

УДК 539.3

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК АРМИРОВАННЫХ ВОЛОКНАМИ КОМПОЗИТОВ

Р.А. Каюмов, С.А. Луканкин, В.Н. Паймушин, С.А. Холмогоров

Аннотация

Приведены методики идентификации механических характеристик волокнистых композитов по результатам испытаний их на растяжение, сжатие и изгиб. Рассмотрен случай нелинейно-упругого материала. Для аппроксимации соотношений при растяжении и сжатии принята разномодульная зависимость напряжений от деформаций. Параметры этой зависимости предложено находить путем проведения экспериментов на растяжение и изгиб, модуль поперечного изгиба – на основе решения обратных задач изгиба по результатам испытаний длинных и коротких образцов. Эти методики применены к анализу экспериментальных данных, полученных для углеродной HSE 180 REM с прямолинейными волокнами и эпоксидного связующего ЭДТ-69НМ.

Ключевые слова: идентификация, эксперимент, волокнистый композит, механические характеристики.

Введение

При прочностном анализе конструкций из композитных материалов (КМ) используется, как правило, феноменологический подход к описанию свойств КМ, согласно которому композит рассматривается как условно однородный и, как правило, анизотропный материал. На этой основе разрабатываются соответствующие математические модели, корректно описывающие его деформирование и разрушение. Параметры таких моделей, как правило, определяются, исходя из данных соответствующих экспериментов. Известно существенное влияние на механические свойства КМ технологических факторов при изготовлении изделий и элементов конструкций. Поэтому КМ рассматривают как материал, создаваемый совместно с конструкцией, а информацию о его свойствах получают на основе результатов испытаний таких «характерных» образцов, которые адекватно отражали бы специфику работы КМ в составе реальной конструкции. Этому требованию в ряде случаев удовлетворяют стандартные плоские образцы, изготовленные наложением определённого количества монослоев друг на друга. Такие образцы являются внутренне статически неопределимыми, то есть для нахождения напряжений в осях ортотропии КМ требуется привлечение условий совместности деформаций. Задача определения механических характеристик КМ по известным *входным* и *выходным* данным, называемая задачей идентификации, является *обратной* задачей, которая, как правило, не может быть решена точно. Кроме того, она может оказаться неустойчивой по исходным данным.

Подход к определению параметров, характеризующих нелинейно-упругое поведение ортотропных волокнистых композитных материалов (ВКМ), по результатам испытаний тонких безмоментных цилиндрических оболочек, образованных перекрестной намоткой или укладкой лент из данного ВКМ, был рассмотрен в [1–5].

В случае линейно-упругих композитов были установлены условия невырожденности разрешающей системы уравнений и предложены способы её нормировки, улучшающие обусловленность задачи. В [6, 7] такая же задача была рассмотрена для определения линейно-упругих характеристик ВКМ. В [8, 9] был предложен метод идентификации линейно-упругих характеристик ВКМ по замерам деформаций тонкой многослойной пластины, изготовленной наложением слоев ВКМ с различной ориентацией волокон. В [10, 11] идентификация линейно-упругих характеристик ВКМ производилась по результатам динамических испытаний оболочек и пластин. В [12, 13] в качестве объектов испытаний рассматривались намоточные оболочки вращения. В [1] был предложен подход, в котором вводятся дополнительные неизвестные, представляющие собой независимые вариации как исходных, так и искомых параметров. Было показано, что получаемое при этом решение гораздо точнее удовлетворяет всем разрешающим уравнениям задачи.

Было обнаружено, что при больших различиях в значениях неизвестных даже незначительные (в пределах $\pm 5\%$) возмущения исходных данных весьма существенно влияют на определяемые значения малых параметров. Методам регуляризации таких задач идентификации посвящена довольно обширная литература [14, 15].

В настоящей статье дан анализ результатов испытаний, проведенных в соответствии с существующими отечественными и международными стандартами [16–22] на растяжение и трёхточечный изгиб, композитных тест-образцов, изготовленных из углеродной HSE 180 REM и связующего ЭДТ-69НМ, и на основе применения методов идентификации найдены соответствующие механические характеристики рассматриваемого композита.

1. Основные положения теории идентификации упругих характеристик материала

Форму физических соотношений для нелинейно-упругого материала, из которого изготовлены конструкции, запишем в виде

$$\sigma = \partial f / \partial \varepsilon, \quad (1)$$

где σ , ε – векторы, составленные из компонент тензоров напряжений и деформаций, f – упругий потенциал. Здесь и далее векторы обозначены строчными буквами, а матрицы и операторы – прописными, операция транспонирования – индексом T . Математическая модель деформирования исследуемых конструкций включает в себя:

- кинематические соотношения, устанавливающие связь между деформациями и перемещениями,

$$\varepsilon(x) = Bu(x); \quad (2)$$

- кинематические граничные условия

$$Ku(x) = 0, \quad x \in \gamma_u; \quad (3)$$

- уравнения равновесия конструкций или образцов, изготовленных из исследуемого материала,

$$L\sigma(x) = q(x, t), \quad x \in \omega, \quad (4)$$

$$N\sigma(x) = p(x, t), \quad x \in \gamma_p. \quad (5)$$

Здесь x – радиус-вектор точки; u – вектор перемещений; t – параметр процесса нагружения; q , p – векторы внешних объемных и поверхностных сил; L , N , B ,

K – дифференциальные или интегральные операторы; ω – область, занимаемая телом; γ_u, γ_p – её границы, на которых заданы соответственно поверхностные внешние силы и кинематические граничные условия.

Если соотношения (1)–(5) записываются в разных системах координат (например, в осях $Ox^1x^2x^3$ и $O\tilde{x}^1\tilde{x}^2\tilde{x}^3$), то добавляются формулы преобразования

$$\tilde{\sigma} = S\sigma, \quad \varepsilon = S^T\tilde{\varepsilon}, \quad (6)$$

где S – квадратная матрица. Например, в случае плоского напряжённого состояния матрица $[S]$ имеет вид (см., например, [23]):

$$[S] = \begin{vmatrix} \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & -\sin 2\phi \\ \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi/2 & -\sin 2\phi/2 & \cos 2\phi \end{vmatrix}.$$

Пусть проведены испытания ряда конструкций и сделаны замеры обобщённого перемещения y^* (например, углов поворота, перемещений или деформаций) в некоторых их точках x_n^* , $n = 1, \dots, N$, при разных значениях параметра нагружения t_i^* , то есть при $p = p_i^*$, $q = q_i^*$, $t_i^* > t_{i-1}^*$, $i = 1, \dots, I$. Здесь и далее звёздочкой будут отмечаться параметры, полученные экспериментально или в результате аппроксимации экспериментальных данных. Таким образом, считаются известными параметры y_{ni}^* .

Запишем выражения, связывающие функции u и y , в виде

$$y = Gu,$$

где G – дифференциальный, интегральный или алгебраический оператор. Тогда результаты экспериментов можно представить в виде

$$Gu(x_n^*, t_i^*) = y_{ni}^*. \quad (7)$$

Задача идентификации механических характеристик композита заключается в том, что необходимо найти функции $f(\varepsilon)$, и $u(x)$, которые точно или приближенно удовлетворяют соотношениям (1)–(7) при экспериментальных значениях параметра нагрузки $t = t_i^*$, а возможно, и при некотором другом $t = t_0$ (то есть при интересующих расчетчика нагрузках $p_0 = p(x, t_0)$, $q_0 = q(x, t_0)$).

