ВЫЧИСЛИМО ОТДЕЛИМЫЕ АЛГЕБРЫ

Н.Х. Касымов

профессор Национального университета Узбекистана им. М. Улугбека

Казанский Федеральный университет, Казань, 21 сентября 2022 г.

Аннотация: *История вопроса. Понятие нумерованной алгебры. Морфизмы. Абсолютно свободные алгебры термов и геделевские нумерации. Вычислимо устойчивые нумерации. Теорема о существовании и единственности (с точностью до вычислимой эквивалентности) наименьшей нумерации для любой универсальной алгебры эффективной сигнатуры, порожденной конечным числом элементов.*

1. Теоретическая информатика

Теорема Бергстры-Такера

Всякая вычислимая алгебра конечной сигнатуры имеет обогащение, являющееся инициальной системой некоторого конечно-базируемого многообразия.

Попытки обобщения теоремы Бергстры-Такера

Общеизвестно, что всякая эффективная (в частности – конечная) система тождеств имеет свободную (и позитивную!) систему. И потому обобщение теоремы Бергстры Такера на класс позитивно представимых алгебр было актуально. Однако попытки были тщетны. Контрпример, если он есть, должен обладать свойствами, которые "запрещают" алгебре быть свободной в конечно-базируемом многообразии и, при этом, эти свойства дожны быть инвариантными относительно любых эффективно представимых обогащений.

2. Конструктивные алгебры

Теорема А.И.Мальцева

Всякая позитивная нумерация любой универсальной конечно порожденной алгебры, обладающей конгруэнциями только конечного индекса, является алгоритмически разрешимой.

Попытки обобщения теоремы А.И.Мальцева

Если контрпример существует, то характеристическая трансверсаль ее позитивной нумерации гипериммунна. При этом, всякая такая алгебра локально конечна, финитно аппроксимируема, имеет неартинову решетку конгруэнций и не является уноидом.

О финитной аппроксимируемости в теории вычислимости

Хорошо известно, что всякая финитно аппроксимируемая алгебра, свободная в конечно-базируемом многообразии является вычислимой.

Причины возникновения понятия

Инвариантность относительно эффективных обогащений

Удалось показать, что свойство финитной аппроксимируемости может быть инвариантным относительно эффективных обогащений позитивно представимых алгебр. И такие алгебры оказались вычислимо отделимыми.

Необобщаемость теоремы А.И. Мальцева

Был построен контрпример, т.е. позитивно представимая алгебра с конгруэнциями только конечного индекса, которая не имеет вычислимых представлений. Далее были изучены структурные и алгоритмические свойства позитивно представимых алгебр с нетеровыми, а затем – со счетными решетками решетками конгруэнций. Любая позитивная алгебра со счетной решеткой конгруэнций оказалась вычислимо отделимой.

О негативных алгебрах

Ярким примером вычислимо отделимых алгебр являются негативные. В случае позитивных алгебр может случиться так, что никакая пара элементов не является вычислимо отделимой.

Теорема о негативной аппроксимируемости

Нумерованная алгебра вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными алгебрами.

Еще раз о финитной аппроксимируемости

В частности, всякая алгебра, обладающая вычислимо отделимой нумерацией с иммунной характеристической трансверсалью, является финитно аппроксимируемой.

Следуя Ю.Л. Ершов [1], Ю.Л. Ершов [2], С.С. Гончаров, Ю.Л. Ершов [3], приведем основные определения.

Определение 1.1

Алгоритмическим представлением универсальной счетной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ эффективной сигнатуры Σ называется всякое такое отображение μ множества натуральных чисел ω на основное множество A алгебры $\mathfrak{A}$, для которого существует эффективное семейство F_Σ вычислимых функций, представляющих Σ-операции алгебры $\mathfrak{A}$ в нумерации μ, т.е. всякая операция $\sigma \in \Sigma$ представляется соответствующей ей такой вычислимой функцией $f_\sigma \in F_\Sigma$, что $\forall \overline{x}\ (\sigma\mu(\overline{x}) = \mu f_\sigma\ (\overline{x}))$.

[1] Ю.Л. Ершов. Теория нумераций. М., Наука, 1977.

[2] Ю.Л. Ершов. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М., Наука, 1980.

