Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2010, № 2, с. 20–32 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421000123\0010*

Н.А. КОЛОДИЙ

СУЩЕСТВОВАНИЕ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ПО ПАРАМЕТРУ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА НА ПЛОСКОСТИ

Аннотация. В статье рассматриваются стохастические интегральные уравнения Вольтерра на плоскости, содержащие интегралы по полям локально ограниченной вариации и квадратично интегрируемым сильным мартингалам. Доказаны теоремы существования и единственности решений таких уравнений с локально интегрируемыми по некоторой мере траекториями при условии липшицевости его коэффициентов по функциональному аргументу. Доказана теорема о непрерывности по параметру решения стохастического уравнения Вольтерра на плоскости.

Ключевые слова: двупараметрический мартингал, стохастическое уравнение Вольтерра, линии остановки.

УДК: 519.21

Abstract. In this paper we study stochastic Volterra equations in the plane. These equations contain integrals with respect to local bounded variation fields and square-integrable strong martingales. We prove the existence and uniqueness of solutions of such equations with local integrable (in some measure) trajectories, assuming that the coefficients of equations possess the Lipschitz property with respect to the functional argument. We prove that the solution of a stochastic Volterra integral equation in the plane is continuous with respect to the parameter.

Keywords: two-parameter martingale, stochastic Volterra equation, stopping line.

Введение

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — полное вероятностное пространство, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_z,\ z \in \mathsf{R}^2_+)$ — двупараметрическое семейство σ-алгебр, удовлетворяющих условиям: 1) если $x \leqslant z$, то $\mathcal{F}_x \subset \mathcal{F}_z \subset \mathcal{F}$; 2) $\mathcal{F}_0$ содержит все элементы $\mathcal{F}$ нулевой вероятности; 3) $\mathcal{F}_z = \bigcap\limits_{x>z} \mathcal{F}_x$ для любого z; 4) для любых x и z σ-алгебры $\mathcal{F}_x$ и $\mathcal{F}_z$ условно независимы относительно $\mathcal{F}_{x\wedge z}$.

В дальнейшем $\mathcal{T}$ и $\mathcal{P}$ обозначают соответственно σ-алгебры $\mathbb{F}$-прогрессивно измеримых и $\mathbb{F}$-предсказуемых подмножеств пространства $R^2_+ \times \Omega$ [1];

$\mathcal{A}$ обозначает пространство таких $\mathcal{T}$-измеримых непрерывных справа и не имеющих разрывов второго рода случайных полей $(A(z),\ z \in R^2_+)$, что $A(z) = 0$ для $z \in R^2_0 = (\{0\} \times R_+) \cup (R_+ \times \{0\})$ и $\mathsf{E}\,\mathrm{Var}_{[0,z]} A < \infty$ для $z \in R^2_+$;

$\mathcal{M}^2_S$ обозначает пространство квадратично интегрируемых сильных $\mathbb{F}$-мартингалов, т. е. пространство таких $\mathcal{T}$-измеримых непрерывных справа и не имеющих разрывов второго рода случайных полей $(M(z),\ z \in R^2_+)$, что $M(z) = 0$ для $z \in R^2_0$, $\mathsf{E}M^2(z) < \infty$ и

Поступила 02.11.2007

$\mathsf{E}\{M(]z,z'])|\mathcal{F}^*_z\} = 0$ для всех $z, z' \in R^2_+$, $z \leqslant z'$, где $\mathcal{F}^*_z = \Big(\bigvee_{z_2 \geqslant 0} \mathcal{F}_z\Big) \bigvee \Big(\bigvee_{z_1 \geqslant 0} \mathcal{F}_z\Big)$, $M(]z,z']) = M(z') - M(z_1, z_2') - M(z_1', z_2) + M(z)$.

Пусть λ — локально конечная мера на $(R^2_+, \mathcal{B}(R^2_+))$, $\mathcal{L}(R^2_+)$ — пополнение по мере λ σ-алгебры борелевских множеств из R^2_+, X_λ обозначает пространство всех таких $\mathcal{L}(R^2_+)|\mathcal{B}(R)$-измеримых функций $g : R^2_+ \mapsto R$, что $\|g\|_z = \Big(\int\limits_{[0,z[} g^2 d\lambda\Big)^{1/2} < \infty$ для каждого $z \in R^2_+$. Для $g \in \mathsf{X}_\lambda$ и $x \in R^2_+$ определим $g_x \in \mathsf{X}_\lambda$ равенством $g_x(u) = g(u)\mathrm{I}^{(u)}_{[0,x[}$.

Пусть Ξ_λ — пространство таких $\mathcal{T}$-измеримых полей $\xi = (\xi(z), z \in R^2_+)$, что $\xi(\cdot, \omega) \in \mathsf{X}_\lambda$ для каждого $\omega \in \Omega$. Ξ^*_λ — пространство всех таких полей $\xi \in \Xi_\lambda$, что

$$\|\xi\|_z = \sup_{x \in [0,z]} (\mathsf{E}|\xi(x)|^2)^{1/2} < \infty \text{ для каждого } z \in R^2_+.$$

Данная работа посвящена исследованию стохастических интегральных уравнений Вольтерра на плоскости

$$\xi(z) = \eta(z) + \int_{[0,z]} a(z, x, \xi_z) A(z, dx) + \int_{[0,z]} b(z, x, \xi_x) M(z, dx), \quad z \in R^2_+, \tag{1}$$

коэффициенты которых удовлетворяют условию **(A)**:

1) $\eta \in \Xi_\lambda$,

2) $((z,\omega), x, g) \mapsto a(z, \omega, x, g) \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(R^2_+) \otimes \mathcal{B}(\mathsf{X}_\lambda)|\mathcal{B}(R)$,

3) $(z, (x,\omega), g) \mapsto b(z, x, \omega, g) \in \mathcal{B}(R^2_+) \otimes \mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathsf{X}_\lambda)|\mathcal{B}(R)$,

4) $(z, (x,\omega)) \mapsto M(z, x, \omega) \in \mathcal{B}(R^2_+) \otimes \mathcal{T}|\mathcal{B}(R)$ и $M(z, \bullet) \in \mathcal{M}^2_S$ для каждого фиксированного z,

5) $(z, (x,\omega)) \mapsto A(z, x, \omega) \in \mathcal{B}(R^2_+) \otimes \mathcal{T}|\mathcal{B}(R)$ и $A(z, \bullet) \in \mathcal{A}$ для каждого фиксированного z.

Решением уравнения (1) будем называть такой элемент $\xi \in \Xi_\lambda$, что для каждого $z \in R^2_+$ с вероятностью 1 выполнено равенство (1). Решение ξ будем называть единственным, если любое другое решение уравнения (1) является модификацией поля ξ.

Стохастические интегральные уравнения Вольтерра на R_+ исследовались многими авторами. Например, М.Л. Клепцыной и А.Ю. Веретенниковым [2] получены условия существования и единственности сильного решения и условия существования слабого решения уравнения Вольтерра по винеровскому процессу с неслучайными коэффициентами, в работе E. Pardoux, P. Protter [3] получены условия существования и единственности решения уравнения Вольтерра с упреждающими коэффициентами, в работе А.М. Колодий [4] были получены условия существования и единственности сильного решения и условия существования слабого решения уравнения Вольтерра, содержащего криволинейные стохастические интегралы.

Целью данной работы является доказательство существования и единственности решения стохастического интегрального уравнения Вольтерра на R^2_+ и поиск условий его непрерывности по параметру.

