Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Набережночелнинский институт (филиал)
федерального государственного автономного образовательного
учреждения высшего образования
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов заочной формы обучения
по инженерно-техническим направлениям подготовки бакалавров

Набережные Челны
2024

УДК 51 (076)

Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление. *Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов заочной формы обучения по инженерно-техническим направлениям подготовки бакалавров.* /Составитель: ***Углов А.Н.*** -Набережные Челны: Изд-во: НЧИ К(П)ФУ, 2024, 83с.

Учебно-методическое пособие составлено на основании требований Государственных образовательных стандартов высшего образования для студентов инженерно-технических направлений подготовки бакалавров. Разработано на кафедре «Математика» и предназначено для использования в учебном процессе студентами заочной формы обучения. Учебно-методическое пособие может быть использовано и для самостоятельной работы студентами очной и очно-заочной форм обучения.

Учебно-методическое пособие включает в себя разделы: комплексные числа и комплексная плоскость, функции комплексного переменного; дифференцирование и интегрирование функций комплексного переменного; ряды в комплексной плоскости, ряды Фурье; теория вычетов и её применение; интегральное преобразование Лапласа, основные теоремы операционного исчисления; применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений и их систем.

В учебно-методическом пособии изложены цели и задачи дисциплины, её содержание, методические указания по изучению дисциплины и выполнению индивидуальной контрольной работы; приведены задания для индивидуальной контрольной работы и теоретические вопросы к экзамену (зачёту); указана рекомендуемая литература. В приложениях приведены: образец решения контрольных задач типового варианта, краткие теоретические сведения, необходимые для решения практических задач, образец оформления обложки тетради с индивидуальной контрольной работой, таблица номеров выполняемых заданий.

УДК 51 (076)

1.Цель и задачи дисциплины, её место в учебном процессе.

Целью освоения дисциплины «Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление» является - формирование системы базовых знаний по данной дисциплине, которая позволит будущим специалистам решать в своей повседневной деятельности актуальные задачи науки и практики, понимать написанные на современном научном уровне результаты других исследований и тем самым совершенствовать свои профессиональные навыки.

Основными задачами дисциплины являются:

- ознакомление студентов с ролью математики в современной жизни, с характерными чертами математического метода решения реальных задач;
- обучение студентов теоретическим основам курса;
- привитие практических навыков математического моделирования реальных естественнонаучных и технических задач с использованием математического аппарата данной дисциплины;
- развитие у студентов навыков творческого и логического мышления, повышение общего уровня математической культуры.

Для успешного освоения данной дисциплины необходимо знание элементарной математики в объёме курса средней школы, а также понятий и методов предшествующих ей дисциплин «Аналитическая геометрия», «Математический анализ»; «Линейная алгебра и функции нескольких переменных», «Интегралы и дифференциальные уравнения». Дисциплина является предшествующей для освоения следующих за ней математических дисциплин и большинства естественнонаучных и технических дисциплин, использующих математический аппарат.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- знать: базовые понятия теории функций комплексного переменного, рядов Фурье, операционного исчисления, необходимые для решения задач профессиональной деятельности;
- уметь: использовать математический аппарат в профессиональной деятельности; проводить расчёты на основе построенных математических моделей;
- владеть: методами теории функций комплексного переменного, рядов Фурье, операционного исчисления; навыками применения современного математического инструментария для решения прикладных задач.

Изучение дисциплины предусматривает проведение лекционных, практических занятий и самостоятельную работу. На лекциях излагается теоретический материал. Прослушав лекцию, студент должен ознакомиться с более подробным изложением материала в учебниках из списка рекомендуемой литературы. Практические занятия проводятся с целью закрепления теоретических основ курса, получения практических навыков решения математических задач. Контроль знаний осуществляется с помощью индивидуальных контрольных работ и экзамена(зачёта).

2. Содержание и структура дисциплины.

2.1. Содержание дисциплины (наименование и номера тем).

Раздел I. Теория функций комплексного переменного.

Тема. Комплексные числа и комплексная плоскость. Функции комплексного переменного.

Понятие комплексного числа. Комплексно-сопряжённое число. Геометрическое изображение комплексного числа. Модуль и аргумент комплексного числа. Формы записи комплексных чисел (алгебраическая, тригонометрическая, показательная). Формула Эйлера. Арифметические действия над комплексными числами. Возведение в степень комплексного числа. Формула Муавра. Извлечение корней из комплексного числа. Комплексная плоскость. Линии и области на комплексной плоскости. Понятие функции комплексного переменного. Предел и непрерывность функции комплексного переменного. Основные элементарные функции комплексного переменного: показательная, логарифмическая, степенная, тригонометрические, гиперболические, обратные тригонометрические и гиперболические, их свойства.

Тема. Дифференцирование функций комплексного переменного.

Понятие производной функции комплексного переменного. Понятия дифференцируемой и аналитической функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Правила дифференцирования функций комплексного переменного. Гармоническая функция, её связь с аналитической функцией. Восстановление аналитической функции по её известной действительной или мнимой части. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие конформного отображения, примеры конформных отображений.

Тема. Интегрирование функций комплексного переменного.

Интеграл от функции комплексного переменного, его свойства. Вычисление интеграла от функции комплексного переменного сведением к вычислению криволинейных интегралов от действительных функций. Интегральная теорема Коши. Первообразная и неопределённый интеграл от функции комплексного переменного. Формула Ньютона-Лейбница. Интегральная формула Коши. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции. Вычисление интегралов по замкнутому контуру с помощью интегральной формулы Коши и интегральной формулы для значений n-ой производной.

Тема. Ряды в комплексной плоскости. Ряды Фурье.

Числовые ряды в комплексной области, их сходимость. Степенные ряды в комплексной области, их сходимость. Теорема Абеля. Формула Коши - Адамара. Теорема о разложении аналитической функции в ряд Тейлора в круге. Интегральные коэффициенты ряда Тейлора. Теорема о разложение аналитической функции в ряд Лорана в кольце. Интегральные коэффициенты ряда

Лорана. Нули аналитической функции. Изолированные особые точки аналитической функции, их классификация. Взаимосвязь нулей функции f(z) и полюсов функции 1/f(z). Определение тригонометрического ряда. Ряд Фурье и коэффициенты Фурье. Комплексная форма ряда Фурье. Теорема Дирихле о разложении функции в ряд Фурье. Разложение в ряд Фурье периодических, чётных и нечётных функций. Неполные ряды Фурье. Разложение функций в ряд Фурье на отрезке произвольной длины.

Тема. Теория вычетов и её применение.

Понятие вычета аналитической функции. Теорема Коши о вычетах. Вычисление вычетов в особых точках. Применения вычетов для вычисления контурных интегралов от функции комплексного переменного. Применение вычетов для вычисления несобственных интегралов от функции действительного переменного.

Раздел II. Операционное исчисление.

Тема. Интегральное преобразование Лапласа. Основные теоремы операционного исчисления.

Определение преобразования Лапласа. Оригинал и изображение. Теорема о существовании изображения. Поведение изображения в бесконечно удалённой точке. Единичная функция Хевисайда и её изображение. Теоремы линейности, подобия, смещения, запаздывания, о свёртке, о дифференцировании изображения и оригинала, об интегрировании изображения и оригинала. Интеграл Дюамеля. Таблица оригиналов и изображений преобразования Лапласа. Нахождение изображений оригиналов. Восстановление оригинала по изображению методом разложения рациональной дроби в сумму простейших. Теоремы разложения и их использование для восстановления оригинала по изображению.

Тема. Применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений и их систем.