Соотношения (1) представляются обычно с помощью некоторой аппроксимирующей функции:

$$\sigma = \varphi(\varepsilon, c), \quad (8)$$

где c – вектор, составленный из искомых постоянных c_j , $j = 1, \dots, J$, определяющих свойства материала.

По экспериментальным данным y_{ni}^* можно найти аппроксимации для обобщенных перемещений в точках x_n^* в виде функции параметра процесса t . Запишем эти результаты в операторном виде

$$Gu(x^*) = b^*(x^*, t), \quad x^* \in g^*, \quad t_1^* \leq t \leq t_I^*, \quad (9)$$

где b^* – аппроксимирующая функция, g^* – множество точек, в которых проведены замеры. Аналогично по значениям нагрузок p_i^* , q_i^* при $t = t_i^*$, но с добавлением к ним функций p_0 , q_0 при $t = t_0$, можно найти аппроксимации для p , q в виде

$$p = p^*(x, t); \quad q = q^*(x, t); \\ p^*(x, t_i^*) \approx p_i^*; \quad q^*(x, t_i^*) \approx q_i^*; \quad p^*(x, t_0) \approx p_0; \quad q^*(x, t_0) \approx q_0.$$

Проведем аппроксимацию операторов L , N , B , K по пространственным координатам и параметру t , а функцию u выразим через вектор v , составленный из неизвестных констант v_k , $k = 1, \dots, K$,

$$u = u^a(v, x, t). \quad (10)$$

Для получения из соотношений (1)–(6) алгебраической системы уравнений относительно искомым векторов v , c можно использовать какой-либо из известных методов решения дифференциальных или интегральных уравнений. После этого уравнения (1)–(6), записанные для нагрузок p , q , можно представить следующим образом:

$$L^a[v, c, q^*(t)] = 0, \quad N^a[v, c, p^*(t)] = 0, \quad K^a(v) = 0. \quad (11)$$

С учётом (10) соотношение (9) записывается в виде

$$G^a(v, x^*, t) = b^*(x^*, t), \quad x^* \in g^*, \quad t_1 \leq t \leq t_I. \quad (12)$$

Систему уравнений (11), (12) для ряда значений параметра t ($t = \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$) запишем в виде

$$r(v, c, \tau_1) = 0, \quad r(v, c, \tau_2) = 0, \quad \dots, \quad r(v, c, \tau_p) = 0.$$

Вводя новый вектор $z = (v, c)^T$, составленный из безразмерных компонент векторов v и c , перепишем эту систему следующим образом:

$$\zeta(z) = 0. \quad (13)$$

Умножим (13) на квадратную диагональную матрицу весовых коэффициентов W и запишем результат в виде

$$W\zeta(z) = a(z) = 0. \quad (14)$$

В общем случае получается система нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных c_i , u_k , которая может быть недоопределенной, определенной и переопределенной.

Критериями, в соответствии с которыми необходимо отыскивать решение, являются точность удовлетворения уравнений механики, минимальность невязки расчетных и экспериментальных результатов, устойчивость решения к возмущениям исходных данных. Кроме того, на параметры c_i , вообще говоря, должны накладываться ограничения, вытекающие из условия устойчивости материала,

$$d\sigma d\varepsilon \geq 0. \quad (15)$$

Это приводит к требованию неотрицательной определенности матрицы Гессе, составленной из вторых производных упругого потенциала f по компонентам вектора ε .

Уравнения (14) могут не иметь решения в классическом смысле, даже если форма закона упругости (8) выбрана так, что условие устойчивости (15) будет выполняться при любых c_i , то есть система (14) может оказаться несовместной, иметь неединственное решение, быть неустойчивой по отношению к возмущениям исходных данных. Такие задачи называются некорректно поставленными. В настоящее время разработаны различные способы их решения. В частности, согласно методу квазирешений вектор z можно искать путем сведения проблемы к некоторой задаче математического программирования, выбрав в качестве целевой функции, например, квадратичную невязку уравнений (14)

$$\delta^2 = a^T(z)a(z).$$

Если для выбора вектора c можно выделить множество, в котором будет удовлетворяться условие (15), то можно записать условие минимума δ^2 в следующем виде:

$$(\partial a^T / \partial z)a = 0. \quad (16)$$

Можно также минимизировать квадратичную невязку только уравнений (12) со своими весами, а уравнения (11) считать ограничениями, получая, таким образом, задачу на условный экстремум. В последнем случае уравнения механики получают приоритет, то есть точность их выполнения будет считаться более важным аспектом, чем соответствие экспериментальных и расчетных результатов. Можно в качестве ограничений оставить лишь часть соотношений (11), (12) и минимизировать невязку оставшихся уравнений.

Выбор параметров $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$, числа p , совокупности уравнений, невязка которых минимизируется, весовых коэффициентов матрицы W достаточно произволен. Он определяется рядом объективных и субъективных факторов (например, желанием уменьшить значение сомнительных с точки зрения расчётчика экспериментальных данных или экспериментальных данных, полученных для далёких от p_0, q_0 нагрузок).

Задача (16) может иметь множество решений. В частности, неоднозначность решения будет иметь место тогда, когда число неизвестных компонент J вектора c будет больше I – числа экспериментов.

Один из методов решения некорректных задач заключается в том, что минимизируется некоторый стабилизирующий функционал Ω при условии, что мала невязка уравнений (14). В качестве Ω можно выбрать, например, квадратичный функционал

$$\Omega = (z - z_0)^T A(z - z_0),$$

где A – положительно определенная квадратная матрица, z_0 – некоторый вектор из множества, в котором отыскивается z . Его можно задать, выбрав c_0 для какого-либо реального материала и решив прочностные задачи (11). Найденное решение будет устойчивым относительно возмущений исходных данных. В общем случае решение будет зависеть от z_0 , в частности, в упомянутом выше случае, когда $J > I$.

Задачу (16) можно также решать путем минимизации регуляризованного функционала вида

$$\Phi^2 = \delta^2 + \alpha\Omega. \quad (17)$$

Если записать функционал δ^2 и ограничения (15) в линейаризованном виде относительно малых приращений Δz к начальному вектору z_0 , то получим задачу линейного программирования относительно Δz , к которой применимы результаты, приведенные в работе [15]. Условие устойчивости материала (15) будет выполнено, если неотрицательны все главные миноры матрицы Гессе $F = \partial^2 f / \partial \varepsilon \partial \varepsilon$:

$$\phi_1 = F_{11} \geq 0, \quad \phi_2 = \det \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} \geq 0, \quad \phi_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, k_0. \quad (18)$$

Записывая (18) через приращения Δz , получим

$$\varphi_k(z_0) + \Phi_k(z_0)\Delta z \geq 0, \quad k = 1, \dots, k_0. \quad (19)$$

Условия (19) для материала, вообще говоря, должны удовлетворяться не только для частного случая z_0 , а для любых z . Но для разрешимости задачи без нарушения энергетических законов механики вблизи точки z_0 достаточно выполнения неравенств (19).

Как показано в работе [24], полученная задача линейного программирования минимизации (17) при ограничениях (19) имеет единственное нормальное решение.

