

УДК 514.76

ОЦЕНКА РАЗМЕРНОСТЕЙ АЛГЕБРЫ ЛИ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ $T(M)$ СО СВЯЗНОСТЬЮ ПОЛНОГО ЛИФТА

А.Я. Султанов, Г.А. Султанова

Аннотация

В работе получены точные оценки размерностей алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения $T(M)$ со связностью полного лифта в случае, когда база M является непроективно-евклидовым пространством специального случая.

Ключевые слова: дифференцируемое многообразие, полный лифт связности, инфинитезимальное аффинное преобразование, вертикально-векторное поднятие аффинора, горизонтально-векторное поднятие аффинора, алгебра Ли, непроективно-евклидово пространство.

1. Основные сведения

Пусть M – связное дифференцируемое многообразие класса C^∞ размерности n , A – алгебра дуальных чисел $R(\epsilon) = \{a_0\epsilon^0 + a_1\epsilon^1 \mid a, b \in R, \epsilon^0 = 1, (\epsilon^1)^2 = 0\}$, A^* – пространство линейных форм, заданных на A со значениями в R , (ϵ_0, ϵ_1) – дуальный базис к базису (ϵ^0, ϵ^1) . Возьмем касательные пространства $T_p(M)$ к многообразию M в точках $p \in M$. Тройка $(T(M), \pi, M)$, где

$$T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p(M),$$

называется касательным расслоением над многообразием M , а каноническая проекция $\pi : T(M) \rightarrow M$ определяется условием $\pi(t_x) = x$, $t_x \in T(M)$. Для функции $f \in C^\infty(M)$ функция $f_{(0)} = f \circ \pi$ называется вертикальным лифтом функции f с базы M в его касательное расслоение $T(M)$. На $T(M)$ возникает естественная структура гладкого многообразия над полем действительных чисел, атлас которого состоит из координатных окрестностей вида $(\pi^{-1}(U), x_0^i, x_1^i)$. Закон преобразования координат при переходе от локальной карты $(\pi^{-1}(U), x_0^i, x_1^i)$ к локальной карте $(\pi^{-1}(V), \bar{x}_0^i, \bar{x}_1^i)$ имеет вид [1]

$$\begin{cases} \bar{x}_0^i = \bar{x}_0^i(x_0^1, \dots, x_0^n), \\ \bar{x}_1^i = \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \right)_{(0)} x_1^k. \end{cases} \quad (1.1)$$

Приведем определения полного лифта функции, лифтов векторных полей, полного лифта линейной связности ∇ с базы в касательное расслоение $T(M)$.

Пусть f – функция класса C^∞ , заданная на M . Функция $f_{(1)} = (\partial_j f)_{(0)} x_1^j$ называется полным лифтом функции f с базы M в его касательное расслоение $T(M)$.

Для произвольного векторного поля $X \in \mathfrak{X}_0^1(M)$ на $T(M)$ вертикальный $X^{(1)}$ и полный $X^{(0)}$ лифты определяются условиями

$$\begin{aligned} X^{(1)}f_{(1)} &= (Xf)_{(0)}, \\ X^{(1)}f_{(0)} &= 0, \\ X^{(0)}f_{(\alpha)} &= (Xf)_{(\alpha)}, \quad \alpha = 0, 1, \end{aligned} \quad (1.2)$$

для любой функции f из алгебры $C^\infty(M)$. В локальных координатах векторные поля $X^{(1)}$, $X^{(0)}$ имеют вид $X^{(1)} = X_0^i \partial_i^1$, $X^{(0)} = X_0^i \partial_i^0 + X_1^i \partial_i^1$ соответственно, где $X_0^i = (X^i)_{(0)}$, $X_1^i = (\partial_j X^i)_{(0)} x_1^j$.

На многообразии $T(M)$ существует единственная линейная связность $\nabla^{(0)}$, удовлетворяющая условию

$$\nabla_{X^{(a)}}^{(0)} Y^{(b)} = (\nabla_X Y)^{(ab)}, \quad (1.3)$$

где $X, Y \in \mathfrak{X}_0^1(M)$, $a, b \in A$. Такая связность называется полным лифтом линейной связности ∇ [1, 2].

2. Инфинитезимальные аффинные преобразования в касательных расслоениях со связностью полного лифта

В настоящей работе мы будем предполагать, что линейная связность ∇ не имеет кручения.

Определение 2.1. Векторное поле \tilde{X} называется инфинитезимальным аффинным преобразованием связности $\nabla^{(0)}$ касательного расслоения $T(M)$ тогда и только тогда, когда

$$L_{\tilde{X}} \nabla^{(0)} = 0.$$

В некоторых случаях связность $\nabla^{(0)}$ для удобства будем обозначать через $\tilde{\nabla}$.

В координатной форме это уравнение равносильно системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\partial_j^\alpha \partial_k^\beta X_\sigma^i + \Gamma_{mk\sigma}^{\tau\beta i} \partial_j^\alpha X_\tau^m + \Gamma_{jm\sigma}^{\alpha\tau i} \partial_k^\beta X_\tau^m - \Gamma_{jk\tau}^{\alpha\beta m} \partial_m^\tau X_\sigma^i + X_\tau^m \partial_m^\tau \Gamma_{jk\sigma}^{\alpha\beta i} = 0. \quad (2.1)$$

Условия интегрируемости системы (2.1) представляют собой соотношения

$$L_{\tilde{X}} \tilde{\nabla}^k \tilde{R} = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

При $k = 0$ считаем, по определению, $\tilde{\nabla}^0 \tilde{R} = \tilde{R}$. Поэтому первая серия условий интегрируемости $L_{\tilde{X}} \tilde{R} = 0$ в локальных координатах будет равносильна системе алгебраических уравнений

$$R_{mkl\sigma}^{\tau\beta\mu i} A_{j\tau}^{\alpha m} + R_{jml\sigma}^{\alpha\tau\mu i} A_{k\tau}^{\beta m} + R_{jkm\sigma}^{\alpha\beta\tau i} A_{l\tau}^{\mu m} - R_{jkl\tau}^{\alpha\tau\mu m} A_{m\sigma}^{\tau i} + X_\tau^m \partial_m^\tau R_{jk\sigma}^{\alpha\beta\mu i} = 0, \quad (2.2)$$

где $A_{l\tau}^{\mu m} = \partial_l^\mu X_\tau^m$.