1. Предварительные замечания

Если $M \in \mathcal{M}^2_S$, то согласно результатам работы [5] существует такое $\mathcal{T}$-измеримое непрерывное справа и не имеющее разрывов второго рода случайное поле $\overline{M}$, называемое квадратической вариацией квадратично интегрируемого сильного мартингала M, что

$$\overline{M}(x) = \mathsf{P}\text{-}\lim_{|\delta| \to 0} \sum_{i,j} M^2(\delta^{0,x}_{i,j}) \quad \text{почти наверное (п. н.) для каждого } x \in R^2_+,$$

где δ — разбиение R^2_+ прямоугольниками $\delta_{i,j}=]u_{i,j},u_{i+1,j+1}]$, $i,j\in\{0,1,\dots\}$, $\delta^{0,x}_{i,j}=\delta_{i,j}\cap]0,x]$, $|\delta|=\sup\limits_{i,j}|u_{i,j}-u_{i+1,j+1}|$.

В дальнейшем, следуя определениям из [6], линией остановки называем дебют прогрессивно измеримого множества из $R^2_+\times\Omega$ и применяем обозначение

$$[\![0,L]\!]=\{(x,\omega):0\leqslant x\leqslant L(\omega)\}.$$

Используя методы доказательств существования измеримых по параметру модификаций случайных процессов и стохастических интегралов из работ [7] и [8], получаем следующее утверждение.

Лемма 1 ([9]). *Предположим, что $(\Theta,\mathcal{G})$ — некоторое измеримое пространство, $(\theta,(x,\omega))\mapsto M(\theta,x,\omega)\in\mathcal{G}\otimes\mathcal{T}|\mathcal{B}(R)$ и $M(\theta,\bullet)\in\mathcal{M}^2_S$ для каждого фиксированного $\theta\in\Theta$. Тогда*

1) *существует такая $\mathcal{G}\otimes\mathcal{T}|\mathcal{B}(R_+)$-измеримая функция $(\theta,(x,\omega))\mapsto\overline{M}(\theta,x,\omega)$, что $\overline{M}(\theta,x)$ является квадратической вариацией сильного мартингала $M(\theta,\bullet)$ на прямоугольнике $[0,x]$;*

2) *если $(\theta,(x,\omega))\mapsto\beta(\theta,x,\omega)\in\mathcal{G}\otimes\mathcal{P}|\mathcal{B}(R)$ и существует такая последовательность линий остановки $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[\![0,L_n]\!]=R^2_+\times\Omega$ с точностью до пренебрежимого множества и $\mathsf{E}\int\limits_{[0,z]}\mathrm{I}^{(x)}_{[0,L_n]}\beta^2(\theta,x)\overline{M}(\theta,dx)<\infty$ для любых n, z, θ, то существует такая функция $(\theta,(z,\omega))\mapsto Y(\theta,z,\omega)\in\mathcal{G}\otimes\mathcal{T}|\mathcal{B}(R_+)$, что $Y(\theta,z)$ является стохастическим интегралом на прямоугольнике $[0,z]$ от $\mathcal{P}$-измеримой функции $\beta(\theta,\bullet)$ по квадратично интегрируемому сильному мартингалу $M(\theta,\bullet)$:*

$$Y(\theta,z)=\int_{[0,z]}\beta(\theta,x)M(\theta,dx)\quad \text{п. н. для любых } z \text{ и } \theta.$$

Сверх того, если $\mathsf{E}\int\limits_{[0,z]}\beta^2(\theta,x)\overline{M}(\theta,dx)<\infty$ для любых z и θ, то $(Y(\theta,z),\ z\in R^2_+)\in\mathcal{M}^2_S$ для любого фиксированного θ и квадратическая вариация $Y(\theta,\bullet)$ на $[0,z]$ равна

$$\int_{[0,z]}\beta^2(\theta,x)\overline{M}(\theta,dx).$$

В следующей лемме приведен многомерный аналог неравенства Гронуолла–Беллмана в удобном виде для последующего применения в данной статье. Это утверждение следует из результатов работы [10].

Лемма 2. 1. *Пусть $g_k\in\mathcal{L}(R^2_+)|\mathcal{B}(R_+)$ и $\int\limits_{[0,z[}g_kd\lambda<\infty$ для каждого $z\in R^2_+$, $k=1,\dots,n$. Тогда*

$$\int_{[0,z[}\int_{[0,x_1[}\cdots\int_{[0,x_{n-1}[}g_1(x_1)g_2(x_2)\dots g_n(x_n)\lambda(dx_n)\dots\lambda(dx_2)\lambda(dx_1)\leqslant\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}\int_{[0,z[}g_kd\lambda.$$

2. *Пусть $f,g,\phi\in\mathcal{L}(R^2_+)|\mathcal{B}(R_+)$, $\int\limits_{[0,z[}(f+g+\phi)d\lambda<\infty$ и*

$$\phi(z)\leqslant f(z)+g(z)\int_{[0,z[}\phi d\lambda\quad \text{для каждого } z\in R^2_+.$$

Тогда

$$\phi(z) \leqslant f(z) + g(z) \exp\left(\int_{[0,z[} g\, d\lambda\right) \int_{[0,z[} f d\lambda \quad \textit{для каждого} \quad z \in R_+^2.$$

Очевидно, пространство X_λ с метрикой $\varrho_\lambda(g,g') = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k}[1 \wedge \|g-g'\|_{(k,k)}]$ является полным и сепарабельным. Поэтому существует (например, [11], лемма 1.1) такое взаимно однозначное борелевское отображение $h : \mathsf{X}_\lambda \mapsto h(\mathsf{X}_\lambda) \in \mathcal{B}(R)$, что $h(0) = 0$. Применяя данное замечание и учитывая предсказуемость непрерывных слева согласованных случайных полей с действительными значениями, имеем следующее утверждение.

Лемма 3. *Если $y, z \in R_+^2$, $y \leqslant z$, $\omega \mapsto \eta(\omega) \in \mathcal{F}_y|\mathcal{B}(\mathsf{X}_\lambda)$, то $(x,\omega) \mapsto \eta(\omega)\mathrm{I}^{(x)}_{]y,z]} \in \mathcal{P}|B(\mathsf{X}_\lambda)$. Если $\xi \in \Xi_\lambda$, то $(x,\omega) \mapsto \xi_x(\cdot,\omega) \in \mathcal{P}|\mathcal{B}(\mathsf{X}_\lambda)$.*

Если $\xi \in \Xi_\lambda$ и функции $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ удовлетворяют условиям измеримости из **(A)**, то $(z,(x,\omega)) \mapsto b(z,x,\omega,\xi_x(\cdot,\omega)) \in \mathcal{B}(R_+^2) \otimes \mathcal{P}|\mathcal{B}(R)$ и

$$((z,\omega),x) \mapsto a(z,\omega,x,\xi_z(\cdot,\omega)) \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(R_+^2)|\mathcal{B}(R),$$

что вместе с налагаемыми далее условиями интегрируемости этих функций обеспечивает существование и прогрессивную измеримость интегралов в уравнении (1).

2. Существование и единственность решения

Уравнение (1) имеет единственное решение $\xi \in \Xi_\lambda$ тогда и только тогда, когда имеет единственное решение $\zeta \in \Xi_\lambda$ уравнение

$$\zeta(z) = \int_{[0,z]} a(z,x,\zeta_z + \eta_z) A(z,dx) + \int_{[0,z]} b(z,x,\zeta_x+\eta_x) M(z,dx), \quad z \in R_+^2. \tag{2}$$

Очевидно, $\xi = \zeta + \eta$. Введем обозначение

$$\mathbf{J}(z,\zeta) = \int_{[0,z]} a(z,x,\zeta_z + \eta_z) A(z,dx) + \int_{[0,z]} b(z,x,\zeta_x+\eta_x) M(z,dx).$$

Определим линии остановки [6]

$$L_m(\omega) = \mathrm{debut}\{(x,\omega) : \|\eta(\cdot,\omega)\|_x \geqslant m\}, \quad m \in N. \tag{3}$$

Заметим, что $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} [\![0,L_m]\!] = R_+^2 \times \Omega$, $[\![0,L_m]\!] \in \mathcal{P}$ и $\mathrm{I}^{(x)}_{[0,L_m(\omega)]} \leqslant m$ в силу непрерывности слева функции $x \mapsto \|\eta(\cdot,\omega)\|_x$.

