ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ КАЗАНСКИЙ(ПРИВОЛЖСКИЙ)ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Специальность: 010100 – Математика

Специализация: Функциональный анализ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(дипломная работа)

"Об алгебраических и топологических свойствах тензоров"

Работа завершена:

«____»______________2015 г. ______________ Видунов С. И.

Работа допущена к защите:

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, доцент

«____»______________2015 г. ______________ Гумеров Р. Н.

Заведующий кафедрой:
доктор физико-математических наук, профессор

«____»______________2015 г. ______________ Насыров С. Р.

Казань — 2015

Содержание

1 Введение. **2**

2 Предварительные сведения. **3**

3 Алгебраическое тензорное произведение. **4**

4 Основы банаховых тензорных произведений. **8**

5 Кронекерово произведение и матрицы с простым спектром. **10**

1 Введение.

Тензорами мы называем элементы тензорных произведений векторных пространств. Изначально мы были мотивированы интересами в аппроксимации элементов тензорного произведения банаховых пространств и приложениями семейств параметризованных полиномов к топологическим группам, в частности теорией возмущений для матриц ([1], [2], [3]).

Цель настоящей работы - изучение основных понятий теории тензорных произведений и решение возникающих при этом задач, одной из которых является приложение топологических методов к проблеме одновременного приближения семейства матриц с дополнительными условиями на спектр.

Задачи одновременного приближения матриц с дополнительными условиями на спектр обладают богатой историей. Они тесно связаны с очень интересными вопросами функционального анализа, алгебраической геометрии и топологии . Ознакомиться с некоторыми из них можно, например, в [4], [5], [6]. В работе [6, Теорема 5] доказано, что любую пару матриц можно приблизить одновременно диагонализируемыми матрицами. Кроме того, эти задачи постоянно находят новые приложения, например в биоматематике [7], [4, Гл. 6].

Представленная работа состоит из введения и четырёх разделов. В первых трёх разделах мы предоставим необходимую вводную информацию и факты, которые позволяют ознакомиться с алгебраическими и топологическими свойствами тензорных произведений. Заключительный раздел является, по нашему мнению, самым важным. В нём будут приведены факты, позволяющие получить некоторые нетривиальные оценки в приложениях (например, в [8]).

2 Предварительные сведения.

В данном разделе приводятся необходимые определения и факты, которые мы будем использовать в данной работе.

В дальнейшем мы будем подразумевать, что все векторные пространства рассматриваются над одним и тем же полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Если векторное пространство V конечномерно, то его размерность мы будем обозначать через $dim(V)$.

Для подмножества M векторного пространства V через $span(M)$ мы обозначаем линейную оболочку этого множества, то есть наименьшее подпространство, содержащее M:

$$span(M) = \{\lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_n m_n \mid n \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \mathbb{C},\ m_i \in M,\ i = \overline{1,n}\}.$$

Пространство всех линейных функционалов, определенных на векторном пространстве V, называется сопряженным к V и обозначается V'.

Определение 1. ***Окрестностью*** *точки в топологическом пространстве называется любое открытое множество , содержащее эту точку.*

Определение 2. *Вещественная функция f, определенная на топологическом пространстве X, называется* ***полунепрерывной снизу(сверху)*** *в точке $x_0 \in X$, если для любого вещественного r, удовлетворяющего неравенству $f(x_0) > r$ $(f(x_0) < r)$, существует такая окрестность $U \subset X$ точки x_0, что $f(x^{'}) > r$ $(f(x^{'}) < r)$ для любой точки $x' \in U$.*

Непосредственно проверятся, что в топологическом пространстве подмножество является окрестностью тогда и только тогда, когда характеристическая функция этого подмножества является полунепрерывной снизу.

Нетрудно видеть, что верны следующие утверждения:

1. *Функция f полунепрерывна сверху тогда и только тогда, когда функция $(-f)$ полунепрерывна снизу.*

2. *Функция f полунепрерывна снизу тогда и только тогда, когда для любого вещественного числа r множество $\{x : f(x) \leq r\}$ замкнуто.*

3. *Функция непрерывна тогда и только тогда, когда она полунепрерывна снизу и сверху.*

Определение 3. *Пусть V_i $(i = \overline{1,n})$ и W - векторные пространства. Отображение*

$$\varphi : V_1 \times \ldots V_n \to W$$

называется полилинейным, если оно линейно по каждому аргументу. Иными словами, выполняется равенство:

$$\varphi(v_1, \dots, \lambda v_k^{'} + \mu v_k^{''}, \dots, v_n) = \lambda \varphi(v_1, \dots, v_k^{'}, \dots, v_n) + \mu \varphi(v_{'}, \dots, v_k^{''}, \dots, v_n)$$

для любых векторов $v_i \in V_i$, $v_k^{'}, v_k^{''} \in V_k$ *и* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$.

В случае, когда $n = 2$ полилинейное отображение принято называть *билинейным.* Если же $n = 3$, то употребляют термин *трилинейное отображение.*

Определение 4. *Пусть* E, F, G *- банаховы пространства. Билинейный оператор* $\varphi : E \times F \to G$ *называется ограниченным, если*

$$sup\{\parallel \varphi(x, y) \parallel : \parallel x \parallel \leq 1, \ \parallel y \parallel \leq 1\} < +\infty.$$

В дальнейшем нам понадобится хорошо известное утверждение.

Для любой линейно независимой системы векторов $v_1, v_2, ..., v_n$ *в векторном пространстве* V *существует функционалы* $v_i' \in V'$ *такие, что*

$$v_i'(v_j) = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} *– символ Кронекера.*

3 Алгебраическое тензорное произведение.

В этом разделе мы напомним понятие алгебраического тензорного произведения. Так же мы приведем некоторые теоремы и утверждения, касающиеся тензорных произведений. Доказательства этих теорем и утверждений содержится, например, в [9],[10, Гл. 2, §7] или [11, Гл. 3, §2].

Пусть V, W, X - векторные пространства и $\varphi : V \times W \to X$ - билинейное отображение декартова произведения $V \times W$ в X. Пару (X, φ) называют ***тензорным произведением*** векторных пространств V и W (обозначается $(V \otimes W, \varphi\ ))$, если для любого билинейного отображения $g : V \times W \to G$ в произвольное векторное пространство G существует единственное линейное отображение $f : V \otimes W \to G$ такое, что следующая диаграмма становится коммутативной :

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X \arrow[r, "f"'] & G
\end{tikzcd}$$

Это свойство называется *свойством универсальности.*

Хорошо известны стандартные конструкции тензорного произведения. Ниже мы приведём одну из них.

