Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2012, №2, с. 70–75 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421200123\0021*

И. ОРАЗОВ, М.А. САДЫБЕКОВ

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ И ПЛОТНОСТИ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

Аннотация. Рассматривается одно семейство задач, моделирующих определение температуры и плотности источников тепла по заданным начальной и конечной температурам. При их математической формулировке возникает обратная задача для уравнения теплопроводности, в которой вместе с решением уравнения требуется найти и неизвестную правую часть, зависящую только от пространственной переменной. Спецификой рассматриваемого семейства задач является то, что система собственных функций оператора кратного дифференцирования, подчиненного краевым условиям исходной задачи, не обладает свойством базисности. Доказано существование и единственность обобщенного решения задачи.

Ключевые слова: обратная задача, уравнение теплопроводности, начальная температура, конечная температура, не усиленно регулярные краевые условия, краевые условия Самарского–Ионкина, биортогональный ряд Фурье, базис Рисса.

УДК: 517.956

Abstract. We consider one family of problems simulating the determination of the temperature and density of heat sources from given values of the initial and final temperature. The mathematical statement of these problems leads to the inverse problem for the heat equation, where it is required to find not only a solution of the problem, but also its right-hand side that depends only on a spatial variable. A specific feature of the considered problems is that the system of eigenfunctions of the multiple differentiation operator subject to boundary conditions of the initial problem does not have the basis property. We prove the unique existence of a generalized solution to the mentioned problem.

Keywords: inverse problem, heat equation, initial temperature, final temperature, not strongly regular boundary conditions, Samarskii–Ionkin boundary conditions, biorthogonal Fourier series, Riesz basis.

1. Постановка задачи. Задачи определения коэффициентов или правой части дифференциального уравнения одновременно с его решением принято называть обратными задачами математической физики. В работе рассматривается одно семейство задач, моделирующих определение температуры и плотности источников тепла по заданным начальной и конечной температурам. При их математической формулировке возникает обратная задача для уравнения теплопроводности, в которой вместе с решением уравнения требуется найти и неизвестную правую часть, зависящую только от пространственной переменной.

Поступила 11.02.2011

Вопросы разрешимости различных обратных задач для параболических уравнений изучались во многих работах (например, [1]–[7]). Наиболее близкой к тематике данной статьи является [8]. В отличие от предыдущих работ, нами исследуется обратная задача для уравнения теплопроводности с краевыми условиями по пространственной переменной, при которых соответствующая спектральная задача для обыкновенного дифференциального оператора имеет систему собственных функций, не образующую базис.

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим задачу о нахождении правой части $f(x)$ уравнения теплопроводности

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x) \tag{1}$$

и его решения $u(x,t)$, удовлетворяющего начальному и конечному условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u(x,T) = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

и краевым условиям

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) + \alpha u(1,t), \quad u(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T. \tag{3}$$

Параметр α — любое положительное число, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции. При $\alpha = 0$ краевые условия (3) хорошо известны и носят название условий Самарского–Ионкина.

Применение метода Фурье для решения задачи (1)–(3) приводит к спектральной задаче для оператора l, заданного дифференциальным выражением и краевыми условиями

$$\begin{gathered} l(y) \equiv -y''(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < 1, \\ y'(0) = y'(1) + \alpha y(1), \quad y(0) = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Краевые условия в (4) являются регулярными, но не усиленно регулярными ([9], с. 66–67). Система корневых функций оператора l является полной системой, но не образует даже обычного базиса в $L_2(0,1)$ [10]. Однако, как показано в [11], на основе этих собственных функций может быть построен базис, позволяющий применить метод разделения переменных для решения начально-краевой задачи с краевым условием (3).

В [8] построены классические решения для трех частных случаев обратной задачи (1)–(2), когда краевые условия являются не усиленно регулярными — случай периодических краевых условий и случай условий типа Самарского–Ионкина (краевые условия (3) при $\alpha = 0$). Однако методика доказательства из [8] не может быть автоматически перенесена на задачи с краевыми условиями (3) при $\alpha \ne 0$. Это связано с существенным использованием в [8] базисности системы собственных и присоединенных функций соответствующей спектральной задачи для оператора кратного дифференцирования. В данной работе предлагается использование методики работы [11] для решения обратной задачи (1)–(3).

