

УДК 539.3

doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.569-590

## ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХСЛОЙНЫХ ТЕСТ-ОБРАЗЦОВ С ВНЕШНИМИ СЛОЯМИ ИЗ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ СО СТРУКТУРОЙ $[0^\circ]_s$ НА ОСЕВОЕ СЖАТИЕ

*В.Н. Паймушин<sup>1,2</sup>, С.А. Холмогоров<sup>1</sup>, Н.В. Полякова<sup>1</sup>,  
М.А. Шишов<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>*Казанский национальный исследовательский технический университет  
имени А.Н. Туполева, г. Казань, 420111, Россия*

<sup>2</sup>*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия*

### Аннотация

Проведен анализ найденных аналитических решений линеаризованных задач о возможных макромасштабных формах потери устойчивости (ФПУ) трехслойных тест-образцов из волокнистых композитов со структурой  $[0^\circ]_s$  ( $s$  – число монослоев) при осевом сжатии. Рассмотрены материалы, которые характеризуются физически нелинейной зависимостью лишь между формирующимися поперечными касательными напряжениями и соответствующими сдвиговыми деформациями. Используются линеаризованные уравнения равновесия в возмущенном состоянии, полученные исходя из построенных ранее уточненных геометрически нелинейных уравнений теории трехслойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем. Эти уравнения получены с применением для внешних слоев уточненной модели С.П. Тимошенко с учетом поперечного обжатия, а для наполнителя – трехмерных уравнений теории упругости, упрощенных по модели трансверсально-мягкого слоя. Последние допускают интегрирование по толщине с введением в рассмотрение двух неизвестных функций (поперечных касательных напряжений). В используемых линеаризованных уравнениях физическая нелинейность материала внешних слоев учтена в соответствии с концепцией Шенли путем введения в рассмотрение касательного модуля поперечного сдвига. Показано, что в используемых уравнениях имеются вырождающиеся слагаемые, которые соответствуют реализации чисто поперечно-сдвиговых ФПУ при сжатии образца в осевом направлении (вдоль волокон). Реализация таких ФПУ возможна для тест-образцов с немалой относительной толщиной пакета слоев. На основе анализа полученных результатов показано, что для исследуемых трехслойных тест-образцов наиболее вероятным является разрушение по причине потери устойчивости по макромасштабной изгибно-сдвиговой ФПУ. Она реализуется при осредненном по толщинам внешних слоев сжимающем напряжении, равном по величине касательному модулю поперечного сдвига композита в окрестности торцевого сечения рабочей части тест-образца в его невозмущенном состоянии.

**Ключевые слова:** волокнистый композит, трехслойный тест-образец, трансверсально-мягкий наполнитель, сжатие, линеаризованное уравнение, форма потери устойчивости, аналитическое решение

### Введение

Теоретическим и экспериментальным исследованиям волокнистых композитных материалов (КМ) на сжатие в направлении волокон уделяется значительное внимание (см. [1–9] и др.) вплоть до настоящего времени. Круг задач, связанный

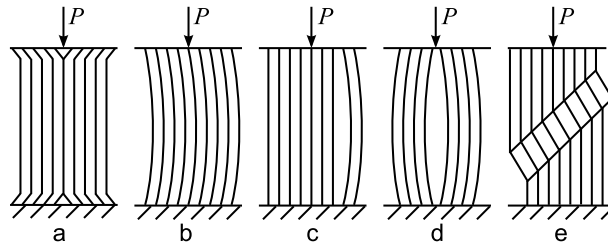


Рис. 1. Возможные виды разрушения при сжатии композитных образцов: а) смятие по торцам; б) макровыпучивание; в) «выщелкивание» полоски; д) расслоение посередине; е) образование полосы сдвига

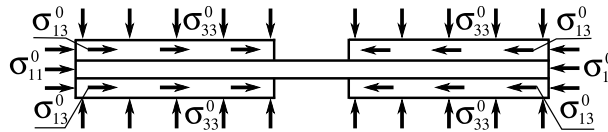


Рис. 2. Схемы нагружения образцов при испытаниях на сжатие: 1)  $\sigma_{11}^0 \neq 0$ ,  $\sigma_{33}^0 = 0$ , ( $\sigma_{13}^0 = 0$ ); 2)  $\sigma_{33}^0 \neq 0$  ( $\sigma_{13}^0 \neq 0$ ),  $\sigma_{11}^0 = 0$ ; 3)  $\sigma_{11}^0 \neq 0$ ,  $\sigma_{33}^0 \neq 0$  ( $\sigma_{13}^0 \neq 0$ )

с испытаниями на сжатие тест-образцов из таких композитов, и достаточно простые примеры для понимания их решения в доступной форме освещены в монографии [10]. Известно, что при испытаниях тест-образцов поведение волокнистого композитного материала при сжатии в направлении волокон принципиально отличается от поведения при растяжении: при растяжении как образец, так и структура материала самоориентируются вдоль нагрузки, в то время как при сжатии материал (образец) стремится «уйти» из-под нагрузки [10]. Механизмы такого «ухода» различны и связаны с разными видами разрушения, такими как (см. рис. 1): а) смятие по торцу (crushing); б) потеря устойчивости (buckling); в) расслоение и/или расщепление с «выщелкиванием» слоев (delamination and/or splitting+buckling); д) «бочкообразование», расслоение посередине (delamination); е) образование полосы сдвига – кинка (kink).

Испытания образцов на сжатие отрабатывались десятилетиями как для металлов и хрупких материалов, так и для КМ. В соответствии с существующими стандартами для проведения испытаний композитных образцов рекомендуется использование специальных захватов, позволяющих реализовать одну из трех схем нагружения, показанных на рис. 2. Наиболее надежной считается третья схема нагружения, когда наряду с напряжением сжатия  $\sigma_{11}^0$ , приложенным к торцевым сечениям образца, по части его боковой поверхности за счет сжатия напряжением  $\sigma_{33}^0$  прикладываются касательные напряжения  $\sigma_{13}^0$ , передающие образцу сжимающую нагрузку.

В механике композиционных материалов существует направление исследований, связанное с постановкой и решением задач о так называемых внутренних и поверхностных (периферийных) ФПУ слоистых волокнистых композитов, армированных прямолинейными или криволинейными волокнами и находящимися в тех или иных условиях нагружения. Такие задачи важны в связи с тем, что при построении теории прочности композитных материалов в качестве возможного механизма разрушения принимают, в частности, потерю устойчивости структуры композита. В этом направлении во второй половине прошлого столетия был проведен большой цикл исследований, результаты которых нашли отражение во многих научных статьях и монографиях. Укажем среди них монографию [11], в которой

теория устойчивости волокнистых и слоистых армированных сред строится на основе строгих трехмерных уравнений теории упругости, для регулярных слоистых структур введены в рассмотрение ФПУ первого, второго, третьего и четвертого родов; монографию [12], в которой для многослойных структур, состоящих из чередующихся жестких и мягких (маложестких) слоев, на основе введения гипотез для каждого слоя получены двумерные уравнения, порядок которых зависит от числа слоев, развита теория слоистых композиционных материалов, полученная в результате перехода к системам мелкослойной структуры, для слоистых систем регулярного строения введены в рассмотрение синфазные, антифазные и поверхностные изгибные ФПУ. Отметим также справочник [13], в котором на основании результатов работы [14] описывается один из видов разрушения композитов, являющегося следствием потери устойчивости периферийных слоев, ориентированных параллельно приложенной нагрузке, приводятся простейшие формулы для определения напряжений потери устойчивости волокон, рассматриваемых как стержни на упругом основании. В более содержательной постановке решения задач устойчивости этого класса приведены также в многочисленных работах [15–19] и др., а направления исследований с анализом полученных результатов отражены в обзорных работах [4, 20–22] и др. В развитие этого направления исследований в статье [23] для выявления внутренних и поверхностных ФПУ монослоя, находящегося внутри или на периферии слоистого композита, построены уточненные геометрически нелинейные уравнения. Они основаны на моделировании монослоя тонкой пластиной, взаимодействующей в точках граничных плоскостей со слоями связующего, моделируемого трансверсально-мягкими основаниями. Механика деформирования пластины при ее среднем изгибе описывается геометрически нелинейными соотношениями классической теории пластин, основанной на гипотезах Кирхгофа – Лява (первый вариант), и уточненной модели С.П. Тимошенко с учетом поперечных сдвигов и обжатия (второй вариант), а деформации оснований – линеаризованными уравнениями трехмерной теории упругости, упрощенными в рамках модели трансверсально-мягкого слоя.

На основе уравнений работы [23] в статье [24] рассмотрены одномерные линеаризованные задачи о возможных ФПУ монослоя однонаправленных композитов с прямолинейными волокнами при сжатии в направлении волокон, находящегося или на периферии, или внутри слоистого композита. Найдены точные аналитические решения сформулированных задач и проведены расчеты, результаты которых сравниваются с полученными ранее экспериментальными данными. Сформулирован вывод о том, что для исследуемого композита при равномерном осевом сжатии образцов в направлении волокон потеря устойчивости монослоев по изгибным формам невозможна. Механизмом разрушения внешних слоев тест-образца в результате межслойного расслоения является потеря устойчивости пучка волокон по чисто сдвиговой форме. Такая ФПУ реализуется (ввиду малого значения осредненного модуля поперечного сдвига) при значении предельного сжимающего осредненного напряжения, равного осредненному модулю поперечного сдвига. Показано, что такая сдвиговая ФПУ выявляется лишь на основе уравнений, построенных с использованием сдвиговой модели С.П. Тимошенко для описания процесса деформирования монослоя композита.

В настоящей работе найдены аналитические решения задач, сформулированных на основе выведенных ранее уравнений, о синфазных и антифазных макромасштабных изгибно-сдвиговых, а также о чисто поперечно-сдвиговых ФПУ трехслойных тест-образцов с внешними слоями из волокнистых композитных материалов со структурой  $[0^\circ]_s$  ( $s$  – число монослоев) при их осевом сжатии. Значимость описанных результатов заключается в том, что при определенных соотношениях физико-

механических и геометрических параметров плоских симметричных трехслойных тест-образцов теоретически будет показана возможность реализации чисто поперечно сдвиговых ФПУ внешних слоев в условиях их осевого сжатия. У таких образцов сохраняется однородность докритического напряженно-деформированного состояния на основной части рабочей длины тест-образца без сопутствующего изгиба вплоть до разрушения. Это позволит разработать, изготовить и провести испытания на сжатие специальных трехслойных композитных тест-образцов со средним маложестким слоем, кардинально улучшить точность и содержательность экспериментов на сжатие композитных тест-образцов, сопровождающееся у стандартных композитных образцов хотя малым, но неизбежным продольно-поперечным изгибом.