Систему (2.2) представим в развернутой форме, придавая индексам $\alpha, \beta, \sigma, \mu$ значения 0, 1. Тогда

$$\begin{aligned} R_{jkl}^m A_{m0}^{1i} &= 0, \quad R_{mkl}^i A_{j0}^{1m} = 0, \\ R_{mkl}^i A_{j0}^{0m} + R_{jml}^i A_{k0}^{0m} + R_{jkm}^i A_{l0}^{0m} - R_{jkl}^m A_{m0}^{0i} - (R_{jkl}^m)_{(1)} A_{m0}^{1i} + X_0^m \partial_m^0 R_{jkl}^i &= 0, \\ (R_{mkl}^i)_{(1)} A_{j0}^{0m} + (R_{jml}^i)_{(1)} A_{k0}^{0m} + (R_{jkm}^i)_{(1)} A_{l0}^{0m} + R_{mkl}^i A_{j1}^{0m} + R_{jml}^i A_{k1}^{0m} + \\ &+ R_{jkm}^i A_{l1}^{0m} - R_{jkl}^m A_{m1}^{0i} - (R_{jkl}^m)_{(1)} A_{m1}^{1i} + X_0^m \partial_m^0 \partial_p^0 R_{jkl}^i x_1^p + X_1^m \partial_m^0 R_{jkl}^i &= 0, \\ -R_{mkl}^i A_{j0}^{0m} + R_{jkl}^m A_{m0}^{0i} + (R_{jkl}^m)_{(1)} A_{m0}^{1i} + (R_{mkl}^i)_{(1)} A_{j0}^{1m} + R_{mkl}^i A_{j1}^{1m} - R_{jkl}^m A_{m1}^{1i} &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Систему (2.3) мы рассмотрим, учитывая структуру инфинитезимального аффинного преобразования \tilde{X} .

Известно, что инфинитезимальное аффинное преобразование \tilde{X} полного лифта линейной связности без кручения Γ_{jk}^i в касательное расслоение $T(M)$ имеет вид [3]

$$\tilde{X} = X^{(0)} + Y^{(1)} + \gamma G + F^{H\gamma}, \quad (2.4)$$

где X , Y – векторные поля, F , G – тензорные поля типа (1,1) на многообразии M , удовлетворяющие условиям

$$L_X \nabla = 0; \quad (2.5)$$

$$L_Y \nabla = 0; \quad (2.6)$$

$$\nabla G = 0; \quad (2.7)$$

$$\nabla F = 0; \quad (2.8)$$

$$R_{mkl}^i F_j^m = R_{jkl}^m F_m^i = 0; \quad (2.9)$$

$$R_{mkl}^i G_j^m - R_{jkl}^m G_m^i = 0. \quad (2.10)$$

Здесь векторное поле γG в локальных координатах определяется условием

$$\gamma G = G_i^j x_1^i \partial_j^1$$

и называется вертикально-векторным поднятием аффинора G . Векторное поле $F^{H\gamma}$, в локальных координатах имеющее вид

$$F^{H\gamma} = F_i^j x_1^i D_j,$$

где $D_j = \partial_j - \Gamma_{js}^p x_1^s \partial_p^1$, называется горизонтально-векторным поднятием аффинора F .

Теорема 2.1. *Разложение инфинитезимального аффинного преобразования в виде (2.4) – единственное.*

Доказательство. Достаточно установить, что если $\tilde{X} = X^{(0)} + Y^{(1)} + \gamma G + F^{H\gamma} = 0$, то тензорные поля $X = Y = 0$, $G = F = 0$.

Для любой функции $f \in C^\infty(M)$ имеем

$$\tilde{X} f_{(0)} = X^{(0)} f_{(0)} + F^{H\gamma} f_{(0)} = 0,$$

$$\tilde{X} f_{(1)} = Y^{(1)} f_{(1)} + \gamma G f_{(1)} = 0.$$

Полагая в этих равенствах вместо f координатные функции x^i , получим

$$(X^i)_{(0)} + F_j^i x_1^j = 0,$$

$$(Y^i)_{(0)} + G_j^i x_1^j = 0.$$

Откуда следует, что $X = Y = 0$, $G = F = 0$. □

Совокупность всевозможных инфинитезимальных аффинных преобразований образует алгебру Ли относительно операции коммутирования. Алгебру Ли векторных полей вида (2.4) обозначим через \tilde{L} , через L^α , $\alpha = 0, 1$, – множество векторных полей вида $X^{(\alpha)}$, через L^2 и L^3 – соответственно совокупности векторных полей вида γG и $F^{H\gamma}$, входящих в разложение (2.4).

Из условий (2.5)–(2.10) заключаем, что каждое из множеств L^0 , L^1 , L^2 , L^3 замкнуто относительно операций сложения и умножения на скаляр из \mathbb{R} , то есть они являются векторными пространствами. При этом в силу теоремы 2.1 векторное пространство \tilde{L} представляет собой прямую сумму подпространств L^0 , L^1 , L^2 , L^3 . Поэтому

$$\dim_{\mathbb{R}} \tilde{L} = \dim_{\mathbb{R}} L^0 + \dim_{\mathbb{R}} L^1 + \dim_{\mathbb{R}} L^2 + \dim_{\mathbb{R}} L^3.$$

Теорема 2.2. *Подпространства L^0 , L^1 , L^2 , L^3 являются подалгебрами алгебры Ли \tilde{L} .*

Доказательство. Для векторных полей $X \in \mathfrak{S}_0^1(M)$ имеем [1]

$$[X^{(0)}, Y^{(0)}] = [X, Y]^{(0)}, \quad [X^{(1)}, Y^{(1)}] = 0.$$

Отсюда следует, что подпространства L^0 и L^1 являются подалгебрами алгебры Ли \tilde{L} , причем подалгебра L^1 – абелева.

