mathbf{r}^2 = du^2 + \cos^2\frac{u}{a}dv^2\,; \\ 3. & K = & -\frac{1}{a^2} < 0, & d\mathbf{r}^2 = du^2 + \mathrm{ch}^2\frac{u}{a}dv^2\,. \end{array}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С этой целью выберем на поверхности полугеодезические координаты. Тогда ее первая квадратичная форма в соответствии с теоремой (25) примет вид $d\mathbf{r}^2 = du^2 + B^2(u,v)dv^2$. Рассмотрим гауссову кривизну поверхности. Так как система координат ортогональная, то она может быть вычислена по формуле (48), лекц. 17

$$K = -\frac{1}{AB}\Big\{\Big(\frac{B_u}{A}\Big)_u + \Big(\frac{A_v}{B}\Big)_v\Big\}.$$

Так как $A = 1$, то отсюда $K = -\frac{B_{uu}}{B}$. Таким образом, для нахождения функции $B(u,v)$ имеем дифференциальное уравнение второго порядка

$$B_{uu} + KB = 0,$$

где по условию $K = \mathrm{const}$. По существу, это обыкновенное дифференциальное уравнение, поскольку координата v не участвует в дифференцировании и поэтому входит сюда лишь как параметр. Как известно из теории дифференциальных уравнений, в зависимости от знака коэффициента K его общее решение имеет вид

1) $K = 0$, (параболический тип): $B = c_1(v) + c_2(v)u$;

2) $K = \frac{1}{a^2} > 0$, (эллиптический тип): $B = c_1(v)\cos\frac{u}{a} + c_2(v)\sin\frac{u}{a}$;

3) $K = -\frac{1}{a^2} < 0$, (гиперболический тип): $B = c_1(v)\,\mathrm{ch}\,\frac{u}{a} + c_2(v)\,\mathrm{sh}\,\frac{u}{a}$.

Для определения функций $c_1(v), c_2(v)$ надо принять во внимание начальные условия. При $u = 0$ имеем $B(0,v) = c_1(v)$. Так как для базы параметр v натуральный, то при $u = 0$ должно быть $v = s$. Но при этом условии $d\mathbf{r}^2 = B(0,v)ds^2$, а так как $d\mathbf{r}^2 = ds^2$, то $B(0,v) = \pm 1$ и, следовательно, $c_1(v) = \pm 1$. Учтем, кроме того, что база β является геодезической и, значит, уравнения (64) должны удовлетворяться при $u = 0$. Это возможно при $\Gamma^1_{22} = 0$, откуда $\partial_1 g_{22} = 0$ и поэтому $\partial_u B(u,v)|_{u=0} = 0$.

Отсюда следует, что во всех рассматриваемых случаях $c_2(v) = 0$. Кроме того, мы выбираем $c_1(v) = 1$ из соображений положительной определенности первой квадратичной формы. В итоге это дает доказательство теоремы. □

Следствие. *Для того, чтобы две поверхности постоянной кривизны были локально изометричны, необходимо и достаточно, чтобы их гауссовы кривизны совпадали.*

До сих пор мы имели только необходимость этого условия. Оно имеет место для любых изометричных поверхностей и вытекает из теоремы Гаусса (лекция 17). Но если поверхности имеют одинаковую постоянную гауссову кривизну, то по доказанной теореме их первые квадратичные формы могут быть приведены к одному и тому же каноническому виду, а значит, они локально изометричны.

20.3. Псевдосфера и геометрия Лобачевского.

Рассмотрим теперь вопрос о реальном существовании поверхностей с найденными выше метриками. Он очевиден для метрик нулевой и положительной постоянной гауссовой кривизны. Поверхностями с такой кривизной являются в первом случае развертывающиеся поверхности, в частности, плоскость, а во втором — сферы или область на сфере (п. 17.3, пр. 2). Что касается поверхностей постоянной отрицательной кривизны, то вопрос о существовании таких поверхностей остается пока открытым. Другими словами, надо доказать, что поверхности постоянной отрицательной гауссовой кривизны, на которых реализуются найденные выше метрики, действительно существуют. Будем искать пример среди поверхностей вращения.

Определение. *Трактрисой называется плоская кривая, которая обладает тем свойством, что отрезок ее касательной между точкой касания и точкой пересечения с некоторой прямой — базой трактрисы, имеет постоянную длину.*

Для вывода ее уравнения мы предположим, что кривая находится в плоскости XZ, а базой является ось Z. Длину отрезка AC касательной обозначим через a, а угол, который он образует с осью OZ через t. Будем искать уравнение кривой в параметрическом виде, приняв за параметр этот угол. Тогда абсцисса точки A равна $x = a\sin t$, а угловой коэффициент касательной $\frac{dz}{dx} = \operatorname{ctg} t$. Отсюда $dz = \operatorname{ctg} t\, dx = \frac{a\cos^2 t}{\sin t}dt$. Интегрируя, получим при начальном условии $z(\frac{\pi}{2}) = 0$ параметрические уравнения трактрисы в виде

$$x(t) = a\sin t, \quad z(t) = a(\cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}), \quad 0 < t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Будем теперь вращать трактрису вокруг оси Z. Используя результаты п. 12.1, получим поверхность вращения $\mathbf{r}(t,\varphi) = x(t)\mathbf{e}(\varphi) + z(t)\mathbf{k}$ с уравнением

$$\mathbf{r}(t,\varphi) = a[\sin t\mathbf{e}(\varphi) + (\cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2})]\mathbf{k},$$

которая называется *псевдосферой.*

Теорема 27. *Псевдосфера есть поверхность постоянной отрицательной гауссовой кривизны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подсчитаем коэффициенты первой квадратичной формы этой поверхности. Они равны

$$g_{11} = x'(t)^2 + z'(t)^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = x(t)^2.$$

Вычисляя производные, получим

$$x'(t) = a\cos t, \quad z'(t) = \frac{a\cos^2 t}{\sin t}\,,$$

откуда

$$g_{11} = a^2 \operatorname{ctg}^2 t, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = a^2 \sin^2 t$$

и, значит, $A = a\operatorname{ctg} t$, $B = a\sin t$. Так как координатная сеть на поверхности ортогональна, то для вычисления гауссовой кривизны можно применит формулу (48). Обратим внимание на то, что коэффициенты A, B не зависят от φ. Поэтому эта формула упрощается

$$K = -\frac{1}{AB}\left(\frac{B_t}{A}\right)_t.$$

В результате получим $K = -\frac{1}{a^2}$. Это доказывает наше утверждение. □

Псевдосфера сыграла важную роль в истории геометрии. В 1868 г. итальянский математик Бельтрами, изучая поверхности постоянной кривизны, обнаружил, что внутренняя геометрия псевдосферы совпадает с планиметрией Лобачевского. Так была найдена первая модель этой неевклидовой геометрии и тем самым доказана ее логическая непротиворечивость. В частности, было показано, что если на псевдосфере рассмотреть любой треугольник, сторонами которого являются отрезки геодезических, то сумма его внутренних углов будет меньше π. Как известно, это свойство равносильно выполнению аксиомы параллельности в форме Лобачевского.