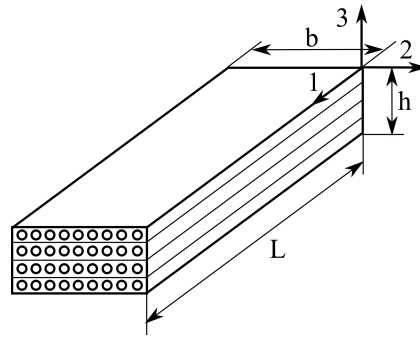


Рис. 1. Направления осей и геометрические размеры

2. Задачи идентификации модуля упругости композита при сжатии по результатам испытаний тест-образцов на трёхточечный изгиб

Из экспериментов на растяжение плоских образцов из армированного волокнами композита (направления осей и геометрические размеры тест-образца показаны на рис. 1) абсолютно надежно определяются модули Юнга E_1 , E_2 и коэффициенты Пуассона ν_{12} , $\nu_{21} = E_2\nu_{12}/E_1$. Но характеристики E_1 , E_2 определяют также и из экспериментов на трёхточечный изгиб длинных балок, изготовленных из того же материала. Эксперименты же показывают, что результаты при этом достаточно сильно отличаются, причём E_1 и E_2 , найденные из задачи изгиба, оказываются ниже тех, что получены из экспериментов на растяжение. Причиной этого принято считать несовпадение диаграмм на растяжение и сжатие для армированного волокнами композита. В силу этого при аппроксимации указанных диаграмм линейными функциями получается материал, модули Юнга которого зависят от знака деформации. Однако задача определения напрямую из экспериментов на сжатие модуля упругости E^- (в дальнейшем параметры, относящиеся к сжатию или укорочению, будем снабжать индексом “-”, а относящиеся к растяжению или удлинению – индексом “+”) представляет собой не устойчивую к изменениям условий эксперимента задачу, поскольку при малых длинах образца нелегко определить укорочение с хорошей (достаточной) точностью, а при больших длинах образца сразу начинается продольный изгиб, так как трудно осуществить центральное сжатие. В то же время модули Юнга при сжатии обычно получаются меньшими, чем при растяжении, а поскольку устойчивость изделий в традиционных задачах теряется при сжимающих напряжениях, знание модулей Юнга при сжатии безусловно необходимо.

Для определения E^+ , E^- необходимо совместное решение двух задач для изделий или образцов из КМ. В одной из них должна преобладать деформация растяжения. Наиболее простым вариантом является эксперимент на разрыв. С помощью него можно сразу определить модуль Юнга при растяжении E^+ . Для определения E^- целесообразно провести эксперименты на изгиб.

Рассмотрим задачу об изгибе балки из разномодульного материала при центральном нагружении (см. рис. 2). Принимая гипотезу плоских сечений, можно записать соотношение для деформаций в виде

$$\varepsilon = -\chi y. \quad (20)$$

Сначала составим уравнения равновесия для части балки:

$$\int_{A_1} \sigma_1 dA + \int_{A_2} \sigma_2 dA = 0.$$

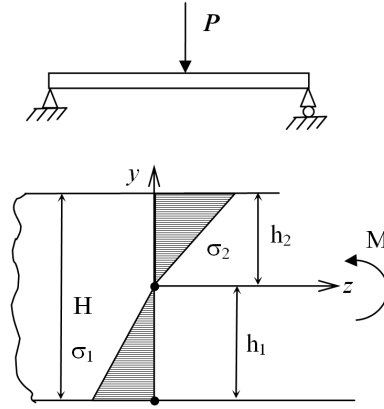


Рис. 2. Изгиб балки при центральном нагружении

Если балка имеет прямоугольное сечение ширины b , высоты H , то

$$\sigma_1 = -E^+ y \chi, \quad \sigma_2 = -E^- y \chi, \quad b \int_{-h_1}^0 E^+ y \cdot \chi dy + b \int_0^{H-h_1} E^- y \cdot \chi dy = 0, \quad (21)$$

откуда

$$-E^+ h_1^2 + E^- (H - h_1)^2 = 0. \quad (22)$$

Связь E^- и h_1 примет вид

$$\frac{(\sqrt{E^+ E^-} - E^-)}{E^+ - E^-} H - h_1 = 0. \quad (23)$$

Уравнение для w получим обычным путем. Сначала, учитывая, что балка имеет прямоугольное сечение, запишем связь напряжений с изгибающим моментом

$$b \int_0^{H-h_1} \sigma y dy + b \int_{-h_1}^0 \sigma y dy = -M. \quad (24)$$

На основе гипотезы плоских сечений, выраженной соотношением (20), получим

$$b \int_{-h_1}^0 E^+ y^2 \chi dy + b \int_0^{H-h_1} E^- y^2 \chi dy = M. \quad (25)$$

Отсюда следует зависимость

$$\chi = -\frac{M}{E^+ J_1 + E^- J_2},$$

где

$$J_1 = \frac{bh_1^3}{3}, \quad J_2 = \frac{bh_2^3}{3}. \quad (26)$$

Поскольку кривизна χ при малых поворотах представляет собой вторую производную прогиба w , получим уравнение

$$w'' = -\frac{M}{(EJ)^{\text{bend}}}, \quad (27)$$

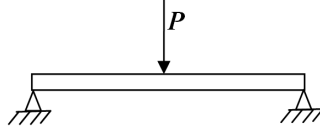


Рис. 3. Схема испытаний на трёхточечный изгиб

где $(EJ)^{\text{bend}}$ – изгибная жёсткость балки, вычисляемая по формуле

$$(EJ)^{\text{bend}} = E^+ J_1 + E^- J_2. \quad (28)$$

Зная вид решения уравнения (27) и экспериментальное значение прогиба, можно найти $(EJ)^{\text{bend}}$. Тогда из системы уравнений (28), (23), (26) следует формула для определения E^-

$$E^- = 3E^+(EJ)^{\text{bend}} / \left(3(EJ)^{\text{bend}} - 2\sqrt{3E^+b(EJ)^{\text{bend}} \cdot H\sqrt{H} + bE^+H^3} \right). \quad (29)$$

Решение уравнения (27) для задачи, изображенной на рис. 1, известно, с его помощью можно построить выражение для экспериментального значения изгибной жёсткости $(EJ)^{\text{bend}}$

$$(EJ)_{\text{exp}}^{\text{bend}} = \frac{1}{w_{\text{max}}^{\text{exp}}} \frac{Pl^3}{48}. \quad (30)$$

Таким образом, по результатам экспериментов на растяжение вдоль и поперек волокон, а также на трёхточечный изгиб в двух взаимно перпендикулярных плоскостях в соответствии с соотношениями (30) и (29) определяются значения E_1^- , E_2^- , то есть модули Юнга при сжатии в направлении и поперёк армирования.

3. Методика определения модуля поперечного сдвига G по результатам испытаний тест-образцов на трёхточечный изгиб

В соответствии с существующими стандартами [21] с целью определения кажущегося предела прочности при межслойном сдвиге проводят испытания короткой балки на трёхточечный изгиб по схеме, приведённой на рис. 3.

При таком виде нагружения в поперечных сечениях тест-образца, наряду с внутренним изгибающим моментом, формируется также перерезывающая сила, а максимальное значение прогиба по классической теории изгиба балок с учетом поперечного сдвига в линейном приближении будет определяться по формуле

$$w_{\text{max}} = w^{\text{bend}} + w^{\text{sh}} = \frac{Pl^3}{48(EJ)^{\text{bend}}} + \frac{Pla}{GA}, \quad (31)$$

где $a = 0.3$. Поскольку $(EJ)^{\text{bend}}$, G_{12} неизвестны, необходимо составить систему уравнений для их определения. Для этого нужно испытать не менее двух серий имеющих различные геометрические характеристики образцов, у которых отличаются l , $(EJ)^{\text{bend}}$ и площади поперечного сечения A . Запишем эти соотношения для экспериментальных данных

$$w_1 = \frac{P_1 l_1^3}{48(EJ)_1^{\text{bend}}} + \frac{P_1 l_1 a}{GA_1}, \quad w_2 = \frac{P_2 l_2^3}{48(EJ)_2^{\text{bend}}} + \frac{P_2 l_2 a}{GA_2}, \quad \dots, \quad (32)$$

$$w_n = \frac{P_n l_n^3}{48(EJ)_n^{\text{bend}}} + \frac{P_n l_n a}{GA_n}.$$

В рассматриваемом случае задача идентификации $(EJ)^{\text{bend}}$ и G формулируется следующим образом. Составим невязку уравнений (32):

$$\Delta^2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left[w_j^{\text{exp}} - \left(\frac{P_j l_j^3}{48(EJ)^{\text{bend}}} + \frac{P_j l_j a}{G A_j} \right) \right]^2}. \quad (33)$$

При известных для разных экспериментов значениях величин b , H , l , P , w_{max} необходимо найти E^+ , E^- , G из условия минимума невязки Δ^2 в соответствии с (23), (28).