Для тензорных полей $P, G \in \mathfrak{S}_1^1(M)$ вычислим коммутаторы $[\gamma P, \gamma G]$, $[P^{H\gamma}, G^{H\gamma}]$, используя локальные координаты на $T(M)$:

$$\begin{aligned} [\gamma P, \gamma G] &= [P_k^m x_1^k \partial_m^1, G_p^s x_1^p \partial_s^1] = \\ &= P_k^m x_1^k G_m^s \partial_s^1 - G_p^s x_1^p P_s^m \partial_m^1 = (P_k^m G_m^s - G_k^m P_m^s) x_1^k \partial_s^1. \end{aligned}$$

Пусть $\tilde{G}_k^s = P_k^m G_m^s - G_k^m P_m^s$. Вычислим ковариантную производную $\nabla_l \tilde{G}_k^s$:

$$\nabla_l \tilde{G}_k^s = \nabla_l P_k^m G_m^s - G_k^m \nabla_l P_m^s = 0$$

в силу условия (2.7) разложения (2.4). Прямые вычисления показывают, что \tilde{G}_k^s удовлетворяют равенствам (2.10). Отсюда следует, что L^3 является абелевой подалгеброй алгебры Ли \tilde{L} .

Перейдем к вычислению коммутатора $[P^{H\gamma}, G^{H\gamma}]$. Имеем

$$\begin{aligned} [P^{H\gamma}, G^{H\gamma}] &= [P_i^j x_1^i \partial_j^0 - P_i^j x_1^i \Gamma_{js}^p x_1^s \partial_p^1, G_m^k x_1^m \partial_k^0 - G_m^k x_1^m \Gamma_{kz}^q x_1^z \partial_q^1] = \\ &= (P_i^j \partial_j G_m^k - P_i^j \Gamma_{mj}^p G_p^k - G_m^j \partial_j P_i^k + G_m^j \Gamma_{ji}^p P_q^k) x_1^m x_1^i \partial_k^0 + \\ &+ (-P_i^j \partial_j G_m^k + P_i^j \Gamma_{jm}^p G_p^k + G_m^j \partial_j P_i^k - G_m^j \Gamma_{ji}^p P_q^k) \Gamma_{ks}^q x_1^m x_1^i x_1^s \partial_q^1 + \\ &+ P_i^j G_m^k (-\partial_j \Gamma_{ks}^q + \partial_k \Gamma_{js}^q + \Gamma_{js}^p \Gamma_{kp}^q - \Gamma_{ks}^p \Gamma_{jp}^q) x_1^m x_1^i x_1^s \partial_q^1 = \\ &= (P_i^j \nabla_j G_m^k - G_m^j \nabla_j P_i^k) x_1^m x_1^i (\partial_k^0 - \Gamma_{ks}^q x_1^s \partial_q^1) + P_i^j G_m^k R_{skj}^q x_1^m x_1^i x_1^s \partial_q^1 = \\ &= (P_i^j \nabla_j G_m^k - G_m^j \nabla_j P_i^k) x_1^m x_1^i \partial_k^H + P_i^j G_m^k R_{skj}^q x_1^m x_1^i x_1^s \partial_q^1. \end{aligned}$$

Откуда вытекает, что если $P^{H\gamma}, G^{H\gamma}$ принадлежат L^3 , то в силу равенств (2.8), (2.9) имеем $[P^{H\gamma}, G^{H\gamma}] = 0$, то есть L^3 – абелева подалгебра алгебры Ли \tilde{L} . \square

3. Условия интегрируемости уравнений инфинитезимальных аффинных преобразований для векторного поля вида (2.4)

Рассмотрим первую серию условий интегрируемости (2.2) системы (2.1) применительно к разложению (2.4). Подставив (2.4) в (2.3), получаем следующую систему

уравнений:

$$\begin{aligned}
R_{mkl}^i \partial_j X_0^m + R_{jml}^i \partial_k X_0^m + R_{jkm}^i \partial_l X_0^m - R_{jkl}^m \partial_m X_0^i + V_0^m \partial_m R_{jkl}^i &= 0, \\
R_{mkl}^i \partial_j Y_0^m + R_{jml}^i \partial_k Y_0^m + R_{jkm}^i \partial_l Y_0^m - R_{jkl}^m \partial_m Y_0^i + Y_0^m \partial_m R_{jkl}^i &= 0, \\
R_{jkl}^m F_m^i &= 0, \\
R_{mkl}^i F_j^m &= 0, \\
R_{mkl}^i G_j^m - R_{jkl}^m G_m^i &= 0, \\
R_{mkl}^i \partial_j F_p^m + R_{jml}^i \partial_k F_p^m + R_{jkm}^i \partial_l F_p^m - R_{jkl}^m \partial_m F_p^i - \partial_p R_{jkl}^m F_m^i + \partial_m R_{jkl}^i F_p^m &= 0, \\
\partial_q R_{mkl}^i \partial_j X^m + \partial_q R_{jml}^i \partial_k X^m + \partial_q R_{jkm}^i \partial_l X^m + R_{mkl}^i \partial_j (\partial_q X^m + G_q^m) + \\
+ R_{jml}^i \partial_k (\partial_q X^m + G_q^m) + R_{jkm}^i \partial_l (\partial_q X^m + G_q^m) - R_{jkl}^m \partial_m (\partial_q X^i + G_q^i) - \\
- \partial_q R_{jkl}^m \partial_m X^i - \partial_q R_{jkl}^m G_m^i + X^m \partial_m \partial_q R_{jkl}^i + \partial_m R_{jkl}^i (\partial_q X^m + G_q^m) &= 0, \quad (3.1) \\
\partial_q R_{mkl}^i \partial_j F_r^m + \partial_q R_{jml}^i \partial_k F_r^m + \partial_q R_{jkm}^i \partial_l F_r^m - R_{mkl}^i \partial_j (\Gamma_{pr}^m F_q^p) - \\
- R_{jml}^i \partial_k (\Gamma_{pr}^m F_q^p) - R_{jkm}^i \partial_l (\Gamma_{pr}^m F_q^p) + R_{jkl}^m \partial_m (\Gamma_{pr}^i F_q^p) + \partial_q R_{jkl}^m \Gamma_{pm}^i F_r^p + \\
+ \partial_q R_{jkl}^m \Gamma_{pr}^i F_m^p + F_r^m \partial_m \partial_q R_{jkl}^i - \Gamma_{pr}^m F_q^p \partial_m R_{jkl}^i &= 0, \\
- R_{mkl}^i \partial_j F_p^m + R_{jkl}^m \partial_m F_p^i + \partial_p R_{jkl}^m F_m^i + \partial_p R_{mkl}^i F_j^m - R_{mkl}^i \Gamma_{qj}^m F_p^q - \\
- R_{mkl}^i \Gamma_{rp}^m F_j^r + R_{jkl}^m \Gamma_{qm}^i F_p^q + R_{jkl}^m \Gamma_{rp}^i F_m^r &= 0.
\end{aligned}$$