Теорема 1. *Пусть существует такое $\mathcal{B}(R_+^2) \otimes \mathcal{B}(R_+^2) \otimes \mathcal{F}|\mathcal{B}(R_+)$-измеримое случайное поле $B(z,x,\omega)$, что $0 \leqslant B(z,x) \leqslant B(z',x)$ для $z \leqslant z'$ и*

$$|a(z,x,g)| \leqslant B(z,x)(1+\|g\|_z), \quad |b(z,x,g)| \leqslant B(z,x)(1+\|g\|_x), \tag{4}$$

$$|a(z,x,g) - a(z,x,g')| \leqslant B(z,x)\|g-g'\|_z,$$
$$|b(z,x,g) - b(z,x,g')| \leqslant B(z,x)\|g-g'\|_x, \tag{5}$$
$$\int_{[0,z]} B(z,x)\overline{A}(z,dx) + \int_{[0,z]} B^2(z,x)\overline{M}(z,dx) \leqslant \Gamma(z),$$

где $(\Gamma(z),\ z \in R_+^2)$ — неслучайная функция, $0 \leqslant \Gamma(z) \leqslant \Gamma(z')$ для $z \leqslant z'$.

Тогда существует единственное решение $\xi \in \Xi_\lambda$ уравнения (1).

Доказательство. 1. Пусть $\zeta \in \Xi^*_\lambda$. Согласно свойствам стохастического интеграла по сильному мартингалу и условию (4)

$$\mathsf{E}\Big|\mathrm{I}^{(z)}_{[0,L_m]}\int_{[0,z]}\widetilde{b}(z,x,\zeta_x)M(z,dx)\Big|^2 \leqslant \mathsf{E}\int_{[0,z]}\mathrm{I}^{(x)}_{[0,L_m]}B^2(z,x)(1+\|\eta\|_x+\|\zeta\|_x)^2\overline{M}(z,dx) \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{E}\int_{[0,z]}B^2(z,x)(1+m+\|\zeta\|_z)^2\overline{M}(z,dx) \leqslant 2\Gamma(z)\Big[(1+m)^2+\mathsf{E}\int_{[0,z[}\zeta^2 d\lambda\Big] \leqslant$$
$$\leqslant 2\Gamma(z)\Big[(1+m)^2+\int_{[0,z[}\|\zeta\|_x^2\lambda(dx)\Big].$$

Применяя неравенство Гёльдера и условие (4), имеем

$$\mathsf{E}\Big|\mathrm{I}^{(z)}_{[0,L_m]}\int_{[0,z]}\widetilde{a}(z,x,\zeta_z)A(z,dx)\Big|^2 \leqslant \mathsf{E}\mathrm{I}^{(z)}_{[0,L_m]}\Big(\int_{[0,z]}|\widetilde{a}(z,x,\zeta_z)|\overline{A}(z,dx)\Big)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{E}\mathrm{I}^{(z)}_{[0,L_m]}\Big(\int_{[0,z]}B(z,x)\overline{A}(z,dx)\Big)^2(1+\|\eta\|_z+\|\zeta\|_z)^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2\Gamma^2(z)\Big[(1+m)^2+\mathsf{E}\int_{[0,z[}\zeta^2 d\lambda\Big] \leqslant 2\Gamma^2(z)\Big[(1+m)^2+\int_{[0,z[}\|\zeta\|_x^2\lambda(dx)\Big].$$

Следовательно, существуют такие функции $C_m(z)$ и $K(z)$, что

$$0 \leqslant C_m(z) \leqslant C_m(z'), \quad 0 \leqslant K(z) \leqslant K(z') \quad \text{для } z \leqslant z',$$
$$\|\mathrm{I}^{(\cdot)}_{[0,L_m]}\mathbf{J}(\cdot,\zeta)\|_z^2 \leqslant C_m(z)+K(z)\int_{[0,z[}\|\zeta\|_x^2\lambda(dx). \tag{6}$$

Пусть $\zeta, \zeta' \in \Xi^*_\lambda$. Ввиду свойства стохастического интеграла по сильному мартингалу, неравенства Гёльдера и условия (5)

$$\mathsf{E}\Big|\int_{[0,z]}\widetilde{b}(z,x,\zeta_x)M(z,dx)-\int_{[0,z]}\widetilde{b}(z,x,\zeta'_x)M(z,dx)\Big|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{E}\int_{[0,z]}B^2(z,x)\|\zeta-\zeta'\|_x^2\overline{M}(z,dx) \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{E}\int_{[0,z]}B^2(z,x)\overline{M}(z,dx)\int_{[0,z[}|\zeta-\zeta'|^2 d\lambda \leqslant \Gamma(z)\int_{[0,z[}\|\zeta-\zeta'\|_x^2\lambda(dx)$$

и

$$\mathsf{E}\Big|\int_{[0,z]}\widetilde{a}(z,x,\zeta_z)A(z,dx)-\int_{[0,z]}\widetilde{a}(z,x,\zeta'_z)A(z,dx)\Big|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{E}\Big(\int_{[0,z]}B(z,x)\overline{A}(z,dx)\Big)^2\int_{[0,z[}|\zeta-\zeta'|^2 d\lambda \leqslant \Gamma^2(z)\int_{[0,z[}\|\zeta-\zeta'\|_x^2\lambda(dx).$$

Поэтому существует такая функция $K(z)$, что

$$0 \leqslant K(z) \leqslant K(z') \quad \text{для } z \leqslant z',$$
$$\big\|\mathrm{I}^{(\cdot)}_{[0,L_m]}\big(\mathbf{J}(\cdot,\zeta)-\mathbf{J}(\cdot,\zeta')\big)\big\|_z^2 \leqslant K(z)\int_{[0,z[}\|\zeta-\zeta'\|_x^2\lambda(dx). \tag{7}$$

2. Рассмотрим стохастические интегральные уравнения

$$\zeta^{(m)}(z) = \mathrm{I}^{(z)}_{[0,L_m]}\mathbf{J}(z,\zeta^{(m)}), \quad m \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Определим семейство случайных полей

$$\zeta^{(m,0)}(z) = 0, \quad \zeta^{(m,k)}(z) = \mathrm{I}^{(z)}_{[0,L_m]}\mathbf{J}(z,\zeta^{(m,k-1)}), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Из неравенства (6) следует

$$\begin{aligned}\|\zeta^{(m,k+1)}\|_z^2 \leqslant C_m(z) + K(z)\int_{[0,z[}\|\zeta^{(m,k)}\|_x^2\lambda(dx) \leqslant \\ \leqslant C_m(z) + K(z)C_m(z)\int_{[0,z[}\lambda(dx) + \dots + \\ + K^k(z)C_m(z)\int_{[0,z[}\lambda(dx^{(1)})\int_{[0,x^{(1)}[}\lambda(dx^{(2)})\cdots\int_{[0,x^{(k-1)}[}\lambda(dx^{(k)}).\end{aligned}$$

Применяя лемму 2, получаем неравенство

$$\|\zeta^{(m,k+1)}\|_z^2 \leqslant C_m(z)\exp\bigl\{K(z)\lambda([0,z[)\bigr\}.$$