Исследованиям прямых и обратных задач для различных классов уравнений в частных производных с частными случаями не усиленно регулярных краевых условий в последнее время уделяется повышенное внимание. Отметим лишь наиболее близкие по тематике работы [12]–[14].

2. Построение базиса из собственных функций задачи (4). В этом пункте приведем необходимые результаты из [11]. Спектральная задача (4) имеет две серии собственных значений:

$$\lambda_k^{(1)} = (2\pi k)^2, \quad k = 1,2,\dots, \quad \lambda_k^{(2)} = (2\beta_k)^2, \quad k = 0,1,2,\dots\ .$$

Здесь β_k — корни уравнения $\operatorname{tg}\beta = \alpha/2\beta$, $\beta > 0$, они удовлетворяют неравенствам $\pi k < \beta_k < \pi k + \pi/2$, $k = 0,1,2,\dots$, и для разности $\delta_k = \beta_k - \pi k$ при достаточно больших k

выполняются двусторонние оценки

$$\frac{\alpha}{2\pi k}\left(1-\frac{1}{2\pi k}\right)<\delta_k<\frac{\alpha}{2\pi k}\left(1+\frac{1}{2\pi k}\right). \tag{5}$$

Собственные функции задачи (4) имеют вид

$$y_k^{(1)}(x)=\sin 2\pi kx,\quad k=1,2,\dots,\quad y_k^{(2)}(x)=\sin 2\beta_k x,\quad k=0,1,2,\dots .$$

Эта система является почти нормированной, но не образует даже обычного базиса в $L_2(0,1)$. Построенная из нее вспомогательная система

$$y_0(x)=y_0^{(2)}(x)(2\beta_0)^{-1},\quad y_{2k}(x)=y_k^{(1)}(x),$$
$$y_{2k-1}(x)=\big(y_k^{(2)}(x)-y_k^{(1)}(x)\big)(2\delta_k)^{-1},\quad k=1,2,\dots,$$

образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, а биортогональной к ней является система

$$v_0(x)=2\beta_0 v_0^{(2)}(x),\quad v_{2k}(x)=v_k^{(2)}(x)+v_k^{(1)}(x),\quad v_{2k-1}(x)=2\delta_k v_k^{(2)}(x),\quad k=1,2,\dots,$$

построенная из собственных функций сопряженной к (4) задачи

$$v_k^{(1)}(x)=C_k^{(1)}\cos(2\pi kx+\gamma_k),\quad k=1,2,\dots,\quad v_k^{(2)}(x)=C_k^{(2)}\cos(\beta_k(1-2x)),\quad k=0,1,2,\dots .$$

Константы $C_k^{(j)}$ выбираются из соотношения биортогональности $(y_k^{(j)},v_k^{(j)})=1$, $j=1,2$.

Если функция $y(x)$ принадлежит $W_2^2(0,1)$ и удовлетворяет краевым условиям (4), то ее ряд Фурье по системе $\{y_k(x)\}$ сходится к $y(x)$ в смысле пространства $W_2^2(0,1)$, в частности, равномерно.

Нетрудно вычислить

$$y_0''(x)=-\lambda_0^{(2)}y_0(x),\quad y_{2k}''(x)=-\lambda_k^{(1)}y_{2k}(x),$$
$$y_{2k-1}''(x)=-\lambda_k^{(2)}y_{2k-1}(x)-\frac{\lambda_k^{(2)}-\lambda_k^{(1)}}{2\delta_k}y_{2k}(x). \tag{6}$$

3. Построение формального решения задачи (1)–(3). На основании п. 2 любое решение $u(x,t), f(x)$ задачи (1)–(3) представимо в виде биортогональных рядов:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)y_k(x),\qquad f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k y_k(x), \tag{7}$$

где $u_k(t)=(u(x,t),v_k(x))$, $f_k=(f(x),v_k(x))$.