### 1. Физико-механические характеристики волокнистого композита на полимерной основе в осях ортотропии

Экспериментальное определение физико-механических характеристик композитных материалов на основе проведения тех или иных испытаний является неотъемлемой частью в технологическом процессе проектирования и изготовления с их применением конструкций того или иного назначения. Для волокнистых КМ на полимерной основе испытания в соответствии с существующими стандартами проводятся, как правило, на плоских тест-образцах, имеющих толщину  $h$  и ту или иную ориентацию расположенных в матрице волокон. Наиболее простыми в реализации являются испытания на растяжение образцов со структурами  $[0^\circ]_s$  и  $[90^\circ]_s$  ( $s$  – число монослоев в образце) с волокнами, расположенными вдоль и поперек к направлению действующей нагрузки, имеющих небольшие значения  $s$  и толщину  $h$ . Для КМ с углеродными волокнами характерными являются диаграммы нагружения, являющиеся линейными вплоть до разрушения образцов. Исходя из результатов таких испытаний для монослоя композита определяются модули упругости первого рода  $E_1^+$  (в направлении волокон),  $E_2^+$  (в направлении поперек волокон) и коэффициент Пуассона  $\nu_{12}^+$ . Они связаны с помощью другого коэффициента Пуассона  $\nu_{21}^+$  зависимостью  $E_1^+ \nu_{21}^+ = E_2^+ \nu_{12}^+$ . Определяются также предельные напряжения  $\sigma_1^{+*}$ ,  $\sigma_2^{+*}$  в направлениях осей ортотропии  $x_1$ ,  $x_2$ , при достижении которых в условиях растяжения происходит разрушение образца. Заметим, что для волокнистого КМ, изготовленного из препрега HSE 180REM на основе углеродных с прямолинейными волокнами, указанные характеристики, найденные в работе [25] и использованные в статьях [24, 26], равны  $E_1^+ = 133$  ГПа,  $E_2^+ = 5.9$  ГПа,  $\nu_{12}^+ = 0.29$ ,  $\nu_{21}^+ = 0.0126$ ,  $\sigma_1^{+*} = 2490$  МПа,  $\sigma_2^{+*} = 17.2$  МПа.

Более сложными в реализации являются испытания на сжатие тест-образцов со структурами  $[0^\circ]_s$ ,  $[90^\circ]_s$  и  $[\pm 45^\circ]_{2s}$  в силу их возможной потери устойчивости по той или иной форме и наблюдаемого продольно-поперечного изгиба (хотя и малого), особенно при выдержке тест-образца под нагрузкой в течение длительного времени. При испытаниях на сжатие до разрушения тест-образцов со структурами  $[0^\circ]_s$ ,  $[90^\circ]_s$  соответствующие диаграммы деформирования  $\sigma_1^- = \sigma_1^-(\varepsilon_1)$ ,  $\sigma_2^- = \sigma_2^-(\varepsilon_2)$  с большой степенью точности допустимо считать линейными вплоть до их разрушения, определяемые на их основе модули упругости  $E_1^-$ ,  $E_2^-$  и коэффициенты Пуассона  $\nu_{12}^-$ ,  $\nu_{21}^-$  практически совпадают со значениями  $E_1^+$ ,  $E_2^+$ ,  $\nu_{12}^+$ ,  $\nu_{21}^+$  соответственно. Однако определяемое при этом предельное напряжение  $\sigma_1^{-*}$ , при достижении которого в условиях сжатия происходит разрушение образца, оказывается намного ниже значения  $\sigma_1^{+*}$ . В соответствии с результатами многочисленных исследований ([1–9] и др.) допустимо считать, что предельное напряжение  $\sigma_1^{-*}$  сжатия тест-образца, имеющего структуру  $[0^\circ]_s$ , соответствует его потере устой-

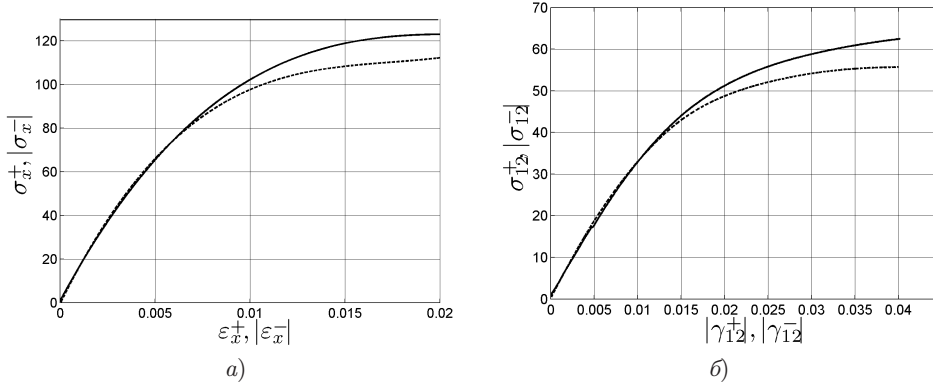


Рис. 3. Диаграммы деформирования  $|\sigma_x^\pm| - |\varepsilon_x^\pm|$  (а) и  $|\sigma_{12}^\pm| - |\gamma_{12}^\pm|$  (б) (при сжатии – сплошная линия, при растяжении – пунктирная линия), МПа

чивости по чисто поперечно-сдвиговой форме, которая реализуется при значении касательного модуля поперечного сдвига  $\tilde{G}_{13}^{*}$  материала тест-образца в плоскости  $x_1, x_3 = z$ , равном  $\tilde{G}_{13}^{*} = \sigma_1^{*}$ . Такой вид разрушения образца (рис. 1, е) реализуется только при соответствующей немалой его толщине  $h$  и короткой его рабочей длине  $L$  между захватами используемого при испытаниях приспособления (рис. 2).

Для определения модуля сдвига  $G_{12}$  в осях ортотропии  $x_1, x_2$  проводятся испытания на растяжение и сжатие тест-образцов со структурой  $[\pm 45^\circ]_{2s}$  с четным числом монослоев  $2s$ . Их результатом являются диаграммы деформирования, задающие зависимости  $\sigma_x^\pm = \sigma_x^\pm(\varepsilon_x^\pm)$  между нормальными напряжениями растяжения ( $\sigma_x^+$ ) и сжатия ( $\sigma_x^-$ ) образца и соответствующими осевыми деформациями в направлении растяжения ( $\varepsilon_x^+$ ) и сжатия ( $\varepsilon_x^-$ ) (рис. 3, а), а также предельные напряжения  $\sigma_x^{+*}$  и  $\sigma_x^{-*}$ , при достижении которых происходит разрушение образца. На основе таких диаграмм деформирования образца при использовании выведенных в [26, 27] соотношений вида

$$\sigma_{12}^\pm = \frac{\sigma_x^\pm}{2}, \quad \gamma_{12}^\pm = \frac{2(1 + \nu_{xy}^\pm)}{2 + \varepsilon_x^\pm(1 - \nu_{xy}^\pm)} \varepsilon_x^\pm \approx (1 + \nu_{xy}^\pm) \varepsilon_x^\pm \quad (1)$$

строятся диаграммы деформирования при сдвиге  $\sigma_{12}^\pm = \sigma_{12}^\pm(\gamma_{12}^\pm)$  (рис. 3, б), дающие зависимости между касательными напряжениями  $\sigma_{12}^\pm$  и соответствующими сдвиговыми деформациями  $\gamma_{12}^\pm$  в осях ортотропии  $x_1, x_2$ .

Диаграммы деформирования, приведенные на рис. 3, а для указанного выше композита, позволяют установить зависимости между секущими ( $\hat{E}_x^\pm = \text{tg } \hat{\varphi}^\pm$ ) и касательными ( $\hat{E}_x^\pm = \text{tg } \hat{\varphi}^\pm$ ) модулями упругости и осевыми деформациями  $|\varepsilon_x^\pm|$ , изображенные на рис. 4, а и б.

В соответствии с рис. 4 зависимости между  $\sigma_x^\pm$  и  $\varepsilon_x^\pm$  представимы в виде

$$\sigma_x^\pm = \hat{E}_x^\pm (|\varepsilon_x^\pm|) \varepsilon_x^\pm, \quad (2)$$

а зависимости между приращениями  $\Delta\sigma_x^\pm$  и  $\Delta\varepsilon_x^\pm$  – в виде

$$\Delta\sigma_x^\pm = \tilde{E}_x^\pm (|\varepsilon_x^\pm|) \Delta\varepsilon_x^\pm. \quad (3)$$

С учетом (1) соотношение (2) преобразуется к виду

$$\sigma_{12}^\pm = \hat{G}_{12}^\pm (|\tilde{\gamma}_{12}^\pm|) \gamma_{12}^\pm, \quad (4)$$

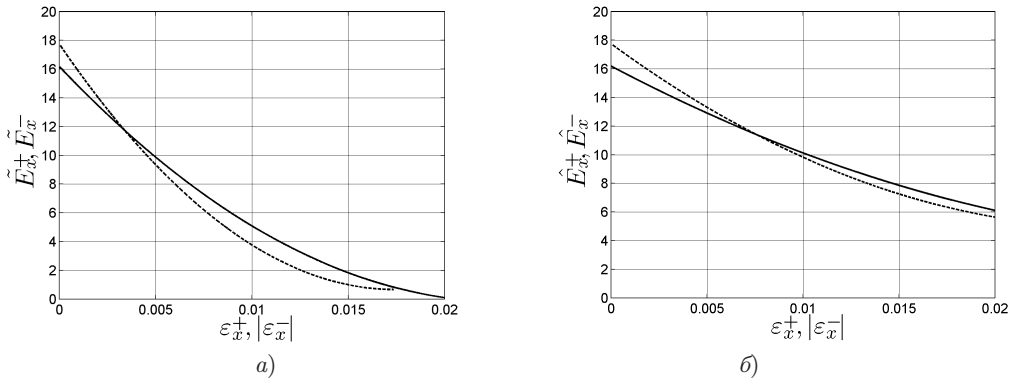


Рис. 4. Зависимости между секущими  $\hat{E}_x^\pm = \hat{E}_x^\pm(|\varepsilon_x^\pm|)$  и касательными  $\tilde{E}_x^\pm = \tilde{E}_x^\pm(|\varepsilon_x^\pm|)$  модулями упругости и осевыми деформациями образца (при растяжении – пунктирная линия, при сжатии – сплошная линия), ГПа