Таким образом, $\sup_k\|\zeta^{(m,k)}\|_z < \infty$. Согласно неравенству (7) и лемме 2 имеем

$$\begin{aligned}\|\zeta^{(m,k+\ell)} - \zeta^{(m,k)}\|_z^2 \leqslant K(z)\int_{[0,z[}\|\zeta^{(m,k+\ell-1)} - \zeta^{(m,k-1)}\|_x^2\lambda(dx) \leqslant \\ \leqslant K^k(z)\int_{[0,z[}\lambda(dx^{(1)})\int_{[0,x^{(1)}[}\lambda(dx^{(2)})\cdots\int_{[0,x^{(\ell-1)}[}\|\zeta^{(m,\ell)}\|_{x^{(\ell)}}^2\lambda(dx^{(\ell)}) \leqslant \\ \leqslant C_m(z)\exp\bigl\{K(z)\lambda([0,z[)\bigr\}\frac{1}{k!}K^k(z)\lambda^k([0,z[).\end{aligned}$$

Следовательно, $\lim_{k\to\infty}\sup_\ell\|\zeta^{(m,k+\ell)} - \zeta^{(m,k)}\|_z = 0$ для каждого $z \in \mathsf{R}^2_+$. В силу полноты пространства Ξ^*_λ существует такое поле $\zeta^{(m)} \in \Xi^*_\lambda$, что $\lim_{k\to\infty}\|\zeta^{(m,k)} - \zeta^{(m)}\|_z = 0$. Очевидно, $\operatorname*{l.i.m.}_{k\to\infty}\zeta^{(m,k)}(z) = \zeta^{(m)}(z)$ и $\operatorname*{l.i.m.}_{k\to\infty}\mathbf{J}(z,\zeta^{(m,k)}) = \mathbf{J}(z,\zeta^{(m)})$ согласно неравенству (7). Совершая предельный переход в (9), получаем, что $\zeta^{(m)}$ является решением уравнения (8).

Ввиду свойства семейства линий остановки $(L_m)_{m\in\mathbb{N}}$ существует такое поле $\zeta \in \Xi_\lambda$, что $\mathrm{I}^{(z)}_{[0,L_m]}(\zeta(z) - \zeta^{(m)}(z)) = 0$ п. н. для любых $z \in R^2_+$, $m \in \mathbb{N}$. Для любого $m \in N$

$$\begin{aligned}\mathrm{I}^{(z)}_{[0,L_m]}\zeta(z) = \zeta^{(m)}(z) = \mathrm{I}^{(z)}_{[0,L_m]}\Bigl[\int_{[0,z]}\widetilde{a}(z,x,\zeta^{(m)}_z)A(z,dx) + \int_{[0,z]}\widetilde{b}(z,x,\zeta^{(m)}_x)M(z,dx)\Bigr] = \\ = \mathrm{I}^{(z)}_{[0,L_m]}\Bigl[\int_{[0,z]}\widetilde{a}(z,x,\zeta_z)A(z,dx) + \int_{[0,z]}\widetilde{b}(z,x,\zeta_x)M(z,dx)\Bigr].\end{aligned}$$

Следовательно, поле ζ является решением уравнения (2).

3. Пусть $\zeta, \zeta' \in \Xi_\lambda$, ζ и ζ' — решения уравнения (2). Определим линии остановки

$$\widehat{L}_n(\omega) = \mathrm{debut}\{(x,\omega) : |\!|\!|\zeta(\cdot,\omega)|\!|\!|_x \vee |\!|\!|\zeta'(\cdot,\omega)|\!|\!|_x \geqslant n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда по неравенству (7)

$$\bigl\|\mathrm{I}_{[0,L_m]\cap[0,\widehat{L}_n]}\bigl(\zeta - \zeta'\bigr)\bigr\|_z^2 \leqslant K(z)\int_{[0,z[}\bigl\|\mathrm{I}_{[0,L_m]\cap[0,\widehat{L}_n]}\bigl(\zeta - \zeta'\bigr)\bigr\|_x^2\lambda(dx)$$

для любых $z \in R_+^2$ и $m \in \mathbb{N}$. Поэтому $\left\|\mathrm{I}_{[0,L_m]\cap[0,\widehat{L}_n]}(\zeta-\zeta')\right\|_z^2 = 0$ согласно лемме 2. Так как $\bigcup\limits_{m,n=1}^{\infty}[0,L_m]\cap[0,\widehat{L}_n] = R_+^2\times\Omega$, то ζ' — модификация поля ζ. □

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (4) *и существуют такие* $\mathcal{B}(R_+^2)\otimes\mathcal{B}(R_+^2)\otimes\mathcal{F}|\mathcal{B}(R_+)$*-измеримые случайные поля* $B_n(z,x,\omega)$, $n\in\mathbb{N}$, *что*

1) *если* $\|g\|_z \vee \|g'\|_z \leqslant n$, *то* $|a(z,x,g)-a(z,x,g')| \leqslant B_n(z,x)\|g-g'\|_z$;

2) *если* $\|g\|_x \vee \|g'\|_x \leqslant n$, *то* $|b(z,x,g)-b(z,x,g')| \leqslant B_n(z,x)\|g-g'\|_x$;

3) $\int\limits_{[0,z]} B_n(z,x)\overline{A}(z,dx) + \int\limits_{[0,z]} B_n^2(z,x)\overline{M}(z,dx) \leqslant \Gamma_n(z)$, *где* $(\Gamma_n(z),\ z\in R_+^2)$ — *неслучайные функции*, $0\leqslant\Gamma_n(z)\leqslant\Gamma_n(z')$ *для* $z\leqslant z'$.

Тогда существует единственное решение $\xi\in\Xi_\lambda$ *уравнения* (1).

Доказательство. Определим функции $(x,g)\mapsto\vartheta_n(x,g) : R_+^2\times\mathsf{X}_\lambda\mapsto\mathsf{X}_\lambda$, $n\in\mathbb{N}$, системой соотношений: $\vartheta_n(x,g)=g_x$ при $\|g\|_x\leqslant n$; $\vartheta_n(x,g)=n\|g\|_x^{-1}g_x$ при $\|g\|_x>n$. Заметим, что $(x,g)\mapsto\vartheta_n(x,g)\in\mathcal{B}(R_+^2)\otimes\mathcal{B}(\mathsf{X}_\lambda)|\mathcal{B}(\mathsf{X}_\lambda)$ и справедливы неравенства

$$\|\vartheta_n(x,g)\|_x\leqslant n\wedge\|g\|_x,\quad \|\vartheta_n(x,g_1)-\vartheta_n(x,g_2)\|_x\leqslant\|g_1-g_2\|_x.$$

Пусть $a_n(z,\omega,x,g)=a(z,\omega,x,\vartheta_n(z,g))$, $b_n(z,x,\omega,g)=b(z,x,\omega,\vartheta_n(x,g))$, $n\in\mathbb{N}$. Очевидно, функции $a_n(\cdot)$ и $b_n(\cdot)$ удовлетворяют таким же условиям измеримости, что и $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$. Кроме того, они удовлетворяют условию (4) и

$$|a_n(z,x,g)-a_n(z,x,g')|\leqslant B_n(z,x)\|g-g'\|_z,$$
$$|b_n(z,x,g)-b_n(z,x,g')|\leqslant B_n(z,x)\|g-g'\|_x$$

для любых $g,g'\in\mathsf{X}_\lambda$.