[3] С.С. Гончаров, Ю.Л. Ершов. Конструктивные модели. Новосибирск, Научная книга, 1999.

1. Нумерованные алгебры. Диаграмма 1.1. Нумерация (алгоритмическое представление) алгебры

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} \arrow[r, "\sigma \in \Sigma"] & \mathfrak{A} \\
\omega \arrow[u, "\nu"] \arrow[r, "f_\sigma \in F_\Sigma"] & \omega \arrow[u, "\nu"']
\end{tikzcd}
$$

Определение 1.2

Если μ – алгоритмическое представление алгебры $\mathfrak{A}$, то пара $(\mathfrak{A}, \mu)$ называется нумерованной алгеброй.

Все рассматриваемые нами гомоморфизмы нумерованных систем являются вычислимыми, т.е. поддерживаются вычислимыми на представлениях функциями в следующем смысле.

Определение 1.3

Гомоморфизм $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ называется вычислимым гомоморфизмом (морфизмом) нумерованных алгебр $(\mathfrak{A}, \mu) \to (\mathfrak{B}, \nu)$, если существует такая вычислимая функция f, что $\varphi\mu = \nu f$.

Далее под гомоморфизмами нумерованных алгебр мы понимаем их морфизмы, т.е. мы работаем в категории нумерованных алгебр с морфизмами в качестве эффективных на номерах гомоморфизмов.

1. Нумерованные алгебры. Диаграмма 1.2. Вычислимый гомоморфизм (морфизм) нумерованных алгебр

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} \arrow[r, "\varphi"] & \mathfrak{B} \\
\omega \arrow[u, "\mu"] \arrow[r, "h_\varphi"] & \omega \arrow[u, "\nu"']
\end{tikzcd}
$$

Ядром представления μ алгебры $\mathfrak{A}$ будем называть эквивалентность $\{\langle x, y\rangle | \mu x = \mu y\}$. Если μ – представление, то его ядро будем обозначать через $ker(\mu)$.

Пусть η – фиксированная эквивалентность на ω и $\mathfrak{A}$ – алгебра (не обязательно эффективной сигнатуры), обладающая представлением с ядром равным равным η. Тогда алгебру $\mathfrak{A}$ будем называть представимой над η (или η-алгеброй).

Для фиксированной алгебры классической является проблема изучения различных ее алгоритмических представлений и соотношений между ними, в частности, проблема существования хороших представлений (например, вычислимых) и их числа (в т.ч. единственности, с точностью до вычислимого изоморфизма).

С другой стороны, можно фиксировать ядро представления и изучать общие свойства алгебр, обладающих представлениями с данным ядром. Этот подход представляется целесообразным с точки зрения теории алгоритмических представлений алгебраических систем в рамках теоретической информатики.

Представимость универсальной алгебры $\mathfrak{A}$ над эквивалентностью η равносильна существованию такой вычислимой алгебры $\langle\omega; F\rangle$, где F – подходящее семейство вычислимых функций, что η является конгруэнцией алгебры $\langle\omega; F\rangle$ и $\mathfrak{A}$ изоморфна фактор-алгебре $\langle\omega/\eta; F\rangle$.
Характеристической трансверсалью эквивалентности η на ω (обозначаемой через $tr(\eta)$) называется множество всех натуральных чисел, являющихся наименьшими в содержащих их смежных η-классах, т.е. $tr(\eta) = \{x | \forall y(x = y \pmod{\eta} \to x \leq y)\}$.
Характеристической трансверсалью представления ν называется характеристическая трансверсаль его ядра, т.е. $tr(ker(\nu))$.
Эквивалентность с бесконечным (конечным) числом смежных классов будем называть бесконечной (соответственно конечной).
Если η – эквивалентность на ω, то множество $\alpha \subseteq \omega$ называется η-замкнутым, если $x \in \alpha \wedge x = y \pmod{\eta} \longrightarrow y \in \alpha$.

Определение 1.4

Нумерованная алгебра, ядро которой вычислимо (перечислимо, коперечислимо) называется вычислимой (позитивной, негативной).

Определение 1.5

Пусть η – эквивалентность на ω. Алгебра называется Δ^0_n-определимой над эквивалентностью η на ω (Σ^0_n-определимой над η, Π^0_n-определимой над η), если существует такая ее нумерация, ядро которой является Δ^0_n-множеством (Σ^0_n-множеством, Π^0_n-множеством соответственно).