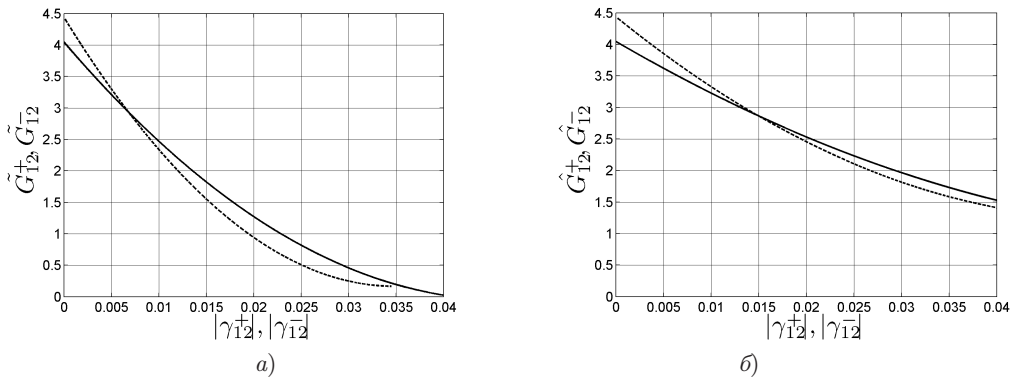


Рис. 5. Зависимости между секущими  $\hat{G}_{12}^\pm = \hat{G}_{12}^\pm(|\gamma_{12}^\pm|)$  и касательными  $\tilde{G}_{12}^\pm = \tilde{G}_{12}^\pm(|\gamma_{12}^\pm|)$  модулями сдвига и сдвиговыми деформациями (при растяжении – пунктирная линия, при сжатии – сплошная линия), ГПа

где

$$\tilde{\gamma}_{12}^\pm = \frac{\gamma_{12}^\pm}{1 + \nu_{xy}^\pm}, \quad \hat{G}_{12}^\pm(|\tilde{\gamma}_{12}^\pm|) = \frac{\hat{E}_x^\pm(|\tilde{\gamma}_{12}^\pm|)}{2(1 + \nu_{xy}^\pm)}. \quad (5)$$

Аналогичным образом вместо (3) можно получить соотношение

$$\Delta\sigma_{12}^\pm = \tilde{G}_{12}^\pm(|\tilde{\gamma}_{12}^\pm|) \Delta\gamma_{12}^\pm, \quad (6)$$

где

$$\tilde{G}_{12}^\pm(|\tilde{\gamma}_{12}^\pm|) = \frac{\tilde{E}_x^\pm(|\tilde{\gamma}_{12}^\pm|)}{2(1 + \nu_{xy}^\pm)}. \quad (7)$$

Для рассматриваемого композита со структурой  $[\pm 45^\circ]_{2s}$ , изготовленного из препрега HSE 180 REM, графики полученных зависимостей (5) и (7) показаны на рис. 5, а и б.

Приведенные выше результаты свидетельствуют о том, что поведение тест-образца волокнистого композита со структурой  $[\pm 45^\circ]_{2s}$  при сжатии достаточно сильно отличается от поведения в условиях растяжения. Более надежными и достоверными из них следует считать результаты, соответствующие растяжению, так

как они получены при использовании достаточно длинных образцов, обеспечивающих однородность формирующихся параметров НДС как по ширине, так и по длине рабочей части образца. Такую однородность параметров НДС не удается обеспечить при испытаниях образцов на сжатие по существующим в настоящее время стандартам испытаний ввиду малой рабочей длины испытываемых образцов. Отмеченные различия в результатах, в частности, обусловлены и тем, что и в слоях связующего, в которых формируется преимущественно сдвиговое НДС, и в волокнах и пучках волокон, в которых формируется преимущественно одноосное НДС растяжения или сжатия [28], при нагружении и разгрузке конструкции в композите происходят структурные изменения [29]. Они связаны частично с деградацией связующего, но главным образом с реализацией внутренних ФПУ волокон и пучков волокон на микро- и мезомасштабах [30, 31], с формированием как необратимых деформаций ползучести на этапах нагружения и выдержки под нагрузкой, так и обратимых вязкоупругих деформаций ползучести, исчезающих на этапах разгрузки.

В связи с вышеизложенным при проведении дальнейших расчетов будут использоваться результаты, соответствующие растяжению образцов. Из рис. 5, *a* следует, что на начальном участке нагружения при  $\gamma_{12} = 0$  касательный модуль сдвига  $\hat{G}_{12}^{\pm} = 4.2$  ГПа. Далее на участке до  $\gamma_{12} = 0.017$  он резко убывает и достигает практически нулевого значения ( $\tilde{G}_{12}^+ = 47$  МПа) при  $\gamma_{12} = 0.044$ . На диаграмме  $\tilde{G}_{12}^+ = \tilde{G}_{12}^+(\gamma_{12})$  введем в рассмотрение точки  $(G_0, 0)$ ,  $(G_*, \gamma_*)$  и  $(G_p, \gamma_p)$ , имеющие координаты:  $\tilde{G}_{12}^+ = G_0$ ,  $\gamma_{12} = 0$ ,  $\tilde{G}_{12}^+ = G_*$ ,  $\gamma_{12} = \gamma_*$  и  $\tilde{G}_{12}^+ = G_p$ ,  $\gamma_{12} = \gamma_p$ . Из них  $G_*$  соответствует найденному в [25] предельному напряжению сжатия образца, численно равному осредненному модулю поперечного сдвига композита при потере устойчивости образца по чисто поперечно-сдвиговой форме (по этому значению  $G_*$  на диаграмме определяется соответствующее значение сдвиговой деформации  $\gamma_{12} = \gamma_*$ ), а значения  $G_p$  и  $\gamma_p$  являются экстремальными на диаграмме и соответствуют началу разрушения образца. Таким образом, для аналитического представления функции  $\tilde{G}_{12}^+ = \tilde{G}_{12}^+(\gamma_{12})$  допустимо использование аппроксимационной формулы

$$\tilde{G}_{12}^+ = G_0 + G^{(1)} |\gamma_{12}| + G^{(2)} \gamma_{12}^2, \quad (8)$$

где величины  $G^{(1)}$ ,  $G^{(2)}$  определяются по формулам, приведенным в работе [26].

## 2. Формы потери устойчивости трехслойного стержня при осевом сжатии

Рассмотрим трехслойный стержень симметричного строения, у которого внешние несущие слои, имеющие толщину  $t$ , выполнены из слоистого волокнистого композита, характеризующегося осредненными по толщине модулями упругости первого рода  $E_1$ ,  $E_3$  в направлениях длины и толщины, коэффициентами Пуассона  $\nu_{13}$  и  $\nu_{31} = E_3 \nu_{13} / E_1$  и модулем поперечного сдвига  $G_{13} \ll E_1$ . Предполагаем, что наполнитель относится к классу трансверсально-мягких, имеет толщину  $h$  и характеризуется модулями упругости первого рода  $E_3^0$  в направлении толщины и поперечного сдвига  $G_{13}^0$  в плоскости  $xOz$ , несущие слои в сечениях  $x = 0$ ,  $x = L$  подвержены сжатию усилиями  $P$ .

Для описания НДС внешних слоев будем использовать уточненную кинематическую модель С.П. Тимошенко с учетом поперечных сдвигов и обжатия, согласно которой для перемещений  $U^{(k)}$  в направлении оси  $x$  и прогибов  $W^{(k)}$  в направлении осей  $z^{(k)}$  имеют место представления

$$U^{(k)} = u^{(k)} + z^{(k)} \gamma^{(k)}, \quad W^{(k)} = w^{(k)} + z^{(k)} \varphi^{(k)}, \quad (9)$$

где  $u^{(k)}$ ,  $w^{(k)}$  – перемещения в направлениях осей  $x$  и  $z^{(k)}$  точек срединных плоскостей несущих слоев,  $\gamma^{(k)}$ ,  $\gamma^{(k)}$  – углы поворотов поперечных сечений и функции обжатия. Для описания НДС трансверсально-мягкого заполнителя в соответствии с полученными ранее [32] результатами достаточно ввести в рассмотрение функцию поперечных касательных напряжений  $q = q(x)$ , постоянную в направлении оси  $z$ , что позволяет на основе результатов [32] составить систему восьми линеаризованных уравнений нейтрального равновесия вида

$$\begin{aligned} T_{(k),x}^{11} + \delta_{(k)}q = 0, \quad \left( T_{(k)}^{13} - Pw_{,x}^{(k)} + \frac{h}{2}q \right)_{,x} + \delta_{(k)}\sigma_{33}^0 = 0, \\ M_{(k),x}^{11} - T_{(k)}^{13} + \frac{t}{2}q = 0, \quad \left( M_{(k)}^{13} + \delta_{(k)}\frac{ht}{4}q \right)_{,x} - T_{(k)}^{33} + \frac{t}{2}\sigma_{33}^0 = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Введенные здесь в рассмотрение внутренние усилия и моменты выражаются через искомые функции  $u^{(k)}$ ,  $w^{(k)}$ ,  $\gamma^{(k)}$  и  $\varphi^{(k)}$  физическими зависимостями

$$\begin{aligned} T_{(k)}^{11} = B_1 \left( u_{,x}^{(k)} + \nu_{31}\varphi^{(k)} \right), \quad T_{(k)}^{33} = B_3 \left( \nu_{13}u_{,x}^{(k)} + \varphi^{(k)} \right), \\ T_{(k)}^{13} = B_{13} \left( w_{,x}^{(k)} + \gamma^{(k)} \right), \quad \sigma_{33}^0 = \frac{E_3^0}{h} \left[ w^{(2)} - w^{(1)} - \frac{t}{2} \left( \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} \right) \right], \\ M_{(k)}^{11} = D_1\gamma_{,x}^{(k)}, \quad M_{(k)}^{13} = D_{13}\varphi_{,x}^{(k)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где для жесткостных коэффициентов внешних слоев введены обозначения

$$B_1 = \frac{E_1t}{1 - \nu_{13}\nu_{31}}, \quad B_3 = \frac{E_3t}{1 - \nu_{13}\nu_{31}}, \quad B_{13} = \tilde{G}_{13}t, \quad D_1 = \frac{B_1t^2}{12}, \quad D_{13} = \frac{B_{13}t^2}{12}.$$

В рамках используемой модели уравнения равновесия (10) должны быть дополнены уравнением

$$\begin{aligned} u^{(2)} - u^{(1)} - \frac{t}{2} \left( \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} \right) + \frac{h}{2} \left( w_{,x}^{(1)} + w_{,x}^{(2)} \right) + \\ + \frac{ht}{4} \left( \varphi_{,x}^{(1)} - \varphi_{,x}^{(2)} \right) - \frac{h}{G_{13}^0}q + \frac{h^3}{12E_3^0}q_{,xx} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Введем в рассмотрение новые искомые неизвестные

$$U = u^{(1)} - u^{(2)}, \quad \Phi = \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}, \quad W = w^{(1)} + w^{(2)}, \quad \Gamma = \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)}, \quad (13)$$

$$V = u^{(1)} + u^{(2)}, \quad \varphi = \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}, \quad \gamma = \gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}, \quad w = w^{(1)} - w^{(2)}. \quad (14)$$