Систему (3.1) можно представить в виде следующих соотношений:

$$L_{\bar{X}} R = 0, \quad (3.2)$$

$$L_{\bar{Y}} R = 0, \quad (3.3)$$

$$R_{jkl}^m F_m^i = 0, R_{mkl}^i F_j^m = 0, \quad (3.4)$$

$$R_{mkl}^i G_j^m - R_{jkl}^m G_m^i = 0. \quad (3.5)$$

Равенства (3.2) и (3.3) являются условиями интегрируемости для уравнений (2.5), (2.6), а равенства (3.4), (3.5) совпадают с условиями (2.9), (2.10) разложения (2.4) соответственно.

4. Оценка размерности алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения $T(M)$ со связностью полного лифта в случае, когда база является непроективно-евклидовой специального случая

Линейная связность, заданная на (M, ∇) ($n > 2$), является непроективно-евклидовой тогда и только тогда, когда тензорное поле Г. Вейля этой связности отлично от нулевого. Это условие локально эквивалентно выполнению одного из следующих условий [4].

I. Существует карта гладкого атласа (U, φ) такая, что составляющая тензорного поля кривизны вида $R_{i_2 i_2 i_3}^{i_1}$ отлична от нуля для некоторых попарно различных индексов.

II. В каждой карте (V, ψ) все составляющие тензорного поля кривизны вида $R_{i_2 i_2 i_3}^{i_1}$ равны нулю, но существует карта (U, φ) такая, что составляющая вида $R_{i_2 i_3 i_4}^{i_1}$ отлична от нуля для некоторых попарно различных индексов.

В этой части работы мы рассмотрим случай I.

И.П. Егоровым установлено [5], что размерность алгебры Ли $\mathfrak{g}(M)$ инфинитезимальных аффинных преобразований непроективно-евклидова пространства

(M, ∇) не более $n^2 - 2n + 5$. Из рассмотренного выше следует, что для пространств разложения (2.4)

$$\dim L^0 + \dim L^1 \leq 2n^2 - 4n + 10.$$

Оценим размерность подалгебры L^2 . Для этого рассмотрим пространство решений уравнения $\nabla G = 0$, равносильного в локальных координатах системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\partial_j G_k^i - G_p^i \Gamma_{kj}^p + G_k^p \Gamma_{pj}^i = 0, \quad (4.1)$$

где $G \in \mathfrak{S}_1^1(M)$.

Предложение 4.1. *Первую серию условий интегрируемости системы (4.1) можно записать в виде*

$$G_k^m R_{mjl}^i - G_m^i R_{kjl}^m = 0. \quad (4.2)$$

Доказательство. Продифференцируем уравнения (4.1) по ∂_l , получим

$$\partial_l \partial_j G_k^i - \partial_l G_p^i \Gamma_{kj}^p + G_p^i \partial_l \Gamma_{kj}^p + \partial_l G_k^p \Gamma_{pj}^i + G_k^p \partial_l \Gamma_{pj}^i = 0, \quad (4.3)$$

В соотношениях (4.3) поменяем индексы l и j местами и из (4.3) вычтем полученные соотношения. В результате будем иметь

$$-\partial_l G_p^i \Gamma_{kj}^p + \partial_j G_p^i \Gamma_{kl}^p + G_p^i \partial_l \Gamma_{kj}^p - G_p^i \partial_j \Gamma_{kl}^p + \partial_l G_k^p \Gamma_{pj}^i - \partial_j G_k^p \Gamma_{pl}^i + G_k^p \partial_l \Gamma_{pj}^i - G_k^p \partial_j \Gamma_{pl}^i = 0,$$

Переходя к ковариантным производным в этих уравнениях и учитывая, что $\nabla G = 0$, получим равенство (4.2). \square

Уравнения (4.2) дают соотношения вида $T(\begin{smallmatrix} j \\ klm \\ i \end{smallmatrix} | \begin{smallmatrix} h \\ \end{smallmatrix}) G_h^m = 0$, где по определению

$$T(\begin{smallmatrix} j \\ klm \\ i \end{smallmatrix} | \begin{smallmatrix} h \\ \end{smallmatrix}) = \delta_k^h R_{ilm}^j - \delta_i^j R_{klm}^h.$$

Рассмотрим матрицу B системы, составленную из коэффициентов

$$\left(\begin{smallmatrix} j \\ 232 \end{smallmatrix} \right), \quad \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ s23 \end{smallmatrix} \right), \quad \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 223 \end{smallmatrix} \right), \quad j > 1, \quad s > 2$$

при неизвестных G_1^i ($i > 1$), G_k^2 ($k > 2$), G_1^1 в уравнениях $T(\begin{smallmatrix} j \\ klm \\ i \end{smallmatrix} | \begin{smallmatrix} h \\ \end{smallmatrix}) G_h^m = 0$.