Решение обыкновенных линейных дифференциальных уравнений при помощи преобразования Лапласа. Решение систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи преобразования Лапласа.

3. Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Крупин В.Г. Высшая математика. Теория функций комплексного переменного. Операционное исчисление. Сборник задач с решениями : учебное пособие / В.Г. Крупин, А.Л. Павлов, Л.Г. Попов. - Москва : Издательский дом МЭИ, 2017. - 332 с. - ISBN 978-5-383-01237-6.
2. Курс высшей математики. Теория функций комплексной переменной : учебное пособие / И. М. Петрушко, А. Г. Елисеев, В. И. Качалов, С. Ф. Кудин. - Санкт-Петербург : Лань, 2021. - 368 с.-ISBN 978-5-8114-1064-4.
3. Пантелеев, А. В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах : учебное пособие / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова. - 3-е изд., испр. - Санкт-Петербург : Лань, 2021. - 448 с. - ISBN 978-5-8114-1921-0.
4. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. - 10-е изд., испр. - Москва : Айрис-пресс, 2011. - 608 с : граф. - (Высшее образование). - Прил.: с. 599-603. - В пер. - ISBN 978-5-8112-4351-8.
5. Шабунин, М. И. Теория функций комплексного переменного : учебное пособие / М. И. Шабунин, Ю. В. Сидоров. - 5-е изд. - Москва : Лаборатория знаний, 2020. - 303 с. - ISBN 978-5-00101-916-9.

Дополнительная литература:

1. Ганичева, А. В. Основы теории функции комплексной переменной. Операционное исчисление : учебное пособие для вузов /А. В. Ганичева. - Санкт-Петербург: Лань, 2021. - 148 с. - ISBN 978-5-8114-7271-0.
2. Дубровин, В. Т. Теория функций комплексного переменного (теория и практика) : учебное пособие / В. Т. Дубровин ; под редакцией В. С. Желтухина. - Казань: КФУ, 2010. - 102 с.
3. Сборник задач по математике для вузов. Учеб. пособие для студентов вузов. /Абрамова В.В., Бикчурина Л.Ж., Валеева М.И. и др.; под ред. Котляра Л.М., Углова А.Н.; 5-е изд., перераб. и доп. -Наб. Челны: ИНЭКА, 2006. – 472с. (Гриф Министерства образования и науки РФ)
4. Посицельская Л.Н. Теория функций комплексной переменной в задачах и упражнениях : учебное пособие /Л.Н. Посицельская. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 136 с. - ISBN 978-5-9221-0794-5.
5. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. Типовые расчёты: учебное пособие /В.Ф. Чудесенко. –СПб.: Лань, 2005. -128с. -ISBN 5-8114-0661-4.

4. Методические указания по изучению дисциплины.

В процессе изучения данной дисциплины студенты должны сначала изучить теоретический материал и выработать навыки решения типовых задач, используя рекомендованную литературу, а затем выполнить одну контрольную работу (задания для контрольной работы приведены в разделе **5.1**).

При выполнении контрольной работы необходимо придерживаться указанных ниже правил:

1. Контрольная работа должна быть выполнена студентом в отдельной ученической тетради с полями не менее 3 см для замечаний преподавателя.

2. На обложке тетради указываются: название дисциплины; номер варианта и номера решаемых задач; Ф.И.О. студента, выполнившего работу, его номер группы и номер зачетной книжки; Ф.И.О. преподавателя, проверяющего работу (образец оформления обложки приведён в *Приложении 6.4*).

3. Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

4. Номера решаемых задач выбираются из *ТАБЛИЦЫ НОМЕРОВ ВЫПОЛНЯЕМЫХ ЗАДАНИЙ (Приложение 6.5).*

5. Условия задач переписываются полностью, без сокращения слов, после чего приводится их подробное решение (чертежи можно выполнять аккуратно от руки). В конце решения приводится ответ.

6. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по порядку номеров. Контрольные работы, содержащие не все задания, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.

7. Если в работе имеются ошибки, студент должен выполнить все требования преподавателя, изложенные в рецензии, и сдать работу с исправлениями на повторную проверку.

8. Никакие исправления в тексте уже проверенной работы не допускаются, все исправления записываются после рецензии преподавателя с указанием номера задачи, к которой относятся дополнения и исправления.

9. Работа может быть выполнена заново в случае выявления серьёзных замечаний и ошибок.

10. В конце тетради рекомендуется оставлять несколько чистых страниц для дополнений и исправлений.

После проверки контрольная работа предъявляется к защите. На защите студент должен показать свое умение решать задачи, подобные тем, что имеются в его контрольной работе.

Образец решения типового варианта контрольной работы приведён в *Приложении 6.1*.

5. Материалы для контроля знаний студентов.

Итоговой формой контроля знаний является экзамен (зачёт) в конце семестра обучения. На экзамене (зачёте) студент должен показать знание теоретических основ дисциплины в объёме вопросов, приведённых в разделе **5.2** и умение решать задачи, подобные тем, что имеются в его контрольной работе.

5.1 Задания для контрольной работы.

<u>Раздел I. Теория функций комплексного переменного.</u>

1-10. Даны комплексные числа z_1, z_2. Требуется изобразить z_1, z_2 на плоскости и выполнить над ними следующие действия: $z_1 + z_2$, $\overline{z_1 - z_2}$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$.

1. $z_1 = 1 - 10i,\ z_2 = 10 + i$. **2.** $z_1 = 2 - 9i,\ z_2 = 9 + 2i$

3. $z_1 = 3 - 8i,\ z_2 = 8 + 3i$. **4.** $z_1 = 4 - 7i,\ z_2 = 7 + 4i$

5. $z_1 = 5 - 6i,\ z_2 = 6 + 5i$. **6.** $z_1 = 6 - 5i,\ z_2 = 5 + 6i$

7. $z_1 = 7 - 4i,\ z_2 = 4 + 7i$. **8.** $z_1 = 8 - 3i,\ z_2 = 3 + 8i$

9. $z_1 = 9 - 2i,\ z_2 = 2 + 9i$. **10.** $z_1 = 10 - i,\ z_2 = 1 + 10i$

11-20. Найти алгебраическую форму комплексного числа, используя формулу Муавра.

11. $(1+i)^4$ **12.** $(1-i)^4$ **13.** $(-1+i)^4$ **14.** $(-1-i)^4$

15. $(1+i)^5$ **16.** $(1-i)^5$ **17.** $(-1+i)^5$ **18.** $(-1-i)^5$

19. $(1+i)^6$ **20.** $(1-i)^6$

21-30. Найти все значения корня (в алгебраической форме) на множестве комплексных чисел и изобразить на комплексной плоскости.

21. $\sqrt[3]{i}$ **22.** $\sqrt{\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$ **23.** $\sqrt[3]{-i}$ **24.** $\sqrt{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$ **25.** $\sqrt[3]{-1}$

26. $\sqrt[3]{8i}$ **27.** $\sqrt{\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}}$ **28.** $\sqrt[4]{-16}$ **29.** $\sqrt{\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}}$ **30.** $\sqrt[3]{-8i}$

31-40. Найти все корни алгебраического уравнения на множестве комплексных чисел.

31. $z^3+2z^2+5z=0$ **32.** $z^3-8=0$ **33.** $z^3+4z^2+20z=0$

34. $z^3+8=0$ **35.** $z^3-2z^2+2z=0$ **36.** $z^3+4z^2+13z=0$

37. $z^3+9z=0$ **38.** $z^3+4z^2+5z=0$ **39.** $z^3+6z^2+13z=0$

40. $z^3-6z^2+10z=0$

41-50. Изобразить область D в комплексной плоскости, заданную неравенствами.