Если $\mu,\nu)$ – две нумерации алгебры $\mathfrak{A}$, то будем говорить, что $(\mathfrak{A},\mu)$ сводится к $(\mathfrak{A},\nu)$ (в обозначениях $(\mathfrak{A},\mu)\trianglelefteq(\mathfrak{A},\nu)$), если существует такой изоморфизм $\varphi:\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$, который поддерживается подходящей вычислимой функцией f на номерах, т.е. $\varphi\mu=\nu f$. Заметим, что из сводимости $(\mathfrak{A},\mu)\trianglelefteq(\mathfrak{A},\nu)$ вовсе не следует $(\mathfrak{A},\nu)\trianglelefteq(\mathfrak{A},\mu)$, т.к. обратный изоморфизм может и не поддерживаться на номерах вычислимой функцией. Множество всех нумераций фиксированной алгебры разбивается на классы эквивалентности $\approx$ (получающемуся эквивалентным замыканием предпорядка, индуцированного $\trianglelefteq$).

Определение 1.6

Нумерованная алгебра $\mathfrak{A}$ называется вычислимо устойчивой относительно вычислимых (позитивных, негативных и т.д.) представлений, если для любых двух ее вычислимых (позитивных, негативных и т.д.) представлений μ,ν имеет место $(\mathfrak{A},\mu)\approx(\mathfrak{A},\nu)$.

Подмножество $A_0 \subseteq A$ основного множества алгебры $\mathfrak{A}$ называется вычислимым (перечислимым, негативным и т.д.), если таковым является множество $\nu^{-1}A_0$. Множество $\alpha \subseteq \omega$ называется ν-замкнутым, если оно замкнуто относительно ядра нумерации ν, т.е. эквивалентности $ker(\nu) = \{\langle x, y\rangle | \nu x = \nu y\}$.

Определение 2.1

Нумерация ν алгебры $\mathfrak{A}$ с основным множеством $|\mathfrak{A}| = A$ называется вычислимо отделимой, если для любых различных $a_0, a_1 \in A$ существует такое ν-вычислимое подмножество $A_0 \subseteq A$, что $a_0 \in A_0 \wedge a_1 \notin A_0$.

Неформально, равномерность вычислимой отделимости означает наличие эффективной процедуры, «выдающей» для каждой пары $\langle x, y\rangle$ при $x \neq y \pmod{ker(\nu)}$, алгоритм разрешения $ker(\nu)$-замкнутого множества, отделяющего x от y.

Определение 2.2

Пусть $K = \{(\mathfrak{A}_i, \nu_i) | i \in I\}$ *– семейство нумерованных алгебр. Нумерованная алгебра* $(\mathfrak{A}, \nu)$ *называется аппроксимируемой* K*-алгебрами (*K*-аппрокисимируемой), если для любых различных* $a_0, a_1 \in A$ *существует различающий их морфизм* $\varphi : (\mathfrak{A}, \nu) \longrightarrow)(\mathfrak{A}_j, \nu_j)$ *для подходящего* $j \in I$ *(т.е.* $\varphi a_0 \neq \varphi a_1$*).*

Теорема 2.3

Нумерованная алгебра вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными алгебрами.

Следствие 2.4

Всякая вычислимо отделимая подпрямо неразложимая алгебра является негативной.

Определение 2.5

Нумерация бесконечного множества называется эффективно (неэффективно) бесконечной, если существует (не существует) бесконечное вычислимое множество натуральных чисел, попарно различных по модулю нумерационной эквивалентности.

Следствие 2.6

Всякая алгебра, обладающая неэффективно бесконечной вычислимо отделимой нумерацией является финитно аппроксимируемой.

Определение 2.7

Нумерованная алгебра называется квазисовершенной, если никакая пара ее различных элементов не отделяется никаким ν-вычислимым множеством.

Следствие 2.8

Всякая нумерованная простая алгебра либо негативна, либо квазисовершенна.