Согласно теореме 1 уравнение

$$\xi^{(n)}(z)=\eta(z)+\int_{[0,z]}a_n(z,x,\xi_z^{(n)})A(z,dx)+\int_{[0,z]}b_n(z,x,\xi_x^{(n)})M(z,dx),\quad z\in R_+^2,$$

имеет единственное решение $\xi^{(n)}\in\Xi_\lambda$. Легко видеть, что $\zeta^{(n)}=\xi^{(n)}-\eta$ является решением уравнения

$$\zeta^{(n)}(z)=\int_{[0,z]}\widetilde{a}_n(z,x,\zeta_z^{(n)})A(z,dx)+\int_{[0,z]}\widetilde{b}_n(z,x,\zeta_x^{(n)})M(z,dx),\quad z\in\mathsf{R}_+^2,$$

где $\widetilde{a}_n(z,x,g)=a_n(z,x,g+\eta)$, $\widetilde{b}_n(z,x,g)=b_n(z,x,g+\eta)$.

Пусть семейство линий остановки $(L_m)_{m\in\mathbb{N}}$ определено соотношением (3) и

$$L'_n(\omega)=\mathrm{debut}\{(x,\omega):\|\xi^{(n)}(\cdot,\omega)\|_x\geqslant n\},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Согласно неравенству (6)

$$\|\mathrm{I}_{[0,L_m]}\zeta^{(n)}\|_z^2\leqslant C_m(z)+K(z)\int_{[0,z[}\|\mathrm{I}_{[0,L_m]}\zeta^{(n)}\|_x^2\lambda(dx).$$

Следовательно, в силу леммы 2 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|\mathrm{I}_{[0,L_m]}\zeta^{(n)}\|_z^2<\infty$ для любых $z\in R_+^2$ и $m\in\mathbb{N}$.

Очевидно, $\widetilde{a}_n(z,x,\zeta_z^{(n)})=\widetilde{a}_{n+1}(z,x,\zeta_z^{(n)})$ для $z\in[0,L'_n]\cap[0,L_m]$ и $\widetilde{b}_n(z,x,\zeta_x^{(n)})=\widetilde{b}_{n+1}(z,x,\zeta_x^{(n)})$ для $x\in[0,L'_n]\cap[0,L_m]$. Поэтому

$$\mathrm{I}_{[0,L_m]\cap[0,L'_n]}^{(z)}|\zeta^{(n)}(z)-\zeta^{(n+1)}(z)|^2\leqslant$$

$$\leqslant 2\left|\int_{[0,z]} \mathrm{I}^{(z)}_{[0,L_m]\cap[0,L'_n]}[\widetilde{a}_{n+1}(z,x,\zeta^{(n)}_z) - \widetilde{a}_{n+1}(z,x,\zeta^{(n+1)}_z)]A(z,dx)\right|^2 + \\ + 2\left|\int_{[0,z]} \mathrm{I}^{(x)}_{[0,L_m]\cap[0,L'_n]}[\widetilde{b}_{n+1}(z,x,\zeta^{(n)}_x) - \widetilde{b}_{n+1}(z,x,\zeta^{(n+1)}_x)]M(z,dx)\right|^2.$$

Аналогично неравенству (7)

$$\|\mathrm{I}_{[0,L_m]\cap[0,L'_n]}(\zeta^{(n)}-\zeta^{(n+1)})\|^2_z \leqslant \widehat{K}_n(z)\int_{[0,z[}\|\mathrm{I}_{[0,L_m]\cap[0,L'_n]}(\zeta^{(n)}-\zeta^{(n+1)})\|^2_x\lambda(dx),$$

где $0 \leqslant \widehat{K}_n(z) \leqslant \widehat{K}_n(z')$ для $z \leqslant z'$. Согласно лемме 2 $\|\mathrm{I}_{[0,L_m]\cap[0,L'_n]}(\zeta^{(n)}-\zeta^{(n+1)})\|^2_z = 0$ для любых z, n, m. Следовательно, $\|\!|\xi^{(n)}|\!\|_x = \|\!|\xi^{(n+1)}|\!\|_x$ для $x \in [0,L_m]\cap[0,L'_n]$ и поэтому $[\![0,L'_n]\!] \subset [\![0,L'_{n+1}]\!]$.

Заметим, что для $m<n$

$$\mathsf{P}\{z\notin[0,L'_n]\} \leqslant \mathsf{P}\{\|\!|\xi^{(n)}|\!\|_z \geqslant n\} \leqslant \mathsf{P}\{\mathrm{I}^{(z)}_{[0,L_m]}\|\!|\zeta^{(n)}|\!\|_z \geqslant n-m\} + \mathsf{P}\{z\notin[0,L_m]\} \leqslant \\ \leqslant (n-m)^{-2}\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\mathrm{I}_{[0,L_m]}\zeta^{(n)}\|^2_z\lambda([0,z]) + \mathsf{P}\{z\notin[0,L_m]\}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{P}\{z\notin[0,L'_n]\} \leqslant \mathsf{P}\{z\notin[0,L_m]\}$ для любых z и m и, значит, $\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{P}\{z\notin[0,L'_n]\}=0$ для любого z. Таким образом, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[\![0,L'_n]\!] = R^2_+\times\Omega$. Поэтому существует такое поле $\zeta\in\Xi_\lambda$, что $\mathrm{I}^{(z)}_{[0,L'_n]}(\zeta^{(n)}(z)-\zeta(z))=0$ п. н. для любого z.

Так как

$$\mathrm{I}^{(z)}_{[0,L'_n]}\zeta(z) = \mathrm{I}^{(z)}_{[0,L'_n]}\zeta^{(n)}(z) = \mathrm{I}^{(z)}_{[0,L'_n]}\left(\int_{[0,z]}\widetilde{a}_n(z,x,\zeta^{(n)}_z)A(z,dx)+\int_{[0,z]}\widetilde{b}_n(z,x,\zeta^{(n)}_x)M(z,dx)\right) = \\ = \mathrm{I}^{(z)}_{[0,L'_n]}\left(\int_{[0,z]}\widetilde{a}(z,x,\zeta_z)A(z,dx)+\int_{[0,z]}\widetilde{b}(z,x,\zeta_x)M(z,dx)\right)$$

для каждого $n\in\mathbb{N}$, то ζ — решение уравнения (2). Очевидно, $\xi=\zeta+\eta$ — решение уравнения (1). Докажем его единственность.

Предположим, что процессы $\xi,\xi'\in\Xi_\lambda$ являются решениями уравнения (2). Определим линии остановки

$$L''_n(\omega) = \mathrm{debut}\{(x,\omega) : \|\!|\xi(\cdot,\omega)|\!\|_x \vee \|\!|\xi'(\cdot,\omega)|\!\|_x \geqslant n\}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Тогда $[0,L''_n]\subset[0,L''_{n+1}]$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[0,L''_n] = R^2_+\times\Omega$.

Аналогично доказательству неравенства (7) получаем существование такой функции $K_n(z)$, что $0\leqslant K_n(z)\leqslant K_n(z')$ для $z\leqslant z'$ и

$$\big\|\mathrm{I}_{[0,L_m]\cap[0,L''_n]}(\xi-\xi')\big\|^2_z \leqslant K_n(z)\int_{[0,z[}\big\|\mathrm{I}_{[0,L_m]\cap[0,L''_n]}(\xi-\xi')\big\|^2_x\lambda(dx).$$

Поэтому $\big\|\mathrm{I}_{[0,L_m]\cap[0,L''_n]}(\xi-\xi')\big\|^2_z = 0$ для любых $z\in R^2_+$ и $n,m\in\mathbb{N}$. Следовательно, ξ' — модификация поля ξ. □

3. Непрерывность по параметру

Рассмотрим семейство стохастических интегральных уравнений Вольтерра на плоскости

$$\xi_s(z) = \eta^{(s)}(z) + \int_{[0,z]} a_s(z,x,\xi_z^{(s)}) A_s(z,dx) + \int_{[0,z]} b_s(z,x,\xi_x^{(s)}) M_s(z,dx), \quad z \in R_+^2, \tag{10}$$