Пусть $V \circ W$ - пространство формальных линейных комбинаций элементов декартова произведения $V \times W$. Введя обозначение $x \circ y$ для элементов естественного базиса в $V \circ W$, рассмотрим в $V \circ W$ множество M элементов любого из следующих видов:

$$(x_1 + x_2) \circ y - x_1 \circ y - x_2 \circ y,\ x \circ (y_1 + y_2) - x \circ y_1 - x \circ y_2,$$

$$(\lambda x) \circ y - \lambda(x \circ y),\ x \circ (\lambda y) - \lambda(x \circ y),$$

$$x_1, x_2, x \in V,\ y_1, y_2, y \in W,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Введем обозначение $V \otimes W$ для факторпространства $V \circ W/span(M)$ и $x \otimes y$ для класса смежности $x \circ y + span(M)$. Тогда отображение

$$\varphi : V \times W \to V \otimes W, (x, y) \mapsto x \otimes y,$$

является билинейным оператором. Элементы $x \otimes y$ называются *элементарными тензорами.* Очевидно, каждому виду элементов из M соответствует некоторое тождество в $V \otimes W$. Например, элементу $(x_1+x_2) \circ y - x_1 \circ y - x_2 \circ y$ соответствует тождество $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$.

Конструкция, приведенная выше, позволяет сформулировать теорему.

Теорема 1 (Существования). *Всякие два векторных пространства V и W обладают алгебраическим тензорным произведением, и, в частности, таковым является $(V \otimes W, \varphi)$.*

Отметим, что если $dim(V) = m$, $dim(W) = n$, то $dim(V \otimes W) = mn$ и базис пространства $V \otimes W$ образуют вектора

$$v_i \otimes w_j,$$

где v_i - базисные векторы пространства V, w_j - базисные векторы пространства W.

Мы убедились, что алгебраическое тензорное произведение существует. Естественным является вопрос о его единственности.

Теорема 2 (Единственности). *Пусть (Θ_1, θ_1) и (Θ_2, θ_2) - два алгебраических тензорных произведения векторных пространств V и W. Тогда существует, и притом единственный, такой линейный изоморфизм $I : \Theta_1 \to \Theta_2$, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[d, "\theta_1"'] \arrow[dr, "\theta_2"] & \\
\Theta_1 \arrow[r, "I"'] & \Theta_2
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Отметим, что каждый элемент алгебраического тензорного произведения $V \otimes W$ может быть представлен в виде конечной суммы $\sum_{i=1}^{r} v_i \otimes w_i$, где $v_i \in V$, $w_i \in W$.

Так как такое представление не является однозначным, полезно знать, когда оно отлично от нуля. Ответ дает

Предложение 1. *Для элемента x тензорного произведения $V \otimes W$ следующие условия эквивалентны:*

1. $x \neq 0$.

2. $x = \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes w_i$, *где векторы $v_1, v_2, \ldots, v_r$ линейно независимы, а вектор $w_1 \neq 0$*

3. $x = \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes w_i$, *где векторы $v_1, v_2, \ldots, v_r$ и $w_1, w_2, \ldots, w_r$ линейно независимы .*

Далее мы напомним алгебраическое тензорное произведение трех векторных пространств.

Лемма 1. *Тензорное произведение ассоциативно:*

$$U \otimes (V \otimes W) = (U \otimes V) \otimes W.$$

Иными словами, $U \otimes (V \otimes W)$ и $(U \otimes V) \otimes W$ - изоморфные пространства (обе записи отождествляются и принято использовать обозначение $U \otimes V \otimes W$).

Если U, V, W - конечномерные пространства и $dim(U) = n_1$, $dim(V) = n_2$, $dim(W) = n_3$, то $U \otimes V \otimes W$ изоморфно $\mathbb{C}^{n_1} \otimes \mathbb{C}^{n_2} \otimes \mathbb{C}^{n_3}$.

Аналогично определяется алгебраическое тензорное произведение произвольного конечного числа векторных пространств.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Пусть $V = \mathbb{C}^m$, $W = \mathbb{C}^n$. Рассмотрим векторное пространство $M_{m\times n}(\mathbb{C})$. Это пространство матриц размера $m \times n$ с комплексными элементами. Обозначим через p^{kl} элементарную матрицу с единицей на kl-м месте и нулями на остальных. Через p^k обозначим вектор, у которого на k-м месте стоит единица, а остальные координаты нули. Рассмотрим билинейный оператор $\varphi : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \to M_{m\times n}(\mathbb{C})$, однозначно определенный тем, что он пару (p^k, p^l) переводит в p^{kl}. Тогда $(M_{m\times n}(\mathbb{C}), \varphi)$ - тензорное произведение пространств $\mathbb{C}^m$ и $\mathbb{C}^n$. Действительно, для каждого билинейного оператора $g : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \to L$ оператор $f : M_{m\times n}(\mathbb{C}) \to L$, переводящий $(m \times n)$ - матрицу (λ_{ij}) в вектор $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_{ij} g(p^i, p^j)$ - это и есть единственный линейный оператор, делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "g"] & \\
M_{m\times n}(\mathbb{C}) \arrow[r, "f"'] & L
\end{tikzcd}$$

коммутативной.

