КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Р. Н. Гумеров

АППРОКСИМАЦИЯ НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Учебно-методическое пособие

КАЗАНЬ - 2008

Печатается по решению
Учебно-методической комиссии
механико-математического факультета КГУ

Гумеров Р.Н.
Аппроксимация накрывающих отображений. Учебно-методическое пособие. — Казань: Казанский государственный университет, 2008. — 17 с.

В пособии изложена часть материала специального курса, читаемого автором студентам механико-математического факультета Казанского университета, специализирующимся по функциональному анализу. Пособие может быть рекомендовано студентам и аспирантам физико-математических специальностей университетов.

Рецензент:
доктор физико - математических наук, профессор С.А. Григорян

Предисловие

В пособии излагается часть материала семестрового специального курса "Накрывающие пространства и группы", читаемого автором на механико-математическом факультете Казанского государственного университета. Этот материал доступен лишь в англоязычной журнальной литературе. Доказывается, что конечнолистное накрывающее отображение компактной связной группы является пределом обратного спектра конечнолистных накрывающих отображений компактных групп Ли. Этот результат используется для доказательства аналога теоремы Понтрягина о поднятии групповой структуры относительно накрывающего отображения топологической группы. Теория накрывающих отображений и фундаментальных групп, теория обратных спектров, а также доказательство упомянутой теоремы Понтрягина, предшествуют излагаемому в пособии материалу при чтении спецкурса.

Автор благодарен С.Р. Насырову, прочитавшему рукопись и сделавшему ряд ценных замечаний по оформлению текста пособия.

1. Предварительные сведения

В этом разделе приводятся определения, обозначения и факты, необходимые для дальнейшего изложения.

Все рассматриваемые ниже пространства предполагаются хаусдорфовыми, а окрестности — открытыми. *Отображение* между топологическими пространствами и *гомоморфизм* между топологическими группами всегда означают соответственно непрерывное отображение и непрерывный гомоморфизм.

Пусть X, X_j, Y, Y_j — топологические пространства и $j = 1, 2$. *Диагональ отображений* $f_j : X \to Y_j$ — это отображение

$$f_1 \triangle f_2 : X \to Y_1 \times Y_2 : x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$$

в декартово произведение. Для непересекающихся X_1 и X_2 *комбинация отображений* $f_j : X_j \to Y$ — это отображение

$$f_1 \triangledown f_2 : X_1 \oplus X_2 \to Y : x \mapsto f_j(x), \quad \text{если } x \in X_j,$$

где $\oplus$ — значок суммы пространств. Для непересекающихся X_1 и X_2 и непересекающихся Y_1 и Y_2 *сумма отображений* $f_j : X_j \to Y_j$ — это отображение

$$f_1 \oplus f_2 : X_1 \oplus X_2 \to Y_1 \oplus Y_2 : x \mapsto f_j(x), \quad \text{если } x \in X_j.$$

Эти определения в точности такие же для семейств отображений произвольных мощностей.

Как обычно, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{S}^1$ — мультипликативная группа чисел единичной окружности с топологией, индуцированной естественной топологией $\mathbb{C}$. Множество чисел $\{1, 2, \ldots, m\}$ обозначается символом $\overline{m}$.

В связи с нашими дальнейшими построениями напомним общекатегорные понятия обратной системы и обратного предела.

Категория компактных пространств и их отображений обозначается через $COMP$, а категория компактных групп и их гомоморфизмов — через CGR. Пусть C — одна из этих категорий.

Далее, пусть Λ — направленное множество индексов с отношением порядка $\prec$, и пусть каждому $\lambda \in \Lambda$ поставлен в соответствие объект X_λ из C. Предположим, что любым двум $\lambda, \mu \in \Lambda$, таким, что $\lambda \prec \mu$, соответствует морфизм $\pi^\mu_\lambda : X_\mu \to X_\lambda$ категории C. Кроме того, пусть