Пусть $\alpha \subseteq \omega$. Рассмотрим следующие эквивалентности (см. Ю.Л. Ершов [4]):
1) $\eta^\alpha = \{\langle 2x, 2x+1\rangle | x \in \alpha\rangle\} \cup \{\langle 2x+1, 2x\rangle | x \in \alpha\rangle\} \cup id\ \omega$;
2) $\eta_\alpha = \alpha^2 \cup id\ \omega$;
3) $\eta^*_\alpha = \{\langle x, y\rangle | \gamma_x \setminus \alpha = \gamma_y \setminus \alpha\}$, где γ — каноническая нумерация конечных множеств.
Легко проверить, что для всякого $\alpha \subseteq \omega$ все эквивалентности $\eta^\alpha, \eta_\alpha, \eta^*_\alpha$ вычислимо отделимы. При этом, η^α равномерно вычислимо отделима при всяком α, а равномерность η_α зависит от выбора α. Так, например, если $\omega \setminus \alpha$ иммунно, но не гипериммунно, то η_α не является равномерной; если α — гиперпростое с регрессивным дополнением, то η_α равномерно вычислимо отделима.

[4] Ю.Л. Ершов. Теория нумераций. М., Наука, 1977.

Легко показать, что существуют равномерно вычислимо отделимые эффективно бесконечные позитивные неразрешимые эквивалентности вида η_α для подходящих $\alpha \subseteq \omega$. Равномерность эквивалентности η^*_α также связана со свойствами α.

Предложение 2.9

$\Omega = \{\langle \eta^\alpha; \cup, \cap \rangle | \alpha \subseteq \omega\}$ – *полная алгебраическая решетка, каждый элемент которой – равномерно вычислимо отделимая эквивалентность.*

Заметим, что нулем решетки Ω будет $id\ \omega$, а единицей – симметричное замыкание множества $\{\langle 2n, 2n+1 \rangle | n \in \omega\} \cup id\ \omega$.

Следствие 2.10

В каждой m-степени содержится равномерно вычислимо отделимая эквивалентность.

3. Три тезиса о приоритетности негативности над позитивностью

Тезис 1.

Алгоритмически определяемые топологические окрестности, наличие которых позволяет решать ключевую проблему распознавания в алгоритмически заданных сложных системах. Для негативных (и, в более общем случае, для вычислимо отделимых) эквивалентностей топологические пространства, порожденные вычислимыми подмножествами будут T_4-пространствами.

Тезис 2.

Представимость над эквивалентностями.

Тезис 3.

Структурная теория вычислимо отделимо нумерованных систем – нумерованная система вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными.

3. Три тезиса о приоритетности негативности над позитивностью

Теорема 3.1

Над всякой негативной эквивалентностью представима конечно порожденная и конгруэнц-простая алгебра.

Теорема 3.2

Существует позитивная эквивалентность, по модулю которой всякая согласованная с ней вычислимая функция действует либо как константа, либо как проектирующая.

Достаточно взять совершенную эквивалентность со сжатой характеристической трансверсалью. Примеры таких эквивалентностей можно найти в [5].

[5] Ю.Л. Ершов. Теория нумераций. М., Наука, 1977.

4. Вычислимые и перечислимые топологии

Для нумерованного множества $(\mathfrak{M}, \mu)$ семейство всех μ-вычислимо перечислимых (μ-вычислимых) множеств образует базу естественной топологии на $\mathfrak{M}$ (или, что равносильно, на $\omega/ker(\mu)$), которое назовем перечислимой (соответственно – вычислимой) μ-топологией. Если из контекста ясно, о каком алгоритмическом представлении μ идет речь, то приставку μ будем опускать.
Замечательным свойством этих топологий является факт непрерывности всех операций произвольной алгебры относительно обеих этих топологий, порожденных любой нумерацией данной алгебры ([6]).

Предложение 4.1

Все операции произвольной универсальной алгебры (причем не обязательно эффективной сигнатуры!) непрерывны как относительно вычислимой, так и относительно перечислимой топологии, порожденной любой нумерацией этой алгебры.