Тогда с учетом соотношений (11), (13), (14) уравнения (11), (12) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} B_1 (U_{,xx} + \nu_{31}\Phi_{,x}) + 2q = 0, \quad D_{13}\Phi_{,xx} - B_3 (\nu_{13}U_{,x} + \Phi) + \frac{ht}{2}q_{,x} = 0, \\ D_1\Gamma_{,xx} - B_{13} (W_{,x} + \Gamma) + tq = 0, \\ -U - \frac{t}{2}\Gamma + \frac{h}{2}W_{,x} + \frac{ht}{4}\Phi_{,x} - \frac{h}{G_{13}^0}q + \frac{h^3}{12E_3^0}q_{,xx} = 0, \\ B_{13} (W_{,xx} + \Gamma_{,x}) - PW_{,xx} + hq_{,x} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} B_1 (V_{,xx} + \nu_{31}\varphi_{,x}) = 0, \quad D_{13}\varphi_{,xx} - B_3 (\nu_{13}V_{,x} + \varphi) - \frac{tE_3^0}{h} \left( w + \frac{t}{2}\varphi \right) = 0, \\ D_1\gamma_{,xx} - B_{13} (w_{,x} + \gamma) = 0, \quad (B_{13} - P)w_{,xx} + B_{13}\gamma_{,x} - \frac{2E_3^0}{h} \left( w + \frac{t}{2}\varphi_{,x} \right) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$



Заметим, что в рассматриваемом случае системой пяти уравнений (15) описываются синфазные [12] (кососимметричные) ФПУ, а системой четырех уравнений (16) – антифазные [12] (симметричные) ФПУ стержня. Видно, что в третьем уравнении системы (15) и в четвертом уравнении системы (16) имеются слагаемые, вырождающиеся при  $P = B_{13}$ , что соответствует реализации чисто поперечно-сдвиговой ФПУ внешних слоев.

**2.1. Синфазные ФПУ.** Предположим, что в торцевых сечениях  $x = 0$ ,  $x = L$  внешние слои шарнирно оперты на диафрагмы, абсолютно жесткие в направлении оси  $z$ . Тогда при  $x = 0$ ,  $x = L$  функции (13) и  $q$  должны быть подчинены граничным условиям

$$U_{,x} = 0, \quad \Phi = 0, \quad W = 0, \quad \Gamma_{,x} = 0, \quad q_{,x} = 0. \quad (17)$$

Этим условиям удовлетворяют решения, имеющие вид

$$U = \tilde{U} \cos \lambda x, \quad \Phi = \tilde{\Phi} \sin \lambda x, \quad W = \tilde{W} \sin \lambda x, \quad \Gamma = \tilde{\Gamma} \cos \lambda x, \quad q = \tilde{q} \cos \lambda x, \quad (18)$$

где  $\lambda = n\pi/L$ ,  $n = 1, 2, \dots, \infty$ . Подстановка решений (18) в уравнения (15) приводит к зависимостям

$$\tilde{\Gamma} = \frac{B_w}{B_\gamma} \tilde{W}, \quad \tilde{q} = A_w \tilde{W} - A_\gamma \tilde{\Gamma}, \quad \tilde{\Phi} = C_\varphi \tilde{q}, \quad \tilde{U} = \frac{a_\varphi}{a_u} \tilde{\Phi}, \quad (19)$$

где

$$a_u = -\frac{B_1 \lambda^2}{2} + \frac{2B_3 \nu_{13} \lambda}{th}, \quad a_\varphi = \frac{2B_3}{th} + \frac{2D_{13} \lambda^2}{th} - \frac{B_1 \nu_{31} \lambda^2}{2},$$

$$C_\varphi = \frac{2a_u}{B_1 \lambda^2 a_\varphi - B_1 \nu_{31} \lambda a_u}, \quad A_w = \frac{h\lambda}{2C_q}, \quad A_\gamma = \frac{t}{2C_q},$$

$$C_q = \frac{h}{G_{13}^0} + \frac{h^3 \lambda^2}{12E_3^0} + \left( \frac{a_\varphi}{a_u} - \frac{th\lambda}{4} \right) C_\varphi,$$

$$B_w = tA_w - B_{13} \lambda, \quad B_\gamma = D_1 \lambda^2 + B_{13} + tA_\gamma,$$

а из условия  $\tilde{w} \neq 0$  для определения бифуркационного значения сформированного в несущих слоях напряжения  $\sigma_{\text{син}}$  имеем формулу

$$\sigma_{\text{син}} = \frac{1}{t} \left[ B_{13} \left( 1 + \frac{B_w}{\lambda B_\gamma} \right) + \frac{h}{\gamma} \left( A_w - \frac{A_\gamma B_w}{B_\gamma} \right) \right]. \quad (20)$$

Обозначим через  $\sigma_{\text{син}}^*$  и  $n_{\text{син}}^*$  критическое напряжение и соответствующее волновое число, найденные минимизацией выражения (20).

**2.2. Антифазные и сдвиговые ФПУ.** Решения уравнений (16) по аналогии с (18) будем искать в виде

$$V = \tilde{V} \cos \lambda x, \quad \varphi = \tilde{\varphi} \sin \lambda x, \quad w = \tilde{w} \sin \lambda x, \quad \gamma = \tilde{\gamma} \cos \lambda x. \quad (21)$$

При их подстановке из трех уравнений системы (16) следуют зависимости

$$\tilde{\varphi} = -b_\varphi \tilde{w}, \quad \tilde{V} = \frac{\nu_{31}}{\lambda} \tilde{\varphi}, \quad \tilde{w} = -a_w \tilde{\gamma}, \quad (22)$$

где

$$b_\varphi = \frac{tE_3^0}{h \left( \tilde{B}_3 + D_{13} \lambda^2 + \frac{t^2 E_3^0}{2h} \right)}, \quad \tilde{B}_3 = B_3 (1 - \nu_{13} \nu_{31}), \quad a_w = \frac{D_1 \lambda}{B_{13}} + \frac{1}{\lambda}.$$

Последнее уравнение системы (16) приведем к виду

$$D_1 \left( 1 - \frac{P}{B_{13}} \right) \frac{d^4 \gamma}{dx^4} + \left( P - \frac{2E_3^0 D_1}{h B_{13}} \right) \frac{d^2 \gamma}{dx^2} + \frac{2E_3^0}{h} \gamma - \frac{E_3^0 t}{h} \frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad (23)$$

используя для этого зависимость  $w_{,x} = (D_1/B_{13}) \gamma_{,xx} - \gamma$ . Подстановка функций (21) в уравнение (23) и использование зависимостей (23) при условии  $\tilde{\gamma} \neq 0$  приводит к характеристическому уравнению

$$P \left( \frac{D_1}{B_{13}} + \frac{1}{\lambda^2} \right) = D_1 + \frac{2E_3^0 D_1}{B_{13} h \lambda^2} + \frac{2E_3^0}{h \lambda^4} - \frac{E_3^0 t}{h \lambda^3} b_{\varphi} a_w. \quad (24)$$

Из (24) при  $\lambda \rightarrow \infty$  (то есть при  $n \rightarrow \infty$ ) следуют формулы

$$P^* = B_{13}, \quad \sigma_{сдв}^* = G_{13}, \quad (25)$$

соответствующие реализации чисто поперечно-сдвиговой ФПУ несущих слоев, возможной при  $G_{13}/E_1 \ll 1$ . Если в правой части (24) пренебречь последним слагаемым и ввести в рассмотрение безразмерный параметр  $k_c = D_1 \lambda^2 / B_{13}$ , то для определения критической нагрузки  $P_{ант}^*$ , соответствующей реализации антифазных изгибно-сдвиговых ФПУ, можно получить весьма простую формулу

$$P^* = \frac{D_1 \lambda^2}{1 + k_c} + \frac{2E_3^0}{h \lambda^2}, \quad (26)$$

которая была ранее выведена в работе [33]. Из (24) в случае  $E_3^0 = 0$  (отсутствие заполнителя) следует также формула

$$P^* = B_{13} \left( 1 - \frac{1}{1 + D_1 \lambda^2 / B_{13}} \right) = \frac{D_1 \lambda^2}{1 + D_1 \lambda^2 / B_{13}},$$

указывающая, что реализации чисто поперечно-сдвиговой ФПУ несущего слоя стержня при  $P^* = B_{13}$  соответствует решение  $\gamma = \tilde{\gamma} \cos \lambda x$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  (то есть при  $n \rightarrow \infty$ ).

Обозначим через  $\sigma_{ант}^*$  и  $n_{ант}^*$  критическое напряжение и соответствующее волновое число, найденные минимизацией выражения (24) по  $n$ . Они практически совпадают с решением, следующим из неупрощенного характеристического уравнения (24).

### 3. Численные результаты и их анализ

На основе найденных решений проведем анализ возможности реализации исследуемых ФПУ стержня с внешними слоями из слоистого однонаправленного композита, изготовленного из углеренты HSE 180 REM. Такой КМ имеет упругие характеристики  $E_1 = 133$  ГПа,  $E_3 = 5.9$  ГПа,  $\nu_{13} = 0.29$  при растяжении в направлениях волокон ( $E_1, \nu_{13}$ ) и поперек волокон ( $E_3, \nu_{31}$ ) [25, 26]. При сжатии композита в направлении волокон модуль упругости  $E_1$  также оказывается равным  $E_1 = 133$  ГПа, а его разрушение наступает при достижении предельного напряжения  $\sigma_{сж} = 459$  МПа, равного, как указывалось выше, модулю поперечного сдвига  $\tilde{G}_{13}^*$  при потере устойчивости структуры композита по чисто поперечно-сдвиговой форме.

Расчеты проведены для стержня с геометрическими параметрами  $t = 1$  мм,  $h = 20$  мм, с внешними слоями, модуль поперечного сдвига которых есть  $\tilde{G}_{13} = 459$  МПа и заполнителем, имеющим параметры  $E_3^0 = 50$  МПа,  $G_{13}^0 = 25$  МПа

Табл. 1

Первый вариант расчетов при  $\tilde{G}_{13} = 459$  МПа,  $E_3^0 = 50$  МПа,  $G_{13}^0 = 25$  МПа

$L$ , мм	1000	500	250	100	50	10
$\sigma_{\text{син}}^*$ , МПа	95	187	247	276	295	421
$n_{\text{син}}^*$	1	1	1	1	1	1
$\sigma_{\text{ант}}^*$ , МПа	356	356	356	356	359	378
$n_{\text{ант}}^*$	67	34	17	7	3	1
$\sigma_{\text{кир}}^*$ , МПа	95.2	187	248	277	301	$1.2 \cdot 10^3$
$n_{\text{кир}}^*$	1	1	1	1	1	1
$\sigma_{\text{кл}}^*$ , МПа	95.2	187	247	271	275	276
$\sigma_{\text{МКЭ}}^*$ , МПа	94.4	184	246	279	308	449

Табл. 2

Второй вариант расчетов при  $\tilde{G}_{13} = 459$  МПа,  $E_3^0 = 150$  МПа,  $G_{13}^0 = 75$  МПа

$L$ , мм	1000	500	250	100	50	10
$\sigma_{\text{син}}^*$ , МПа	123	340	459	459	459	459
$n_{\text{син}}^*$	1	1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$\sigma_{\text{ант}}^*$ , МПа	459	459	459	459	459	459
$n_{\text{ант}}^*$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$\sigma_{\text{кир}}^*$ , МПа	124	342	610	781	810	$1.41 \cdot 10^3$
$n_{\text{кир}}^*$	1	1	1	1	1	1
$\sigma_{\text{кл}}^*$ , МПа	124	342	610	783	816	827
$\sigma_{\text{МКЭ}}^*$ , МПа	121	311	545	611	634	629

(в первом варианте расчетов) и  $E_3^0 = 150$  МПа,  $G_{13}^0 = 75$  МПа (во втором варианте расчетов).