$\pi_\lambda^\nu = \pi_\lambda^\mu \circ \pi_\mu^\nu$ для любых $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$, таких, что $\lambda \prec \mu \prec \nu$, и π_λ^λ — тождественный морфизм для каждого индекса λ. Семейство $\{X_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}$ называется *обратным спектром* в C над Λ. Морфизмы π_λ^μ называются *связующими морфизмами.* Пусть X — объект категории C и для каждого X_λ определен морфизм $\pi_\lambda : X \to X_\lambda$ этой категории. Пара $(X, \{\pi_\lambda\})$ называется *обратным пределом* обратного спектра $\{X_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}$ и обозначается через $\varprojlim\{X_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}$, если выполнено следующее *свойство универсальности.* Во-первых, $\pi_\lambda = \pi_\lambda^\mu \circ \pi_\mu$, как только $\lambda \prec \mu$, и, во-вторых, если $\tau_\lambda : Y \to X_\lambda$ — морфизмы в C, определенные для всех $\lambda \in \Lambda$, такие, что $\tau_\lambda = \pi_\lambda^\mu \circ \tau_\mu$ при $\lambda \prec \mu$, то существует единственный морфизм $\rho : Y \to X$ категории C, удовлетворяющий равенствам $\tau_\lambda = \pi_\lambda \circ \rho$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Морфизмы π_λ называются *проекциями.* Для краткости, обратные спектры и обратные пределы будут соответственно называться спектрами и пределами. Иногда пределом спектра будет называться просто объект категории. Объект X_∞ категории C, состоящий из всех нитей спектра $\{X_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}$, и семейство канонических проекций являются пределом этого спектра. Напомним, что *нитью спектра* $\{X_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}$ называется такой элемент $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ произведения всех пространств X_λ, что $\pi_\lambda^\mu(x_\mu) = x_\lambda$ всякий раз, когда $\lambda \prec \mu$, а *каноническая проекция* ставит в соответствие элементу из X_∞ его соответствующую координату. Если $(X, \{\pi_\lambda\})$ — другой предел того же самого спектра, то морфизм из свойства универсальности является изоморфизмом в C.

Морфизмом спектров $\{X_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}$ и $\{Y_\lambda, \sigma_\lambda^\mu, \Lambda\}$ из C называется семейство $\{\tau_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ морфизмов из C, таких, что для каждой пары индексов $\lambda, \mu \in \Lambda$, удовлетворяющих условию $\lambda \prec \mu$, имеет место соотношение $\tau_\lambda \circ \pi_\lambda^\mu = \sigma_\lambda^\mu \circ \tau_\mu$. *Пределом морфизма спектров* $\{\tau_\lambda : \lambda \in \Lambda\} : \{X_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\} \to \{Y_\lambda, \sigma_\lambda^\mu, \Lambda\}$ называется морфизм $\tau_\infty : X_\infty \to Y_\infty$ категории C, задаваемый формулой $\tau_\infty(\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}) = \{\tau_\lambda(x_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$, где $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in X_\infty$.

Мы говорим, что *с точностью до изоморфизма морфизм* $\tau : X \to Y$ в C *является пределом морфизма спектров* $\{\tau_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, если существуют изоморфизмы $\rho : X \to X_\infty$ и $\sigma : Y \to Y_\infty$ из C, такие, что $\tau_\infty \circ \rho = \sigma \circ \tau$.

Отображение $p : X \to Y$ между топологическими пространствами называется *n-листным накрытием*, где $n \in \mathbb{N}$, если у любой точки $y \in Y$ существует окрестность W в Y, такая, что полный прообраз $p^{-1}(W)$ представляется в виде дизъюнктного объединения n окрестностей в X, называемых *листами* множества $p^{-1}(W)$, каждую из которых p гомеоморфно отображает на W. При этом W называется *правильно накрытой окрестностью*, а число n — *кратностью* отображения p.

Всюду далее через G обозначается компактная связная группа, а через $p : X \to G$ — ее n-листное накрытие топологическим пространством X.

Упражнение 1. *Доказать, что пространство X компакто.*

Упражнение 2. *Доказать, что если пространство X несвязно и кратность накрывающего отображения p больше единицы, то сужение p на любую компоненту связности пространства X представляет собой конечнолистное накрытие группы G.*

Известно [2, §25], что в категории CGR существует такой обратный спектр $\{ G_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda \}$, что

$$(G, \{\pi_\lambda\}) = \varprojlim \{G_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\},$$

и все G_λ — связные группы Ли, а все связующие гомоморфизмы и проекции открыты и сюръективны; если G абелева, то и каждая G_λ предполагается абелевой.

2. Аппроксимация отображения

Рассмотрим в категории CGR спектр $\{ G_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda \}$, такой, что

$$(G, \{\pi_\lambda\}) = \varprojlim \{G_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}$$

и обладающий свойствами, указанными в конце предыдущего раздела.