Подставляя (7) в уравнение (1), в начальные и конечные условия (2) с учетом (6), для нахождения неизвестных функций $u_k(t)$ и коэффициентов f_k получаем следующие задачи:

$$u_0'(t)+\lambda_0^{(2)}u_0(t)=f_0,\quad u_0(0)=\varphi_0,\quad u_0(T)=\psi_0; \tag{8}$$

$$u_{2k-1}'(t)+\lambda_k^{(2)}u_{2k-1}(t)=f_{2k-1},\quad u_{2k-1}(0)=\varphi_{2k-1},\quad u_{2k-1}(T)=\psi_{2k-1}; \tag{9}$$

$$u_{2k}'(t)+\lambda_k^{(1)}u_{2k}(t)=-\frac{\lambda_k^{(2)}-\lambda_k^{(1)}}{2\delta_k}u_{2k-1}(t)+f_{2k},\quad u_{2k}(0)=\varphi_{2k}, u_{2k}(T)=\psi_{2k}, \tag{10}$$

где φ_k, ψ_k — коэффициенты Фурье разложения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в биортогональный ряд по системе $\{y_k(x)\}:\varphi_k=(\varphi(x),v_k(x))$, $\psi_k=(\psi(x),v_k(x))$.

Решение задач (8) и (9) существует, единственно и может быть выписано в явном виде

$$
\begin{aligned}
&u_0(t) = e^{-\lambda_0^{(2)}t}\varphi_0 + \frac{1-e^{-\lambda_0^{(2)}t}}{1-e^{-\lambda_0^{(2)}T}}\big(\psi_0 - e^{-\lambda_0^{(2)}T}\varphi_0\big),\\
&f_0 = \frac{\lambda_0^{(2)}}{1-e^{-\lambda_0^{(2)}T}}\big(\psi_0 - e^{-\lambda_0^{(2)}T}\varphi_0\big);\\
&u_{2k-1}(t) = e^{-\lambda_k^{(2)}t}\varphi_{2k-1} + \frac{1-e^{-\lambda_k^{(2)}t}}{1-e^{-\lambda_k^{(2)}T}}\big(\psi_{2k-1} - e^{-\lambda_k^{(2)}T}\varphi_{2k-1}\big),\\
&f_{2k-1} = \frac{\lambda_k^{(2)}}{1-e^{-\lambda_k^{(2)}T}}\big(\psi_{2k-1} - e^{-\lambda_k^{(2)}T}\varphi_{2k-1}\big),\quad k=1,2,\dots\,.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Подставляем (11) в правую часть (10). Тогда задача (10) также имеет единственное решение, и оно записывается в виде

$$
\begin{aligned}
u_{2k}(t) &= e^{-\lambda_k^{(1)}t}\varphi_{2k} + \frac{1-e^{-\lambda_k^{(1)}t}}{\lambda_k^{(1)}}f_{2k} + \frac{e^{-\lambda_k^{(2)}t}-e^{-\lambda_k^{(1)}t}}{2\delta_k}\varphi_{2k-1}+\\
&\quad+\frac{\psi_{2k-1}-e^{-\lambda_k^{(2)}T}\varphi_{2k-1}}{1-e^{-\lambda_k^{(2)}T}}\left(\frac{\lambda_k^{(2)}-\lambda_k^{(1)}}{2\delta_k}\frac{1-e^{-\lambda_k^{(1)}t}}{\lambda_k^{(1)}} - \frac{e^{-\lambda_k^{(2)}t}-e^{-\lambda_k^{(1)}t}}{2\delta_k}\right),\\
f_{2k} &= \frac{\lambda_k^{(1)}}{1-e^{-\lambda_k^{(1)}T}}\left(\big(\psi_{2k-1}-e^{-\lambda_k^{(2)}T}\varphi_{2k-1}\big) - \frac{e^{-\lambda_k^{(2)}T}-e^{-\lambda_k^{(1)}T}}{2\delta_k}\varphi_{2k-1}\right)+\\
&\quad+\frac{\psi_{2k-1}-e^{-\lambda_k^{(2)}T}\varphi_{2k-1}}{1-e^{-\lambda_k^{(2)}T}}\left(\frac{\lambda_k^{(2)}-\lambda_k^{(1)}}{2\delta_k} + \frac{\lambda_k^{(1)}}{1-e^{-\lambda_k^{(1)}T}}\frac{e^{-\lambda_k^{(2)}T}-e^{-\lambda_k^{(1)}T}}{2\delta_k}\right).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Подставляя (11) и (12) в (7), получаем формальное решение задачи.