41. $|z-1|\le 1,\ |z+1|>2$ **42.** $|z-i|\le 2,\ \operatorname{Re} z>1$

43. $|z+1|\ge 1,\ |z+i|<1$ **44.** $|z-i|\le 1,\ 0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}$

45. $|z-i|\le 2,\ 0<\operatorname{Im} z<2$ **46.** $|z+i|\ge 1,\ |z|<2$

47. $|z+1|<1,\ |z-i|\le 1$ **48.** $|z+i|<2,\ 0<\operatorname{Re} z\le 1$

49. $|z+i|>1,\ -\dfrac{\pi}{4}<\arg z<0$ **50.** $|z+i|\le 2,\ |z-i|>2$

51-60. Вычислить значение ФКП. Результат представить в алгебраической форме $a+b\cdot i$, где a,b - некоторые действительные числа.

51. $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+2i\right)$ **52.** $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2i\right)$ **53.** $sh\left(2+\dfrac{\pi}{4}i\right)$

54. $ch\left(2+\dfrac{\pi}{2}i\right)$ **55.** $Ln(\sqrt{3}+i)$ **56.** $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-5i\right)$

57. $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+i\right)$ **58.** $sh\left(1+\dfrac{\pi}{2}i\right)$ **59.** $ch\left(1+\dfrac{\pi}{3}i\right)$

60. $Ln(1+i\sqrt{3})$

61-70. Выделить действительную и мнимую части ФКП $w=f(z)$, проверить выполнение для неё условий Коши-Римана и найти производную $f'(z)$ (если условия выполняются).

61. $f(z)=iz^2-3z+1$ **62.** $f(z)=z^2-2z+i$ **63.** $z^2-2\bar{z}$

64. $f(z)=\dfrac{1+i}{z-i}$ **65.** $f(z)=z-\dfrac{1}{z}$ **66.** $f(z)=\left(\overline{z}\right)^2$

67. $f(z)=\dfrac{2}{z}$ **68.** $f(z)=2z^3$ **69.** $f(z)=z\cdot\overline{z}$

70. $f(z)=z^2+2iz$

71-80. Известно, что функция $u(x,y)$ $\left(v(x,y)\right)$ является действительной (мнимой) частью некоторой аналитической ФКП $w=f(z)$ в области D. Убедиться, что функция $u(x,y)$ $\left(v(x,y)\right)$ является гармонической в области D и восстановить функцию $f(z)$ по известной её действительной (мнимой) части и значению $f(z_0)$.

71. $u=x^2-y^2+x$, $f(0)=0$ **72.** $v=2xy+x$, $f(0)=0$

73. $u=x^2-y^2-2x+1$, $f(0)=1$ **74.** $v=2xy+2x$, $f(0)=0$

75. $u=-2xy-2y$, $f(0)=i$ **76.** $v=x^2-y^2-x$, $f(0)=0$

77. $u=y-2xy$, $f(0)=0$ **78.** $v=x^2-y^2+2x+1$, $f(0)=i$

79. $u=x^2-y^2-2y$, $f(0)=0$ **80.** $v=2xy+y$, $f(0)=0$

81-90. Вычислить интеграл от ФКП по заданной линии.

81. $\int\limits_{AB}\left(\overline{z}\right)^2dz$, $AB: y=x^2,\ z_A=0,\ z_B=1+i$.

82. $\int\limits_{AB}(z^2+7z+1)dz$, AB - отрезок прямой, $z_A=1,\ z_B=1-i$.

83. $\int\limits_{AB}\left(\overline{z}\right)^2dz$, AB - отрезок прямой, $z_A=0,\ z_B=1+i$.

84. $\int\limits_{AB}(3z^2+2z)dz$, $AB: y=x^2,\ z_A=0,\ z_B=1+i$.

85. $\int\limits_{AB}(z^2+1)dz$, AB - отрезок прямой, $z_A=0,\ z_B=-1+i$..

86. $\int\limits_{AB}(2z+1)dz$, $AB: y=x^3,\ z_A=0,\ z_B=1+i$.

87. $\int\limits_{AB} \mathrm{Re}(z+z^2)dz$, AB: $y=2x^2$, $z_A=0, z_B=1$.

88. $\int\limits_{AB} (iz^2-2z)dz$, AB - отрезок прямой, $z_A=1, z_B=i$.

89. $\int\limits_{AB} |z|\,dz$, AB - отрезок прямой, $z_A=0, z_B=-2-3i$.

90. $\int\limits_{AB} \mathrm{Re}\, z dz$, AB: $y=2x^2$, $z_A=0, z_B=1+2i$.

91-100. Вычислить интеграл по замкнутому контуру, используя интегральную формулу Коши или теорему Коши (обход кривой осуществляется против хода часовой стрелки).

91. $\oint\limits_L \frac{\sin z}{(z^2+\pi^2)^2}dz$, $L: |z-\pi i|=1$.

92. $\oint\limits_L \frac{z}{z+1}dz$, $L: |z|=2$.

93. $\oint\limits_L \frac{1}{z^5-z^3}dz$ $L: |z|=\frac{1}{2}$.

94. $\oint\limits_L \frac{1}{z^2-1}dz$ $L: |z+1|=1$.

95. $\oint\limits_L \frac{z}{(z-1)^2}dz$ $L: |z|=2$.

96. $\oint\limits_L \frac{1}{z^5-z^3}dz$ $L: |z-1|=\frac{1}{2}$.

97. $\oint\limits_L \frac{1}{z^2-1}dz$ $L: |z-1|=1$.

98. $\oint\limits_L \frac{\cos z}{z-\pi}dz$ $L: |z-\pi|=1$.

99. $\oint\limits_L \frac{\sin z}{(z^2+\pi^2)^2}dz$, $L: |z+\pi i|=1$.

100. $\oint\limits_L \frac{1}{z^5-z^3}dz$ $L: |z+1|=\frac{1}{2}$.

101-110. Найти разложение ФКП в ряд Тейлора в точке z_0 по степеням $(z-z_0)$, указать круг его сходимости.

101. $f(z)=\frac{1}{4+3z}$, $z_0=0$.

102. $f(z)=\frac{1}{z-1}$, $z_0=2$

103. $f(z)=\frac{1}{3-2z}$, $z_0=0$

104. $f(z)=\frac{1}{z+5}$, $z_0=2$

105. $f(z)=\ln(1+z-2z^2)$, $z_0=0$

106. $f(z)=\frac{1}{7-5z}$, $z_0=1$

107. $f(z)=\dfrac{3}{1+z-2z^2}$, $z_0=0$ **108.** $f(z)=\dfrac{1}{3-2z}$, $z_0=3$

109. $f(z)=\ln(z^2+3z+2)$, $z_0=0$ **110.** $f(z)=\ln(5z+3)$, $z_0=1$

111-120. Найти разложение ФКП в ряд Лорана по степеням z в комплексной плоскости. Указать главную и правильную часть ряда Лорана.

111. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$. **112.** $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z}$.

113. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-3)}$. **114.** $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z+3)}$.

115. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z}$. **116.** $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$.

117. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-2)}$. **118.** $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$.

119. $f(z)=\dfrac{1}{z(z+3)}$. **120.** $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z+2)}$.

121-130. Вычислить интеграл по замкнутому контуру, используя теорему о вычетах.

121. $\oint\limits_L \dfrac{(2z-1)dz}{z(z-1)}$ $L:|z|=3$. **122.** $\oint\limits_L \dfrac{(z+5)dz}{(z-1)^2(z-3)}$ $L:|z|=2$.