Семейство всевозможных множеств вида $\pi_\lambda^{-1}(U)$, где U — окрестность группы G_λ, а λ пробегает некоторую конфинальную часть Λ, образует базу топологии группы G. Для произвольного $\nu \in \Lambda$ через Λ_ν обозначим сечение множества Λ, задаваемое индексом ν, т. е. $\Lambda_\nu = \{ \lambda \in \Lambda : \nu \prec \lambda \}$. Тогда

$$(G, \{\pi_\lambda\}) = \varprojlim \{ G_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda_\nu \}.$$

Упражнение 3. *Доказать, что найдется конечное покрытие $\{ W_k : k \in \overline{m} \}$ группы G правильно накрытыми окрестностями, такими, что для некоторого индекса $\alpha \in \Lambda$ выполняются соотношения $W_k = \pi_\alpha^{-1}(W_k^\alpha)$,*

где $k \in \overline{m}$, а семейство $\{ W_k^\alpha : k \in \overline{m} \}$ — некоторое открытое покрытие группы G_α.

С этого момента мы раз и навсегда фиксируем индекс $\alpha \in \Lambda$ и упорядоченный набор окрестностей $W_1, W_2, \ldots, W_m$, которые обладают указанными в упражнении 3 свойствами. Вслед за этим, для каждого $k \in \overline{m}$ мы фиксируем дизъюнктное разложение

$$p^{-1}(W_k) = \bigsqcup_{l=1}^{n} V_l^k, \tag{1}$$

где каждая из окрестностей $V_l^k, l \in \overline{n}$, гомеоморфно отображается с помощью p на W_k, а также фиксируем нумерацию листов $V_1^k, V_2^k, \ldots, V_n^k$.

Далее мы не используем групповые структуры рассматриваемых объектов. При этом пространства и отображения, получающиеся из групп G, G_λ и гомоморфизмов $\pi_\lambda^\mu, \pi_\lambda$ под действием функтора из CGR в $COMP$, забывающего о групповой структуре, обозначаются теми же самыми символами.

Наша ближайшая цель — ввести в изложение функции и окрестности, которые, наряду с введенными ранее, будут основными составляющими компонентами дальнейших построений.

Очевидно, что существует такое открытое покрытие $\{ U_k : k \in \overline{m} \}$ пространства G, что

$$U_k = \pi_\alpha^{-1}(U_k^\alpha) \qquad \text{и} \qquad \overline{U}_k \subset W_k, \qquad k \in \overline{m}, \tag{2}$$

где $\{ U_k^\alpha : k \in \overline{m} \}$ — некоторое открытое покрытие пространства G_α, вписанное в $\{ W_k^\alpha : k \in \overline{m} \}$, то есть $U_k^\alpha \subset W_k^\alpha$ для всех k.

Пусть $\{ \phi_k : k \in \overline{m} \}$ — непрерывное разбиение единицы на пространстве G_α, подчиненное покрытию $\{ U_k^\alpha : k \in \overline{m} \}$. Для каждого $k \in \overline{m}$ рассмотрим композиции отображений

$$\psi_k := \phi_k \circ \pi_\alpha : G \to [0,1] \quad \text{и} \quad \widehat{\psi}_k := \phi_k \circ \pi_\alpha \circ p : X \to [0,1],$$

а также определим функции $f_k : X \to \mathbb{C}$ и $\widehat{f}_k : X \to \mathbb{C}$ следующими формулами:

$$f_k(x) := \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \notin p^{-1}(W_k) = \bigsqcup_{l=1}^{n} V_l^k; \\ \exp(i\dfrac{2\pi}{n}(l-1)), & \text{если} \quad x \in V_l^k, \quad l \in \overline{n}; \qquad (i^2 = -1); \end{cases} \tag{3}$$

$$\widehat{f}_k(x) := \widehat{\psi}_k(x) f_k(x), \qquad x \in X.$$

Упражнение 4. *Семейства отображений* $\{\, \psi_k : k \in \overline{m} \,\}$ *и* $\{\, \widehat{\psi}_k : k \in \overline{m} \,\}$ *являются разбиениями единицы соответственно на* G *и* X*, подчиненными покрытиям* $\{\, U_k : k \in \overline{m} \,\}$ *и* $\{\, p^{-1}(U_k) : k \in \overline{m} \,\}$.

Ввиду условия (2), функции $\widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \ldots, \widehat{f}_m$ непрерывны на X.

Упражнение 5. *Проверить, что диагональ*

$$p \triangle \widehat{f}_1 \triangle \widehat{f}_2 \triangle \cdots \triangle \widehat{f}_m : X \to G \times \mathbb{C}^m : x \mapsto (p(x), \widehat{f}_1(x), \widehat{f}_2(x), \cdots, \widehat{f}_m(x)),$$

является гомеоморфным вложением, где $\mathbb{C}^m$ *— произведение* m *экземпляров* $\mathbb{C}$.