$s \geqslant 0$. Предполагаем: коэффициенты уравнения (10) удовлетворяют условию **(A)** для каждого $s \geqslant 0$.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: $A_{s,0} = A_s - A_0$, $M_{s,0} = M_s - M_0$. Согласно лемме 1 существуют такие $\mathcal{B}(R_+^2) \otimes \mathcal{T} | \mathcal{B}(R_+)$-измеримые функции $(z,(x,\omega)) \mapsto \overline{M}_{s,0}(z,x,\omega)$, $(z,(x,\omega)) \mapsto \overline{M}_s(z,x,\omega)$, $(z,(x,\omega)) \mapsto \overline{A}_{s,0}(z,x,\omega)$ и $(z,(x,\omega)) \mapsto \overline{A}_s(z,x,\omega)$, что $\overline{M}_{s,0}(z,x)$ и $\overline{M}_s(z,x)$ являются квадратическими вариациями сильных мартингалов $M_{s,0}(z,\cdot)$ и $M_s(z,\cdot)$, а $\overline{A}_{s,0}(z,x)$ и $\overline{A}_s(z,x)$ — вариации полей $A_{s,0}(z,\cdot)$ и $A_s(z,\cdot)$ на прямоугольнике $[0,x]$.

Теорема 3. *Предположим, что для каждого $s \geqslant 0$ уравнение (10) имеет единственное решение $\xi^{(s)} \in \Xi_\lambda$ и пусть*

1) $\mathsf{P}\text{-}\lim_{s\to 0} \|\eta^{(s)} - \eta^{(0)}\|_x = 0$ *для каждого $x \in R_+^2$;*

2) *существуют такие $\mathcal{B}(R_+^2) \otimes \mathcal{B}(R_+^2) \otimes \mathcal{F} | \mathcal{B}(R_+)$-измеримые случайные поля $B_s(z,x)$, что $0 \leqslant B_s(z,x) \leqslant B_s(z',x)$ для $z \leqslant z'$,*

$$|a_s(z,x,g)| \leqslant B_s(z,x)(1 + \|g\|_z), \quad |b_s(z,x,g)| \leqslant B_s(z,x)(1 + \|g\|_x),$$

$$|a_0(z,x,g) - a_0(z,x,g')| \leqslant B_0(z,x)(\|g - g'\|_z), \tag{11}$$

$$|b_0(z,x,g) - b_0(z,x,g')| \leqslant B_0(z,x)(\|g - g'\|_x), \tag{12}$$

$$\int_{[0,z]} B_s(z,x) \overline{A}_s(z,dx) + \int_{[0,z]} B_s^2(z,x) \overline{M}_s(z,dx) \leqslant \Gamma(z),$$

$$\int_{[0,z]} B_s(z,x) \overline{A}_{s,0}(z,dx) + \int_{[0,z]} B_s^2(z,x) \overline{M}_{s,0}(z,dx) \leqslant \Gamma_{s,0}(z),$$

где $\Gamma_s(z)$ и $\Gamma_{s,0}(z)$ — неслучайные функции, $0 \leqslant \Gamma_s(z) \leqslant \Gamma_s(z')$ и $0 \leqslant \Gamma_{s,0}(z) \leqslant \Gamma_{s,0}(z')$ для $z \leqslant z'$, $\lim_{s\to 0} \Gamma_{s,0}(z) = 0$ для любого z;

3) *существуют такие $\mathcal{B}(R_+^2) \otimes \mathcal{B}(R_+^2) \otimes \mathcal{F} | \mathcal{B}(R_+)$-измеримые случайные поля $B_{s,n}(z,x)$, $n \in N$, что $0 \leqslant B_{s,n}(z,x) \leqslant B_{s,n}(z',x)$ для $z \leqslant z'$,*

$\sup_{g:\|g\|_z \leqslant n} |a_s(z,x,g) - a_0(z,x,g)| \leqslant B_{s,n}(z,x)$,

$\sup_{g:\|g\|_x \leqslant n} |b_s(z,x,g) - b_0(z,x,g)| \leqslant B_{s,n}(z,x)$,

$\int_{[0,z]} B_{s,n}(z,x) \overline{A}_0(z,dx) + \int_{[0,z]} B_{s,n}^2(z,x) \overline{M}_0(z,dx) \leqslant \Gamma_{s,n}(z)$, *где $\Gamma_{s,n}(z)$ — неслучайные функции, $0 \leqslant \Gamma_{s,n}(z) \leqslant \Gamma_{s,n}(z')$ для $z \leqslant z'$, $\lim_{s\to 0} \Gamma_{s,n}(z) = 0$ для любых z и n.*

Тогда $\mathsf{P}\text{-}\lim_{s\to 0} \|\xi^{(s)} - \xi^{(0)}\|_x = 0$ *для каждого $x \in R_+^2$.*

Доказательство. Определим линии остановки

$$L_{s,n} = \mathrm{debut}\{(x,\omega) : \|\eta^{(s)}(\cdot,\omega)\|_x \geqslant n\}, \quad s \geqslant 0, \quad n \in N.$$

Очевидно, случайное поле $\zeta^{(s)} = \xi^{(s)} - \eta^{(s)}$ является решением уравнения

$$\zeta^{(s)}(z) = \int_{[0,z]} a_s(z,x,\zeta_z^{(s)} + \eta_z^{(s)}) A_s(z,dx) + \int_{[0,z]} b_s(z,x,\zeta_x^{(s)} + \eta_x^{(s)}) M_s(z,dx), \quad z \in R_+^2. \tag{13}$$

Применяя условия теоремы и свойства линий остановки $L_{s,n}$, получаем следующее неравенство для квадрата первого интеграла в (13):

$$\mathrm{I}^{(z)}_{[0,L_{s,n}]}\bigg|\int_{[0,z]} a_s(z,x,\zeta^{(s)}_z+\eta^{(s)}_z)A_s(z,dx)\bigg|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{I}^{(z)}_{[0,L_{s,n}]}\bigg(\int_{[0,z]} |a_s(z,x,\zeta^{(s)}_z+\eta^{(s)}_z)|\overline{A}_s(z,dx)\bigg)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{I}^{(z)}_{[0,L_{s,n}]}\bigg(\int_{[0,z]} B_s(z,x)\overline{A}_s(z,dx)\bigg)^2(1+\|\eta^{(s)}\|_z+\|\zeta^{(s)}\|_z)^2 \leqslant$$
$$\leqslant 3\Gamma^2(z)\bigg(1+n^2+\int_{[0,z[} I^{(x)}_{[0,L_{s,n}]}|\zeta^{(s)}(x)|^2\lambda(dx)\bigg).$$

Для стохастического интеграла в (13) по сильному мартингалу M_s имеем неравенство

$$\mathsf{E}\mathrm{I}^{(z)}_{[0,L_{s,n}]}\bigg|\int_{[0,z]} b_s(z,x,\zeta^{(s)}_x+\eta^{(s)}_x)M_s(z,dx)\bigg|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{E}\bigg|\int_{[0,z]} \mathrm{I}^{(x)}_{[0,L_{s,n}]} b_s(z,x,\zeta^{(s)}_x+\eta^{(s)}_x)M_s(z,dx)\bigg|^2 =$$
$$= \mathsf{E}\int_{[0,z]} \mathrm{I}^{(x)}_{[0,L_{s,n}]} |b_s(z,x,\zeta^{(s)}_x+\eta^{(s)}_x)|^2\overline{M}_s(z,dx) \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{E}\int_{[0,z]} \mathrm{I}^{(x)}_{[0,L_{s,n}]} B^2_s(z,x)(1+\|\eta^{(s)}\|_x+\|\zeta^{(s)}\|_x)^2\overline{M}_s(z,dx) \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{E}\int_{[0,z]} B^2_s(z,x)(1+\mathrm{I}^{(x)}_{[0,L_{s,n}]}\|\eta^{(s)}\|_x+\|I_{[0,L_{s,n}]}\zeta^{(s)}\|_x)^2\overline{M}_s(z,dx) \leqslant$$
$$\leqslant 3\Gamma(z)\bigg(1+n^2+\int_{[0,z[} \mathsf{E}\mathrm{I}^{(x)}_{[0,L_{s,n}]}|\zeta^{(s)}(x)|^2\lambda(dx)\bigg).$$