4. Основная теорема. Для завершения исследования необходимо (аналогично классическому методу Фурье) обосновать гладкость полученного формального решения и сходимость всех встречающихся рядов.

Пусть $\|u(x,t)\|_0$ — норма пространства $L_2(\Omega)$. Через $W_2^{2,1}(\Omega)$ будем обозначать пространство функций $u(x,t)$, для которых почти всюду существуют обобщенные производные $u_{xx}(x,t)$, $u_t(x,t)$, принадлежащие $L_2(\Omega)$ с нормой

$$\|u(x,t)\|_{2,1}^2 = \|u(x,t)\|_0^2 + \|u_{xx}(x,t)\|_0^2 + \|u_t(x,t)\|_0^2.$$

Под обобщенным решением задачи (1)–(3) будем понимать пару функций $u(x,t)\in W_2^{2,1}(\Omega)$, $f(x)\in L_2(0,1)$, почти всюду обращающих задачу в тождество.

Основным результатом работы является

Теорема. *Если функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ принадлежат $W_2^2(0,1)$ и удовлетворяют краевым условиям* (4), *то существует единственное обобщенное решение $u(x,t)\in W_2^{2,1}(\Omega)$, $f(x)\in L_2(0,1)$ задачи* (1)–(3).

Доказательство. Так как функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ принадлежат $W_2^2(0,1)$ и удовлетворяют краевым условиям (4), то (см. п. 2) они разлагаются в равномерно сходящиеся ряды Фурье по системе $\{y_k(x)\}$. Из (6) имеем

$$\varphi''(x) = -\lambda_0^{(2)}\varphi_0 y_0(x) - \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\lambda_k^{(1)}\varphi_{2k}y_{2k}(x) + \lambda_k^{(2)}\varphi_{2k-1}y_{2k-1}(x)\right\} - \\ - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^{(2)}-\lambda_k^{(1)}}{2\delta_k}\varphi_{2k-1}y_{2k}(x). \quad (13)$$

Аналогичная формула имеет место и для $\psi''(x)$.

Легко видеть, что $\left(\lambda_k^{(2)}-\lambda_k^{(1)}\right)/2\delta_k = 4\pi k + 2\delta_k$. Так как система $\{y_k(x)\}$ — базис Рисса пространства $L_2(0,1)$, то в силу двустороннего неравенства Парсеваля получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k\varphi_k|^2 \le C\|\varphi''(x)\|_{L_2(0,1)}, \quad \sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k\psi_k|^2 \le C\|\psi''(x)\|_{L_2(0,1)}. \quad (14)$$

Из (11), (12) с учетом (5) несложно получить равномерные по k оценки

$$\begin{aligned} |u_{2k-1}(t)| &\le C\left(|\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k-1}|\right), \\ |u_{2k}(t)| &\le C\left(|\varphi_{2k}| + |\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k}| + |\psi_{2k-1}|\right), \\ |u'_{2k-1}(t)| &\le C\left(|\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k-1}|\right)|\lambda_k^{(1)}|, \\ |u'_{2k}(t)| &\le C\left(|\varphi_{2k}| + |\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k}| + |\psi_{2k-1}|\right)|\lambda_k^{(2)}|, \\ |f_{2k-1}| &\le C\left(|\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k-1}|\right)|\lambda_k^{(1)}|, \\ |f_{2k}| &\le C\left(|\varphi_{2k}| + |\varphi_{2k-1}| + |\psi_{2k}| + |\psi_{2k-1}|\right)|\lambda_k^{(2)}|. \end{aligned}$$

Отсюда в силу абсолютной сходимости рядов (13) и оценок (14) следует сходимость рядов (7) и принадлежность решения задачи (1)–(3) классам $u(x,t) \in W_2^{2,1}(\Omega)$, $f(x) \in L_2(0,1)$.