Далее, для каждого индекса $\lambda \in \Lambda_\alpha$ определим компактное пространство

$$X_\lambda := \left\{ \left(\pi_\lambda(p(x)), \widehat{f}_1(x), \widehat{f}_2(x), \cdots, \widehat{f}_m(x)\right) : x \in X \right\} \subset G_\lambda \times \mathbb{C}^m,$$

являющееся образом диагонали $(\pi_\lambda \circ p) \triangle \widehat{f}_1 \triangle \widehat{f}_2 \triangle \cdots \triangle \widehat{f}_m$, а также сюръективное отображение

$$h_\lambda : X \to X_\lambda : x \mapsto (\pi_\lambda \circ p) \triangle \widehat{f}_1 \triangle \widehat{f}_2 \triangle \cdots \triangle \widehat{f}_m(x),$$

где $x \in X$. Наконец, пусть $p_\lambda : X_\lambda \to G_\lambda$ — проекция на первую координату.

Очевидно, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\;p\;} & G \\ {\scriptstyle h_\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_\lambda} \\ X_\lambda & \xrightarrow{\;p_\lambda\;} & G_\lambda \end{array} \tag{4}$$

коммутативна, т. е. $\pi_\lambda \circ p = p_\lambda \circ h_\lambda$.

Используя коммутативность диаграммы (4) и формулы (3), легко проверим, что для любого элемента $g \in G_\lambda$ полный прообраз $p_\lambda^{-1}(g)$

является конечным множеством. Мы не можем утверждать сразу, что сюръективное открытое отображение p_λ является n-листным накрытием, так как мощность множества $p_\lambda^{-1}(g)$, вообще говоря, зависит от g. Однако справедливо следующее утверждение.

Лемма. *Существует индекс $\beta \in \Lambda_\alpha$, такой, что для каждого $\lambda \in \Lambda_\beta$ отображение $p_\lambda : X_\lambda \to G_\lambda$ является n-листным накрытием.*

Доказательство. Рассуждения проведем в три шага.

Шаг 1. Мы утверждаем, что *существует конечное открытое покрытие $\{ O_s : s \in \bar{t} \}$ пространства G, которое обладает следующими свойствами:*

*O*1) *Для каждого $s \in \bar{t}$ имеет место равенство $O_s = \pi_\beta^{-1}(O_s^\beta)$, где $\beta \in \Lambda_\alpha$, а семейство $\{ O_s^\beta : s \in \bar{t} \}$ — открытое покрытие пространства G_β;*

*O*2) *Для каждого $s \in \bar{t}$ существует такое разбиение множества чисел*

$$\overline{m} = \{ a_1, a_2, \ldots, a_r \} \ \sqcup \ \{ b_1, b_2, \ldots, b_{m-r} \}, \tag{5}$$

что выполнены условия:

$$O_s \subset \cap_{j=1}^r W_{a_j} \quad \text{и} \quad O_s \cap (\cup_{j=1}^{m-r} \overline{U}_{b_j}) = \emptyset;$$

кроме того, все функции $\widehat{\psi}_{b_j}$, где $j \in \overline{m-r}$, равны нулю на множестве $p^{-1}(O_s)$, и все множества $f_{a_1} \triangle f_{a_2} \triangle \cdots \triangle f_{a_r}(p^{-1}(g))$ состоят из одних и тех же n элементов в то время как g пробегает множество O_s.

(Для простоты, мы использовали обозначения a_j, b_j и r вместо a_{sj}, b_{sj} и r_s, соответственно. Если $r = m$, то предполагается, что $\{ b_j : j \in \overline{m-r} \} = \emptyset$).

Зафиксируем произвольный элемент $g \in G$ и рассмотрим разбиение семейства $\{ W_k : k \in \overline{m} \}$ на два непересекающихся семейства

$$\{ W_{a_j} : j \in \bar{r} \} \quad \text{и} \quad \{ W_{b_j} : j \in \overline{m-r} \},$$

которые однозначно определяются следующими требованиями:

$$g \in \cap_{j=1}^r W_{a_j} \quad \text{и} \quad g \notin \cup_{j=1}^{m-r} W_{b_j}.$$

Другими словами, мы имеем (5). Ввиду (2), немедленно получается, что

$$g \notin \cup_{j=1}^{m-r} \overline{U}_{b_j}. \tag{6}$$

Возьмем $x \in p^{-1}(g) = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$. Для каждого a_j из разбиения (5) обозначим через l_j нижний индекс того единственного слоя $V_{l_j}^{a_j}$ в представлении (1) множества $p^{-1}(W_{a_j})$, в котором лежит точка x.