Если образцы отличаются лишь длинами, то изгибная жёсткость $(EJ)^{\text{bend}}$ будет одинаковой, следовательно, формально достаточно двух серий экспериментов для определения $(EJ)^{\text{bend}}$ и G . Тогда система (32) разрешима, причём

$$(EJ)^{\text{bend}} = l_2 l_1 (l_2^2 - l_1^2) P_1 P_2 / 48 (l_1 P_1 w_2^{\text{exp}} - l_2 P_2 w_1^{\text{exp}}),$$

$$G = (a l_1 l_2 (l_1^2 - l_2^2) P_1 P_2) / (A (l_1^3 P_1 w_2^{\text{exp}} - l_2^3 P_2 w_1^{\text{exp}})).$$

Изложенный подход позволяет определить все три модуля сдвига G_{12} , G_{13} , G_{23} , если проводить испытания в соответствующих плоскостях 1–2, 1–3, 2–3. Поэтому точность определения модулей сдвига G будет тем больше, чем меньше длина l .

По результатам испытаний коротких тест-образцов формирующиеся в точках срединной плоскости образца максимальные значения касательных напряжений определяются по известной формуле Журавского.

4. Результаты экспериментальных исследований

Для определения механических характеристик волокнистого композита, изготовленного из углеленты HSE 180 REM с прямолинейными волокнами и связующего ЭДТ-69НМ, были изготовлены плоские тест-образцы для испытаний на растяжение вдоль и поперек волокон, а также длинные и короткие тест-образцы с квадратным поперечным сечением для испытаний на трёхточечный изгиб. Геометрические размеры образцов, результаты их испытаний, а также результаты решения задач идентификации механических характеристик рассматриваемого композита приведены ниже. Были проведены также испытания на сжатие коротких тест-образцов с квадратным поперечным сечением с использованием специального приспособления [22], позволившие определить модуль упругости E_1^- и предельное нормальное напряжение при сжатии вдоль волокон.

5. Испытание образцов на растяжение (армирование под углом 0°)

На рис. 4 приведены диаграммы деформирования шести тест-образцов при их растяжении вдоль волокон (армирование под углом 0°). Геометрические размеры тест-образцов и результаты испытаний приведены в табл. 1. Видно, что зависимость между напряжением и осевой деформацией является линейной практически вплоть до разрушения, следовательно, возможно использование закона Гука.

В качестве иллюстрации на рис. 5 показаны образцы углеленты с армированием под углом 0° до и после разрушения. На образцах до разрушения видны отмеченные белые точки, служащие базой измерений деформаций оптическим методом, по которым уверенно фиксируются деформации как в осевом, так и поперечном направлениях. Установлено, что коэффициент Пуассона ν_{12} остается постоянным вплоть до разрушения образца.

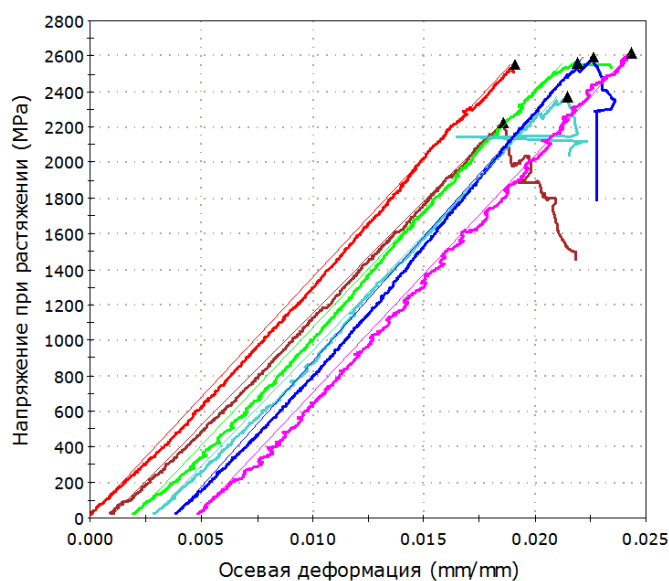


Рис. 4. Испытания на растяжение (0°)

Табл. 1

Испытания на растяжение (0°)

№	Толщина образца, мм	Ширина образца, мм	Макс. нагрузка, кН	Предел прочности, МПа	Осевая деформация при разрушении	Модуль Юнга, ГПа	Коэф. Пуассона
1	0.94	25.30	60.81	2556.95	0.01913	134.73	0.2945
2	0.90	25.80	51.75	2228.49	0.01765	125.98	0.2448
3	0.94	25.70	61.88	2561.33	0.02002	132.21	0.3156
4	0.92	25.20	55.07	2375.33	0.01860	130.31	0.3080
5	0.94	25.10	61.31	2598.38	0.01882	140.86	0.2777
6	0.96	25.70	64.60	2618.40	0.01953	133.38	0.3
Максимум				2618.40	0.020	140.860	0.316
Минимум				2228.49	0.018	125.980	0.245
Среднее				2489.813	0.019	132.912	0.29
Диапазон				389.91	0.002	14.880	0.071
Коэф. вариации				6.205	4.313	3.717	8.848
Станд. откл.				154.492	0.001	4.940	0.026

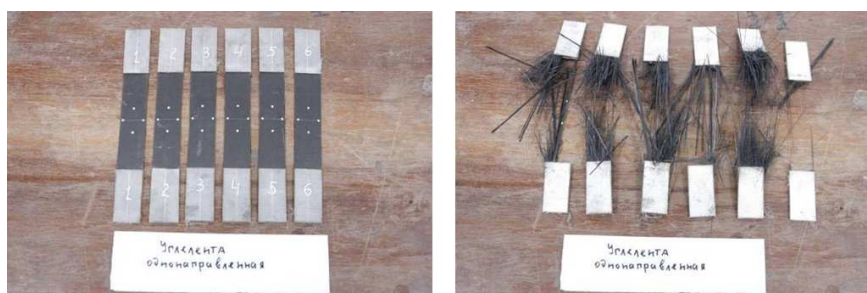


Рис. 5. Образцы до и после испытаний на растяжение (0°)

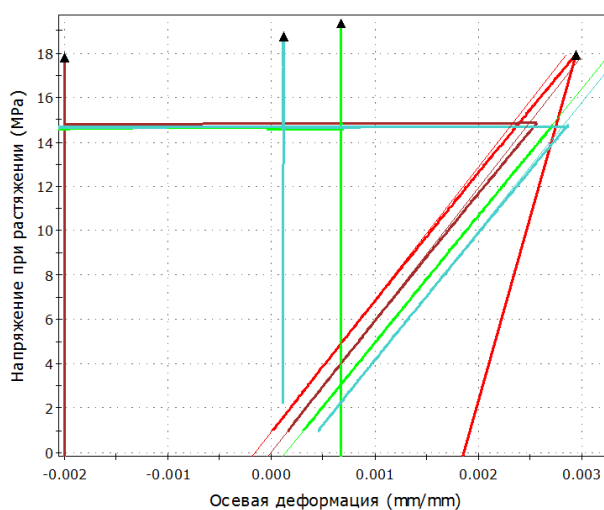
Рис. 6. Испытания на растяжение (90°)