Полученные результаты расчетов приведены в табл. 1 и 2 для различных фиксированных значений  $L$ , охватывающих как длинные, так и весьма короткие стержни.

Отметим, что во всех таблицах также приведены:

1) значения критического напряжения  $\sigma_{\text{кл}}^*$ , соответствующие потере устойчивости стержня по синфазной форме и определяемые по формуле

$$\sigma^* = \frac{\pi^2}{t(1+k_{13})L^2} \left[ D_1 + B_1 \frac{(h+t)^2}{4} \right], \quad k_{13} = \frac{\pi^2 B_1 h}{2G_{13}^0 L^2},$$

которые соответствуют использованию известной [12] модели ломаной линии в механике трехслойных конструкций, основанной на аппроксимации перемещений в заполнителе линейным законом по поперечной координате и описании НДС внешних слоев классической моделью Кирхгофа – Лява;

2) критические значения напряжений, вычисленные по формулам

$$\sigma^* = \frac{mD_1\pi^2}{tL^2}, \quad m = n^2 \left[ 1 + \frac{3(1+2r)^2}{(1+k_{13}n^2+4r^2n^4/k_3)} \right], \quad k_3 = \frac{2E_3^0L^4}{D_1h\pi^4}, \quad r = \frac{h}{2t},$$

которые соответствуют использованию построенной ранее уточненной модели [34], отличающейся от используемой в данной работе модели применением для описания НДС внешних слоев классической модели Кирхгофа – Лява;

3) критические значения напряжений  $\sigma_{\text{МКЭ}}^*$ , найденные на основе использования известного пакета прикладных программ (ППП) ANSYS.

Проведя анализ полученных результатов, можно сформулировать следующие основные выводы.

1. У трехслойного стержня с параметрами  $E_3^0 = 50$  МПа,  $G_{13}^0 = 25$  МПа (такими характеристиками обладает наполнитель из пенопласта) вплоть до  $L = 50$  мм наименьшими являются критические напряжения  $\sigma_{\text{син}}^*$ , которым соответствует волновое число  $n_{\text{син}}^* = 1$ , причем значения  $\sigma_{\text{син}}^*$ ,  $\sigma_{\text{кир}}^*$  и  $\sigma_{\text{МКЭ}}^*$  отличаются друг от друга незначительно. Только при  $L = 10$  мм реализуется антифазная ФПУ с разницей между значениями  $\sigma_{\text{МКЭ}}^*$  и  $\sigma_{\text{ант}}^*$ , равной  $\sim 16\%$ .

2. В то же время у трехслойного стержня с параметрами  $E_3^0 = 150$  МПа,  $G_{13}^0 = 75$  МПа (такими характеристиками обладает сотовый наполнитель) синфазная ФПУ реализуется лишь при  $L \geq 500$  мм, причем в рассмотренном диапазоне изменения  $L$  выполнено неравенство  $\sigma_{\text{МКЭ}}^* < \sigma_{\text{син}}^*$  и при  $L = 500$  мм, наблюдается разница  $(\sigma_{\text{син}}^* - \sigma_{\text{МКЭ}}^*) / \sigma_{\text{син}}^* = 0.085$ . В пределах отрезка  $250 \text{ мм} \leq L \leq 10 \text{ мм}$  наименьшим оказалось значение  $\sigma^* = G_{13} = 459$  МПа, соответствующее чисто поперечно-сдвиговой ФПУ внешних слоев. Такая ФПУ не выявляется при использовании как модели [34] ( $\sigma_{\text{кир}}^*$ ), так и ППП ANSYS ( $\sigma_{\text{МКЭ}}^*$ ).

3. Невозможность выявления чисто поперечно-сдвиговой ФПУ внешних слоев (а следовательно, и трехслойного пакета в целом) на основе уравнений, основанных на известной модели «ломаной» линии [12] (значения  $\sigma_{\text{кл}}^*$ ) и подобных моделей [35–44] и др. придает особую значимость уточненной теории трехслойных конструкций, предложенной в настоящей работе и основанной на описании НДС внешних слоев сдвиговой моделью С.П. Тимошенко вместо модели Кирхгофа–Лява, используемой в предложенных ранее [34] и других уточненных вариантах теории.

4. Нетривиальным является вывод о том, что известные и широко распространенные в расчетной практике ППП, основанные на конечно-элементном методе решения трехмерных задач теории упругости, не позволяют выявить описанную выше чисто поперечно-сдвиговую ФПУ внешних слоев. Реализация именно этой ФПУ является наиболее вероятной в реальных трехслойных конструкциях, у которых внешние слои изготовлены из КМ с малой сдвиговой жесткостью в поперечных направлениях, а для упругих характеристик  $E_3^0$  и  $G_{13}^0$  приняты значения наполнителей, используемых в реальных конструкциях. Следует заметить, что поперечно-сдвиговая ФПУ, в отличие от изгибных (синфазной и антифазной), в соответствии с найденными решениями описывается тригонометрическими функциями  $\sin \lambda x$  и  $\cos \lambda x$  с большим волновым числом  $n$  (зависимости  $\sigma_{\text{син}} = \sigma_{\text{син}}(n)$  и  $\sigma_{\text{ант}} = \sigma_{\text{ант}}(n)$  с целью иллюстрации показаны на рис. 6–9 для стержня с параметрами  $L = 250$  мм и  $L = 10$  мм при  $E_3^0 = 50$  МПа,  $G_{13}^0 = 25$  МПа и  $E_3^0 = 150$  МПа,  $G_{13}^0 = 75$  МПа). На фигурах сплошным линиям соответствуют синфазные, а штриховым линиям – антифазные ФПУ. По-видимому, нахождение таких решений на основе конечных элементов, содержащихся в используемых ППП, возможно лишь при таком большом числе конечных элементов, которое намного больше волнового числа  $n$ , соответствующего реализации поперечно-сдвиговой ФПУ.

Как было отмечено в разд. 1, физические зависимости между поперечными касательными напряжениями  $\sigma_{13}$  и соответствующими сдвиговыми деформациями  $\gamma_{13}$  являются существенно нелинейными. В частности, для рассматриваемого композита в соответствии с данными испытаний для  $\tilde{G}_{13}$  следует принять  $\tilde{G}_{13} = 4.25$  МПа при  $\gamma_{13} = 0$  и  $\tilde{G}_{13} = 459$  МПа при  $\gamma_{13} = 0.024$ . В связи с этим расчеты проведены также при параметре  $\tilde{G}_{13} = 2.5$  ГПа, найденном в соответствии с существующими стандартами испытаний, и сохранении всех остальных указанных выше параметров стержня. Соответствующие результаты расчетов приведены в табл. 3 и 4.

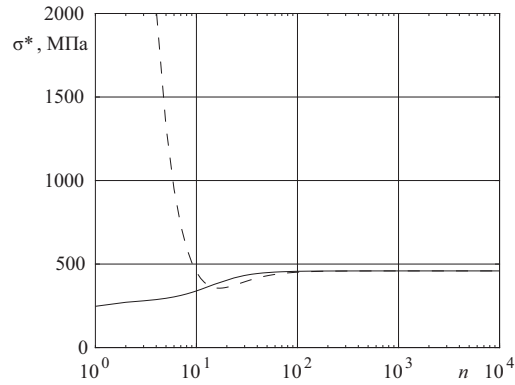


Рис. 6. Зависимости  $\sigma^* = \sigma^*(n)$  при  $\tilde{G}_{13} = 459$  МПа,  $E_3^0 = 50$  МПа,  $G_{13}^0 = 25$  МПа,  $L = 250$  мм

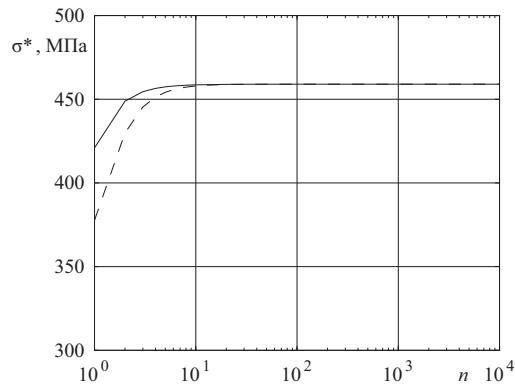


Рис. 7. Зависимости  $\sigma^* = \sigma^*(n)$  при  $\tilde{G}_{13} = 459$  МПа,  $E_3^0 = 50$  МПа,  $G_{13}^0 = 25$  МПа,  $L = 10$  мм

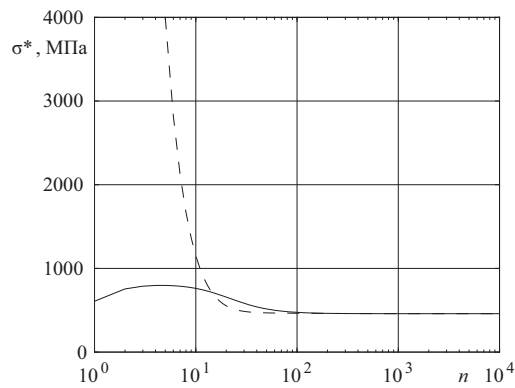


Рис. 8. Зависимости  $\sigma^* = \sigma^*(n)$  при  $\tilde{G}_{13} = 459$  МПа,  $E_3^0 = 150$  МПа,  $G_{13}^0 = 75$  МПа,  $L = 250$  мм

Видно, что найденные значения  $\sigma_{\text{син}}^*$ ,  $\sigma_{\text{квр}}^*$ ,  $\sigma_{\text{МКЭ}}^*$  отличаются друг от друга не более чем на 4.5% вплоть до  $L = 50$  мм и все они соответствуют синфазной ФПУ стержня. При  $L = 10$  мм ФПУ является антифазной, наибольшее отличие  $\sigma_{\text{МКЭ}}^*$  от  $\sigma_{\text{ант}}^*$  имеет место при  $E_3^0 = 50$  МПа,  $G_{13}^0 = 25$  МПа. Однако все эти