Следовательно, существуют такие функции $C_n(z)$ и $K(z)$, что

$$\|\mathrm{I}_{[0,L_{s,n}]}\zeta^{(s)}\|^2_z \leqslant C_n(z)+K(z)\int_{[0,z[} \|\mathrm{I}_{[0,L_{s,n}]}\zeta^{(s)}\|^2_x\lambda(dx)$$

и $0\leqslant C_n(z)\leqslant C_n(z')$, $0\leqslant K(z)\leqslant K(z')$ для $z\leqslant z'$. Поэтому по лемме 2

$$\sup_s \|\mathrm{I}_{[0,L_{s,n}]}\zeta^{(s)}\|_z<\infty \quad \forall z,n.$$

Согласно определению линии остановки $L_{s,n}$ для любого $z\in]L_{s,n}(\omega),\infty[$ найдется такое $y\in]L_{s,n}(\omega),\infty[$, что $y\leqslant z$ и $\|\eta^{(s)}\|_y\geqslant n$, откуда следует $\|\eta^{(s)}\|_z\geqslant n$. Итак, $\{z\notin[0,L_{s,n}]\}\subset\{\|\eta^{(s)}\|_z\geqslant n\}$. Учитывая это включение и применяя неравенство Чебышева, получаем

$$\mathsf{P}\{\|\zeta^{(s)}\|_z\geqslant m\}\leqslant \mathsf{P}\{\|\mathrm{I}_{[0,L_{s,n}]}\zeta^{(s)}\|_z\geqslant m\}+\mathsf{P}\{\|\eta^{(s)}\|_z\geqslant n\}\leqslant$$
$$\leqslant m^{-2}\lambda([0,z])\sup_s \|\mathrm{I}_{[0,L_{s,n}]}\zeta^{(s)}\|^2_z+\sup_s \mathsf{P}\{\|\eta^{(s)}\|_z\geqslant n\}. \quad (14)$$

Заметим, что верно равенство $\lim\limits_{m\to\infty}\sup\limits_s \mathsf{P}\{\|\eta^{(s)}\|_z\geqslant m\}=0$, из которого в сочетании с неравенством (14) следует

$$\lim_{m\to\infty}\sup_s \mathsf{P}\{\|\xi^{(s)}\|_z\geqslant m\}=0. \quad (15)$$

Рассмотрим представление $\xi^{(s)}$ в виде

$$\xi^{(s)}(z) = \eta^{(s)}(z) + \varrho_s(z) + \int_{[0,z]} a_0(z,x,\xi_z^{(s)})A_0(z,dx) + \int_{[0,z]} b_0(z,x,\xi_x^{(s)})M_0(z,dx),$$

где $\varrho_s(z) = J_1(s,z) + J_2(s,z) + J_3(s,z) + J_4(s,z)$,

$$J_1(s,z) = \int_{[0,z]} [a_s(z,x,\xi_z^{(s)}) - a_0(z,x,\xi_z^{(s)})]A_0(z,dx),$$

$$J_2(s,z) = \int_{[0,z]} a_s(z,x,\xi_z^{(s)})A_{s,0}(z,dx),$$

$$J_3(s,z) = \int_{[0,z]} [b_s(z,x,\xi_x^{(s)}) - b_0(z,x,\xi_x^{(s)})]M_0(z,dx),$$

$$J_4(s,z) = \int_{[0,z]} b_s(z,x,\xi_x^{(s)})M_{s,0}(z,dx).$$

Введем линии остановки

$$\widetilde{L}_{s,n} = \mathrm{debut}\{(x,\omega) : \|\xi^{(s)}(\cdot,\omega)\|_x \wedge \|\eta^{(s)}(\cdot,\omega) - \eta^{(0)}(\cdot,\omega)\|_x \geqslant n\}, \quad s \geqslant 0, \quad n \in N.$$

Применяя свойства стохастических интегралов по полям ограниченной вариации и сильным мартингалам, условия теоремы и свойства линий остановки $\widetilde{L}_{s,n}$, имеем следующую систему неравенств:

$$\mathrm{I}^{(z)}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}\Big|J_1(s,z)\Big| \leqslant \int_{[0,z]} \mathrm{I}^{(z)}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}|a_s(z,x,\xi_z^{(s)}) - a_0(z,x,\xi_z^{(s)})|\overline{A}_0(z,dx) \leqslant$$
$$\leqslant \int_{[0,z]} B_{s,n}(z,x)\overline{A}_0(z,dx) \leqslant \Gamma_{s,n}(z);$$

$$\mathrm{I}^{(z)}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}\Big|J_2(s,z)\Big| \leqslant \mathrm{I}^{(z)}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}(1 + \|\xi^{(s)}\|_z)\int_{[0,z]} B_s(z,x)\overline{A}_{s,0}(z,dx) \leqslant (1+n)\Gamma_{s,0}(z);$$

$$\mathsf{E}\Big|\mathrm{I}^{(z)}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}J_3(s,z)\Big|^2 \leqslant \mathsf{E}\int_{[0,z]} \mathrm{I}^{(x)}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}|b_s(z,x,\xi_x^{(s)}) - b_0(z,x,\xi_x^{(s)})|^2\overline{M}_0(z,dx) \leqslant$$
$$\leqslant \mathsf{E}\int_{[0,z]} B^2_{s,n}(z,x)\overline{M}_0(z,dx) \leqslant \Gamma_{s,n}(z);$$

$$\mathsf{E}I^{(z)}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}\Big|J_4(s,z)\Big|^2 \leqslant \mathsf{E}\int_{[0,z]} \mathrm{I}^{(x)}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}B_s^2(z,x)(1 + \|\xi^{(s)}\|_x)^2\overline{M}_{s,0}(z,dx) \leqslant (1+n)^2\Gamma_{s,0}(z).$$

Из приведенных неравенств вытекает

$$\mathsf{E}\mathrm{I}^{(z)}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}\varrho_s^2(z) \leqslant 4\big[\Gamma^2_{s,n}(z) + \Gamma_{s,n}(z) + (1+n)^2\Gamma^2_{s,0}(z) + (1+n)^2\Gamma_{s,0}(z)\big].$$

Учитывая условия теоремы на функции $\Gamma_{s,n}$ и $\Gamma_{s,0}$, имеем равенство

$$\lim_{s\to 0}\|\mathrm{I}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}\varrho_s\|_z = 0 \quad \forall z,n. \tag{16}$$

Заметим далее, что процесс $\zeta^{(s)} = \xi^{(s)} - \eta^{(s)}$ удовлетворяет также уравнению

$$\zeta^{(s)}(z) - \zeta^{(0)}(z) = \varrho_s(z) + \int_{[0,z]} [a_0(z,x,\zeta_z^{(s)} + \eta_z^{(s)}) - a_0(z,x,\zeta_z^{(0)} + \eta_z^{(0)})]A_0(z,dx) +$$
$$+ \int_{[0,z]} [b_0(z,x,\zeta_x^{(s)} + \eta_x^{(s)}) - b_0(z,x,\zeta_x^{(0)} + \eta_x^{(0)})]M_0(z,dx).$$