Табл. 2

Испытания на растяжение (90°)

№	Толщина образца, мм	Ширина образца, мм	Максимальная нагрузка, кН	Предел прочности, МПа	Модуль Юнга, ГПа
1	3.51	29.90	1.64	15.65	6.00
2	3.50	30.07	1.43	13.63	5.29
3	3.53	29.07	1.838	17.915	5.984
4	3.50	29.27	1.824	17.800	5.947
5	3.51	29.23	1.986	19.358	5.743
6	3.51	29.50	1.944	18.774	5.813
Максимум			1.986	19.358	6.000
Минимум			1.430	13.630	5.743
Среднее			1.777	17.188	5.897
Диапазон			0.556	5.728	0.257
Коэффициент вариации			11.715	12.520	1.923
Стандартное отклонение			0.208	2.152	0.113

6. Испытание образцов на растяжение (армирование под углом 90°)

На рис. 6 приведены диаграммы деформирования шести тест-образцов при их растяжении поперек волокон (армирование под углом 90°). Геометрические размеры тест-образцов и результаты испытаний приведены в табл. 2 (согласно критерию Смирнова [25] при определении модуля Юнга отбрасываются результаты 2-го эксперимента, а при определении предельной деформации отбрасываются результаты экспериментов 5, 6).

В качестве иллюстрации на рис. 7 показаны образцы углеленты с армированием под углом 90° до и после разрушения, а также характер разрушения.

7. Испытание длинных образцов на изгиб в плоскости 1–2 (армирование под углом 0°)

На рис. 8 приведены диаграммы деформирования шести длинных тест-образцов при их изгибе в плоскости 1–2 (армирование под углом 0°). Геометрические раз-

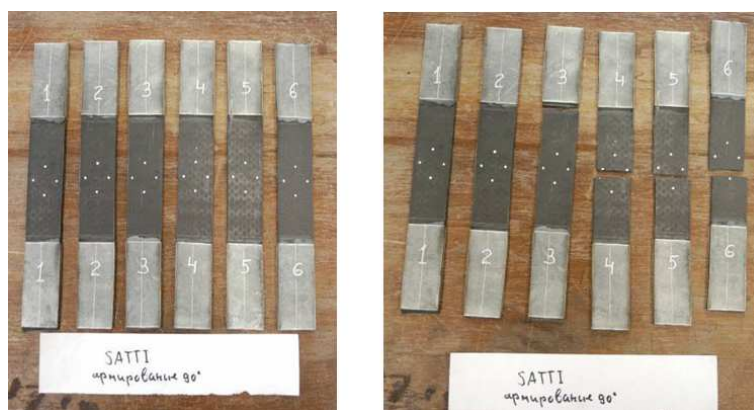
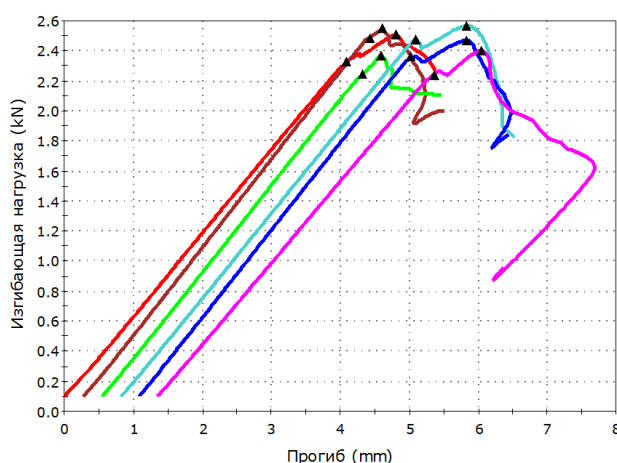
Рис. 7. Образцы до и после испытаний на растяжение (90°)

Рис. 8. Испытания на трёхточечный изгиб длинных образцов

меры тест-образцов, результаты испытаний, а также результаты решения задачи идентификации параметра E_1^- приведены в табл. 3. Видно (см. рис. 8), что зависимость между напряжением, определяемым в точках крайних волокон в середине образца по замеряемому в ходе экспериментов значению силы P , и соответствующей деформацией, как и при растяжении, остается линейной вплоть до разрушения образца от изгиба. В качестве иллюстрации на рис. 9 показаны образцы с армированием под углом 0° до и после разрушения при изгибе. Следует отметить, что у всех образцов разрушение происходит из-за расслоения, реализующегося практически по срединной плоскости образцов и начинающегося в зоне торцевых сечений. Данный механизм разрушения противоречит целям проводимых испытаний образцов на трёхточечный изгиб, заключающимся в определении предельного нормального напряжения в условиях сжатия.

8. Испытание коротких образцов на изгиб в плоскости 1–2 (армирование под углом 0°)

На рис. 10 приведены диаграммы деформирования шести коротких тест-образцов при их изгибе в плоскости 1–2 (армирование под углом 0°). Геометрические

Табл. 3

Испытания длинных образцов на трёхточечный изгиб в плоскости 1–2

№	Расстояние между опорами, мм	Толщина, мм	Ширина, мм	Макс. изгибающая нагрузка, кН	Макс. значение прогиба, мм	Макс. нормальные напряжения, МПа
1	170.0	9.11	9.28	2.507	4.805	830.04
2	170.0	9.13	9.43	2.550	4.349	827.17
3	170.0	9.03	9.40	2.370	4.060	788.61
4	170.0	9.06	9.30	2.568	5.027	857.68
5	170.0	9.06	9.30	2.471	4.762	825.50
6	170.0	9.03	9.19	2.401	4.699	816.98
Максимум				2.568	5.027	857.680
Минимум				2.370	4.060	788.610
Среднее				2.478	4.617	824.330
Диапзон				0.198	0.967	69.070
Кэф-т вариации				3.217	7.585	2.704
Станд. откл.				0.080	0.350	22.290



Рис. 9. Длинные образцы до и после испытаний на трёхточечный изгиб в плоскости 1–2

размеры тест-образцов, результаты испытаний, а также результаты решения задачи идентификации параметра G_{12} приведены в табл. 4. Приведены также максимальные значения нормальных напряжений, формирующихся в середине образца. Можно видеть, что они близки к аналогичным значениям напряжений, приведённым в табл. 3. В отличие от рис. 8, приведённые на рис. 10 экспериментальные зависимости становятся существенно нелинейными при приближении к предельным значениям изгибающего усилия P . Данный эффект может быть объяснён только нелинейной зависимостью между формирующимися в поперечных сечениях касательными напряжениями и соответствующими сдвиговыми деформациями. Такой эффект проявляется тем ярче, чем короче длина образца. Следует заметить, что определяемые в ходе эксперимента значения G_{12} являются осредненными за весь процесс деформирования образца от начала его нагружения до разрушения.