123. $\oint\limits_L \dfrac{zdz}{(z^2-1)^2}$ $L:|z-2|=2$. **124.** $\oint\limits_L \dfrac{dz}{(z+1)^3(z-1)^2}$ $L:|z-1|=1$.

125. $\oint\limits_L \dfrac{dz}{z(z+2)^3}$ $L:|z|=1$. **126.** $\oint\limits_L \dfrac{dz}{z(z+1)^3}$ $L:|z|=3$.

127. $\oint\limits_L \dfrac{dz}{z^3-z^5}$ $L:|z|=4$. **128.** $\oint\limits_L \dfrac{dz}{(z+1)^3(z-1)^2}$ $L:|z+1|=1$.

129. $\oint\limits_L \dfrac{dz}{z(z+2)^3}$ $L:|z|=3$. **130.** $\oint\limits_L \dfrac{dz}{(z+1)^3(z-1)^2}$ $L:|z|=3$.

131-140. Разложить в ряд Фурье 2π-периодическую функцию $f(x)$, определённую указанным ниже образом (в ответе указать первые пять отличные от нуля члена ряда). Построить график 2π-периодической функции $f(x)$.

131. $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0,\\ 1, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

132. $f(x)=\begin{cases}x+\pi, & -\pi\le x<0,\\ \pi, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$.

133. $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi\le x<0,\\ 2, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

134. $f(x)=\begin{cases}2, & -\pi\le x<0,\\ -4, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

135. $f(x)=\begin{cases}\pi, & -\pi\le x<0,\\ \pi-x, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$.

136. $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

137. $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

138. $f(x)=\begin{cases}5, & -\pi\le x<0,\\ -3, & 0\le x\le\pi.\end{cases}$

139. $f(x)=x+\pi$, $-\pi\le x\le\pi$.

140. $f(x)=x-\pi$, $-\pi\le x\le\pi$.

141-150. Вычислить несобственный интеграл.

141. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-1)}{(x^2+4)^2}dx$.

142. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+16)}$.

143. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)(x^2+9)^2}$

144. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$

145. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+9)}$

146. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+5}{x^4+5x^2+6}dx$

147. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+10x^2+9}$

148. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$

149. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+7x^2+12}$

150. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+10}{(x^2+4)^2}dx$

Раздел II. Операционное исчисление.

151-160. Найти изображение $F(p)$ по заданному оригиналу $f(t)$.

151. $4t+3e^{-t}$ **152.** $5e^{-2t}+3\cos 4t$ **153.** $\sin^2 3t$

154. t^4-5e^{3t} **155.** $3e^{-2t}+t^2$ **156.** $2\cos 3t+e^{2t}$

157. $\sin 2t-t\cos 2t$ **158.** $e^{-t}(\cos 3t+\sin 3t)$ **159.** $\cos^2 3t$

160. $\sin 3t\cdot\cos 2t$

161-170. Найти изображение $F(p)$ по заданному оригиналу $f(t)$, используя теоремы операционного исчисления (смещения, о дифференцировании изображения, об интегрировании изображения).

161. $te^{-t}\cdot\sin t$ **162.** t^2e^{-t} **163.** $t^3\cdot e^{2t}$

164. $te^{2t}\cos 3t$ **165.** $t^2\cos 2t$ **166.** $t^2\sin t$

167. $t\cdot sh3t$ **168.** $\dfrac{1-e^t}{t}$ **169.** $\dfrac{\cos 5t-\cos 2t}{t}$

170. $\dfrac{e^{2t}-e^{3t}}{t}$

171-180. Найти оригинал $f(t)$ по заданному изображению $F(p)$.

171. $F(p)=\dfrac{p+4}{p^2+4p+5}$ **172.** $F(p)=\dfrac{p}{(p+1)(p^2+2p+2)}$

173. $F(p)=\dfrac{6}{p^3-8}$ **174.** $F(p)=\dfrac{2p+1}{(p+1)(p^2+2p+3)}$

175. $F(p)=\dfrac{p+3}{p^3+2p^2+3p}$ **176.** $F(p)=\dfrac{p}{(p+1)(p^2+4p+5)}$

177. $F(p)=\dfrac{4}{p^3+8}$ **178.** $F(p)=\dfrac{3p+2}{(p+1)(p^2+4p+5)}$

179. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$ **180.** $F(p)=\dfrac{1}{(p-2)(p^2+2p+3)}$

181-190. Решить операционным методом задачу Коши для дифференциального уравнения 2-го порядка.

181. $x''+x=6e^{-t}$, $x(0)=3,\ x'(0)=1$.

182. $x''-x'=t^2$, $x(0)=0,\ x'(0)=1$.

183. $x''-x=\cos 3t$, $x(0)=1,\ x'(0)=1$.

184. $x''+x'+x=7e^{2t}$, $x(0)=1,\ x'(0)=4$.

185. $2x''-x'=\sin 3t$, $x(0)=2,\ x'(0)=1$.

186. $2x''+3x'+x=3e^{t}$, $x(0)=0,\ x'(0)=1$.

187. $x''+4x=\sin 2t$, $x(0)=0,\ x'(0)=1$.

188. $x''+x'=t^2+2t$, $x(0)=0,\ x'(0)=-2$.

189. $x''+x=2\cos t$, $x(0)=0,\ x'(0)=1$.

190. $x''-3x'+2x=12e^{3t}$, $x(0)=2,\ x'(0)=6$.

191-200. Решить операционным методом задачу Коши для системы дифференциальных уравнений.

191. $\begin{cases} x'=x+3y+2 \\ y'=x-y+1 \end{cases}$, $x(0)=-1,\ y(0)=2$.

192. $\begin{cases} x'=-x+3y+1 \\ y'=x+y \end{cases}$, $x(0)=1,\ y(0)=2$.

193. $\begin{cases} x'=x+2y+1 \\ y'=4x-y \end{cases}$, $x(0)=0,\ y(0)=1$.

194. $\begin{cases} x'=-x+5y+1 \\ y'=x+2y+1 \end{cases}$, $x(0)=0,\ y(0)=2$.

195. $\begin{cases} x'=x+2y \\ y'=2x+y+1 \end{cases}$, $x(0)=0,\ y(0)=5$.

196. $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x - y + 9 \end{cases}$, $x(0) = 1,\ y(0) = 0$.

197. $\begin{cases} x' = 2x + 5y \\ y' = x - 2y + 2 \end{cases}$, $x(0) = 1,\ y(0) = 1$.

198. $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 1 \\ y' = 4x - 2y \end{cases}$, $x(0) = -1,\ y(0) = 0$.

199. $\begin{cases} x' = -2x + 6y + 1 \\ y' = 2x + 2 \end{cases}$, $x(0) = 0,\ y(0) = 1$.

200. $\begin{cases} x' = y + 3 \\ y' = x + 2 \end{cases}$, $x(0) = 1,\ y(0) = 0$.

5.2. Вопросы к экзамену (зачёту).

1. Понятие комплексного числа. Комплексно-сопряжённое число. Геометрическое изображение комплексного числа. Модуль и аргумент комплексного числа.
2. Формы записи комплексных чисел (алгебраическая, тригонометрическая, показательная). Формула Эйлера.
3. Арифметические действия над комплексными числами. Возведение в степень комплексного числа. Формула Муавра.
4. Извлечение корней из комплексного числа.
5. Комплексная плоскость. Линии и области на комплексной плоскости.
6. Понятие функции комплексной переменной. Область определения. Множество значений. Однозначная и многозначная функции. Однолистная функция.
7. Предел и непрерывность функции комплексной переменной.
8. Основные элементарные функции комплексной переменной: показательная, логарифмическая, степенная.
9. Основные элементарные функции комплексной переменной: тригонометрические, гиперболические.
10. Основные элементарные функции комплексной переменной: обратные тригонометрические и гиперболические функции.