Пример 2. Пусть $U = \mathbb{C}^l$, $V = \mathbb{C}^m$, $W = \mathbb{C}^n$. Рассмотрим векторное пространство трёхмерных гиперматриц $\mathbb{C}^{l\times m\times n}$ размера $k \times m \times n$. Элементами матриц являются комплексные числа. Например, при $l = m = n = 2$ мы получим пространство кубов, в вершинах которых стоят числа a_{ijk} :

$$\begin{tikzcd}
 & a_{112} \arrow[rr, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[dd, dash, dotted] & & a_{122} \arrow[dl, dash] \arrow[dd, dash] \\
a_{111} \arrow[rr, dash] \arrow[dd, dash] & & a_{121} \arrow[dd, dash] & \\
 & a_{212} \arrow[rr, dash, dotted] \arrow[dl, dash, dotted] & & a_{222} \arrow[dl, dash] \\
a_{211} \arrow[rr, dash] & & a_{221} &
\end{tikzcd}$$

Обозначим через p^{ijk} элементарную многомерную матрицу с единицей на ijk-м месте и нулями на остальных. Рассмотрим трилинейный оператор $\varphi : \mathbb{C}^l \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{l\times m\times n}$, однозначно определенный тем, что он тройку (p^i, p^j, p^k) переводит в p^{ijk}. Тогда $(\mathbb{C}^{l\times m\times n}, \varphi)$ - тензорное произведение пространств $\mathbb{C}^l$, $\mathbb{C}^m$ и $\mathbb{C}^n$. Действительно, для каждого трилинейного оператора $g : \mathbb{C}^l \times \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \to L$ оператор $f : \mathbb{C}^{l\times m\times n} \to L$, переводящий многомерную матрицу (λ_{ijk}) в вектор $\sum\limits_{i=1}^{l}\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_{ijk} g(p^i, p^j, p^k)$ - это и есть единственный линейный оператор, делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^l \times \mathbb{C}^m \times C^n \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "g"] & \\
\mathbb{C}^{l \times m \times n} \arrow[r, "f"'] & L
\end{tikzcd}$$

коммутативной.

Свойство универсальности алгебраического тензорного произведения позволяет получить следующий факт:

Утверждение 1. *Пусть V_1, V_2, W_1, W_2 - векторные пространства и $\varphi : V_1 \to V_2$ и $\psi : W_1 \to W_2$ линейные операторы. Тогда существует единственный линейный оператор, действующий из $V_1 \otimes W_1$ в $V_2 \otimes W_2$, который элементу $v_1 \otimes w_1$ из $V_1 \otimes W_1$ ставит в соответствие элемент $\varphi(v_1) \otimes \psi(w_1)$ из $V_2 \otimes W_2$.*

Аналогичное утверждение существует и для алгебраического тензорного произведения трёх пространств.

4 Основы банаховых тензорных произведений.

В данной части работы будет определено понятие тензорного произведения банаховых пространств. Одними из первых эту область математики начали изучать Р. Шэттен и А. Гротендик. Они получили ряд важных результатов, которые изложены, например, в [13] и [14]. Ниже мы приведем некоторые теоремы и утверждения, касающиеся тензорных произведений банаховых пространств. Доказательства этих теорем и утверждений смотри, например, в [15, Гл. 2],[10, Гл. 2, §7] или же в [11, Гл. 4].

Пусть E и F - банаховы пространства. Пара (X, φ), где X - банахово пространство, а $\varphi : E \times F \to X$ - ограниченный билинейный оператор, называется **проективным тензорным произведением пространств E и F**, если для любого банахова пространства G и ограниченного билинейного оператора $g : E \times F \to G$ существует единственный ограниченный линейный оператор $f : X \to G$ такой, что диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
E \times F \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X \arrow[r, "f"'] & G.
\end{tikzcd}$$

Теорема 3 (Единственности). *Пусть* (Θ_1, θ_1) *и* (Θ_2, θ_2) *- два тензорных произведения банаховых пространств* V *и* W*. Тогда существует, и притом единственный, такой изометрический изоморфизм* $I : \Theta_1 \to \Theta_2$*, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[d, "\theta_1"'] \arrow[dr, "\theta_2"] & \\ \Theta_1 \arrow[r, "I"'] & \Theta_2 \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Пусть заданые нормированные пространства $(E, \| \cdot \|)$ и $(F, \| \cdot \|)$. Для каждого элемента x тензорного произведения $E \otimes F$ определим величину

$$\| x \|_p = inf \sum_{i=1}^{r} \| x_i \| \| y_i \|,$$

где нижняя грань берётся по всем представлениям x в виде $\sum\limits_{i=1}^{r} x_i \otimes y_i$, $x_i \in E$, $y_i \in F$. Легко проверяется, что $\| \cdot \|_p$ является нормой в $E \otimes F$. Норму $\| \cdot \|_p$ называют проективным тензорным произведением норм.

Отметим, что для любых $x \in E$ и $y \in F$ выполняется

$$\| x \otimes y \|_p = \| x \| \| y \| .$$

Таким образом, $E \otimes_p F$ - нормированное пространство. Обозначим его пополнение через $(E \widehat{\otimes} F, i)$. Можно считать, что $E \otimes_p F$ - всюду плотно в $E \widehat{\otimes} F$, а i - естественное вложение. Рассмотрим оператор $\widehat{\varphi} : E \times F \to E \widehat{\otimes} F$. Из определения нормы $\| \cdot \|_p$ следует, что $\widehat{\varphi}$ - ограниченный оператор.

Теорема 4 (Существования). *Для любого банахова пространства* G *и любого ограниченного билинейного оператора* $g : E \times F \to G$ *существует единственный ограниченный линейный оператор* $f : E \widehat{\otimes} F \to G$ *такой, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[d, "\widehat{\varphi}"'] \arrow[dr, "g"] & \\ E \widehat{\otimes} F \arrow[r, "f"] & G \end{tikzcd}$$

становится коммутативной.

Для представления элементов проективного тензорного произведения используем следующий результат из теории банаховых пространств:

Теорема 5. *Пусть X - банахово пространство, а X_0 - его плотное подпространство и $x \in X$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует представление x в виде суммы абсолютно сходящегося ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$, где $x_i \in X_0$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \| x_i \| < \| x \| + \varepsilon$.*

Доказательство: Так как X_0 плотно в X, то для любого $x \in X$ существует $x_1 \in X_0$ такой, что $\| x - x_1 \| < \frac{\varepsilon}{4}$. Воспользовавшись неравенством треугольника, можно получить, что $\| x_1 \| < \| x \| + \frac{\varepsilon}{4}$. Аналогично существует вектор $x_2 \in X_0$ такой, что $\| x - x_1 - x_2 \| < \frac{\varepsilon}{8}$ и $\| x_1 \| < \| x - x_1 \| + \frac{\varepsilon}{8} < \frac{3\varepsilon}{8}$. Продолжая данную процедуру, получим последовательность $x_k \in X_0$ такую, что

$$\| x - \sum_{i=1}^{n} x_i \| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \text{ и } \| x_i \| < \frac{3\varepsilon}{2^{n+1}} \text{ для } n \geq 2.$$

Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \| x_i \|$ сходится к x и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \| x_i \| < \| x \| + \varepsilon(\frac{1}{4} + \sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{3}{2^{i+1}})$, то есть $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \| x_i \| < \| x \| + \varepsilon$.