В качестве иллюстрации на рис. 11 показаны образцы с армированием под углом 0° до и после разрушения при изгибе. На образцах после их разрушения видны локализованные в середине образцов площадки нагружения в виде вмятин, в зоне которых формируется сложное (пространственное) напряжённо-деформированное

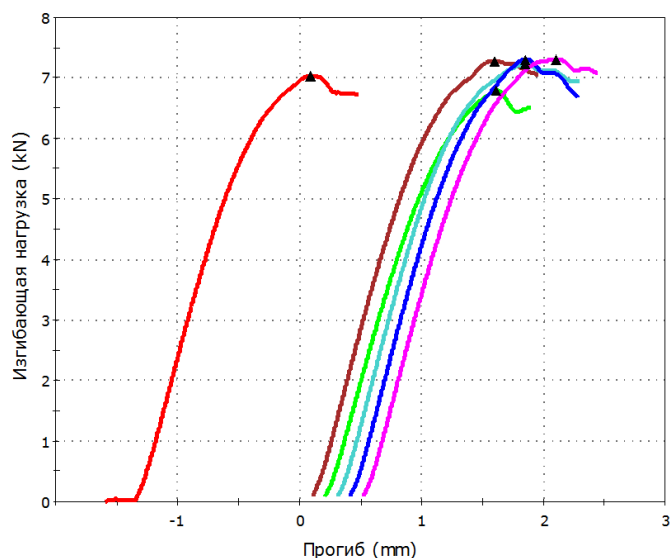


Рис. 10. Испытания на трёхточечный изгиб коротких образцов в плоскости 1–2

Табл. 4

Испытания коротких образцов на трёхточечный изгиб в плоскости 1–2

№	Расстояние между опорами, мм	Толщина, мм	Ширина, мм	Макс. изгибающая нагрузка, кН	Макс. значение прогиба, мм	Макс. нормальные напряжения, МПа	Расчётный модуль сдвига G_{12} , ГПа
1	50.0	9.03	9.46	7.281	1.496	707.89	1.089
2	50.0	9.03	8.91	6.793	1.406	701.20	1.166
3	50.0	9.00	9.22	7.228	1.542	725.84	1.080
4	50.0	9.02	9.19	7.301	1.441	732.34	1.194
5	50.0	9.07	9.02	7.303	1.582	738.16	1.074
Максимум				7.303	1.582	738.160	1.194
Минимум				6.793	1.406	701.200	1.074
Среднее				7.181	1.493	721.086	1.121
Диапазон				0.510	0.176	36.960	0.120
Кэф-т вариации				3.051	4.806	2.204	4.942
Станд. откл.				0.219	0.072	15.893	0.055

состояние. В соответствии с существующими стандартами испытаний их целью является также определение предельных значений поперечных касательных напряжений, при достижении которых происходит разрушение. Однако такой предполагаемый механизм разрушения не является единственным.

9. Испытание длинных образцов на изгиб в плоскости 1–3 (армирование под углом 0°)

На рис. 12 приведены диаграммы деформирования шести длинных тест-образцов при их изгибе в плоскости 1–3 (армирование под углом 0°). Геометрические размеры тест-образцов, результаты испытаний, а также результаты решения задачи идентификации параметра E_1^- приведены в табл. 5. Заметим, что определяемые в ходе испытаний максимальные нормальные напряжения сжатия, а также



Рис. 11. Короткие образцы до и после испытаний на трёхточечный изгиб в плоскости 1–2

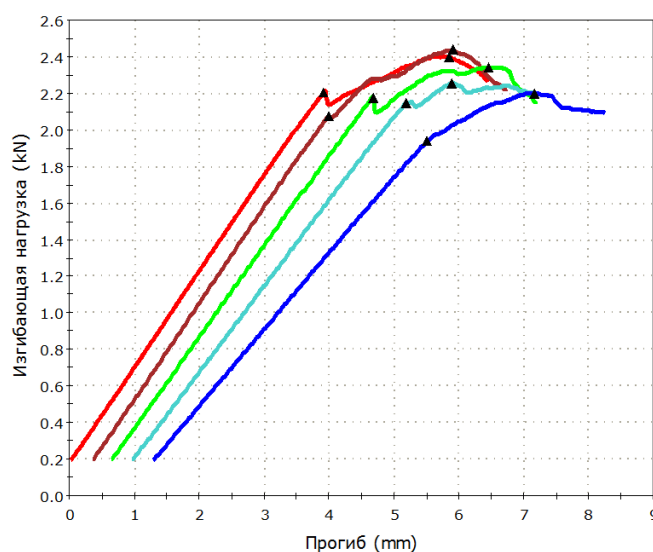


Рис. 12. Испытания на трёхточечный изгиб длинных образцов в плоскости 1–3

значения модуля упругости E_1^- достаточно близки к значениям, приведенным в табл. 3. Так же, как и при испытаниях на изгиб в плоскости 1–2, приведённые зависимости, как и ожидалось, являются линейными вплоть до разрушения образцов.

В качестве иллюстрации на рис. 13 показаны образцы с армированием под углом 0° до и после разрушения при изгибе. На них, в отличие от рис. 9, явно виден характер разрушения образцов по причине расслоения слоёв по их срединной плоскости.

10. Испытание коротких образцов на изгиб в плоскости 1–3 (армирование под углом 0°)

На рис. 14 приведены диаграммы деформирования шести коротких тест-образцов при их изгибе в плоскости 1–3 (армирование под углом 0°). Геометрические размеры тест-образцов, результаты испытаний, а также результаты решения задачи идентификации параметра приведены в табл. 6. Заметим, что полученные результаты практически совпадают с результатами, описанными в разд. 9.

В качестве иллюстрации на рис. 15 показаны образцы с армированием под углом 0° до и после разрушения при изгибе.

Табл. 5

Испытания длинных образцов на трёхточечный изгиб в плоскости 1–3

№	Расстояние между опорами, мм	Толщина, мм	Ширина, мм	Макс. изгибающая нагрузка, кН	Макс. значение прогиба, мм	Макс. нормальные напряжения, МПа
1	170.0	9.19	8.99	2.401	5.844	806.294
2	170.0	9.28	9.05	2.450	5.591	798.209
3	170.0	9.21	9.04	2.346	5.809	779.975
4	170.0	9.02	8.97	2.258	4.934	788.796
5	170.0	8.64	9.03	2.20	5.886	832.05
Максимум				2.450	5.886	832.050
Минимум				2.200	4.934	779.975
Среднее				2.331	5.613	801.065
Диапазон				0.250	0.952	52.075
Кэф-т вариации				4.384	7.058	2.490
Станд. откл.				0.102	0.396	19.943



Рис. 13. Длинные образцы до и после испытаний на трёхточечный изгиб в плоскости 1–3

Табл. 6

Испытания коротких образцов на трёхточечный изгиб в плоскости 1–3

№	Расстояние между опорами, мм	Толщина, мм	Ширина, мм	Макс. изгибающая нагрузка, кН	Макс. значение прогиба, мм	Макс. нормальные напряжения, МПа	Расчётный модуль сдвига G_{12} , ГПа
1	50.00	7.67	9.13	5.04	1.14	703.82	1.512
2	50.00	8.30	9.03	5.76	1.33	694.12	1.224
3	50.00	8.77	8.99	5.78	1.13	627.45	1.378
4	50.00	8.40	8.96	5.16	1.09	611.99	1.368
5	50.00	8.90	9.06	5.56	1.13	581.27	1.250
6	50.00	8.84	9.07	5.54	1.21	586.70	1.149
Максимум				5.780	1.330	703.820	1.512
Минимум				5.040	1.090	581.270	1.149
Среднее				5.473	1.172	634.225	1.314
Диапазон				0.740	0.240	122.550	0.363
Кэф-т вариации				5.626	7.409	8.353	9.963
Станд. откл.				0.308	0.087	52.979	0.131