11. Понятие производной функции комплексной переменной. Понятия дифференцируемой и аналитической функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана.
12. Правила дифференцирования функций комплексной переменной.
13. Гармоническая функция, её связь с аналитической функцией. Восстановление аналитической функции по её известной действительной или мнимой части.
14. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие конформного отображения, примеры конформных отображений.
15. Интеграл от функции комплексной переменной, его свойства.
16. Вычисление интеграла от функции комплексной переменной через криволинейный интеграл. Интегральная теорема Коши.
17. Первообразная и неопределённый интеграл от функции комплексной переменной. Формула Ньютона-Лейбница.
18. Интегральная формула Коши. Интегральная формула для значений n-ой производной. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции.
19. Вычисление интегралов по замкнутому контуру с помощью интегральной формулы Коши и интегральной формулы для значений n-ой производной.
20. Числовые ряды в комплексной области, их сходимость.
21. Степенные ряды в комплексной области, их сходимость. Теорема Абеля. Формула Коши-Адамара.
22. Разложение аналитической функции в ряд Тейлора в круге. Интегральные коэффициенты ряда Тейлора.
23. Разложение аналитической функции в ряд Лорана в кольце. Интегральные коэффициенты ряда Лорана.
24. Нули аналитической функции. Особые точки аналитической функции, их классификация. Взаимосвязь нулей функции $f(z)$ и полюсов функции $1/f(z)$.
25. Понятие вычета аналитической функции. Теорема Коши о вычетах.
26. Вычисление вычетов в особых точках.
27. Применения вычетов для вычисления контурных интегралов от функции комплексной переменной.
28. Применение вычетов для вычисления несобственных интегралов от функции действительной переменной.

29.Тригонометрический ряд. Ряд Фурье и коэффициенты Фурье. Комплексная форма ряда Фурье. Теорема Дирихле о разложении функции в ряд Фурье.
30. Разложение в ряд Фурье периодических, чётных и нечётных функций. Неполные ряды Фурье. Разложение функций в ряд Фурье на отрезке произвольной длины.
31. Определение преобразования Лапласа. Оригинал и изображение. Теорема о существовании изображения. Поведение изображения в бесконечно удалённой точке.
32. Единичная функция Хевисайда и её изображение.
33. Свойство линейности преобразования Лапласа. Теорема подобия.
34. Теоремы смещения и запаздывания.
35. Теоремы о дифференцировании изображения и оригинала.
36. Теоремы об интегрировании изображения и оригинала. Теорема о свёртке. Интеграл Дюамеля.
38. Нахождение изображений оригиналов. Нахождение изображения периодического оригинала.
39. Восстановление оригинала по изображению методом разложения рациональной дроби в сумму простейших.
39. Решение обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами при помощи преобразования Лапласа.
40. Решение систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений при помощи преобразования Лапласа.

6. Приложения.
6.1. Образец решения контрольных задач типового варианта.

1-10. Даны комплексные числа $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 5-4i$. Требуется изобразить z_1, z_2 на плоскости и выполнить над ними следующие действия: $z_1 + z_2$, $\overline{z_1 - z_2}$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Решение.

1) Изображаем $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 5-4i$ на плоскости в виде точек $M_1(2,3)$ и $M_2(5,-4)$ (Рис.1).

Замечание. Комплексные числа z_1, z_2 можно изобразить на плоскости и в виде радиус-векторов точек $M_1(2,3)$ и $M_2(5,-4)$ (Рис.2).

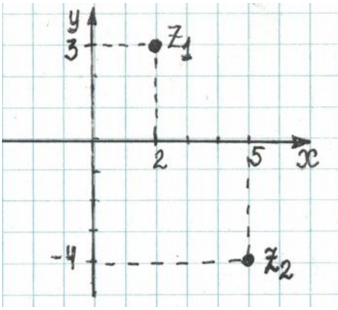


Рис. 1

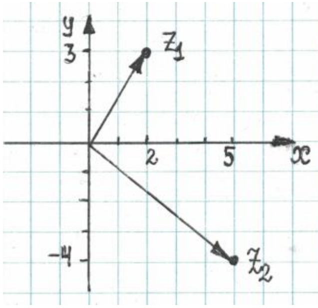


Рис. 2

2) Вычисляем $z_1 + z_2$:

$z_1 + z_2 = (2+3i)+(5-4i) = 2+3i+5-4i = 7-i$.

3) Вычисляем $\overline{z_1 - z_2}$:

Сначала находим $z_1 - z_2 = (2+3i)-(5-4i) = 2+3i-5+4i = 3+7i$. Тогда $\overline{z_1 - z_2} = \overline{(3+7i)} = 3-7i$.

4) Вычисляем $z_1 \cdot z_2$:

$z_1 \cdot z_2 = (2+3i)\cdot(5-4i) = 10-8i+15i-12i^2 =$ (учитываем, что $i^2 = -1$) $= 22+7i$.

5) Вычисляем $\dfrac{z_1}{z_2}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(2+3i)\cdot\overline{(5-4i)}}{(5-4i)\cdot\overline{(5-4i)}} = \frac{(2+3i)\cdot(5+4i)}{(5-4i)\cdot(5+4i)} =$$

$$= \frac{10+8i+15i+12i^2}{25+20i-20i-16i^2} = \text{(учитываем, что } i^2 = -1\text{)} = \frac{-2+23i}{41} = -\frac{2}{41}+\frac{23}{41}i.$$

Ответ: $z_1 + z_2 = 7-i$, $\overline{z_1 - z_2} = 3-7i$, $z_1 \cdot z_2 = 22+7i$, $\dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{2}{41}+\dfrac{23}{41}i$.

11-20. Найти алгебраическую форму комплексного числа $z^4=(-1-\sqrt{3}i)^4$, используя формулу Муавра.

Решение.

1) Представляем комплексное число $z=-1-\sqrt{3}i$ в тригонометрической форме $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $0\le\varphi<2\pi$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$,

$\varphi=\pi+arctg\left|\dfrac{y}{x}\right|=\pi+arctg\sqrt{3}=\pi+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{4\pi}{3}$ (так как комплексное число, изображается точкой $(-1,-\sqrt{3})$, лежащей в третьем квадранте координатной плоскости). Тогда $z=2\cdot\left(\cos(4\pi/3)+i\sin(4\pi/3)\right)$.

2) Вычисляем z^4 по формуле Муавра:

$$z^4=r^4\cdot(\cos(4\phi)+i\sin(4\phi))=2^4\cdot\left(\cos\left(4\cdot\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(4\cdot\frac{4\pi}{3}\right)\right)=$$

$$=16\cdot\left(\cos\left(\frac{16\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{16\pi}{3}\right)\right)=16\cdot\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}+2\cdot2\pi\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}+2\cdot2\pi\right)\right)=$$

$=16\cdot\left(\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)\right)$. Полученный результат представляем в алгебраической форме: $z^4=(-1-\sqrt{3})^4=16\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)=-8\sqrt{3}-8i$.

Ответ: $z^4=-8\sqrt{3}-8i$.

21-30. Найти все значения корня $\sqrt[4]{z}$, где $z=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ (в алгебраической форме) на множестве комплексных чисел и изобразить их на комплексной плоскости.

Решение.