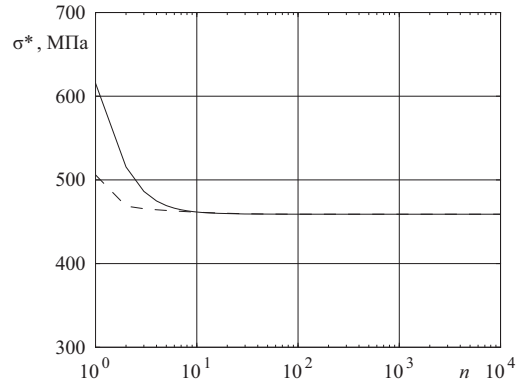


Рис. 9. Зависимости  $\sigma^* = \sigma^*(n)$  при  $\tilde{G}_{13} = 459$  МПа,  $E_3^0 = 150$  МПа,  $G_{13}^0 = 75$  МПа,  $L = 10$  мм

Табл. 3

$\tilde{G}_{13} = 2.5$  ГПа,  $E_3^0 = 50$  МПа,  $G_{13}^0 = 25$  МПа

$L$ , мм	1000	500	250	100	50	10
$\sigma_{\text{син}}^*$ , МПа	95	187	247	277	300	864
$n_{\text{син}}^*$	1	1	1	1	1	1
$\sigma_{\text{ант}}^*$ , МПа	456	457	457	457	488	817
$n_{\text{ант}}^*$	49	24	12	5	3	1
$\sigma_{\text{кир}}^*$ , МПа	95.2	187	248	277	301	$1.2 \cdot 10^3$
$n_{\text{кир}}^*$	1	1	1	1	1	1
$\sigma_{\text{кл}}^*$ , МПа	95.2	187	247	271	275	276
$\sigma_{\text{МКЭ}}^*$ , МПа	94.5	186	247	280	313	771

Табл. 4

$\tilde{G}_{13} = 2.5$  ГПа,  $E_3^0 = 150$  МПа,  $G_{13}^0 = 75$  МПа

$L$ , мм	1000	500	250	100	50	10
$\sigma_{\text{син}}^*$ , МПа	123	341	610	780	807	$1.07 \cdot 10^3$
$n_{\text{син}}^*$	1	1	1	1	1	1
$\sigma_{\text{ант}}^*$ , МПа	795	795	795	796	814	945
$n_{\text{ант}}^*$	68	34	17	7	3	1
$\sigma_{\text{кир}}^*$ , МПа	124	342	610	781	810	$1.41 \cdot 10^3$
$n_{\text{кир}}^*$	1	1	1	1	1	1
$\sigma_{\text{кл}}^*$ , МПа	124	342	610	783	816	827
$\sigma_{\text{МКЭ}}^*$ , МПа	122	328	587	781	842	944

найденные значения являются завышенными и не соответствующими экспериментам, так как совпадающие с экспериментальными данными критические значения сжимающего напряжения теоретическим путем можно определить только при проведении расчетов с параметром  $G_{13}^0 = 459$  МПа и на основе использованных выше уравнений.

### Заключение

Значимость полученных результатов заключается в том, что при определенных соотношениях физико-механических и геометрических параметрах имеется возможность реализации чисто поперечно сдвиговых ФПУ внешних слоев у плос-

ких трехслойных тест-образцов симметричного по толщине строения в условиях их осевого сжатия. У таких образцов сохраняется однородность докритического НДС на основной части рабочей длины тест-образца без сопутствующего изгиба вплоть до разрушения. Это позволит разработать, изготовить и провести испытания на сжатие специальных трехслойных композитных тест-образцов со средним мало жестким слоем, кардинально улучшить точность и содержательность экспериментов на сжатие композитных тест-образцов, сопровождающиеся у стандартных композитных образцов хотя малым, но неизбежным продольно-поперечным изгибом.

**Благодарности.** Результаты исследований получены в рамках выполнения проекта Российского научного фонда (№ 19-79-10018, разделы 1, 3) и РФФИ (№ 19-08-00073, раздел 2).

#### Литература

1. *Jumahat A., Soutis C., Jones F.R., Hodzic A.* Fracture mechanisms and failure analysis of carbon fibre/toughened epoxy composites subjected to compressive loading // *Compos. Struct.* – 2010. – V. 92, No 2. – P. 295–305. – doi: 10.1016/j.compstruct.2009.08.010.
2. *Hapke J., Gehrig F., Huber N., Schulte K., Lilleodden E.T.* Compressive failure of UD-CFRP containing void defects: *In situ* SEM microanalysis // *Compos. Sci. Technol.* – 2011. – V. 71, No 9. – P. 1242–1249. – doi: 10.1016/j.compscitech.2011.04.009.
3. *Niu K., Talreja R.* Modeling of compressive failure in fiber reinforced composites // *Int. J. Solids Struct.* – 2000. – V. 37, No 17. – P. 2405–2428. – doi: 10.1016/S0020-7683(99)00010-4.
4. *Naik N.K., Kumar R.S.* Compressive strength of unidirectional composites: Evaluation and comparison of prediction models // *Compos. Struct.* – 1999. – V. 46, No 3. – P. 299–308. – doi: 10.1016/S0263-8223(99)00098-7.
5. *Davidson P., Waas A.M.* Mechanics of kinking in fiber-reinforced composites under compressive loading // *Math. Mech. Solids.* – 2016. – V. 21, No 6. – P. 667–684. – doi: 10.1177/1081286514535422.
6. *Prabhakar P., Waas A.M.* Interaction between kinking and splitting in the compressive failure of unidirectional fiber reinforced laminated composites // *Compos. Struct.* – 2013. – V. 98. – P. 85–92. – doi: 10.1016/j.compstruct.2012.11.005.
7. *Pimenta S., Gutkin R., Pinho S.T., Robinson P.* A micromechanical model for kink-band formation: Part I – Experimental study and numerical modelling // *Compos. Sci. Technol.* – 2009. – V. 69, No 7–8. – P. 948–955. – doi: 10.1016/j.compscitech.2009.02.010.
8. *Lee S.H., Yerramalli C.S., Waas A.M.* Compressive splitting response of glass-fiber reinforced unidirectional composites // *Compos. Sci. Technol.* – 2000. – V. 60, No 16. – P. 2957–2966. – doi: 10.1016/S0266-3538(00)00159-7.
9. *Allix O., Feld N., Baranger E., Guimard J.-M., Ha-Minh C.* The compressive behaviour of composites including fiber kinking: Modelling across the scales // *Meccanica.* – 2014. – V. 49, No 11. – P. 2571–2586. – doi: 10.1007/s11012-013-9872-y.
10. *Полылов А.Н.* Этюды по механике композитов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 320 с.
11. *Гузь А.Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. – Киев: Наукова думка, 1973. – 270 с.
12. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
13. *Любин Дж.* Справочник по композиционным материалам: в 2 кн. / Пер. с англ. А.Б. Геллера и др. – М.: Машиностроение, 1988. – Кн. 2. – 497 с.

14. *Suarez J.A., Whiteside J.B., Hadcock R.N.* The influence of local failure modes on the compressive strength of boron/epoxy // *Composite Materials: Testing and Design (Second Conference)* / Ed. by H. Corten – West Conshohocken, PA: ASTM Int., 1972. – Art. STP497, P. 237–256. – doi: 10.1520/STP27750S.
15. *Budiansky B., Fleck N.A.* Compressive failure of fibre composites // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1993. – V. 41, No 1. – P. 183–211. – doi: 10.1016/0022-5096(93)90068-q.
16. *Xu Y.L., Reifsnider K.L.* Micromechanical modeling of composite compressive strength // *J. Compos. Mater.* – 1993. – V. 27, No 6. – P. 572–588. – doi: 10.1177/002199839302700602.
17. *Zhang G., Latour R.A. Jr.* FRP composite compressive strength and its dependence upon interfacial bond strength, fiber misalignment, and matrix nonlinearity // *J. Thermoplast. Compos. Mater.* – 1993. – V. 6, No 4. – P. 298–311. – doi: 10.1177/089270579300600403.
18. *Zhang G., Latour R.A. Jr.* An analytical and numerical study of fiber microbuckling // *Compos. Sci. Technol.* – 1994. – V. 51, No 1. – P. 95–109. – doi: 10.1016/0266-3538(94)90160-0.
19. *Jumahat A., Soutis C., Jones F.R., Hodzic A.* Fracture mechanisms and failure analysis of carbon fibre/toughened epoxy composites subjected to compressive loading // *Compos. Struct.* – 2010. – V. 92, No 2. – P. 295–305. – doi: 10.1016/j.compstruct.2009.08.010.
20. *Григолоук Э.И., Куликов Г.М.* Развитие общего направления в теории многослойных оболочек // *Механика композитных материалов.* – 1988. – Т. 24, № 2. – С.287–298.
21. *Noor A.K., Burton W.S.* Assessment of computational models for multilayered composite shells // *Appl. Mech. Rev.* – 1990. – V. 43, No 4. – P.67–97. – doi: 10.1115/1.3119162.
22. *Пискунов В.Г., Рассказов А.О.* Развитие теории слоистых пластин и оболочек // *Прикл. механика.* – 2002. – Т. 38, № 2. – С. 22–57.
23. *Paimushin V.N.* Refined models for an analysis of internal and external buckling modes of a monolayer in a layered composite // *Mech. Compos. Mater.* – 2017. – V. 53, No 5. – P. 613–630. – doi: 10.1007/s11029-017-9691-7.
24. *Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Gazizullin R.K.* Mechanics of unidirectional fiber-reinforced composites: Buckling modes and failure under compression along fibers // *Mech. Compos. Mater.* – 2018. – V. 53, No 6. – P. 737–752. – doi: 10.1007/s11029-018-9699-7.
25. *Каюмов Р.А., Луканкин С.А., Паймушин В.Н., Холмогоров С.А.* Идентификация механических характеристик армированных волокнами композитов // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* – 2015. – Т. 157, кн. 4. – С. 112–132.
26. *Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Makarov M.V., Tarlakovskii D.V., Lukaszewicz A.* Mechanics of fiber composites: Forms of loss of stability and fracture of test specimens resulting from three-point bending tests // *Z. Angew. Math. Mech.* – 2019. – V. 99, No 1. – Art. e201800063, P. 1–25. – doi: 10.1002/zamm.201800063.
27. *Paimushin V.N., Kholmogorov S.A.* Physical-mechanical properties of a fiber-reinforced composite based on an ELUR-P carbon tape and XT-118 binder // *Mech. Compos. Mater.* – 2018. – V. 54, No 1. – P. 2–12. – doi: 10.1007/s11029-018-9712-1.
28. *Paimushin V.N., Kayumov R.A., Tarlakovskii D.V., Kholmogorov S.A.* Deformation model of  $[\pm 45]_S$  cross-ply fiber reinforced plastics under tension // *Proc. 2nd Int. Conf. on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics (ICTAEM 2019).* – 2019. – V. 8. – P. 29–35. – doi: 10.1007/978-3-030-21894-2\_6.
29. *Paimushin V.N., Kayumov R.A., Kholmogorov S.A.* Deformation features and models of  $[\pm 45]_{2s}$  cross-ply fiber-reinforced plastics in tension // *Mech. Compos. Mater.* – 2019. – V. 55, No 2. – P. 141–154. – doi: 10.1007/s11029-019-09800-5.