$\square$

Как следствие этой теоремы мы получаем утверждение:

Утверждение 2. *Любой элемент $x \in E \widehat{\otimes} F$ представим в виде суммы абсолютно сходящегося ряда $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i$, где $x_i \in E_0$, а $y_i \in F_0$.*

5 Кронекерово произведение и матрицы с простым спектром.

В данном разделе работы мы определим понятие тензорного ранга и приведем некоторые интересные факты, связанные с ним.

Определение 5. ***Тензорным рангом*** *элемента x алгебраического тензорного произведения $V \otimes W$ (обозначается $\mathrm{trank}(x)$) называется наименьшее натуральное число r такое, что*

$$x = \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes w_i,$$

где $v_i \in V$ и $w_i \in W$.

Отметим, что векторы $v_i \in V$ и $w_i \in W$ линейно независимы ([12, §3, 13]).

Аналогично определяется тензорный ранг для элементов $x \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$, где $n \geq 3$.

Как известно, существует несколько эквивалентных определений ранга матрицы. За исходное мы примем следующее:

Определение 6. *Рангом матрицы называется наибольшее число линейно независимых столбцов этой матрицы.*

Легко проверяется, что ранг матрицы A из $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ равен единице тогда и только тогда, когда она представима в виде $A = uv^T$, где u принадлежит $M_{m\times 1}(\mathbb{C})$,а v принадлежит $M_{1\times n}(\mathbb{C})$ и v^T- траспонированный вектор v. Справедливо следующее утверждение:

Предложение 2. *Рангом матрицы A из $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ является наименьшее натуральное число r такое, что $A = \sum\limits_{i=1}^{r} u_i v_i^T$, где u_i принадлежит $M_{m\times 1}(\mathbb{C})$,а v_i принадлежит $M_{1\times n}(\mathbb{C})$ для каждого $i = \overline{1, r}$.*

Доказательство: Пусть ранг матрицы A равен r, то есть можно выбрать линейно независимые столбцы $u_1, \ldots, u_r$. Предположим,что это первые r столбцов. Остальные столбцы матрицы выражаются через выбранные следующим образом: $u_j = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i^j u_i$, где $j = \overline{r+1, n}$. Тогда $A = \sum\limits_{i=1}^{r} u_i v_i^T$, где v_i получается сложением вектора, у которого на $i-$ месте единица, а все остальные координаты нули, и вектора, у которого первые r координат нули, а остальные координаты $\alpha_i^{r+1}, \ldots, \alpha_i^n$.

$$A = \begin{pmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{m1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_1^{r+1} \\ \vdots \\ u_1^n \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} u_{12} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{m2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ u_2^{r+1} \\ \vdots \\ u_2^n \end{pmatrix}^T + \ldots + \begin{pmatrix} u_{1r} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{mr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ u_r^{r+1} \\ \vdots \\ u_r^n \end{pmatrix}^T .$$

Предположим, что существует представление матрицы $A = \sum\limits_{i=1}^{k} u_i v_i^T$, в котором $k < r$. Тогда $rankA = rank(\sum\limits_{i=1}^{k} u_i v_i^T) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} rank(u_i v_i^T) \leq k < r$, так как ранг суммы матриц не превосходит сумму рангов этих матриц. Получили противоречие с тем, что ранг матрицы равен r.

Пусть r - наименьшее натуральное число такое, что $A = \sum\limits_{i=1}^{r} u_i v_i^T$. Если предположить, что $rank(A) < r$, то получим противоречие с минимальностью разложения A. Доказательство полностью завершено. $\square$

Обозначим через $M_n(\mathbb{C})$ банахову алгебру всех квадратных матриц размера $n \times n$ с евклидовой нормой :

$$\| A \|_F = (\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2)^{\frac{1}{2}},$$

где $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$. Иногда эту норму называют нормой Фробениуса, иногда нормой Гильберта-Шмидта или нормой Шура. Отметим, что в силу конечномерности пространства $M_{m \times n}(\mathbb{C})$ все нормы на нём эквивалентны и задают одну и ту же метрическую топологию. Базу этой топологии образует семейство всевозможных открытых шаров

$$B(A, r) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \ : \| A - X \|_F < r\}.$$

Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с полунепрерывностью функции ранга матриц.

Легко проверяется, что функция ранга матриц не является полунепрерывной сверху. Примером этому служит последовательность

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A \qquad (n \to \infty).$$

Ранг A равен одному, ранг каждой матрицы A_n равен двум. При этом в любой окрестности матрицы A, начиная с некторого n, содержатся матрицы A_n.

Следующее предложение показывает, что для матриц функция ранга является полунепрерывной снизу.

Предложение 3. *Пусть $A_k \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ для каждого $k \in \mathbb{N}$, последовательность (A_k) стремится к A и $rank(A_k) \leq r$ для каждого $k \in \mathbb{N}$. Тогда $rank(A) \leq r$.*

Доказательство: Пусть $A = (a_{ij})$ и $A_k = (a_{ij}^k)$. Предположим противное, то есть $rank(A_k) \leq r$ для каждого k, но $rank(A)$ больше r. Не теряя общности, положим $rank(A) = r + 1$. Из того, что ранг любой матрицы из последовательности не превосходит r следует, что все миноры порядка $r + 1, ..., min\{n, m\}$ равны нулю. Каждой квадратной подматрице B матрицы A поставим в соответствие полином от k^2 переменных, задающий определитель матрицы B, то есть минор матрицы A. Под k мы подразумеваем количество строк в B.

Для $k > r$ полиномы обращаются в нуль на элементах матриц из последовательности A_k, но хотя бы один из них не равен нулю на элементах матрицы A. Обозначим этот полином $p_{r+1}(x_1, x_2, ..., x_{(r+1)^2})$.