1) Представляем комплексное число $z=x+iy=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)i$ в тригонометрической форме $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $0\le\varphi<2\pi$, где

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1,$$

$\varphi=2\pi-arctg\left|\dfrac{y}{x}\right|=2\pi-arctg\left|\dfrac{-\sqrt{3}/2}{1/2}\right|=2\pi-arctg\sqrt{3}=2\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{3}$ (так как комплексное число, изображается точкой $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, лежащей в четвёртом квадранте координатной плоскости). Тогда $z=1\cdot\left(\cos(5\pi/3)+i\sin(5\pi/3)\right)$.

2) Вычисляем $\sqrt[4]{z}$ по формуле: $\left(\sqrt[4]{z}\right)_k=\sqrt[4]{r}\cdot\left(\cos\left(\dfrac{\varphi+2\pi k}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\varphi+2\pi k}{4}\right)\right)$, где $k=0,1,2,3$:

$$\left(\sqrt[4]{z}\right)_0=\sqrt[4]{1}\cdot\left(\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi\cdot 0}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi\cdot 0}{4}\right)\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right),$$

$$\left(\sqrt[4]{z}\right)_1=\sqrt[4]{1}\cdot\left(\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi\cdot 1}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi\cdot 1}{4}\right)\right)=\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right),$$

$$\left(\sqrt[4]{z}\right)_2=\sqrt[4]{1}\cdot\left(\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi\cdot 2}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi\cdot 2}{4}\right)\right)=\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right),$$

$$\left(\sqrt[4]{z}\right)_3=\sqrt[4]{1}\cdot\left(\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi\cdot 3}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi\cdot 3}{4}\right)\right)=\cos\left(\frac{23\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{23\pi}{12}\right).$$

3) Изображаем значения корня $\sqrt[4]{\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}}$ точками на комплексной плоскости:

$\left(\sqrt[4]{z}\right)_0 = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \approx 0.26 + 0.97i$ соответствует точка $\left(0.26, 0.97\right)$;

$\left(\sqrt[4]{z}\right)_1 = \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) \approx -0.97 + 0.26i$ соответствует точка $\left(-0.97, 0.26\right)$;

$\left(\sqrt[4]{z}\right)_2 = \cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right) \approx -0.26 - 0.97i$ соответствует точка $\left(-0.26, -0.97\right)$;

$\left(\sqrt[4]{z}\right)_3 = \cos\left(\frac{23\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{23\pi}{12}\right) \approx 0.97 - 0.26i$ соответствует точка $\left(0.97, -0.26\right)$. Все точки располагаются на окружности радиуса r, где $r = 1$ (число точек совпадает с порядком корня) (Рис. 3).

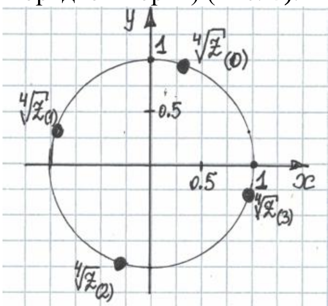


Рис. 3

Ответ: $\left(\sqrt[4]{z}\right)_0 \approx 0.26 + 0.97i$, $\left(\sqrt[4]{z}\right)_1 \approx -0.97 + 0.26i$, $\left(\sqrt[4]{z}\right)_2 \approx -0.26 - 0.97i$, $\left(\sqrt[4]{z}\right)_3 \approx 0.97 - 0.26i$.

31-40. Найти корни алгебраического уравнения $z^4 + 27z = 0$ на множестве комплексных чисел.

Решение.

1) Для нахождения корней алгебраического уравнения $z^4 + 27z = 0$, раскладываем его левую часть на множители:

$$z^4 + 27z = z \cdot (z^3 + 27) = z \cdot (z+3) \cdot (z^2 - 3z + 9).$$

2) Находим корни уравнения на множестве комплексных чисел, приравнивая каждый из множителей нулю (число корней, с учётом кратности, должно равняться порядку уравнения):

2.1) $z=0$ $\qquad\Rightarrow\ z_1=0$.

2.2) $z+3=0$ $\qquad\Rightarrow\ z_2=-3$.

2.3) $z^2-3z+9=0$. Так как дискриминант квадратного уравнения $D=9-4\cdot 9=-27<0$, то уравнение имеет два комплексно-сопряжённых корня: $z_{3,4}=\dfrac{-(-3)\pm i\cdot\sqrt{|-27|}}{2}=\dfrac{3\pm i\cdot\sqrt{27}}{2}=\dfrac{3}{2}\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$.

Корни z_2, $z_{3,4}$ можно найти и как корни уравнения $z^3+27=0$, по формуле $z_{2,3,4}=\left(\sqrt[3]{-27}\right)_{1,2,3}$. Для нахождения комплексных значений корня, число -27 следует представить в виде комплексного числа в тригонометрической форме: $-27=-27+0\cdot i=27\cdot\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$, после чего значения корня найти по формуле: $\left(\sqrt[3]{-27}\right)_k=\sqrt[3]{27}\cdot\left(\cos\left(\dfrac{\pi+2\pi(k-1)}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi+2\pi(k-1)}{3}\right)\right)$, *где* $k=1,\ 2,\ 3$.

Ответ: $z_1=0$, $z_2=-3$, $z_{3,4}=\dfrac{3}{2}\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$.

41-50. Изобразить область D в комплексной плоскости, заданную неравенствами:

а) $|z|\le 2$, $\operatorname{Re}z\ge 1$, $0\le\arg z\le\dfrac{\pi}{4}$; **б)** $|z-2-i|\le 2$, $\operatorname{Re}z>3$, $\operatorname{Im}z<1$.

$|z-z_0|=a$ - уравнение окружности с центром z_0 и радиусом a (Рис.4); $\arg(z-z_0)=\alpha$ - уравнение луча, выходящего из точки z_0 под углом α к оси Ox (угол α изменяется в пределах $0\le\alpha<2\pi$ или $-\pi<\alpha\le\pi$ и отсчитывается против хода часовой стрелки) (Рис.5).

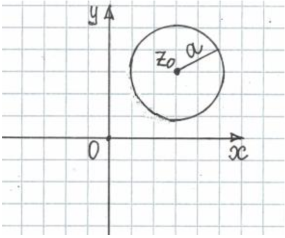


Рис. 4

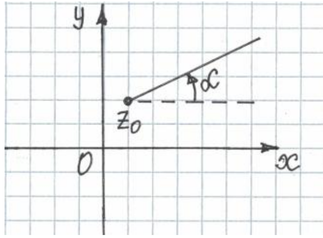


Рис. 5

Для построения области, заданной неравенствами, следует:
1) Найти уравнения граничных линий области, заменив во всех неравенствах знак неравенства на знак равенства и изобразить их на комплексной плоскости (сплошной линией, если неравенство - нестрогое и пунктирной линией, если неравенство - строгое); граничные линии разобьют всю комплексную плоскость на части.
2) Установить, используя при необходимости пробную точку, какая часть плоскости удовлетворяет всем неравенствам, и заштриховать её. В качестве пробной выбирается любая точка, не лежащая на границе, и если её координаты удовлетворяют всем неравенствам, то и та часть плоскости, которая содержит пробную точку, также удовлетворяет всем неравенствам.

1а) Находим уравнения граничных линий и изображаем их:
$\Gamma_1 : |z| = 2$ - уравнение окружности с центром $z_0 = 0$ и радиусом $a = 2$ (изображаем сплошной линией); $\Gamma_2 :$ $\operatorname{Re} z = 1 \Rightarrow \operatorname{Re}(x + iy) = 1 \Rightarrow x = 1$ - уравнение прямой (изображаем сплошной линией); $\Gamma_3 : \arg z = 0$ и $\Gamma_4 : \arg z = \dfrac{\pi}{4}$ - уравнения лучей выходящих из точки $z_0 = 0$ под углами $\alpha = 0$ и $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, соответственно (изображаем сплошной линией).