Имеем

$$T(\begin{smallmatrix} j \\ 232 \\ i \end{smallmatrix} | \begin{smallmatrix} 1 \\ \end{smallmatrix}) = -\delta_i^j R_{232}^1, \quad i, j > 1,$$

$$T(\begin{smallmatrix} 1 \\ s23 \\ i \end{smallmatrix} | \begin{smallmatrix} 1 \\ \end{smallmatrix}) = 0, \quad T(\begin{smallmatrix} 1 \\ s23 \\ 2 \end{smallmatrix} | \begin{smallmatrix} k \\ \end{smallmatrix}) = \delta_s^k R_{223}^1, \quad i > 1, \quad k, s > 2,$$

$$T(\begin{smallmatrix} 1 \\ 223 \\ i \end{smallmatrix} | \begin{smallmatrix} 1 \\ \end{smallmatrix}) = 0, \quad T(\begin{smallmatrix} 1 \\ 223 \\ 2 \end{smallmatrix} | \begin{smallmatrix} k \\ \end{smallmatrix}) = 0, \quad i, s > 1, \quad k > 2, \quad T(\begin{smallmatrix} 1 \\ 223 \\ 1 \end{smallmatrix} | \begin{smallmatrix} 1 \\ \end{smallmatrix}) = -R_{223}^1.$$

Полагая $R_{223}^1 = a$, получим следующую матрицу B :

$$B = \begin{pmatrix} aI_{n-1} & * & * \\ 0 & aI_{n-2} & * \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix},$$

где I_k – единичная матрица порядка k .

Ранг данной матрицы равен $2n - 2$. Следовательно, размерность пространства решений $\nabla G = 0$ не более $n^2 - 2n + 2$. Для разложения (2.4) заключаем, что $\dim L^2 \leq n^2 - 2n + 2$.

Оценим размерность подалгебры L^3 . Рассмотрим пространство решений уравнения $\nabla F = 0$, которое равносильно в локальных координатах системе дифференциальных уравнений

$$\partial_j F_k^i - F_p^i \Gamma_{kj}^p + F_k^p \Gamma_{pj}^i = 0,$$

где $F \in \mathfrak{S}_1^1(M)$. Условия интегрируемости $F_j^m R_{mkl}^i = 0$, $F_k^m R_{jml}^i = 0$, $F_l^m R_{jkm}^i = 0$, $F_m^i R_{jkl}^m = 0$ этой системы дают соотношения вида $N_\alpha ({}^i_{jkl} | {}^h_m) F_h^m = 0$, $\alpha = 1, 2, 3$, где по определению

$$N_1 ({}^i_{jkl} | {}^h_m) = \delta_j^h R_{mkl}^i, \quad N_2 ({}^i_{jkl} | {}^h_m) = \delta_k^h R_{jml}^i, \quad N_3 ({}^i_{jkl} | {}^h_m) = \delta_m^h R_{jkl}^i.$$

Рассмотрим матрицу C системы, составленную из коэффициентов

$$\begin{pmatrix} p \\ 223 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ s23 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2j2 \end{pmatrix}, \quad s, j > 1$$

при неизвестных F_1^i , F_k^2 ($k > 1$), F_l^3 ($l > 1$) в уравнениях $N_\alpha ({}^i_{jkl} | {}^h_m) F_h^m = 0$, $\alpha = 1, 2, 3$.

Имеем

$$N_3 ({}^p_{223} | {}^1_i) = -\delta_i^p R_{223}^1,$$

$$N_1 ({}^1_{s23} | {}^1_i) = 0, \quad s, k > 1, \quad N_1 ({}^1_{s23} | {}^k_2) = \delta_s^k R_{223}^1,$$

$$N_2 ({}^1_{2j2} | {}^1_i) = 0, \quad N_2 ({}^1_{2j2} | {}^k_2) = 0, \quad N_2 ({}^1_{2j2} | {}^l_3) = \delta_j^l R_{232}^1, \quad s, j, l > 1.$$

Полагая $R_{223}^1 = a$, преобразуем матрицу C

$$C = \begin{pmatrix} -aI_n & * & * \\ 0 & aI_{n-1} & * \\ 0 & 0 & -aI_{n-1} \end{pmatrix},$$

где I_k – единичная матрица порядка k .

Так как ранг матрицы C равен $3n - 2$, то размерность пространства решений уравнения $\nabla F = 0$ не более $n^2 - 3n + 2$. Отсюда следует, что $\dim L^3 \leq n^2 - 3n + 2$.

Таким образом, имеет место

Теорема 4.1. *Если тензорное поле R связности ∇ имеет в некоторой координатной окрестности составляющую $R_{223}^1 \neq 0$, то размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований $\nabla^{(0)}$ не более чем $4n^2 - 9n + 14$.*

Для установления точности оценки, данной в теореме 4.1, рассмотрим пространство (R^n, ∇) , где линейная связность ∇ определяется следующими коэффициентами: $\Gamma_{23}^1 = x^2$, остальные равны нулю $\Gamma_{jk}^i = 0$. Тензорное поле кривизны R этого пространства имеет отличные от нуля компоненты $R_{223}^1 = -R_{232}^1 = 1$, тензорное поле Г. Вейля при этом имеет такие же компоненты $W_{223}^1 = -W_{232}^1 = 1$. Иначе говоря, это пространство является непроективно-евклидовым.

Алгебра Ли $g(R^n)$ инфинитезимальных аффинных преобразований пространства (R^n, ∇) имеет размерность $n^2 - 2n + 5$, базисом которой будут векторные поля [5]:

$$\begin{aligned} &\partial_1, \quad \partial_3, \quad \partial_h \quad (h > 3), \quad x^2 \partial_1, \quad x^3 \partial_1, \quad x^s \partial_1 \quad (s > 3), \\ &\partial_2 - x^2 x^3 \partial_1, \quad x^2 \partial_2 + 2x^1 \partial_1, \quad x^2 \partial_3 - \frac{(x^2)^3}{3} \partial_1, \\ &x^1 \partial_1 + x^3 \partial_3, \quad x^m \partial_h \quad (m > 1, \quad h > 3). \end{aligned}$$

Вычислим полные и вертикальные лифты этих векторных полей.