Пусть $O(x) := \cap_{j=1}^{r} V_{l_j}^{a_j}$. Для каждого a_j функция f_{a_j} принимает на $O(x)$ постоянное ненулевое значение, а именно, $\exp(i\frac{2\pi}{n}(l_j - 1))$ (см. (3)).

Аналогично строим непересекающиеся окрестности

$$O(x_1), O(x_1), \ldots, O(x_n)$$

соответственно точек $x_1, x_2, \cdots, x_n$. При этом отображение

$$f_{a_1} \triangle f_{a_2} \triangle \cdots \triangle f_{a_r}$$

является постоянным на каждой окрестности $O(x_l)$, где $l \in \overline{n}$.

Используя (6), выберем окрестность $O(g)$ элемента g, такую, что

$$O(g) \subset \cap_{l=1}^{n} p(O(x_l)) \quad \text{и} \quad O(g) \cap (\cup_{j=1}^{m-r} \overline{U}_{b_j}) = \emptyset.$$

Без ограничения общности, считаем, что $O(g) = \pi_\lambda^{-1}(U)$, где $\lambda \in \Lambda_\alpha$, а U — некоторая непустая окрестность из G_λ.

Легко видеть, что все функции $\widehat{\psi}_{b_1}, \widehat{\psi}_{b_2}, \ldots, \widehat{\psi}_{b_{m-r}}$ обращаются в ноль на множестве $p^{-1}(O(g))$ и что множество $f_{a_1} \triangle f_{a_2} \triangle \cdots \triangle f_{a_r}(p^{-1}(O(g)))$ состоит из n различных точек. Более того, для любого элемента $g' \in O(g)$ с $p^{-1}(g') = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, очевидно, имеем равенство

$$f_{a_1} \triangle f_{a_2} \triangle \cdots \triangle f_{a_r}(p^{-1}(O(g))) = \{ f_{a_1} \triangle f_{a_2} \triangle \cdots \triangle f_{a_r}(y_l) : l \in \overline{n} \}.$$

В силу компактности G, существует конечное открытое покрытие

$$\left\{ O(g_s) = \pi_{\lambda_s}^{-1}(U_s^{\lambda_s}) : g_s \in G, \quad U_s^{\lambda_s} - \text{окрестность в} \quad G_{\lambda_s}, \lambda_s \in \Lambda_\alpha, s \in \overline{t} \right\}$$

для G, удовлетворяющее условию $O2$). Окрестность $O(g_s)$ обозначим через O_s.

Теперь выберем индекс $\beta \in \Lambda_\alpha$, такой, что $\lambda_s \prec \beta$ для всех $s \in \overline{t}$. Ясно, что

$$\pi_{\lambda_s} = \pi_{\lambda_s}^{\beta} \circ \pi_\beta \quad \text{и} \quad O_s = \pi_\beta^{-1}(O_s^\beta), \qquad \text{где} \quad O_s^\beta = (\pi_{\lambda_s}^{\beta})^{-1}(U_s^{\lambda_s}), s \in \overline{t}.$$

Из сюръективности π_β следует, что семейство $\{ O_s^\beta : s \in \overline{t} \}$ является открытым покрытием G_β. Значит, $\{ O_s : s \in \overline{t} \}$ удовлетворяет и условию $O1$).

Шаг 2. Покажем, что отображение $p_\beta : X_\beta \to G_\beta$ является n-листным накрытием. Для этого достаточно убедиться, что для каждого элемента $g \in G_\beta$ множество $p_\beta^{-1}(g)$ состоит из n точек.

Зафиксируем $g \in G_\beta$. Из коммутативности диаграммы (4) (с β вместо λ) следует равенство

$$p_\beta^{-1}(g) = \{\, (g, \widehat{f}_1(x), \widehat{f}_2(x), \ldots, \widehat{f}_m(x)) : x \in (\pi_\beta \circ p)^{-1}(g) \,\}.$$

Так как семейство $\{\, O_s^\beta : s \in \bar{t} \,\}$ является покрытием пространства G_β, то найдется индекс s (который мы фиксируем), такой, что $\pi_\beta^{-1}(g) \subset O_s$.