Тогда для любого положительного ε существует натуральное число N такое, что для всех натуральных чисел $k > N$ справедливы следующие выкладки:

$$\| A - A_k \|^2 = \sum_{i,j=1}^{m,n} | a_{ij} - a_{ij}^{(k)} |^2 < \varepsilon^2$$

$$| a_{ij} - a_{ij}^{(k)} |^2 < \varepsilon^2,$$

$$| a_{ij} - a_{ij}^{(k)} | < \varepsilon.$$

То есть $a_{ij}^{(k)}$ стремится к a_{ij} при $k \to \infty$. Тогда

$$p_{r+1}(a_{i_1 j_1}, a_{i_2 j_2}, ..., a_{i_{(r+1)^2} j_{(r+1)^2}}) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} p_{r+1}(a_{i_1 j_1}^{(k)}, a_{i_2 j_2}^{(k)}, ..., a_{i_{(r+1)^2} j_{(r+1)^2}}^{(k)}) = 0.$$

Получили противоречие. Значит, изначальное предположение было ошибочно и ранг A не превосходит r. Предложение доказано. $\square$

Для тензоров порядка три свойство полунепрерывности снизу тензорного ранга уже не сохранятся. Мы рассмотрим пример, приведенный в [16, Лемма 4.7] и [11, стр. 67]. Работа [16] примечательна тем, что используется полином, открытый Кэли в 19 веке ([17]). Доказательство ниже отличается от приведенного в [16] и близко к [11].

Предложение 4. *Пусть U, V, W векторные пространства, размерности которых больше двух. Пусть векторы x_1, y_1 линейно независимы в U, векторы x_2, y_2 линейно независимы в V, векторы x_3, y_3 линейно независимы в W. Рассмотрим элемент:*

$$x = x_1 \otimes x_2 \otimes y_3 + x_1 \otimes y_2 \otimes x_3 + y_1 \otimes x_2 \otimes x_3.$$

Тензорный ранг элемента x равен трем, но в то же время его можно сколь угодно точно приблизить тензорами

$$(x)_n := n(x_1 + \frac{1}{n}y_1) \otimes (x_2 + \frac{1}{n}y_2) \otimes (x_3 + \frac{1}{n}y_3) - nx_1 \otimes x_2 \otimes x_3,$$

ранг которых не превосходит двух.

Доказательство: Покажем, что тензорный ранг x не равен нулю, единице и двойке.

1.Предположим, что тензорный ранг x равен нулю. Тогда

$$0 = x_1 \otimes x_2 \otimes y_3 + x_1 \otimes y_2 \otimes x_3 + y_1 \otimes x_2 \otimes x_3,$$

Существует $\varphi \in U'$ такой, что $\varphi(x_1) = 0$ и $\varphi(y_1) = 1$. Применим к обеим частям равенства выше $\varphi \otimes id \otimes id$, где через id мы обозначили тождественное отображение. Получим, что $0 = x_2 \otimes x_3$, чего не может быть. Данное противоречие доказывает, что ранг x не равен нулю.

2. Предположим, что тензорный ранг x равен единице. Тогда справедливо равенство

$$u \otimes v \otimes w = x_1 \otimes x_2 \otimes y_3 + x_1 \otimes y_2 \otimes x_3 + y_1 \otimes x_2 \otimes x_3. \tag{1}$$

2.1. Если векторы u и x_1 линейно независимы, то существует линейный функционал $\varphi \in U'$ такой, что $\varphi(u) = 0$ и $\varphi(x_1) = 1$. Применим $\varphi \otimes id \otimes id$ к левой и правой части (1). Получим

$$0 = x_2 \otimes y_3 + y_2 \otimes x_3 + \varphi(y_1)(x_2 \otimes x_3),$$

чего не может быть в силу линейной независимости векторов.

2.2. Если же u и x_1 линейно зависимы, то $u = \lambda x_1$ и (1) примет вид

$$\lambda x_1 \otimes v \otimes w = x_1 \otimes x_2 \otimes y_3 + x_1 \otimes y_2 \otimes x_3 + y_1 \otimes x_2 \otimes x_3. \tag{2}$$

Существует $\varphi \in U'$ такой, что $\varphi(x_1) = 0$ и $\varphi(y_1) = 1$. Если применить оператор $\varphi \otimes id \otimes id$ к левой и правой части (2), то получим

$$0 = x_2 \otimes x_3,$$

чего не может быть. Таком образом, тензорный ранг x не равен единице.

3. Предположим, что тензорный ранг x равен двум. Тогда верно равенство

$$u_1 \otimes v_1 \otimes w_1 + u_2 \otimes v_2 \otimes w_2 = x_1 \otimes x_2 \otimes y_3 + x_1 \otimes y_2 \otimes x_3 + y_1 \otimes x_2 \otimes x_3. \tag{3}$$

3.1. Если u_1, u_2 линейно зависимы, то $u_1 = \lambda u_2$. Возможны два случая

3.1.1. Векторы u_2 и x_1 линейно независимы. Существует $\varphi \in U'$ такой, что $\varphi(u_1) = 0$ и $\varphi(x_1) = 1$. Применим $\varphi \otimes id \otimes id$ к обеим частям (3). Получим

$$0 = x_2 \otimes y_3 + y_2 \otimes x_3 + \varphi(y_1)(x_2 \otimes x_3),$$

чего не может быть по Предложению 1 из раздела 3.

3.1.2. Если векторы u_2 и x_1 линейно зависимы, то применим к левой и правой части (3) $\varphi \otimes id \otimes id$, где $\varphi(x_1) = 0$ и $\varphi(y_1) = 1$. Получим противоречие, так как равенство $0 = x_2 \otimes x_3$ невозможно.

Осталось рассмотреть случай, при котором вектора u_1, u_2 линейно независимы.

3.2.1. Если u_1, u_2 и x_1 линейно независимы, то существует линейный функционал $\varphi \in U'$ такой, что $\varphi(u_1) = \varphi(u_2) = 0$ и $\varphi(x_1) = 1$. Применим $\varphi \otimes id \otimes id$ к левой и правой части (3).

$$0 = (\varphi \otimes id \otimes id)(x) = x_2 \otimes y_3 + y_2 \otimes x_3 + \varphi(y_1)(x_2 \otimes x_3).$$

Дальнейшие рассуждения полностью повторяют 2.1, поэтому этот случай невозможен.