Полные лифты векторных полей есть

$$\begin{aligned} & \partial_1^0, \partial_3^0, \partial_h^0 \quad (h > 3), \quad x_0^2 \partial_1^0 + x_1^2 \partial_1^1, \quad x_0^3 \partial_1^0 + x_1^3 \partial_1^1, \quad x_0^s \partial_1^0 + x_1^s \partial_1^1 \quad (s > 3), \\ & \partial_2^0 - x_0^2 x_0^3 \partial_1^0 - x_1^2 x_0^3 \partial_1^1 - x_0^2 x_1^3 \partial_1^1, \quad x_0^2 \partial_2^0 + x_1^2 \partial_2^1 + 2x_0^1 \partial_1^0 + 2x_1^1 \partial_1^1, \\ & x_0^2 \partial_3^0 + x_1^2 \partial_3^1 - \frac{(x_0^2)^3}{3} \partial_1^0 - (x_0^2)^2 x_1^2 \partial_1^1, x_0^1 \partial_1^0 + x_1^1 \partial_1^1 + x_0^3 \partial_3^0 + x_1^3 \partial_3^1, \\ & x_0^m \partial_h^0 + x_1^m \partial_h^1 \quad (m > 1, h > 3). \end{aligned}$$

Вертикальные лифты векторных полей представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} & \partial_1^1, \partial_3^1, \partial_h^1 \quad (h > 3), \quad x_0^2 \partial_1^1, \quad x_0^3 \partial_1^1, \quad x_0^s \partial_1^1 \quad (s > 3), \\ & \partial_2^1 - x_0^2 x_0^3 \partial_1^1, \quad x_0^2 \partial_2^1 + 2x_0^1 \partial_1^1, \\ & x_0^2 \partial_3^1 - \frac{(x_0^2)^3}{3} \partial_1^1, x_0^1 \partial_1^1 + x_0^3 \partial_3^1, \quad x_0^m \partial_h^1 \quad (m > 1, h > 3). \end{aligned}$$

Таким образом, $\dim L^0(R^n) + \dim L^1(R^n) = 2n^2 - 4n + 10$.

Условия интегрируемости системы $\nabla_j G_i^h = 0$ составляют соотношения

$$G_1^i = 0 \quad (i > 1), \quad G_k^2 = 0 \quad (k > 2), \quad G_2^2 - G_1^1 = 0.$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений $\nabla_j G_i^h = 0$ зависит от $n^2 - 2n + 2$ произвольных постоянных и является линейной комбинацией следующих линейно-независимых тензорных полей типа (1,1):

$$\begin{aligned} & \partial_1 \otimes dx^1 + \frac{(x^2)^2}{2} \partial_1 \otimes dx^3 + \partial_2 \otimes dx^2, \quad \partial_1 \otimes dx^2, \quad \partial_1 \otimes dx^3, \quad \partial_1 \otimes dx^k \quad (k > 3), \\ & \partial_3 \otimes dx^2 - \frac{(x^2)^2}{2} \partial_1 \otimes dx^2, \quad \partial_3 \otimes dx^k - \frac{(x^2)^2}{2} \partial_1 \otimes dx^k \quad (k > 2), \quad \partial_h \otimes dx^k \quad (h > 3, k > 1). \end{aligned}$$

Базис алгебры $L^2(R^n)$ составляют векторные поля вида

$$\begin{aligned} & \left(x_1^1 + \frac{(x_0^2)^2}{2} x_1^3 \right) \partial_1^1 + x_1^2 \partial_2^1, \quad x_1^k \partial_1^1 \quad (k > 1), \\ & - \frac{(x_0^2)^2}{2} x_1^k \partial_1^1 + x_1^k \partial_3^1 \quad (k > 1), \quad x_1^k \partial_h^1 \quad (h > 3, k > 1). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что размерность алгебры Ли $L^2(R^n)$ инфинитезимальных аффинных преобразований пространства (R^n, ∇) равна $n^2 - 2n + 2$.

Для тензорного поля $F \in \mathfrak{S}_1^1(M)$ первая серия условий интегрируемости системы $\nabla F = 0$ представлена соотношениями

$$F_1^i = 0, \quad F_k^2 = 0 \quad (k > 1), \quad F_l^3 = 0 \quad (l > 1).$$

Общее решение системы $\nabla_j F_i^h = 0$ зависит от $n^2 - 3n + 2$ произвольных постоянных и является линейной комбинацией следующих линейно-независимых тензорных полей типа (1,1):

$$\partial_1 \otimes dx^k \quad (k > 1), \quad \partial_h \otimes dx^k \quad (h > 3, k > 1).$$

$H\gamma$ -лифты этих тензорных полей образуют базис алгебры $L^3(R^n)$ и имеют вид

$$x_1^k \partial_1^0 \quad (k > 1), \quad x_1^k \partial_h^0 \quad (h > 3, k > 1).$$

Следовательно, размерность алгебры Ли $L^3(R^n)$ инфинитезимальных аффинных преобразований пространства (R^n, ∇) равна $n^2 - 3n + 2$.

Учитывая, что пространство $\tilde{L}(R^n)$ есть прямая сумма подпространств $L^0(R^n)$, $L^1(R^n)$, $L^2(R^n)$, $L^3(R^n)$, будет иметь место

Теорема 4.2. *Размерность алгебры Ли $\tilde{L}(R^n)$ инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $T(M)$ равна $4n^2 - 9n + 14$.*

5. О верхней границе размерности алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований синектического расширения полного лифта линейной связности

А.П. Широкова на касательное расслоение

На касательном расслоении $T(M)$ гладкого многообразия M можно построить синектическое расширение ∇^{Sh} А.П. Широкова полного лифта $\nabla^{(0)}$ линейной связности ∇ с помощью тензорного поля Γ_1 типа (1,2), заданного на базе M расслоения. Линейная связность ∇^{Sh} определяется условием

$$\nabla_{X^{(a)}}^{\text{Sh}} Y^{(b)} = \nabla_{X^{(a)}}^{(0)} Y^{(b)} + (\Gamma_1(X, Y))^{(\epsilon^{1ab})} \quad (5.1)$$

для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M)$ и любых дуальных чисел a, b из алгебры $R(\epsilon)$ дуальных чисел над полем R . В равенстве (5.1) полагаем $\epsilon^1 = \epsilon$; единицу алгебры $R(\epsilon) = \{x + y\epsilon \mid x, y \in R\}$ мы обозначим через ϵ^0 . Это позволяет сократить записи выражений. Например, вместо записи $X^{(\epsilon^\alpha)}$ будем использовать запись $X^{(\alpha)}$, $\alpha = 0, 1$.