2а) Устанавливаем, какая часть плоскости удовлетворяет всем неравенствам и отмечаем её штриховкой (Рис. 6).

1б) Находим уравнения граничных линий и изображаем их:
$\Gamma_1 :$ $|z - 2 - i| = 2$ - уравнение окружности с центром $z_0 = 2 + i$ и радиусом $a = 2$ (изображаем сплошной линией); $\Gamma_2 : \operatorname{Re} z = 3 \Rightarrow \operatorname{Re}(x + iy) = 3 \Rightarrow x = 3$ - уравнение прямой (изображаем

пунктирной линией); $\Gamma_3 : \operatorname{Im} z = 1 \Rightarrow \operatorname{Im}(x+iy) = 1 \Rightarrow y = 1$ - уравнение прямой (изображаем пунктирной линией).

2б) Устанавливаем, какая часть плоскости удовлетворяет всем неравенствам, и отмечаем её штриховкой (Рис. 7).

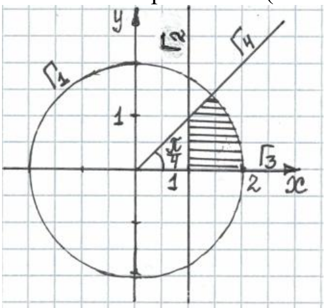


Рис. 6

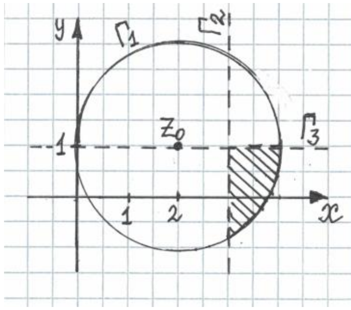


Рис. 7

Ответ: а) Рис. 6**; б)** Рис.7.

51-60. Вычислить значение ФКП. Результат представить в алгебраической форме $a + b \cdot i$, где a, b - некоторые действительные числа:

а) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + 2i\right)$ **б)** $sh\left(1 - \dfrac{\pi i}{3}\right)$ **в)** $Ln(-1-i)$

Воспользоваться формулами:

$e^{i\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ - формула Эйлера;

$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}e^{iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$;

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i};\ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2};\ shz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2};\ chz = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2};$$

$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\arg z + i2\pi k$, где $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $-\pi < \arg z \le \pi$, $k \in Z$.

Решение.

а) $$\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2i\right) = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{6}+2i\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{6}+2i\right)}}{2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}-2} + e^{-i\frac{\pi}{6}+2}}{2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}e^{-2} + e^{-i\frac{\pi}{6}}e^{2}}{2};$$

$$e^{i\frac{\pi}{6}}=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+i}{2};$$

$$e^{-i\frac{\pi}{6}}=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-i}{2}.$$

Тогда получим:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}+2i\right)=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)e^{-2}+\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)e^{2}}{2}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(e^{-2}+e^{2}\right)+\frac{i}{2}\left(e^{-2}-e^{2}\right)}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}ch2-ish2}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}ch2+\left(-\frac{1}{2}sh2\right)i.$$

б) $sh\left(1-\frac{\pi i}{3}\right)=\dfrac{e^{\left(1-\frac{\pi}{3}i\right)}-e^{-\left(1-\frac{\pi}{3}i\right)}}{2}=\dfrac{e^{1}e^{-i\frac{\pi}{3}}-e^{-1}e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}$**;**

$$e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2};$$

$$e^{-i\frac{\pi}{3}}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда получим:

$$sh\left(1-\frac{\pi}{3}i\right)=\frac{e^{1}\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)-e^{-1}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)}{2}=\frac{\frac{1}{2}\left(e^{1}-e^{-1}\right)-\frac{i\sqrt{3}}{2}\left(e^{1}+e^{-1}\right)}{2}=$$

$$=\frac{sh1-i\sqrt{3}ch1}{2}=\frac{1}{2}sh1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}ch1\right)i.$$

в) $\mathrm{Ln}(-1-i)=\ln|-1-i|+i\arg(-1-i)+i2\pi k$;

$|-1-i|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$;

$$\arg(-1-i)=-\pi+arctg\left|\frac{y}{x}\right|=-\pi+arctg\left|\frac{-1}{-1}\right|=-\pi+arctg1=-\pi+\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}$$

(так как комплексное число, изображается точкой $(-1,-1)$, лежащей в третьем квадранте координатной плоскости и ($-\pi<\arg z\le\pi$)).

Тогда получим:

$$\mathrm{Ln}\,(-1-i)=\ln\sqrt{2}+i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i2\pi k=\ln\sqrt{2}+\left(-\frac{3}{4}+2k\right)\pi i \text{ ,где } k\in Z\,.$$

Ответ:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+2i\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}ch2+\left(-\frac{1}{2}sh2\right)i$ **;** **б)** $sh\left(1-\frac{\pi}{3}i\right)=\frac{1}{2}sh1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}ch1\right)i$;

в) $\mathrm{Ln}\,(-1-i)=\ln\sqrt{2}+\left(-\frac{3}{4}+2k\right)\pi i$, где $k\in Z$.

61-70. Выделить действительную и мнимую части ФКП $w=f(z)$, проверить выполнение условий дифференцируемости ФКП и найти её производную $f'(z)$, если: **а)** $f(z)=\dfrac{z+1}{z}$ **; б)** $f(z)=\dfrac{z}{|z|}$ **.**

Необходимым и достаточным условием дифференцируемости ФКП $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ в точке $z\in D(f(z))$ является выполнение в этой точке *условий Коши-Римана* $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$, где $D(f(z))$ - область определения ФКП $f(z)$.

Производная ФКП в точке дифференцируемости находится по формуле: $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$. Для представления производной в виде $f'(z)$, следует учесть, что $x=(z+\bar{z})/2,\ y=(z-\bar{z})/(2i)$.

ФКП $f(z)$ дифференцируемую в точке $z\in D(f(z))$ и некоторой её окрестности называют *аналитической* в данной *точке*. ФКП $f(z)$ дифференцируемую в каждой точке некоторой открытой области называют *аналитической* в данной области. Производную аналитической ФКП можно найти, пользуясь таблицей и правилами нахождения производной функции одного действительного переменного.

Решение.