[6] Н.Х. Касымов, О гомоморфизмах на эффективно отделимые алгебры, Сибирский математический журнал, 2016, 57, №1, 47-66

Отметим, что в случае вычислимо отделимых нумерованных систем вычислимо порожденная топология, заданная вычислимыми множествами, определяет T_4-пространство ([7]). Для отделимых представлений это конечно же не так, например – связное двоеточие, где один элемент представлен вычислимо перечислимым невычислимым множеством, а второй – его дополнением (пусть $A = \{a_0, a_1\}$, α – вычислимо перечислимое невычислимое множество и $\nu : \omega \longrightarrow A$ так, что $x \in \alpha \Rightarrow \nu x = a_0, x \in (\omega \setminus \alpha) \Rightarrow \nu x = a_1$; очевидно, что вычислимое ν-пространство – тривиальное пространство слипшихся точек, а перечислимое – T_0-пространство, в котором элемент a_0 отделим от a_1, но не наоборот).
Более того, всякий гомоморфизм нумерованных алгебр, эффективный на номерах, также является непрерывным отображением относительно обеих этих топологий.

[7] Н.Х. Касымов, Аксиомы отделимости и разбиения натурального ряда, Сибирский математический журнал, 1993, 34, №3, 81-85

Теорема 4.1

Для любого $\alpha \subseteq \omega$ следующие условия эквивалентны:

1. α коконечно или коиммунно;

2. всякая алгебра, представимая над η_α финитно аппроксимируема;

3. η_α-пространство – компакт.

Предложение 4.2

Если η негативная эквивалентность, то вычислимая и перечислимая топологии на ω/η совпадают.

Если η совершенна, то на ω/η вычислимая топология антидискретна, а перечислимая – дискретна, т.е. разница в этом случае максимальна. С другой стороны, легко строятся примеры вычислимо отделимых эквивалентностей, в топологических пространствах по модулям которых перечислимые топологии дискретны, а вычислимые таковыми не являются.

Абсолютно свободные алгебры термов и геделевские нумерации

Предложение 5.1

Всякая не более чем счетная алгебра имеет нумерацию.

Рассмотрим абсолютно свободную алгебру $T_\Sigma(X)$ сигнатуры Σ, в которой содержатся бесконечные множества константных символов, унарных символов, тернарных символов и т.д., от бесконечного вычислимого множества порождающих X. Тогда любое отображение X на любую не более чем счетную Σ-алгебру $\mathfrak{A}$ единственным образом продолжэается до гомоморфизма φ из $T_\Sigma(X)$ на $\mathfrak{A}$. Если γ – стандартная геделевская нумерация алгебры $T_\Sigma(X)$, то $\varphi\gamma$ – искомая нумерация.

Термы как коды

Важный тезис. На термы можно смотреть как на натуральные числа.

Определение 5.2

Алгебра $\mathfrak{A}$ называется вычислимо устойчивой относительно нумераций из класса K, если для любых $\mu, \nu \in K$ имеет место $(\mathfrak{A}, \mu) \approx (\mathfrak{A}, \nu)$.

Предложение 5.3

Всякая конечно порожденная универсальная алгебра вычислимо устойчива относительно позитивных представлений.

Предложение 5.4

Алгебра $\langle \omega; s \rangle$ не является вычислимо устойчивой относительно негативных представлений.

Определение 5.5

Алгебра называется конечно-порожденной (локально конечной), если существует ее конечно-порожденное конечное обеднение (соответственно, всякое ее конечное обеднение локально конечно).

Для конечных сигнатур это определение совпадает с классическим.

Определение 5.6

Алгебра называется порожденной конечным множеством элементов, если она порождается конечным множеством элементов и множеством всех своих операций.

Определение 5.7

Алгебра называется конечно-порожденной (локально конечной), если существует ее конечно-порожденное конечное обеднение (соответственно, всякое ее конечное обеднение локально конечно).

Для конечных сигнатур это определение совпадает с классическим.

Определение 5.8

Алгебра называется порожденной конечным множеством элементов, если она порождается конечным множеством элементов и множеством всех своих операций.

Определение 5.7 существенно шире определения 5.8, т.к. из конечной порожденности следует порожденность конечным числом элементов. Обратное неверно. Например, Пусть $\mathfrak{A} = \langle \omega; f_0, f_1, \ldots \rangle$, где $\forall n, x(f_n(x) = n)$. Тогда алгебра $\mathfrak{A}$ порождается любым своим элементом, но она локально конечна.
С точки зрения вычислимости не так важно, применяем ли мы в процессе порождения алгебры конечное число операций или эффективное бесконечное их множество (например, трансляции), но конечность множества порождающих элементов принципиальна.