Рассмотрим разбиение (5), соответствующее этому s. Если множество $\{\, b_j : j \in N_{m-r} \,\}$ непусто, то (см. $O2$)) для каждого b_j выполняется равенство $\widehat{f}_{b_j}(x) = 0$ для любого $x \in (\pi_\beta \circ p)^{-1}(g)$. Следовательно, множества

$$p_\beta^{-1}(g) \quad \text{и} \quad \{\, \widehat{f}_{a_1} \triangle \widehat{f}_{a_2} \triangle \cdots \triangle \widehat{f}_{a_r}(x) : x \in (\pi_\beta \circ p)^{-1}(g) \,\}$$

имеют одинаковые мощности. Очевидно, что для любого числа a_j, принадлежащего (5), функция $\widehat{\psi}_{a_j}$ постоянна на прообразе $(\pi_\beta \circ p)^{-1}(g)$. Поэтому для завершения этого шага достаточно убедиться, что для любого фиксированного $x_0 \in (\pi_\beta \circ p)^{-1}(g)$ множество

$$\{\, (\widehat{\psi}_{a_1}(x_0) f_{a_1}(x), \widehat{\psi}_{a_2}(x_0) f_{a_2}(x), \ldots, \widehat{\psi}_{a_r}(x_0) f_{a_r}(x)) : x \in (\pi_\beta \circ p)^{-1}(g) \,\} \quad (7)$$

состоит из n элементов.

Поскольку $\sum_{j=1}^r \widehat{\psi}_{a_j}(x_0) = 1$, то $\widehat{\psi}_{a_j}(x_0) > 0$ хотя бы для одного числа a_j.

Используя предыдущие наблюдения, легко видим, что множество (7), а, значит, и множество $p_\beta^{-1}(g)$ состоят из n элементов.

Шаг 3. Зафиксируем произвольное $\lambda \in \Lambda_\beta$. Мы утверждаем, что отображение $p_\lambda : X_\lambda \to G_\lambda$ является n-листным накрытием.

Пусть $O_s^\lambda := (\pi_\beta^\lambda)^{-1}(O_s^\beta)$, где $s \in \bar{t}$. Очевидно, что семейство $\{\, O_s^\lambda : s \in \bar{t} \,\}$ является открытым покрытием пространства G_λ и $O_s = \pi_\lambda^{-1}(O_s^\lambda)$ для всех s.

Повторяя рассуждения из предыдущего шага, получим требуемое.

Итак, заключительный шаг завершен.

Лемма доказана.

Далее, для каждой пары индексов $\lambda, \mu \in \Lambda_\beta$, удовлетворяющих условию $\lambda \prec \mu$, определим отображение $h_\lambda^\mu : X_\mu \to X_\lambda$, корректно задаваемое формулой $h_\lambda^\mu(h_\mu(x)) = h_\lambda(x)$, где $x \in X$. Ясно, что совокупность

$\{ X_\lambda, h^\mu_\lambda, \Lambda_\beta \}$ является спектром в $COMP$, а $\{ p_\lambda : \lambda \in \Lambda_\beta \}$ — морфизмом спектров $\{ X_\lambda, h^\mu_\lambda, \Lambda_\beta \}$ и $\{ G_\lambda, \pi^\mu_\lambda, \Lambda_\beta \}$, т. е. все диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X_\lambda & \xleftarrow{h^\mu_\lambda} & X_\mu \\ {\scriptstyle p_\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_\mu} \\ G_\lambda & \xleftarrow{\pi^\mu_\lambda} & G_\mu, \end{array} \tag{8}$$

коммутативны.

Рассмотрим предел $p_\infty : X_\infty \to G_\infty$ морфизма $\{p_\lambda : \lambda \in \Lambda_\beta\}$. Пусть $\sigma : G \to G_\infty$ и $\rho : X \to X_\infty$ соответственно гомеоморфизм и отображение, получающиеся из свойства универсальности предела. Очевидно, что $\sigma(g) = \{\pi_\lambda(g)\}_{\lambda\in\Lambda_\beta}$, где $g \in G$, а $\rho(x) = \{h_\lambda(x)\}_{\lambda\in\Lambda_\beta}$, где $x \in X$. Из коммутативности диаграммы (4) вытекает коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\rho} & X_\infty \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_\infty} \\ G & \xrightarrow{\sigma} & G_\infty \end{array} \tag{9}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что ρ является гомеоморфизмом. Тем самым, с учетом леммы, имеет место следующее утверждение.