3.2.2. Значит, u_1, u_2 и x_1 линейно зависимы. Так как u_1 и u_2 линейно независимы, то хотя бы один из них линейно независим с x_1. Пусть это будет u_1. Рассмотрим $\varphi \in U'$ такой, что $\varphi(u_1) = 0$ и $\varphi(y_1) = 1$. Применим $\varphi \otimes id \otimes id$ к обеим частям (3). Получим

$$\varphi(u_2)(v_2 \otimes w_2) = x_2 \otimes y_3 + y_2 \otimes x_3 + \varphi(y_1)(x_2 \otimes x_3).$$

Это равенство невозможно, так как тензор в правой части имеет ранг два, а в левой не больше единицы.

Таким образом, ранг x не равен двум. Следовательно, он равен трем.

Тензоры $(x)_n$ с любой точностью приближают x, так как для любого числа $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N$ выполнено неравенство

$$\| x - (x)_n \| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n} \| x_1 \otimes y_2 \otimes y_3 + y_1 \otimes x_2 \otimes y_3 + y_1 \otimes y_2 \otimes x_3 \| + \frac{1}{n^2} \| y_1 \otimes y_2 \otimes y_3 \| \to 0 \; (n \to \infty).$$

$\square$

Нахождение тензорного ранга является очень важной и вместе с тем очень сложной задачей, лежащей на стыке сразу нескольких разделов математики. Не удивительно, что в последние годы интерес к этой теме только растёт. Ниже будет рассмотрены некоторые факты из работы [8], в которой получены нетривиальные оценки тензорного ранга.

Определение 7. *Пусть $U \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$, $V \in M_{k \times l}(\mathbb{C})$. Кронекеровым произведением (тензорным произведением) матриц U и V называется матрица $U \otimes_K V$ из $M_{mk \times nl}(\mathbb{C})$, которая имеет следующий вид:*

$$U \otimes_K V = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & \dots & u_{mn} \end{pmatrix} \otimes_K \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{k1} & \dots & v_{kl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}V & \dots & u_{1n}V \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1}V & \dots & u_{mn}V \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать кронекерово произведения квадратных матриц порядка p и q соответственно.

Заметим, что $\| A \otimes_K B \|_F = \| A \|_F \| B \|_F$ для любых матриц $A \in M_p(\mathbb{C})$ и $B \in M_q(\mathbb{C})$.

Введем отображения:

$$vect : M_{p\times p}(\mathbb{C}) \to M_{p^2\times 1}(\mathbb{C}),$$

$$rvect : M_{p\times p}(\mathbb{C}) \to M_{1\times p^2}(\mathbb{C}).$$

На матрице U отображения $vect$ и $rvect$ действуют следующим образом:

$$vect(U) = (u_{11}, \ldots, u_{p1}, u_{12}, \ldots, u_{p2}, \ldots, u_{1p}, \ldots, u_{pp})^T,$$

$$rvect(U) = (u_{11}, \ldots, u_{1p}, u_{21}, \ldots, u_{2p}, \ldots, u_{p1}, \ldots, u_{pp}),$$

где T - операция транспонирования матрицы. Для матрицы A из $M_{pq}(\mathbb{C})$, рассмотрим отображение

$$reshape : M_{pq}(\mathbb{C}) \to M_{p^2\times q^2}(\mathbb{C}).$$

Если разбить матрицу A на блоки $A_{i,j}$ $(i, j = \overline{1,p})$ размера $q \times q$, то операцию $reshape$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & A_{1,p-1} & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,p-1} & A_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{p-1,1} & A_{p-1,2} & \ldots & A_{p-1,p-1} & A_{p-1,p} \\ A_{p,1} & A_{p,2} & \ldots & A_{p,p-1} & A_{p,p} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} rvect(A_{1,1}) \\ \vdots \\ rvect(A_{p,1}) \\ rvect(A_{1,2}) \\ \vdots \\ rvect(A_{p-1,p}) \\ rvect(A_{p,p}) \end{pmatrix}$$

Утверждение 3. *Отображение $reshape : M_{pq\times pq}(\mathbb{C}) \to M_{p^2\times q^2}(\mathbb{C})$ задает изоморфизм векторных пространств.*

Доказательство: Линейность и сюръективность отображения $reshape$ очевидны. Покажем, что отображение $reshape$ инъективно. Если $reshape(A) = reshape(B)$, то $reshape(A - B) = 0$ и $A = B$. Таким образом операция $reshape$ - изоморфизм векторных пространств и доказательство завершено. □

Определение 8. *Пусть p и q - фиксированные натуральные числа.* ***Тензорным рангом типа*** (p, q) *(для краткости, просто тензорным рангом) матрицы A, принадлежащей $M_{pq}(\mathbb{C})$, будем называть наименьшее натуральное число r такое, что имеет место представление :*

$$A = \sum_{i=1}^{r} X_i \otimes_K Y_i,$$

где для каждого $i = \overline{1, r}$ *матрицы* X_i *и* Y_i *принадлежат* $M_p(\mathbb{C})$ *и* $M_q(\mathbb{C})$ *соответственно. Для краткости будем писать, что* $tRank(A) = r$.

Заметим, что векторные пространства $M_p(\mathbb{C}) \otimes M_q(\mathbb{C})$ и $M_{pq}(\mathbb{C})$ изоморфны, так как их размерности равны. Но, вообще говоря, тензорный ранг может не сохраняться при изоморфизме. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
M_p(\mathbb{C}) \times M_q(\mathbb{C}) \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "\otimes_K"] & \\
M_p(\mathbb{C}) \otimes M_q(\mathbb{C}) \arrow[r, "\varphi"'] & M_{pq}(\mathbb{C}).
\end{tikzcd}$$

Отображение $\otimes_k : M_p(\mathbb{C}) \times M_q(\mathbb{C}) \to M_{pq}(\mathbb{C}) \ : \ (A, B) \mapsto A \otimes_K B$ линейно по обоим аргументам. По свойству универсальности, существует единственное линейное отображение φ, делающее диаграмму коммутативной. Справедлива теорема:

Предложение 5. *Отображение* $\varphi : M_p(\mathbb{C}) \otimes M_q(\mathbb{C}) \to M_{pq}(\mathbb{C})$ *задает изоморфизм векторных пространств, сохраняющий тензорный ранг, точнее говоря*

$$trank(x) = tRank(\varphi(x)).$$

Доказательство: Пусть $trank(x) = r$. Это значит, что x представим в виде суммы $\sum\limits_{i=1}^{r} X_i \otimes \ Y_i$, где $X_i \in M_p(\mathbb{C})$, а $Y_i \in M_q(\mathbb{C})$. Рассмотрим образ x при отображении φ:

$$\varphi(x) = \varphi(\sum_{i=1}^{r} X_i \otimes Y_i) = \sum_{i=1}^{r} \varphi(X_i \otimes Y_i) = \sum_{i=1}^{r} X_i \otimes_K Y_i,$$

где где $X_i \in M_p(\mathbb{C})$, а $Y_i \in M_q(\mathbb{C})$. Следовательно, $trank(x) \geq tRank(\varphi(x))$.