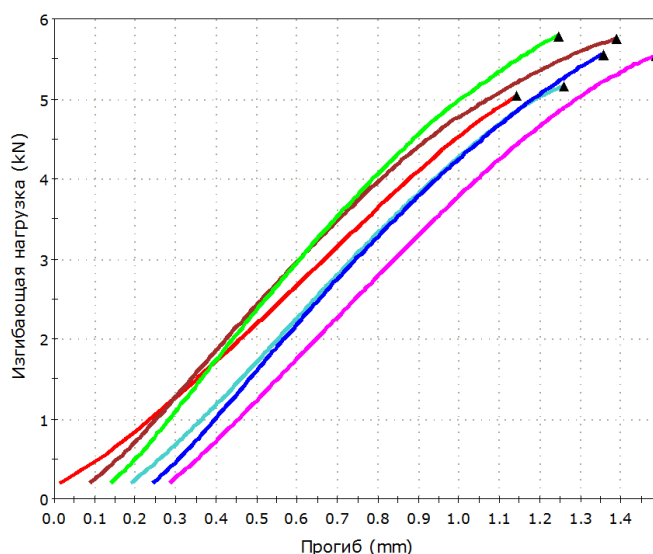


Рис. 14. Испытания на трёхточечный изгиб коротких образцов в плоскости 1–3

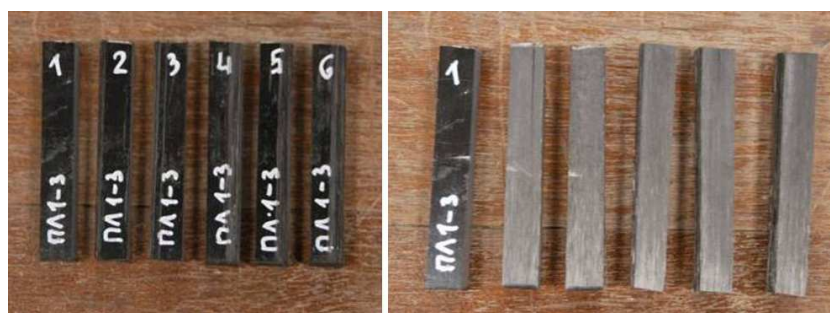


Рис. 15. Короткие образцы до и после испытаний на трёхточечный изгиб в плоскости 1–3

Заключение и основные выводы

В сводной табл. 7 приведены осреднённые упругие и прочностные характеристики углепластика из однонаправленной углеленты и эпоксидного связующего, найденные путём проведения испытаний описанных выше тест-образцов в соответствии с существующими отечественными и международными стандартами [16–22].

В табл. 7 звёздочкой обозначены результаты, для которых описание экспериментов не приводится ввиду ограниченного объёма статьи. Проведя критический анализ представленных результатов, следует отметить, что наиболее достоверными и надёжными являются результаты, приведенные в строках 1–5 и 12–14. Из них значения $\langle E_1^+ \rangle$, $\langle E_2^+ \rangle$, $\langle \nu_{12} \rangle$, $\langle \sigma_1^+ \rangle$ получены испытанием тонких тест-образцов на растяжение, когда в экспериментах с большой степенью точности наблюдается линейный закон деформирования, а разрушение образца происходит разрывом волокон композита или матрицы. Значения $\langle E_1^- \rangle$, $\langle \sigma_1^- \rangle$ получены сжатием тест-образцов с использованием специального приспособления [22], в экспериментах наблюдается сохранение линейного закона деформирования в процессе нагружения вплоть до разрушения образцов, а само разрушение происходит межслойным расслоением.

Значения, приведенные в строках 6, 7, 8 и 15, 16, 17, определены испытанием нетонких длинных тест-образцов на трёхточечный изгиб. Из них значения

Табл. 7

Сводная таблица

№ строки	Наименование определяемой характеристики и обозначение	Единица измерения	Значение
1	Модуль упругости при растяжении в направлении оси 1, $\langle E_1^+ \rangle$	ГПа	133
2	Модуль упругости при растяжении в направлении оси 2, $\langle E_2^+ \rangle$	ГПа	5.9
3*	Модуль упругости при сжатии в направлении оси 1, $\langle E_1^- \rangle$	ГПа	132
4	Коэффициент Пуассона, найденный при растяжении в направлении оси 1, $\langle \nu_{12} \rangle$	безразм.	0.29
5	Коэффициент Пуассона, соответствующий растяжению в направлении оси 2, $\langle \nu_{21} \rangle = \langle E_2^+ \rangle \langle \nu_{12} \rangle > / < E_1^+ \rangle$	безразм.	0.0126
6	Модуль упругости $\langle E_{1b}^{-(12)} \rangle$, найденный при изгибе длинных образцов в плоскости 1-2	ГПа	101.2
7	Модуль упругости $\langle E_{1b}^{-(13)} \rangle$, найденный при изгибе длинных образцов в плоскости 1-3	ГПа	89.7
8*	Модуль упругости $\langle E_{2b}^{-(23)} \rangle$, найденный при изгибе длинных образцов в плоскости 2-3	ГПа	7.31
9	Модуль сдвига $\langle G_{12} \rangle$, найденный при изгибе коротких образцов в плоскости 1-2	ГПа	1.12
10	Модуль сдвига $\langle G_{13} \rangle$, найденный при изгибе коротких образцов в плоскости 1-3	ГПа	1.31
11*	Модуль сдвига $\langle G_{23} \rangle$, найденный при изгибе коротких образцов в плоскости 2-3	ГПа	0.4
12	Предел прочности при растяжении в направлении оси 1, $\langle \sigma_1^+ \rangle$	МПа	2489.8
13	Предел прочности при сжатии в направлении оси 1, $\langle \sigma_1^- \rangle$	МПа	459
14	Предел прочности $\langle \sigma_2^+ \rangle$ при растяжении в направлении оси 2	МПа	17.2
15	Предел прочности при сжатии $\langle \sigma_{1b}^{-(12)} \rangle$ в направлении оси 1, найденный при изгибе длинных образцов в плоскости 1-2	МПа	824
16	Предел прочности при сжатии $\langle \sigma_{1b}^{-(13)} \rangle$ в направлении оси 1, найденный при изгибе длинных образцов в плоскости 1-3	МПа	801
17*	Предел прочности при сжатии $\langle \sigma_{2b}^{-(23)} \rangle$ в направлении оси 2, найденный при изгибе длинных образцов в плоскости 2-3	МПа	41.9
18	Предел прочности при сдвиге $\langle \sigma_{12} \rangle$, найденный при изгибе коротких образцов в плоскости 1-2	МПа	65.1
19	Предел прочности при сдвиге $\langle \sigma_{13} \rangle$, найденный при изгибе коротких образцов в плоскости 1-3	МПа	53.6
20*	Предел прочности при сдвиге $\langle \sigma_{23} \rangle$, найденный при изгибе коротких образцов в плоскости 2-3	МПа	54

$\langle E_{1b}^{-(12)} \rangle$, $\langle E_{1b}^{-(13)} \rangle$, $\langle E_{2b}^{-(23)} \rangle$ найдены в предположении о том, что композит является разномодульным материалом, а фиксируемым параметром вплоть до разрушения является измеряемый прогиб середины образца. Заметим, что разрушение таких образцов при изгибе в плоскостях 1-2 и 1-3 происходит из-за межслойного

расслоения, начинающегося с их концевых сечений, а не разрывом волокон в среднем сечении образца, то есть фиксируемые значения напряжений $\langle \sigma_{1b}^{-(12)} \rangle$, $\langle \sigma_{1b}^{-(13)} \rangle$ не соответствуют механизму разрушения образца. Более того, значения $\langle E_{1b}^{-(12)} \rangle$, $\langle E_{1b}^{-(13)} \rangle$ и $\langle \sigma_{1b}^{-(12)} \rangle$, $\langle \sigma_{1b}^{-(13)} \rangle$ не совпадают с соответствующими значениями $\langle E_1^- \rangle$, $\langle \sigma_1^- \rangle$, что противоречит отмеченным выше исходным предположениям.