Воспользовавшись условием (11), для первого интеграла в разложении $\zeta^{(s)} - \zeta^{(0)}$ получим

$$\begin{aligned}
&\mathrm{I}^{(z)}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}\Big|\int_{[0,z]}[a_0(z,x,\zeta^{(s)}_z+\eta^{(s)}_z)-a_0(z,x,\zeta^{(0)}_z+\eta^{(0)}_z)]A_0(z,dx)\Big|^2\leqslant\\
&\qquad\leqslant \mathrm{I}^{(z)}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}\bigg(\int_{[0,z]}|a_0(z,x,\zeta^{(s)}_z+\eta^{(s)}_z)-a_0(z,x,\zeta^{(0)}_z+\eta^{(0)}_z)|\overline{A}_0(z,dx)\bigg)^2\leqslant\\
&\qquad\leqslant \mathrm{I}^{(z)}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}\bigg(\int_{[0,z]}B_0(z,x)\overline{A}_0(z,dx)\bigg)^2\big(\|\zeta^{(s)}-\zeta^{(0)}\|_z+\|\eta^{(s)}-\eta^{(0)}\|_z\big)^2\leqslant\\
&\qquad\qquad\leqslant 2\Gamma^2(z)\big(\|\mathrm{I}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}(\zeta^{(s)}-\zeta^{(0)})\|^2_z+\|\mathrm{I}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}(\eta^{(s)}-\eta^{(0)})\|^2_z\big).
\end{aligned}$$

Согласно свойствам стохастических интегралов по сильным мартингалам и условию (12) для второго интеграла в представлении $\zeta^{(s)} - \zeta^{(0)}$ получим

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}\mathrm{I}^{(z)}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}\Big|\int_{[0,z]}[b_0(z,x,\zeta^{(s)}_x+\eta^{(s)}_x)-b_0(z,x,\zeta^{(0)}_x+\eta^{(0)}_x)]M_0(z,dx)\Big|^2\leqslant\\
&\qquad\leqslant \mathsf{E}\Big|\int_{[0,z]}\mathrm{I}^{(x)}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}[b_0(z,x,\zeta^{(s)}_x+\eta^{(s)}_x)-b_0(z,x,\zeta^{(0)}_x+\eta^{(0)}_x)]M_0(z,dx)\Big|^2=\\
&\qquad= \mathsf{E}\int_{[0,z]}\mathrm{I}^{(x)}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}|b_0(z,x,\zeta^{(s)}_x+\eta^{(s)}_x)-b_0(z,x,\zeta^{(0)}_x+\eta^{(0)}_x)|^2\overline{M}_0(z,dx)\leqslant\\
&\qquad\leqslant \mathsf{E}\int_{[0,z]}\mathrm{I}^{(x)}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}B^2_0(z,x)\big(\|\zeta^{(s)}-\zeta^{(0)}\|_x+\|\eta^{(s)}-\eta^{(0)}\|_x\big)^2\overline{M}_0(z,dx)\leqslant\\
&\qquad\qquad\leqslant 2\Gamma(z)\mathsf{E}\big(\|\mathrm{I}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}(\zeta^{(s)}-\zeta^{(0)})\|^2_z+\|\mathrm{I}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}(\eta^{(s)}-\eta^{(0)})\|^2_z\big).
\end{aligned}$$

Следовательно, существует такая $C(z)$, что

$$\begin{aligned}
&\|\mathrm{I}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}(\zeta^{(s)}-\zeta^{(0)})\|^2_z\leqslant 3\|\mathrm{I}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}\varrho_s\|^2_z+C(z)\mathsf{E}\|\mathrm{I}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}(\eta^{(s)}-\eta^{(0)})\|^2_z+\\
&\qquad\qquad+C(z)\int_{[0,z[}\|\mathrm{I}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}(\zeta^{(s)}-\zeta^{(0)})\|^2_x\lambda(dx).
\end{aligned}$$

Применяя лемму 2, для $s \geqslant 0$, $n \in N$ и $z \in R^2_+$ имеем неравенство

$$\|\mathrm{I}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}(\zeta^{(s)}-\zeta^{(0)})\|^2_z\leqslant K(z)\big(\|\mathrm{I}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}\varrho_s\|^2_z+\mathsf{E}\|\mathrm{I}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}(\eta^{(s)}-\eta^{(0)})\|^2_z\big),$$

откуда в силу (16) получаем

$$\lim_{s\to0}\|\mathrm{I}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}(\zeta^{(s)}-\zeta^{(0)})\|_z=0 \tag{17}$$

для любых z и n. Из неравенства

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}\{\|\zeta^{(s)}-\zeta^{(0)}\|_z>\varepsilon\}\leqslant\varepsilon^{-2}\lambda([0,z])\|\mathrm{I}_{[0,\widetilde{L}_{s,n}]}(\zeta^{(s)}-\zeta^{(0)})\|^2_z+\sup_s\mathsf{P}\{\|\xi^{(s)}\|_z\geqslant n\}+\\
&\qquad\qquad+2\sup_s\mathsf{P}\{\|\eta^{(s)}\|_z\geqslant n/2\}
\end{aligned}$$

в сочетании с (15) и (17) следует $\lim\limits_{s\to0}\mathsf{P}\{\|\xi^{(s)}-\xi^{(0)}\|_z>\varepsilon\}=0$. □

Литература

[1] Гущин А.А. *К общей теории случайных полей на плоскости* // УМН. – 1982. – Т. 37. – Вып. 6. – С. 53–74.

[2] Клепцина М.Л., Веретенников А.Ю. *О сильных решениях стохастических уравнений Ито–Вольтерра* // Теор. вер. и ее прим. – 1984. – № 12. – С. 32–40.

[3] Pardoux E., Protter P. *Stochastic Volterra equations with anticipating coefficients* // Ann. of Probab. – 1990. – V. 18. – № 4. – P. 1635–1655.

[4] Kolodii A.M. *On conditions for existence of solutions of integral equations with stohastic line integrals* // Probab. Theory and Math. Stat. – 1994. – P. 405–422.

[5] Гущин А.А., Мишура Ю.С. *Неравенства Девиса и разложение Ганди для двупараметрических сильных мартингалов.* 1 // Теор. вер. и матем. стат. – 1990. – № 42. – С. 27–35.

[6] Dozzi M. *Twoparameter stochastic processes* // Mathemat. Research. – 1991. – V. 61. – P. 17–43.

[7] Stricker C., Yor M. *Calcul stochastique d'ependant d'un parametre* // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. – 1978. – V. 45. – S. 109–133.

[8] Скороход А.В. *Об измеримости случайных процессов* // Теор. вер. и ее прим. – 1980. – Т. 25. – № 1. – С. 140–142.

[9] Kolodii N.A. *Some properties of random fields related to stochastic integrals with respect to strong martingales* // J. of Math. Sci. – 2006. – V. 137. – № 1. – P. 4531–4540.

[10] Horvath L. *Gronwall–Bellman type integral inequalities in measure spaces* // J. Math. Anal. and Appl. – 1996. – V. 202. – № 1. – P. 183–193.

[11] Гихман И.И., Скороход А.В. *Управляемые случайные процессы.* – Киев: Наук. думка, 1977. – 250 с.

Н.А. Колодий

старший преподаватель, кафедра фундаментальной информатики и оптимального управления,
Волгоградский государственный университет,
400062, г. Волгоград, Университетский просп., д. 100,

e-mail: nkolodii@mail.ru

N.A. Kolodii

Senior Lecturer, Chair of Fundamental Information Science and Optimal Control,
Volgograd State University,
100 Universitetskii Ave., Volgograd, 400062 Russia,

e-mail: nkolodii@mail.ru