Так как система $\{y_k(x)\}$ образует базис Рисса пространства $L_2(0,1)$, то любое решение задачи (1)–(3) из данного класса представимо рядами (7). Из однозначности построения решений (11), (12) задач (8)–(10) следует единственность решения задачи (1)–(3). □

Литература

[1] Аниконов Ю.Е., Белов Ю.Я. *Об однозначной разрешимости одной обратной задачи для параболического уравнения*, ДАН СССР **306** (6), 1289–1293 (1989).

[2] Аниконов Ю.Е., Бубнов Б.А. *Существование и единственность решения обратной задачи для параболического уравнения*, ДАН СССР **298** (4), 777–779 (1988).

[3] Бубнов Б.А. *Существование и единственность решения обратных задач для параболических и эллиптических уравнений*, Неклассические уравнения математической физики: Сб. научн. тр. (Новосибирск, Изд-во Ин-та математики, 1986), с. 25–29.

[4] Прилепко А.И., Костин А.Б. *О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением*, Матем. сб. **183** (4), 49–68 (1992).

[5] Кожанов А.И. *Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики **44** (4), 694–716 (2004).

[6] Монахов В.Н. *Обратные задачи для релаксационных моделей гидродинамики*, Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика **3** (3), 72–80 (2003).

[7] Калиев И.А., Первушина М.М. *Обратные задачи для уравнения теплопроводности*, Тр. Всероссийск. научн. конф. “Совр. пробл. физики и матем.”. Стерлитамак, СГПИ. Сб. научн. тр. (Гилем, Уфа, 2004), т. 1, с. 50–55.

[8] Калиев И.А., Сабитова М.М. *Задачи определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам*, Сиб. журн. индустр. матем. **12** (1), 89–97 (2009).

[9] Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы* (Наука, М., 1969).

[10] Lang P., Locker J. *Spectral theory of two-point differential operators determined by* $-D^2$ II. *Analysis of cases*, J. Math. Anal. Appl. **146** (1), 148–191 (1990).

[11] Мокин А.Ю. *Об одном семействе начально-краевых задач для уравнения теплопроводности*, Дифференц. уравнения **45** (1), 123–137 (2009).

[12] Сидоренко О.Г. *Существенно нелокальная задача для уравнения смешанного типа в полуполосе*, Изв. вузов. Матем., № 3, 60–64 (2007).

[13] Сабитова Ю.К. *Нелокальные начально-граничные задачи для вырождающегося гиперболического уравнения*, Изв. вузов. Матем., № 12, 49–58 (2009).

[14] Сабитов К.Б., Сафин Э.М. *Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области*, Изв. вузов. Матем., № 4, 55–62 (2010).

И. Оразов

доцент, заведующий кафедрой информатики,
Институт математики и математического моделирования,
Южно-Казахстанский государственный университет,
пр. Тауке-хана, д. 5, г. Шымкент, 160018, Республика Казахстан

М.А. Садыбеков

главный научный сотрудник,
Институт математики, информатики и механики
Министерства образования и науки Республики Казахстан,
ул. Шевченко, д. 28, г. Алматы, 050010, Республика Казахстан,

e-mail: makhmud-s@mail.ru

I. Orazov

Associate Professor, Head of the Chair of Information Science,
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling,
Southern-Kazakhstan State University,
5 Tauke-khan Ave., Shymkent, 160018 Republic of Kazakhstan

M.A. Sadybekov

Chief Researcher,
Institute of Mathematics, Information Science and Mechanics,
Ministry of Education of Republic of Kazakhstan,
28 Shevchenko str., Almaty, 050010 Republic of Kazakhstan,

e-mail: makhmud-s@mail.ru