Значения, приведенные в строках 9, 10, 11 и 18, 19, 20, определяются испытанием нетонких, но коротких тест-образцов на трёхточечный изгиб, причём считается, что их разрушение происходит из-за межслойного расслоения в окрестности середины образца вследствие достижения поперечными касательными напряжениями $\langle \sigma_{12} \rangle$, $\langle \sigma_{13} \rangle$ и $\langle \sigma_{23} \rangle$ предельных значений. При этом для определения модулей сдвига $\langle G_{12} \rangle$, $\langle G_{13} \rangle$, $\langle G_{23} \rangle$ используется описанная выше методика, основанная на сопоставлении прогибов, определяемых из эксперимента и теоретическим путём при учёте поперечных сдвигов.

Работа выполнена в рамках договора № 02.G25.31.0122 между НПО ОАО «ОКБ им. М.П. Симонова» и Министерством образования и науки РФ по реализации комплексного проекта по созданию высокотехнологичного производства, выполняемого с участием ФГБОУ ВПО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ», а также за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности и при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-08-06016).

Summary

R.A. Kayumov, S.A. Lukankin, V.N. Paimushin, S.A. Kholmogorov. Identification of Mechanical Properties of Fiber-Reinforced Composites.

Techniques are developed for identification of the mechanical properties of fiber-reinforced composites according to the results of tests on tension, compression, and bending. The case of nonlinear elastic material is considered. To approximate the tension-to-bending ratios, a multi-module dependency of stress on deformations is accepted. The parameters of this dependency are determined by tests on tension and bending. The transverse-bending modulus is calculated by solving inverse bending problems according to the results of tests with long and short samples. These techniques are applied to analysis of the experimental data obtained for HSE 180 REM carbon fiber tape with straight fibers and EDT-69NM epoxy binder.

Keywords: identification, experiment, fiber-reinforced composite, mechanical properties.

Литература

1. *Каюмов Р.А.* Расширенная задача идентификации механических характеристик материалов по результатам испытаний конструкций // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2004. – № 2. – С. 94–105.
2. *Терегулов И.Г.* Конечные деформации тонких анизотропных и композитных оболочек и определяющие соотношения // Механика композитных материалов. – 1987. – № 4. С. 654–660.
3. *Терегулов И.Г.* Определяющие соотношения для анизотропных и волокнисто-композитных оболочек при конечных деформациях // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1989. – № 3. – С. 167–173.
4. *Терегулов И.Г., Бутенко Ю.И., Каюмов Р.А., Сафиуллин Д.Х., Алексеев К.П.* К определению механических характеристик нелинейно-упругих композитных материалов // Прикл. механика и техн. физика. – 1996. Т. 37, № 6. – С. 170–180.

5. Терезулов И.Г., Каюмов Р.А., Бутенко Ю.И., Сафиуллин Д.Х. Определение механических характеристик композитов по результатам испытаний многослойных образцов // Механика композитных материалов. – 1995. – Т. 31, № 5. – С. 607–615.
6. Воронцов Г.В., Плющев Б.И., Резниченко А.И. Определение приведенных упругих характеристик армированных композитных материалов методами обратных задач тензометрирования // Механика композитных материалов. – 1990. – № 4. – С. 733–747.
7. Суворова Ю.В., Добрынин В.С., Статников И.Н., Барт Ю.Я. Определение свойств композита в конструкции методом параметрической идентификации // Механика композитных материалов. – 1989. – № 1. – С. 150–157.
8. Алфутов Н.А., Таирова Л.П. Возможности определения свойств монослоя в композите // Методы и средства диагностики несущей способности изделий из композитов. – Рига: Зинатне, 1986. С. 212–215.
9. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Таирова Л.П. Идентификация упругих характеристик однонаправленных материалов по результатам испытаний многослойных композитов // Расчеты на прочность. – М.: Машиностроение, 1989. – Вып. 30. – С. 16–31.
10. Рикардс Р., Чате А. Идентификация механических свойств композитных материалов на основе планирования экспериментов // Механика композитных материалов. – 1998. – Т. 34, № 1. – С. 3–16.
11. Frederiksen P.S. Experimental procedure and results for the identification of elastic constants of thick orthotropic plates // J. Composite Materials. – 1997. – V. 31, No 4. – P. 360–382.
12. Каюмов Р.А. Связанная задача расчета механических характеристик материалов и конструкций из них // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 6. – С. 118–127.
13. Терезулов И.Г., Каюмов Р.А., Фахрутдинов И.Х. Идентификация механических характеристик композитного материала по результатам испытаний оболочек вращения // Механика композитных материалов. – 1998. – Т. 34, № 6. – С. 771–776.
14. Морозов В.А. Методы регуляризации неустойчивых задач. – М.: Моск. гос. ун-т, 1987. – 216 с.
15. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 285 с.
16. ОСТ 1 90199-75. Материалы полимерные композиционные. Метод определения прочности при сдвиге путём испытания на изгиб. – 1985. – 17 с.
17. РД 50–675–88 Расчёты и испытания на прочность в машиностроении. Материалы композиционные. Методы испытаний на межслоевой сдвиг. – М.: Гос. комитет СССР по стандартам, 1989. – 10 с.
18. D 3518/D 3518M–94 (Reapproved 2001). Standard Test Method for In-Plane Shear Response of Polymer Composite Materials by Tensile Test of a $\pm 45^\circ$ Laminate, vol. 15.03, Space Simulation; Aerospace and Aircraft; Composite Materials. ASTM International, West Conshohocken, PA (2005).
19. D 790–03 (2005). Standard Test Methods for Flexural Properties of Unreinforced and Reinforced Plastics and Electrical Insulating Materials, vol. 08.01, Plastics. ASTM International, West Conshohocken, PA.
20. D 2344/D 2344M–00 (2005). Standard Test Method for Short-Beam Strength of Polymer Matrix Composite Materials and their Laminates, vol. 15.03, Space Simulation; Aerospace and Aircraft; Composite Materials. ASTM International, West Conshohocken, PA.

21. ГОСТ 32659-2014. Композиты полимерные. Методы испытаний. Определение кажущегося предела прочности при межслойном сдвиге методом испытания короткой балки. – М.: Стандартинформ, 2014. – 18 с.
22. D 3410/D 3410M–03 (2005). Standard Test Method for Compressive Properties of Polymer Matrix Composite Materials with Unsupported Gage Section by Shear Loading, vol. 15.03, Space Simulation; Aerospace and Aircraft; Composite Materials. ASTM International, West Conshohocken, PA.
23. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1984. – 263 с.
24. Тихонов А.Н., Гончаровский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука, 1983. – 200 с.
25. Степнов М.Н. Статистические методы обработки результатов механических испытаний: Справочник. – М.: Машиностроение, 1985. – 232 с.

Поступила в редакцию
30.07.15

Каюмов Рашид Абдулхакович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: kayumov@rambler.ru

Луканкин Сергей Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прочности конструкций, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева, г. Казань, Россия.

E-mail: lukankin.sergej@yandex.ru

Паймушин Виталий Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прочности конструкций, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева; главный научный сотрудник, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: vrajtmushin@mail.ru

Холмогоров Сергей Андреевич – ведущий инженер кафедры прочности конструкций, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева, г. Казань, Россия.

E-mail: hkazan@yandex.ru