30. *Paimushin V.N., Gazizullin R.K., Shishov M.A.* Flat internal buckling modes of fibrous composite elements under tension and compression at the mini- and microscale // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* – 2019. – V. 60, No 3. – P. 548–559. – doi: 10.1134/S0021894419030180.
31. *Paimushin V.N., Polykova N.V., Kholmogorov S.A., Shishov M.A.* Buckling modes of structural elements of off-axis fiber-reinforced plastics // *Mech. Compos. Mater.* – 2018. – V. 54, No 2. – P. 133–144. – doi: 10.1007/s11029-018-9726-8.
32. *Badriev I.B., Paimushin V.N., Shihov M.A.* Refined equations of the sandwich shells theory with composite external layers and a transverse soft core at average bending // *Lobachevskii J. Math.* – 2019. – V. 40, No 11. – P. 1904–1914. – doi: 10.1134/s1995080219110076.
33. *Иванов В.А., Паймушин В.Н., Полякова Т.В.* Уточненная теория устойчивости трехслойных конструкций (линеаризованные уравнения нейтрального равновесия и простейшие одномерные задачи) // *Изв. вузов. Матем.* – 1995. – № 3. – С. 15–24.
34. *Иванов В.А., Паймушин В.Н.* Уточненная теория устойчивости трехслойных конструкций (нелинейные уравнения докритического равновесия оболочек с трансверсально-мягким наполнителем) // *Изв. вузов. Матем.* – 1994. – № 11. – С. 29–42.
35. *Григолюк Э.И.* Уравнения трехслойных оболочек с легким наполнителем // *Изв. АН СССР. ОТН.* – 1957. – № 1. – С. 77–84.
36. *Григолюк Э.И.* Конечные прогибы трехслойных оболочек с жестким наполнителем // *Изв. АН СССР. ОТН.* – 1958. – № 1. – С. 26–34.
37. *Муштары Х.М.* О применимости различных теорий трехслойных пластин и оболочек // *Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение.* – 1960. – № 6. – С. 163–165.
38. *Муштары Х.М.* К общей теории пологих оболочек с наполнителем // *Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение.* – 1961. – № 2. – С. 24–29.
39. *Галимов Н.К.* К теории тонких пологих оболочек с наполнителем при конечных прогибах // *Нелинейная теория пластин и оболочек.* – Казань: Казан. гос. ун-т, 1963. – С. 61–95.
40. *Галимов Н.К., Муштары Х.М.* К теории трехслойных пластин и оболочек // *Исследования по теории пластин и оболочек.* – Казань: Казан. гос. ун-т. – 1964. – Вып. 2. – С. 56–62.
41. *Галимов Н.К.* О применении полиномов Лежандра к построению уточненных теорий трехслойных пластин и оболочек // *Исследования по теории пластин и оболочек.* – Казань: Казан. гос. ун-т. – 1973. – Вып. 10. – С. 371–385.
42. *Григолюк Э.И., Чулков П.П.* К расчету трехслойных пластин с жестким наполнителем // *Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение.* – 1964. – № 1. – С. 67–74.
43. *Григолюк Э.И., Чулков П.П.* Критические нагрузки трехслойных цилиндрических и конических оболочек. – Новосибирск: Зап.-Сиб. кн. изд-во, 1966. – 223 с.
44. *Григолюк Э.И., Чулков П.П.* Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. – М.: Машиностроение, 1973. – 168 с.

Поступила в редакцию  
10.09.19

**Паймушин Виталий Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прочности конструкций; главный научный сотрудник

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева

ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: *vpajmushin@mail.ru*

**Холмогоров Сергей Андреевич**, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник кафедры прочности конструкций

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева

ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия

E-mail: *hkazan@yandex.ru*

**Полякова Наталья Витальевна**, ведущий инженер кафедры ПиПСиК

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева

ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия

**Шишов Максим Александрович**, аспирант кафедры прочности конструкций

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева

ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия

E-mail: *mashishov@mail.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.  
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI  
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2019, vol. 161, no. 4, pp. 569–590

doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.569-590

### Investigation of Buckling Modes of Sandwich Specimens with Facing Layers from $[0^\circ]_s$ Fiber-Reinforced Plastic under Axial Compression

*V.N. Paimushin<sup>a,b\*</sup>, S.A. Kholmogorov<sup>a\*\*</sup>, N.V. Polyakova<sup>a</sup>, M.A. Shishov<sup>a\*\*\*</sup>*

<sup>a</sup>*Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev, Kazan, 420111 Russia*

<sup>b</sup>*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*

E-mail: *\*vpajmushin@mail.ru, \*\*hkazan@yandex.ru, \*\*\*mashishov@mail.ru*

Received September 10, 2019

#### Abstract

Analytical solutions to the linearized problems on possible macroscale buckling modes of sandwich specimens made from fiber-reinforced plastics with lay-up sequence  $[0^\circ]_s$  ( $s$  is the number of laminas) under axial compression were analyzed. Materials characterized by a physically nonlinear dependence only between the transverse shear stresses and the corresponding shear strains were considered. Linearized equations of equilibrium in a perturbed state obtained on the basis of the previously constructed geometrically nonlinear equations of the theory of sandwich shells with a transversely flexible core were used. The linearized equations are based on the use of S.P. Timoshenko's refined model for the facing layers, which takes

into account the transverse compression, as well as on the use of three-dimensional equations of the theory of elasticity, which are simplified by the model of the transversely flexible layer, for the core. The latter allow integration over the thickness with the introduction of two unknown functions (transverse tangential stresses). In the linearized equations used, the physical nonlinearity of the material of the facing layers was taken into account in accordance with the Shanley concept based on the introduction of the tangential transverse shear modulus. In the equations used, there are degenerate terms that correspond to the implementation of purely transverse-shear buckling modes during compression of the specimen in the axial direction (along the fibers). The implementation of these buckling modes is possible for specimens with a considerable relative thickness of the layers package. Based on the analysis of the results obtained, it was shown that failure for these specimens is most likely due to the buckling in such a macroscale flexural-shear mode, which is predominantly transverse-shear and is realized when the compressive stress averaged over the thickness of the facing layers is equal to the shear modulus of the transverse shear of the composite in the vicinity of the end section of the working length of the specimen in its unperturbed state.

**Keywords:** fiber-reinforced plastic, sandwich specimen, transversely flexible core, compression, linearized equations, buckling modes, analytical solution

**Acknowledgments.** The study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-79-10018, sections 1, 3) and the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-08-00073, section 2).

### Figure Captions

Fig. 1. Possible failure modes under compression of the composite specimens: a) crumpling of the ends; b) macrobuckling; c) delamination and/or splitting + buckling; d) center delamination; e) kink.

Fig. 2. Specimens loading schemes for compression tests: 1)  $\sigma_{11}^0 \neq 0$ ,  $\sigma_{33}^0 = 0$ , ( $\sigma_{13}^0 = 0$ ); 2)  $\sigma_{33}^0 \neq 0$  ( $\sigma_{13}^0 \neq 0$ ),  $\sigma_{11}^0 = 0$ ; 3)  $\sigma_{11}^0 \neq 0$ ,  $\sigma_{33}^0 \neq 0$  ( $\sigma_{13}^0 \neq 0$ ).

Fig. 3. Stress-strain curves  $|\sigma_x^\pm| - |\varepsilon_x^\pm|$  (a) and  $|\sigma_{12}^\pm| - |\gamma_{12}^\pm|$  (b) (for compression – solid line, for tension – dashed line), MPa.

Fig. 4. Dependencies for secant  $\hat{E}_x^\pm = \hat{E}_x^\pm(|\varepsilon_x^\pm|)$  and tangential  $\tilde{E}_x^\pm = \tilde{E}_x^\pm(|\varepsilon_x^\pm|)$  moduli of elasticity of axial strain of specimen (for tension – dashed line, for compression – solid line), GPa.

Fig. 5. Dependencies for secant  $\hat{G}_{12}^\pm = \hat{G}_{12}^\pm(|\gamma_{12}^\pm|)$  and tangential  $\tilde{G}_{12}^\pm = \tilde{G}_{12}^\pm(|\gamma_{12}^\pm|)$  shear moduli of shear strain of specimen (for tension – dashed line, for compression – solid line), GPa.

Fig. 6. Dependencies for  $\sigma^* = \sigma^*(n)$  at  $\tilde{G}_{13} = 459$  MPa,  $E_3^0 = 50$  MPa,  $G_{13}^0 = 25$  MPa,  $L = 250$  mm.

Fig. 7. Dependencies for  $\sigma^* = \sigma^*(n)$  at  $\tilde{G}_{13} = 459$  MPa,  $E_3^0 = 50$  MPa,  $G_{13}^0 = 25$  MPa,  $L = 10$  mm.

Fig. 8. Dependencies for  $\sigma^* = \sigma^*(n)$  at  $\tilde{G}_{13} = 459$  MPa,  $E_3^0 = 150$  MPa,  $G_{13}^0 = 75$  MPa,  $L = 250$  mm.

Fig. 9. Dependencies for  $\sigma^* = \sigma^*(n)$  at  $\tilde{G}_{13} = 459$  MPa,  $E_3^0 = 150$  MPa,  $G_{13}^0 = 75$  MPa,  $L = 10$  mm.

### References

1. Jumahat A., Soutis C., Jones F.R., Hodzic A. Fracture mechanisms and failure analysis of carbon fibre/toughened epoxy composites subjected to compressive loading. *Compos. Struct.*, 2010, vol. 92, no. 2, pp. 295–305. doi: 10.1016/j.compstruct.2009.08.010.
2. Hapke J., Gehrig F., Huber N., Schulte K., Lilleodden E.T. Compressive failure of UD-CFRP containing void defects: *In situ* SEM microanalysis. *Compos. Sci. Technol.*, 2011, vol. 71, no. 9, pp. 1242–1249. doi: 10.1016/j.compscitech.2011.04.009.