Предположим, что $tRank(\varphi(x)) = k < r$, то есть $trank(x) > tRank(\varphi(x))$. Тогда

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} A_i \otimes_K B_i.$$

Так как φ - изоморфизм векторных пространств, то существует обратное отображение φ^{-1}. Если применить к обеим частям равенства выше отображение φ^{-1}, то мы получим противоречие с тем, что ранг x равен r. Предложение доказано. $\square$

Всюду ниже речь пойдет только о кронекеровом произведении, поэтому мы позволим себе писать просто $U \otimes V$ вместо $U \otimes_K V$.

Предложение 6. *Пусть матрица A принадлежит $M_{pq}(\mathbb{C})$ и имеет место представление $A = \sum_{i=1}^{r} X_i \otimes Y_i$, где X_i, Y_i $(i = 1, \ldots, r)$ элементы $M_p(\mathbb{C})$ и $M_q(\mathbb{C})$ соответственно. Тогда $tRank(A) = rank(reshape(A))$.*

Доказательство: В дальнейшем будем считать, что $B = reshape(A)$. Тогда $B = reshape(\sum_{i=1}^{r} U_i \otimes V_i) = \sum_{i=1}^{r} vect(U_i)rvect(V_i)$, то есть $tRank(A) \geq rank(B)$.

Если $tRank(A) > rank(B) = d$, то по Теореме 6 матрица B представима в виде $B = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i\beta_i$, где α_i принадлежит $M_{p^2\times 1}(\mathbb{C})$, а β_i принадлежит $M_{1\times q^2}(\mathbb{C})$.

Так как $\varphi = reshape$ - изоморфизм векторных пространств, то существует обратное отображение $\varphi^{-1} = reshape^{-1}$. Тогда $\varphi^{-1}(B) = A$ и $A = \sum_{i=1}^{d} \varphi^{-1}(\alpha_i\beta_i) = \sum_{i=1}^{d} U_i \otimes V_i$. Таким образом $tRank(A) < d$. Получили противоречие с исходным предположением. Доказательство завершено. $\square$

Предложение 7. *Пусть матрицы A_n и A принадлежат $M_{pq}(\mathbb{C})$ и последовательность A_n сходится к A. Тогда если $tRank(A_n)$ не превосходит r, то $tRank(A)$ тоже не превосходит r.*

Доказательство: Так как последовательность A_n сходится к A, то последовательность $reshape(A_n)$ сходится к матрице $reshape(A)$. Обозначим $reshape(A_n) = B_n$, а $reshape(A) = B$. Из Предложения 3 следует, что если $rank(B_n) \leq r$, то $rank(B) \leq r$. Из Предложения 6 мы знаем, что $tRank(A) = rank(B)$ не превосходит $rank(B_n)) = tRank(A_n)$, что и требовалось доказать. $\square$

Матрицы и произведения их элементов естественным образом возникают при изучении тензоров, особенно при оценке тензорного ранга (например, [18], [19], [20], [21], [22], [8]). Ниже мы приведем некоторое интересные свойства, полезные при оценках рангов.

Теорема 6 (Шура об унитарной триангуляризации). *Для любой матрицы A из $M_n(\mathbb{C})$ с произвольно предписанной нумерацией её собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, существует унитарная матрица U из $M_n(\mathbb{C})$ такая, что $B = [b_{ij}] = U^*AU$ есть верхнетреугольная матрица с диагональными элементами $b_{ij} = \lambda_i$ для всех i от 1 до n.*

Доказательство это теоремы приведено, например, в [23, Гл. 2, §3] или [24, Гл. 9, §8].

Предложение 8. *Множество обратимых матриц в $M_n(\mathbb{C})$ открыто.*

Доказательство: Рассмотрим непрерывную функцию $det : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, которая каждой матрице ставит в соответствие её определитель. Множество необратимых матриц является замкнутым, так как оно есть полный прообраз одноточечного множества $\{0\}$. Тогда множество обратимых матриц открыто, как дополнение к замкнутому множеству. $\square$

Напомним, что множество собственных значений матрицы называется её спектром. Если все собственные значения попарно различны, то говорят, что спектр матрицы простой.

Предложение 9. *Множество обратимых матриц с попарно различными собственными значениями плотно в $M_n(\mathbb{C})$.*

Доказательство: Пусть A – произвольная матрица из $M_n(\mathbb{C})$ и число $\varepsilon > 0$ задано. По теореме Шура существуют унитарная матрица U и верхнетреугольная T, принадлежащие $M_n(\mathbb{C})$, такие что $A = U^*TU$.

Выберем различные числа $\lambda_1, ..., \lambda_n$, удовлетворяющие условиям:

1.$0<\lambda_i <\frac{\varepsilon}{n^{1/2}}$.

2.$t_{ii} + \lambda_i \neq t_{jj} + \lambda_j$, где t_{ii} – элементы матрицы T, стоящие на главной диагонали.

Рассмотрим матрицу D, у которой на главной диагонали стоят λ_i, а остальные элементы нулевые. Матрица $T+D$ имеет n различных собственных значений. При этом матрицы $A+U^*DU$ и подобны. Значит, $A+U^*DU$ диагонализируема и $\| A-(A+U^*DU) \|_F = \| U^*DU \|_F = \| D \|_F = \varepsilon$. Таким образом, в любой окрестности A лежат матрицы с попарно различными собственными значениями. В силу произвольности A мы получаем, что матрицы с простым спектром плотны в $M_n(\mathbb{C})$. $\square$

Ниже мы приводим факт, который используется для получения верхней оценки тензорного ранга обратной матрицы в [8].