Теорема об аппроксимации накрытия. *С точностью до изоморфизма n-листное накрытие $p : X \to G$ является пределом морфизма спектров*

$$\{p_\lambda : \lambda \in \Lambda_\beta\} : \{X_\lambda, h^\mu_\lambda, \Lambda_\beta\} \longrightarrow \{G_\lambda, \pi^\mu_\lambda, \Lambda_\beta\}$$

в $COMP$, где каждое p_λ — n-листное накрытие.

3. Теорема о накрывающей группе

Сначала напомним формулировку теоремы Понтрягина о накрывающей группе для линейно связных групп, обладающих хорошими локальными свойствами.

Теорема о накрывающей группе для локально связных групп. *Пусть* $\omega : \widetilde{\Gamma} \to \Gamma$ *— накрывающее отображение линейно связного пространства на связную локально линейно связную топологическую группу с единицей* e *и* $\widetilde{e} \in \omega^{-1}(e)$*. Тогда в пространстве* $\widetilde{\Gamma}$ *существует единственная структура топологической группы с единицей* $\widetilde{e}$*, такая, что* ω *становится гомоморфизмом топологических групп. Если группа* Γ*, вдобавок, абелева, то отображение* ω *становится гомоморфизмом абелевых групп.*

Доказательство этой теоремы см., например, в [4, теорема 79]. Отметим, что накрывающее отображение в этой теореме, вообще говоря, не конечнолистное, а группа не обязательно компактна.

Теорема о накрывающей группе. *Пусть* $p : X \to G$ *— конечнолистное накрывающее отображение связного пространства на компактную группу с единицей* e *и* $\widetilde{e} \in p^{-1}(e)$*. Тогда в пространстве* X *существует единственная структура топологической группы с единицей* $\widetilde{e}$*, такая, что* p *становится гомоморфизмом компактных групп. Если группа* G*, вдобавок, абелева, то отображение* p *становится гомоморфизмом абелевых групп.*

Очевидно, что искомое умножение в этих теоремах представляет собой решение соответствующей задачи поднятия отображения относительно накрытия. В доказательстве теоремы о накрывающей группе для локально линейно связных групп эта задача решается с помощью функтора фундаментальной группы. В случае второй теоремы используется идея об аппроксимации сложных топологических объектов более простыми и переносе некоторых свойств последних на первые.

Доказательство теоремы о накрывающей группе.

Рассмотрим морфизм $\{\, p_\lambda : \lambda \in \Lambda_\beta \,\}$ спектров в $COMP$ из теоремы об аппроксимации накрытия. Превратим его в морфизм спектров из категории CGR.

Пусть $\widetilde{e}_\lambda := h_\lambda(\widetilde{e})$ для каждого индекса $\lambda \in \Lambda_\beta$. В силу коммутативности диаграммы (4), $\widetilde{e}_\lambda \in p_\lambda^{-1}(e_\lambda)$, где e_λ — единица группы G_λ.

Применяя теорему о накрывающей группе для локально линейно связных групп к накрытиям $p_\lambda : X_\lambda \to G_\lambda, \lambda \in \Lambda_\beta$, введем в каждом про-

странстве X_λ структуру топологической группы, в которой роль единицы играет элемент $\widetilde{e}_\lambda$. Тем самым, n-листные накрытия p_λ являются гомоморфизмами групп.

Далее покажем, что все отображения $h^\mu_\lambda : X_\mu \to X_\lambda$ становятся гомоморфизмами групп. Для этого зафиксируем произвольное отображение h^μ_λ. В силу коммутативности диаграммы (8), в которой отображения p_λ, p_μ и π^μ_λ являются гомоморфизмами групп, для любых элементов $x, y \in X_\mu$ выполняется равенство

$$p_\lambda \circ h^\mu_\lambda(xy) = p_\lambda(h^\mu_\lambda(x) h^\mu_\lambda(y)).$$

Оно означает, что отображения $F_1, F_2 : X_\mu \times X_\mu \to X_\lambda$, задаваемые формулами

$$F_1(x, y) = h^\mu_\lambda(xy) \quad \text{и} \quad F_2(x, y) = h^\mu_\lambda(x) h^\mu_\lambda(y),$$

являются поднятиями отображения $F : X_\mu \times X_\mu \to G_\lambda : (x, y) \mapsto p_\lambda \circ h^\mu_\lambda(xy)$ относительно накрытия p_λ. То есть, оба отображения F_j дополняют следующую диаграмму до коммутативной:

$$\begin{tikzcd}
 & X_\lambda \arrow[d, "p_\lambda"] \\
X_\mu \times X_\mu \arrow[ur, dashed, "F_j"] \arrow[r, "F"] & G_\lambda.
\end{tikzcd}$$