Из определения связности ∇^{Sh} А.П. Широкова следуют тождества вида

$$\begin{aligned} \nabla_{X^{(0)}}^{\text{Sh}} Y^{(0)} &= (\nabla_X Y)^{(0)} + (\Gamma_1(X, Y))^{(1)}, \\ \nabla_{X^{(0)}}^{\text{Sh}} Y^{(1)} &= (\nabla_X Y)^{(1)}, \\ \nabla_{X^{(1)}}^{\text{Sh}} Y^{(0)} &= (\nabla_X Y)^{(1)}, \\ \nabla_{X^{(1)}}^{\text{Sh}} Y^{(1)} &= 0. \end{aligned}$$

Обозначим через T^{Sh} , и R^{Sh} тензорные поля кручения и кривизны связности ∇^{Sh} соответственно. Предположим, что синектическая связность ∇^{Sh} не имеет кручения: $T^{\text{Sh}} = 0$. Тогда имеет место

Теорема 5.1. *Если тензорное поле Γ Вейля W^{Sh} связности ∇^{Sh} равно нулю, то связность ∇^{Sh} локально плоская, то есть $R^{\text{Sh}} = 0$.*

Доказательство. Пусть в точке t_x касательного расслоения $T(M)$ $W^{\text{Sh}}(t_x) = 0$. В координатной окрестности $(\pi^{-1}(U), x_0^i, x_1^i)$ все компоненты тензора $W^{\text{Sh}}(t_x) = 0$ будут равны нулю:

$$W_{t_x}^{\text{Sh}} \left(\partial_j^\beta, \partial_k^\gamma, \partial_i^\alpha \right) = 0$$

для всех $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1$ и $i, j, k = 1, 2, \dots, n$. Тогда компоненты $R_{t_x}^{\text{Sh}}(\partial_j^\beta, \partial_k^\gamma)\partial_i^\alpha$ тензора кривизны R^{Sh} в точке t_x будут удовлетворять соотношениям [4]

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ijk\sigma}^{\alpha\beta\gamma h} &= \frac{1}{2n+1} \delta_i^h \delta_\sigma^\alpha \left(R_{kj}^{\gamma\beta} - R_{jk}^{\beta\gamma} \right) + \\ &+ \frac{1}{4n^2-1} \left(\left(2nR_{ij}^{\alpha\beta} + R_{ji}^{\beta\alpha} \delta_k^h \delta_\sigma^\gamma \right) - \left(2nR_{ik}^{\alpha\gamma} + R_{ki}^{\gamma\alpha} \delta_j^h \delta_\sigma^\beta \right) \right), \quad (5.2) \end{aligned}$$

где $\tilde{R}_{ij}^{\alpha\beta}$ – компоненты тензора Риччи связности ∇^{Sh} . В силу коммутативности алгебры дуальных чисел компоненты $\tilde{R}_{ijk\sigma}^{\alpha\beta\gamma h}$, $\tilde{R}_{ij}^{\alpha\beta}$ будут инвариантными при любых перестановках индексов α, β, γ (здесь использован символ \tilde{R} для обозначения R^{Sh}).

В соотношениях (5.2) поменяем α и β местами и полученные соотношения вычтем из (5.2). В результате получим

$$0 = \delta_i^h \left(\left(\delta_\sigma^\alpha R_{kj}^{\gamma\beta} - R_{jk}^{\beta\gamma} \right) - \delta_\sigma^\beta \left(R_{kj}^{\gamma\alpha} - R_{jk}^{\alpha\gamma} \right) \right) - \frac{1}{2n-1} \delta_j^h \left(2n \left(\delta_\sigma^\beta R_{ik}^{\alpha\gamma} - \delta_\sigma^\alpha R_{ik}^{\beta\gamma} \right) + \left(\delta_\sigma^\beta R_{ki}^{\gamma\alpha} - \delta_\sigma^\alpha R_{ki}^{\gamma\beta} \right) \right).$$

Свернем эти соотношения по α и σ . Тогда

$$\delta_i^h \left(R_{kj}^{\gamma\beta} - R_{jk}^{\beta\gamma} \right) + \frac{1}{2n-1} \delta_j^h \left(2n \left(R_{ik}^{\beta\gamma} + R_{ki}^{\gamma\beta} \right) \right) = 0.$$

Полученные соотношения свернем по индексам i и h :

$$n \left(R_{kj}^{\gamma\beta} - R_{jk}^{\beta\gamma} \right) + \frac{1}{2n-1} \delta_j^h \left(2n \left(R_{jk}^{\beta\gamma} + R_{kj}^{\gamma\beta} \right) \right) = 0.$$

Отсюда

$$\left(n + \frac{1}{2n-1} \right) \left(R_{kj}^{\gamma\beta} + \left(\frac{2n}{2n-1} - n \right) R_{jk}^{\beta\gamma} \right) = 0. \quad (5.3)$$

Учитывая, что $R_{kj}^{\gamma\beta} = R_{kj}^{\beta\gamma}$, и поменяв местами j и k , из (3) находим

$$\left(\frac{2n}{2n-1} - n \right) R_{kj}^{\gamma\beta} + \left(n + \frac{1}{2n-1} \right) R_{jk}^{\beta\gamma} = 0. \quad (5.4)$$

Из соотношений (5.3) и (5.4) следует, что $R_{jk}^{\beta\gamma} = 0$. Следовательно, $R_{t_x}^{\text{Sh}} = 0$. \square

Следствие 5.1. *Если линейная связность ∇^{Sh} не является локально плоской, то она не является и проективно-плоской.*

На основании следствия 5.1 и теоремы И.П. Егорова о том, что максимальная размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований непроективно-евклидовой линейной связности без кручения не больше чем $d^2 - 2d + 5$, где d – размерность пространства, заключаем, что имеет место

Теорема 5.2. *Размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения $T(M)$, снабженного синектической связностью ∇^{Sh} А.П. Широкова, не больше чем $4n^2 - 4n + 5$ при условии, что ∇^{Sh} не является локально плоской.*

Рассмотрим теперь на $T(M)$ синектические связности ∇^{Sh} с отличными от нуля тензорными полями кручения T^{Sh} .