3. Niu K., Talreja R. Modeling of compressive failure in fiber reinforced composites. *Int. J. Solids Struct.*, 2000, vol. 37, no. 17, pp. 2405–2428. doi: 10.1016/s0020-7683(99)00010-4.
4. Naik N.K., Kumar R.S. Compressive strength of unidirectional composites: Evaluation and comparison of prediction models. *Compos. Struct.*, 1999, vol. 46, no. 3, pp. 299–308. doi: 10.1016/s0263-8223(99)00098-7.
5. Davidson P., Waas A.M. Mechanics of kinking in fiber-reinforced composites under compressive loading. *Math. Mech. Solids*, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 667–684. doi: 10.1177/1081286514535422.
6. Prabhakar P., Waas A.M. Interaction between kinking and splitting in the compressive failure of unidirectional fiber reinforced laminated composites. *Compos. Struct.*, 2013, vol. 98, pp. 85–92. doi: 10.1016/j.compstruct.2012.11.005.
7. Pimenta S., Gutkin R., Pinho S.T., Robinson P. A micromechanical model for kink-band formation: Part I – experimental study and numerical modeling. *Compos. Sci. Technol.*, 2009, vol. 69, nos. 7–8, pp. 948–955. doi: 10.1016/j.compscitech.2009.02.010.
8. Lee S.H., Yerramalli C.S., Waas A.M. Compressive splitting response of glass-fiber reinforced unidirectional composites. *Compos. Sci. Technol.*, 2000, vol. 60, no. 16, pp. 2957–2966. doi: 10.1016/S0266-3538(00)00159-7.
9. Allix O., Feld N., Baranger E., Guimard J.-M., Ha-Minh C. The compressive behaviour of composites including fiber kinking: Modelling across the scales. *Meccanica*, 2014, vol. 49, no. 11, pp. 2571–2586. doi: 10.1007/s11012-013-9872-y.
10. Polilov A.N. *Etyudy po mekhanike kompozitov* [Etudes on Composite Mechanics]. Moscow, FIZMATLIT, 2015. 320 p. (In Russian)
11. Guz' A.N. *Ustoichivost' uprugikh tel pri konechnykh deformatsiyakh* [Stability of Elastic Bodies under Finite Deformations]. Kiev, Naukova Dumka, 1973. 270 p. (In Russian)
12. Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. *Mekhanika mnogosloinykh konstruksii* [Mechanics of Multilayer Structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1980. 375 p. (In Russian)
13. Lubin G. *Handbook of Composites*. Springer US, 1982. XI, 786 p. doi: 10.1007/978-1-4615-7139-1.
14. Suarez J.A., Whiteside J.B., Hadcock R.N. The influence of local failure modes on the compressive strength of boron/epoxy. *Composite Materials: Testing and Design (Proc. 2nd Conf.)*. Corten H. (Ed.). West Conshohocken, PA, ASTM Int., 1972, art. STP497, pp. 237–256. doi: 10.1520/STP27750S.
15. Budiansky B., Fleck N.A. Compressive failure of fibre composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 1993, vol. 41, no. 1, pp. 183–211. doi: 10.1016/0022-5096(93)90068-q.
16. Xu Y.L., Reifsnider K.L. Micromechanical modeling of composite compressive strength. *J. Compos. Mater.*, 1993, vol. 27, no. 6, pp. 572–588. doi: 10.1177/002199839302700602.
17. Zhang G., Latour R.A. Jr. FRP composite compressive strength and its dependence upon interfacial bond strength, fiber misalignment, and matrix nonlinearity. *J. Thermoplast. Compos. Mater.*, 1993, vol. 6, no. 4, pp. 298–311. doi: 10.1177/089270579300600403.
18. Zhang G., Latour R.A. Jr. An analytical and numerical study of fiber microbuckling. *Compos. Sci. Technol.*, 1994, vol. 51, no. 1, pp. 95–109. doi: 10.1016/0266-3538(94)90160-0.
19. Jumahat A., Soutis C., Jones F.R., Hodzic A. Fracture mechanisms and failure analysis of carbon fibre/toughened epoxy composites subjected to compressive loading. *Compos. Struct.*, 2010, vol. 92, no. 2, pp. 295–305. doi: 10.1016/j.compstruct.2009.08.010.
20. Grigoluk E.I., Kulikov G.M. General direction of development of the theory of multilayered shells. *Mech. Compos. Mater.*, 1988, vol. 24, no. 2, pp. 231–241. doi: 10.1007/BF00608158.

21. Noor A.K., Burton W.S. Assessment of computational models for multilayered composite shells. *Appl. Mech. Rev.*, 1990, vol. 43, no. 4, pp. 67–97. doi: 10.1115/1.3119162.
22. Piskunov V.G., Rasskazov A.O. Development the theory of multilayer plates and shells. *Prikl. Mekh.*, 2002, vol. 38, no. 2, pp. 22–57. (In Russian)
23. Paimushin V.N. Refined models for an analysis of internal and external buckling modes of a monolayer in a layered composite. *Mech. Compos. Mater.*, 2017, vol. 53, no. 5, pp. 613–630. doi: 10.1007/s11029-017-9691-7.
24. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Gazizullin R.K. Mechanics of unidirectional fiber-reinforced composites: Buckling modes and failure under compression along fibers. *Mech. Compos. Mater.*, 2018, vol. 53, no. 6, pp. 737–752. doi: 10.1007/s11029-018-9699-7.
25. Kayumov R.A., Lukankin S.A., Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. Identification of mechanical properties of fiber-reinforced composites. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2015, vol. 157, no. 4, pp. 112–132. (In Russian)
26. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Makarov M.V., Tarlakovskii D.V., Lukaszewicz A. Mechanics of fiber composites: Forms of loss of stability and fracture of test specimens resulting from three-point bending tests. *Z. Angew. Math. Mech.*, 2019, vol. 99, no. 1, art. e201800063, pp. 1–25. doi: 10.1002/zamm.201800063.
27. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. Physical-mechanical properties of a fiber-reinforced composite based on an ELUR-P carbon tape and XT-118 binder. *Mech. Compos. Mater.*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 2–12. doi: 10.1007/s11029-018-9712-1.
28. Paimushin V.N., Kayumov R.A., Tarlakovskii D.V., Kholmogorov S.A. Deformation model of  $[\pm 45]_S$  cross-ply fiber reinforced plastics under tension. *Proc. 2nd Int. Conf. on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics (ICTAEM 2019)*, 2019, vol. 8, pp. 29–35. doi: 10.1007/978-3-030-21894-2\_6.
29. Paimushin V.N., Kayumov R.A., Kholmogorov S.A. Deformation features and models of  $[\pm 45]_{2s}$  cross-ply fiber-reinforced plastics in tension. *Mech. Compos. Mater.*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 141–154. doi: 10.1007/s11029-019-09800-5.
30. Paimushin V.N., Gazizullin R.K., Shishov M.A. Flat internal buckling modes of fibrous composite elements under tension and compression at the mini- and microscale. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2019, vol. 60, no. 3, pp. 548–559. doi: 10.1134/S0021894419030180.
31. Paimushin V.N., Polykova N.V., Kholmogorov S.A., Shishov M.A. Buckling modes of structural elements of off-axis fiber-reinforced plastics. *Mech. Compos. Mater.*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 133–144. doi: 10.1007/s11029-018-9726-8.
32. Badriev I.B., Paimushin V.N., Shishov M.A. Refined equations of the Sandwich shells theory with composite external layers and a transverse soft core at average bending. *Lobachevskii J. Math.*, 2019, vol. 40, no. 11, pp. 1904–1914. doi: 10.1134/s1995080219110076.
33. Ivanov V.A., Paimushin V.N., Polyakova T.V. Refined theory of the stability of three-layer structures (linearized equations of neutral equilibrium and elementary one-dimensional problems). *Russ. Math.*, 1996, vol. 39, no. 3, pp. 13–22.
34. Ivanov V.A., Paimushin V.N. Refined theory of stability of three-layer constructions (Non-linear equations of subcritical equilibrium of shells with transversal-soft aggregate). *Russ. Math.*, 1994, vol. 38, no. 11, pp. 26–39.
35. Grigolyuk E.I. Equations of sandwich shells with a light filler. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Otd. Tekh. Nauk*, 1957, no. 1, pp. 77–84. (In Russian)

36. Grugolyuk E.I. Finite deflections of sandwich shells with a rigid filler. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Otd. Tekh. Nauk*, 1958, no. 1, pp. 26–34. (In Russian)
37. Mushtari Kh.M. On the applicability of various theories of sandwich plates and shells. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Otd. Tekh. Nauk. Mekh. Mashinostr.*, 1960, no. 6, pp. 163–165. (In Russian)
38. Mushtari Kh.M. To the general theory of mildly sloping shells with a core. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Otd. Tekh. Nauk. Mekh. Mashinostr.*, 1961, no. 2, pp. 24–29. (In Russian)
39. Galimov N.K. To the theory of thin mildly sloping shells with a core under finite deflections. In: *Nelineinaya teoriya plastin i obolochek* [Nonlinear Theory of Plates and Shells]. Kazan, Kazan. Gos. Univ., 1963, pp. 61–95. (In Russian)
40. Galimov N.K., Mushtari Kh.M. To the theory of sandwich plates and shells. In: *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek* [Investigations for the Theory of Plates and Shells]. Kazan, Kazan. Gos. Univ., 1964, no. 2, pp. 56–62. (In Russian)
41. Galimov N.K. On the application of Legendre polynomials to the construction of refined theories of sandwich plates and shells. In: *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek* [Investigations for the Theory of Plates and Shells]. Kazan, Kazan. Gos. Univ., 1973, no. 10, pp. 371–385. (In Russian)
42. Grigolyuk E.I., Chulkov P.P. To the calculation of sandwich plates with a rigid core. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Otd. Tekh. Nauk. Mekh. Mashinostr.*, 1964, no. 1, pp. 67–74. (In Russian)
43. Grigolyuk E.I., Chulkov P.P. *Kriticheskie nagruzki trekhslonnykh tsilindricheskikh i konicheskikh obolochek* [Critical Loads of Cylindrical and Conical Sandwich Shells]. Novosibirsk, 1966. 223 p. (In Russian)
44. Grigolyuk E.I., Chulkov P.P. *Ustoichivost' i kolebaniya trekhslonnykh obolochek* [Buckling and Vibrations of Sandwich Shells]. Moscow, Mashinostroenie, 1973. 168 p. (In Russian)

---

*Для цитирования:* Паймушин В.Н., Холмогоров С.А., Полякова Н.В., Шишов М.А. Исследование форм потери устойчивости трехслойных тест-образцов с внешними слоями из волокнистых композитов со структурой  $[0^\circ]_s$  на осевое сжатие // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2019. – Т. 161, кн. 4. – С. 569–590. – doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.569-590.

**For citation:** Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Polyakova N.V., Shishov M.A. Investigation of buckling modes of sandwich specimens with facing layers from  $[0^\circ]_s$  fiber-reinforced plastic under axial compression. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 161, no. 4, pp. 569–590. doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.569-590. (In Russian)