Очевидно, что $F_1(\widetilde{e}_\mu, \widetilde{e}_\mu) = F_2(\widetilde{e}_\mu, \widetilde{e}_\mu)$, где $\widetilde{e}_\mu$ — единица группы X_μ. Поскольку пространство $X_\mu \times X_\mu$ является связным, то, согласно свойству единственности поднятия относительно накрытия [5; гл. 2, §2, теорема 2], $F_1 = F_2$. Следовательно, $h^\mu_\lambda : X_\mu \to X_\lambda$ — гомоморфизм групп.

Таким образом, семейство

$$\{\, p_\lambda; \lambda \in \Lambda_\beta \,\} : \{\, X_\lambda, h^\mu_\lambda, \Lambda_\beta \,\} \to \{\, G_\lambda, \pi^\mu_\lambda, \Lambda_\beta \,\}$$

является морфизмом спектров из категории CGR. Поэтому предельное отображение $p_\infty : X_\infty \to G_\infty$ является гомоморфизмом компактных групп. Если G абелева, то каждое n-листное накрытие $p_\lambda : X_\lambda \to G_\lambda$ становится гомоморфизмом абелевых групп, а, значит, и $p_\infty : X_\infty \to G_\infty$ — гомоморфизм абелевых групп.

Тем самым, у нас имеется диаграмма (9), в которой σ и p_∞ — морфизмы в CGR. Очевидные рассуждения и стандартные выкладки (провести их самостоятельно!) завершают доказательство теоремы. При этом

единственность групповой структуры гарантируется свойством единственности поднятия относительно накрытия. *Теорема доказана.*

Приведем примеры, показывающие, что для конечнолистного накрытия с несвязным накрывающим пространством теорема, вообще говоря, неверна.

Пример 1. Пусть $X_k = \mathbb{S}^1 \times \{k\}$ для $k = 1, 2$ и $p_k : X_k \to \mathbb{S}^1$ — k-листное накрытие, переводящее (z, k) в z^k. Рассмотрим трехлистное накрытие

$$p_1 \bigtriangledown p_2 : X_1 \oplus X_2 \to \mathbb{S}^1.$$

Для краткости, обозначим $X_1 \oplus X_2$ и $p_1 \bigtriangledown p_2$ через Y и p, соответственно.

Предположим, что в пространстве Y существует структура топологической группы, превращающая p в гомоморфизм групп. Пусть, например, единица этой группы лежит в X_2. Тогда для всякой точки $y \in X_1$ выполнено $X_1 = yX_2$. Отсюда следует, что накрытия $p|_{X_2} = p_2$ и $p|_{X_1} = p_1$ имеют одинаковую кратность. Противоречие. Ситуация, когда единица группы лежит в X_1, аналогична. Таким образом, в пространстве Y нельзя ввести умножение, превращающее p в гомоморфизм топологических групп.

Используя пример 1, построим конечнолистное накрытие несвязной компактной группы, для которого теорема о накрывающей группе неверна.

Пример 2. Достаточно взять накрытие

$$q_0 \oplus q_1 : Y_0 \oplus Y_1 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}_2$$

прямого произведения групп, где $Y_j = Y \times \{j\}$, $\quad q_j : Y_j \to \mathbb{S}^1 \times \{j\} : (y, j) \mapsto (p(y), j), \quad y \in Y, j = 0, 1$, а $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ — двухэлементная группа с дискретной топологией.

Замечание. Различные следствия теоремы о накрывающей группе содержатся в статье [8].

Литература

1. Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. — М.: Мир, 1972.

2. Вейль А. Интегрирование в топологических группах и его применения.— М.: ИЛ, 1950.

3. Масси У., Столлингс Дж. Алгебраическая топология. Введение.— М.: Мир, 1977.

4. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы.— М.: Наука, 1984.

5. Стинрод Н., Эйленберг С. Основания алгебраической топологии.— М.: Физматгиз, 1958.

6. Спеньер Э. Алгебраическая топология.— М.: Мир, 1971.

7. Энгелькинг Р. Общая топология.— М.: Мир, 1986.

8. Grigorian S.A., Gumerov R.N., On the structure of coverings of compact groups.— Topology Appl.– 2006.– v.153.– p. 3598 – 3614.

Содержание