Определение 5.9

Алгоритмическое представление γ универсальной алгебры $\mathfrak{A}$ называется стандартным, если оно сводится к любому алгоритмическому представлению этой алгебры, т.е., если ν – любое алгоритмическое представление алгебры $\mathfrak{A}$, то для подходящей вычислимой функции h справедливо $\gamma = \nu h$.

Другими словами, стандартными представлениями являются те, которые образуют наименьший элемент относительно сводимости представлений в множестве классов эквивалентных представлений (по модулю отношения "быть взаимно сводимыми друг к другу"). Ясно, что далеко не все алгебры имеют стандартные представления. Например, если $\mathfrak{A}$ – алгебра пустой сигнатуры, то она имеет континуум минимальных (относительно сводимости) классов эквивалентных представлений (см. Ю.Л. Ершов [8], с.102).

Предложение 5.10

Всякая универсальная алгебра эффективной сигнатуры, порожденная конечным числом элементов имеет стандартное алгоритмическое представление.

[8] Ю.Л. Ершов. Теория нумераций. М., Наука, 1977.

Пусть $\mathfrak{A}$ – универсальная алгебра эффективной сигнатуры Σ, порожденная конечным множеством элементов $a_1, \dots, a_n$ и всеми Σ-операциями. Обозначим через $T_\Sigma(x_1, \dots, x_n)$ абсолютно свободную алгебру Σ-термов от свободных порождающих $x_1, \dots, x_n$. Очевидным образом определяется взаимно-однозначная геделевская нумерация γ_0 этой алгебры. Отображение $\varphi : \{x_1, \dots, x_n\} \longrightarrow \mathfrak{A}$ такое, что $\varphi(x_i) = a_i, 1 \le i \le n$, единственным образом продолжается до гомоморфизма из $T_\Sigma(x_1, \dots, x_n)$ на $\mathfrak{A}$, который также обозначим через φ. Полагаем $\gamma = \varphi\gamma_0$, тогда нумерация γ и будет требуемой стандартной нумерацией алгебры $\mathfrak{A}$. Действительно, пусть ν – произвольная нумерация этой алгебры. Зафиксируем такие натуральные числа $m_1, \dots, m_n$, что $\nu m_i = a_i, 1 \le i \le n$. Нумерация γ обладает тем свойством, что всякое натуральное число есть либо значение подходящего Σ-терма вида $t(\gamma^{-1}(x_1), \dots, \gamma^{-1}(x_n))$, где все символы из Σ интерпретируются как соответствующие операции в γ, либо одно из чисел $\gamma^{-1}(x_1), \dots, \gamma^{-1}(x_n)$, либо $\gamma^{-1}(c_k)$, где c_k – константный Σ-символ.

5. Вычислимо устойчивые нумерации

Определим вычислимую функцию f следующим образом. Для данного натурального числа x пытаемся определить, какой из отмеченных выше трех случаев имеет место, и когда это произойдет (а в силу предыдущего замечания хотя бы один из этих случаев реализуется) полагаем:
1) если $x = t(\gamma^{-1}(x_1), \ldots, \gamma^{-1}(x_n))$, то $f(x) = t(m_1, \ldots, m_n)$, где все Σ-символы из терма t интерпретируются в вычислимые функции, представляющие операции алгебры $\mathfrak{A}$ в нумерации ν;
2) если $x = \gamma^{-1}(x_i), 1 \leq i \leq n$, то $f(x_i) = m_i$;
3) если $x = \gamma^{-1}(c_k)$, то $f(x)$ есть один из ν-номеров элемента c_k алгебры $\mathfrak{A}$ (по поводу этого случая заметим, что согласно определению нумерованной алгебры существует такая вычислимая функция g, что $c_k = \nu g(k)$).
Очевидно, что $\gamma = \nu f$.

Литература

1. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984, 568 с.
2. Гончаров С. С., Ершов Ю. Л. Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999, 360 с.
3. Ершов Ю. Л. Теория нумераций. М.: Наука, 1977, 416 с.
4. Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980, 415 с.
5. Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977, 614 с.
6. Кон П. М. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968, 352 с.
7. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970, 392 с.
8. Мартин-Леф П. Очерки по конструктивной математике. М.: Мир, 1975, 136 с.
9. Соар И. Р. Вычислимо перечислимые множества и степени. Казань: Казанское математическое общество. Под редакцией М.М. Арсланова, 2000, 576 с.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!