Предложение 10. *Пусть A и B принадлежат $M_n(\mathbb{C})$ и $\varepsilon > 0$ задано. Тогда существуют обратимые матрицы с простым спектром A_ε и B_ε такие, что*

$$\| A - A_\varepsilon \| < \varepsilon, \| B - B_\varepsilon \| < \varepsilon$$

и произведение $A_\varepsilon B_\varepsilon^{-1}$ обладает простым спектром.

Этот факт является частным случаем Предложения 11, которое мы сформулируем ниже. Доказательство Предложения 11 приводится в [25].

Как мы уже упомянули, существует интересное приложение Предложения 10 к оценке тензорного ранга обратной матрицы в [8], когда A и B являются множителями кронекерова (тензорного) произведения. Более точно, пусть X - обратимая матрица в пространстве $M_{pq}(\mathbb{C})$ и $tRank(X) = 2$.

Тогда $X = A \otimes B + C \otimes D$, где A, C принадлежат $M_p(\mathbb{C})$, а B, D принадлежат $M_q(\mathbb{C})$. Предложение 10 гарантирует существование аппроксимации матрицы X со свойствами, указанными в этом утверждении. Этот факт участвует в оценке верхней границы в [8, стр. 3172]:

$$tRank(X^{-1}) \leq min\{p, q\}.$$

Произведения AB^{-1} и $A^{-1}B$ с различными условиями на спектр возникают при изучении рангов тензоров порядка три (например, в [18], [19], [20], [21] или [22]). В этом случае матрицы A и B являются так называемыми срезами трехмерных массивов.

Отметим, что спектральные свойства таких произведений матриц играют важную роль в теории матричных пучков (см., например, [26]).

Предложение 11. *Пусть f - отображение из множества обратимых в $M_n(\mathbb{C})$ матриц в себя. Пусть A и B принадлежат $M_n(\mathbb{C})$ и задано $\varepsilon > 0$. Тогда существуют обратимые матрицы с простым спектром A_ε и B_ε такие, что*

$$\| A - A_\varepsilon \| < \varepsilon, \| B - B_\varepsilon \| < \varepsilon$$

и произведение $A_\varepsilon f(B_\varepsilon)$ обладает простым спектром.

Список литературы

[1] S. A. Grigorian, R. N. Gumerov, *On the structure of finite coverings of compact connected groups,* Topology Appl. 153(18), 3598-3614 2006.

[2] R. N. Gumerov, *Weierstrass polynomials and coverings of compact groups,* Sib. Mat. Zh. 54(2), 320-324 ,2013.

[3] R. N. Gumerov, *Homological dimension of radical algebras of Beurling type with rapidly decreasing weight*, Vestn. Mosk. Univ., Ser. Mat. Mekh. 5, 18-22, 1988.

[4] K. C. O'Meara , J. Clark and C. I. Vinsonhaler, *Advanced Topics in Linear Algebra : Weaving Matrix Problems through the Weyr Form* Oxford University Press, New York, 2011.

[5] K. Davidson , S. Szarek, *Local operator theory, random matrices and Banach spaces.* In *Handbook of the geometry of Banach spaces. Vol. I,* North–Holland, Amsterdam, 2001.

[6] T. S. Motzkin, O. Taussky, *Pairs of matrices with property L.II.*, Trans. Amer. Math. Soc. 80, 387–401 ,1955.

[7] E. S. Allman, J. A. Rhodes, *Phylogenetic invariants for the general Markov model of sequence mutation,* Math. Biosci. 186, 113–144 2003.

[8] E. E. Tyrtyshnikov, *Tensor ranks for the inversion of tensor-product binomials,* J. Comput. Appl. Math. 234(11), 3170–3174 2010.

[9] W.H. Greub , *Multilinear algebra*, New York, Springer-Verlag, 2013.

[10] А.Я. Хелемский , *Лекции по функциональному анализу*, Москва, МЦНМО, 2004.

[11] W. Hackbusch , *Tensor spaces and numerical tensor calculus*, Springer, 2012.

[12] А.Я. Хелемский , *Банаховы и полинормированные алгебры, общая теория, представления, гомология*, Москва , Наука, 1989.

[13] A. Grothendieck , *Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires*, Mem. Amer. Math. Soc. 16 , 1955.

[14] R. Schatten, *A Theory of Cross-Spaces*, Princeton University Press, 1950.

[15] Raymond A. Ryan, *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, Springer , 2002.

[16] Vin De Silva, Lek-Heng Lim, *Tensor rank and the ill-posedness of the best low-rank approximation problem*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. Vol. 30(3), pp. 1084-1127, 2008.

[17] A. Cayley, *On the theory of linear transformation*, Cambridge Math. J., 4, 193–209 1845.

[18] M. D. Atkinson, N. M. Stephens, *On the maximal multiplicative complexity of a family of bilinear forms,* Linear Algebra and Appl. 27, 1—8 (1979).

[19] M. D. Atkinson, S. Lloyd *Bounds on the ranks of some 3-tensors,* Linear Algebra and Appl. 31, 19—31, (1980).

[20] J. M. F. Ten Berg, *Kruskal's polynomial for* $2 \times 2 \times 2$ *arrays and generalization to* $2 \times n \times n$ *arrays,* Psychometrika 56, 631-636 (1991).

[21] S. Stegeman, *Degeneracy in CANDECOMP/PARAFAC explained for* $p \times p \times 2$ *arrays of rank* $p + 1$ *or higher,* Psychometrika 71, 483-501 (2006).

[22] T. Sumi, M. Miyazaki, T. Sakata, *About the maximal rank of 3-tensors over the real and the complex number field,* Ann. Inst. Stat. Math. 62, 807—822 (2010).

[23] Р. Хорн , Ч. Джонсон , *Матричный анализ*, Москва, Мир, 1985.

[24] Карчевский Е.М., Карчевский М.М. *Лекции по линейной алгебре и аналитической геометрии: учебное пособие* , Казань: Изд-во Казан. ун.-та, 2014.

[25] R.N. Gumerov, S.I. Vidunov, *On matrices with simple spectra arising from tensor products*, arXiv.org, 2015.

[26] Kh. D. Ikramov, *Matrix pencils – theory, applications and numerical methods,* Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Mat. Anal. 29, 3—106 (1991).