Теорема 5.3. *Если $T^{\text{Sh}} \neq 0$, то не существует 1-формы $\tilde{\Phi}$, удовлетворяющей тождеству*

$$T^{\text{Sh}}(X^{(a)}, Y^{(b)}) = \tilde{\Phi}(X^{(a)})Y^{(b)} - \tilde{\Phi}(Y^{(b)})X^{(a)}, \quad (5.5)$$

$a, b \in R(\epsilon)$, $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M)$.

Доказательство. Пусть t_x – произвольная точка касательного расслоения $T(M)$, (π^{-1}, x_0^i, x_1^i) – координатная окрестность, содержащая эту точку. Предположим, что существует 1-форма $\tilde{\Phi}$, удовлетворяющая тождеству (5.5). Тогда для векторных полей ∂_i^α имеем

$$T^{\text{Sh}}(\partial_i^\alpha, \partial_j^\beta) = \Phi_i^\alpha \partial_i^\beta - \Phi_j^\beta \partial_i^\alpha. \quad (5.6)$$

Положим

$$T^{\text{Sh}}(\partial_i^\alpha, \partial_j^\beta) = \tilde{T}_{ij\sigma}^{\alpha\beta h} \partial_h^\sigma.$$

В силу коммутативности алгебры $R(\epsilon)$ имеем

$$T^{\text{Sh}}(\partial_i^\alpha, \partial_j^\beta) = T^{\text{Sh}}(\partial_i^\beta, \partial_j^\alpha).$$

Поэтому соотношения (5.6) можно переписать следующим образом:

$$\Phi_i^\alpha \partial_i^\beta - \Phi_j^\beta \partial_i^\alpha = \Phi_i^\beta \partial_i^\alpha - \Phi_j^\alpha \partial_i^\beta.$$

Отсюда

$$\Phi_i^\alpha \delta_j^h \delta_\sigma^\beta - \Phi_j^\beta \delta_i^h \delta_\sigma^\alpha = \Phi_i^\beta \delta_j^h \delta_\sigma^\alpha - \Phi_j^\alpha \delta_i^h \delta_\sigma^\beta.$$

Свернем эти соотношения по α и σ :

$$\delta_j^h \Phi_i^\beta - 2\delta_i^h \Phi_j^\beta = 2\Phi_i^\beta \delta_j^h - \Phi_j^\beta \delta_i^h.$$

Значит,

$$\phi_i^\beta \delta_j^h + \Phi_j^\beta \delta_i^h = 0.$$

Свернув полученные соотношения по h и i , получим

$$(n+1)\Phi_j^\beta = 0,$$

откуда $\Phi_j^\beta = 0$.

Итак, $T_{t_x}^{\text{Sh}} = 0$ в каждой точке расслоения $T(M)$, что противоречит условию $T^{\text{Sh}} \neq 0$. □

Доказанная теорема позволяет сформулировать

Следствие 5.2. *Если $T^{\text{Sh}} \neq 0$, то для любой 1-формы $\tilde{\Phi}$, заданной на $T(M)$*

$$T^{\text{Sh}} \neq \tilde{\Phi} \otimes \tilde{I} - \tilde{I} \otimes \tilde{\Phi},$$

где \tilde{I} – единичный аффинор на $T(M)$.

На основании следствия 5.2 и известного результата И.П. Егорова заключаем, что имеет место

Теорема 5.4. *Если тензорное поле кручения T^{Sh} ненулевое, то размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований синектической связности ∇^{Sh} на $T(M)$ не больше чем $4n^2 - 4n + 6$.*

Summary

A.Ya. Sultanov, G.A. Sultanova. An Estimate of the Dimension of the Lie Algebra of Infinitesimal Affine Transformations in the Tangent Bundle $T(M)$ with Complete Lift Connection.

In this article we obtain the exact dimensions of the Lie algebra of infinitesimal affine transformations in the tangent bundle $T(M)$ with a complete lift, when the base M is a non-projective Euclidean space of special type.

Keywords: differentiable manifold, complete lift connection, infinitesimal affine transformation, vertical-vector lift of affnor, horizontal-vector lift of affnor, Lie algebra, non-projective Euclidean space.

Литература

1. *Yano K., Ishihara S.* Tangent and cotangent bundles: differential geometry. – N. Y.: Marcel Dekker, Inc., 1973. – 423 p.
2. *Султанов А.Я.* Продолжения тензорных полей и связностей в расслоения Вейля // Изв. вузов, Матем. – 1994. – № 9. – С. 64–72.
3. *Шадыев Х.* Аффинная коллинеация синектической связности в касательном расслоении // Труды геом. семинара. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984. – Вып. 16. – С. 117–127.
4. *Синюков Н.С.* Геодезические отображения римановых пространств. – М.: Наука, 1979. – 256 с.
5. *Егоров И.П.* Движения в пространствах аффинной связности. – М.: Либроком, 2009. – 184 с.

Поступила в редакцию
07.05.14

Султанов Адгам Яхиевич – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры «Алгебра и методика обучения математике и информатике», Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия.

E-mail: *sultanovaya@rambler.ru*

Султанова Галия Алиевна – аспирант кафедры «Алгебра и методика обучения математике и информатике», Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия.

E-mail: *sultgaliya@yandex.ru*