1a) Выделяем действительную и мнимую части ФКП $f(z)=\dfrac{z+1}{z}$:

$$f(z)=\frac{z+1}{z}=\frac{x+iy+1}{x+iy}=\frac{(x+1)+iy}{x+iy}=\frac{((x+1)+iy)\cdot\overline{(x+iy)}}{(x+iy)\cdot\overline{(x+iy)}}=$$

$$=\frac{((x+1)+iy)\cdot(x-iy)}{(x+iy)\cdot(x-iy)}=\frac{(x^2+x+y^2)-iy}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{(x^2+x+y^2)}{x^2+y^2}+i\frac{(-y)}{x^2+y^2}=u(x,y)+iv(x,y)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ u(x,y)=\frac{x^2+x+y^2}{x^2+y^2},\ v(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}.$$

2a) Находим частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{x^2+x+y^2}{x^2+y^2}\right)'_x=\frac{(x^2+x+y^2)'_x\cdot(x^2+y^2)-(x^2+x+y^2)\cdot(x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\frac{(2x+1)\cdot(x^2+y^2)-(x^2+x+y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\frac{x^2+x+y^2}{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{(x^2+x+y^2)'_y\cdot(x^2+y^2)-(x^2+x+y^2)\cdot(x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\frac{2y\cdot(x^2+y^2)-(x^2+x+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x=-\frac{(y)'_x\cdot(x^2+y^2)-y\cdot(x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=-\frac{0\cdot(x^2+y^2)-y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y=-\frac{(y)'_y\cdot(x^2+y^2)-y\cdot(x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=-\frac{1\cdot(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

3а) Проверяем выполнение условий Коши-Римана:

$\frac{\partial u}{\partial x}\overset{?}{=}\frac{\partial v}{\partial y}$: $\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ (выполняется для всех $(x,y)\neq(0,0)$);

$\frac{\partial u}{\partial y}\overset{?}{=}-\frac{\partial v}{\partial x}$: $-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ (выполняется для всех $(x,y)\neq(0,0)$). Таким образом, условия Коши-Римана выполняются для всех точек комплексной плоскости $(x,y)\neq(0,0)$, и функция $f(z)$ дифференцируема во всех точках комплексной плоскости, кроме точки $(0,0)$, т.е. точки $z=0$.

4а) Находим производную $f'(z)$:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+i\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Получим выражение для $f'(z)$ через комплексную переменную z, учитывая, что $x=(z+\overline{z})/2,\ y=(z-\overline{z})/(2i)$:

$$x=\frac{z+\overline{z}}{2}\ \Rightarrow\ x^2=\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2=\frac{z^2+2z\overline{z}+(\overline{z})^2}{4};$$

$$y=\frac{z-\overline{z}}{2i}\ \Rightarrow\ y^2=\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^2=-\frac{z^2-2z\overline{z}+(\overline{z})^2}{4};$$

$$x^2+y^2=\frac{z^2+2z\overline{z}+(\overline{z})^2}{4}-\frac{z^2-2z\overline{z}+(\overline{z})^2}{4}=z\overline{z};$$

$$y^2-x^2=-\frac{z^2-2z\overline{z}+(\overline{z})^2}{4}-\frac{z^2+2z\overline{z}+(\overline{z})^2}{4}=-\frac{z^2+(\overline{z})^2}{2};$$

$$2x\cdot y=2\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)\cdot\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)=\frac{z^2-(\overline{z})^2}{2i}.$$

Тогда $f'(z)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+i\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-\frac{z^2+(\overline{z})^2}{2}+i\cdot\frac{z^2-(\overline{z})^2}{2i}}{(z\cdot\overline{z})^2}=$

$$= \frac{-\overline{z}^2}{(z\cdot\overline{z})^2} = -\frac{\overline{z}^2}{z^2\cdot\overline{z}^2} = -\frac{1}{z^2}$$. Таким образом $f'(z) = \left(\frac{z+1}{z}\right)'_z = -\frac{1}{z^2}$.

Замечание. Так как ФКП $f(z)$ дифференцируема во всех точках z комплексной плоскости, кроме точки $z=0$, то она является аналитической в данной области. Производную же аналитической ФКП $f(z)$ можно найти, пользуясь таблицей и правилами нахождения производной функции одного действительного переменного, следующим способом:

$$f'(z) = \left(\frac{z+1}{z}\right)'_z = \frac{(z+1)'\cdot z-(z+1)\cdot z'}{z^2} = \frac{1\cdot z-(z+1)\cdot 1}{z^2} = -\frac{1}{z^2}.$$

1б) Выделяем действительную и мнимую части ФКП $f(z) = \frac{z}{|z|}$:

$$f(z) = \frac{z}{|z|} = \frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = u(x,y)+iv(x,y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ v(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

2б) Находим частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x = \frac{(x)'_x\cdot\sqrt{x^2+y^2} - x\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{1\cdot\sqrt{x^2+y^2} - x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_y = \frac{(x)'_y\cdot\sqrt{x^2+y^2} - x\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_y}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{0\cdot\sqrt{x^2+y^2} - x\cdot\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x = \frac{(y)'_x\cdot\sqrt{x^2+y^2} - y\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{0\cdot\sqrt{x^2+y^2} - y\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_y = \frac{(y)'_y\cdot\sqrt{x^2+y^2} - y\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_y}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{1\cdot\sqrt{x^2+y^2} - y\cdot\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}};$$

3б) Проверяем выполнение условий Коши-Римана:

$\frac{\partial u}{\partial x} \overset{?}{=} \frac{\partial v}{\partial y}$: $\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ (выполняется для точек (x, y) комплексной плоскости, для которых $x = y$ и $(x, y) \neq (0, 0)$);

$\frac{\partial u}{\partial y} \overset{?}{=} -\frac{\partial v}{\partial x}$: $-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ (не выполняется для всех точек (x, y) комплексной плоскости). Таким образом, условия Коши-Римана не выполняются для всех точек (x, y) комплексной плоскости, следовательно, функция $f(z)$ не дифференцируема ни в одной точке комплексной плоскости и $f'(z)$ не существует.

Ответ: **а)** $u(x,y)=\dfrac{x^2+x+y^2}{x^2+y^2}$, $v(x,y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$; условия Коши-Римана выполняются; $f'(z)=-\dfrac{1}{z^2}$.

б) $u(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $v(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; условия Коши-Римана не выполняются; $f'(z)$ не существует.

71-80. Известно, что функция $v(x,y)=arctg\,\dfrac{y}{x}$ является мнимой частью некоторой аналитической ФКП $w=f(z)$ в области $D:\ 0<|z|<+\infty$. Убедиться, что функция $v(x,y)$ является гармонической в области D и восстановить функцию $f(z)$ по известной её мнимой части и значению $f(1)=0$.

Решение.

1) Покажем сначала, что $v(x,y)=arctg\,\dfrac{y}{x}$ является гармонической функцией, т.е. удовлетворяет уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\Delta v=0$:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\left(arctg\,\frac{y}{x}\right)'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_x=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}\ \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_x=-y\cdot\left(-\frac{(x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2}\right)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\left(arctg\,\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)'_y=\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}\ \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_y=x\cdot\left(-\frac{(x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2}\right)=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\Rightarrow\quad \Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}+\frac{(-2xy)}{(x^2+y^2)^2}=0\ \Rightarrow\ v(x,y)$$ - гармоническая функция в области $D:\ 0<|z|<+\infty$.

2) Восстановим $f(z)$ по её мнимой части $v(x,y)=arctg\,\frac{y}{x}$, используя условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ \Rightarrow\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}\ \Rightarrow\ u=\int\frac{x}{x^2+y^2}dx+\varphi(y)\ \Rightarrow$$

$$u=\int\frac{\frac{1}{2}d(x^2+y^2)}{x^2+y^2}+\varphi(y)=\frac{1}{2}\ln|x^2+y^2|+\varphi(y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ - произвольная функция, подлежащая определению. Определяем $\varphi(y)$, используя второе условие Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\varphi(y)\right)'_y=\frac{y}{x^2+y^2}+\varphi'(y)=$$

$$=-\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\Rightarrow\ \varphi'(y)=0\ \Rightarrow\ \varphi(y)=C.$$

Тогда $u = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + C$ и

$$f(z) = u + iv = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + C + iarctg\left(\frac{y}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(|z|^2) + i\arg z + C = \ln|z| + i\arg z + C = \ln z + C.$$

3) Найдём C из условия $f(1) = 0$: $f(1) = \ln 1 + C = 0 \Rightarrow 0 + C = 0 \Rightarrow$ $C = 0$.

Ответ: $f(z) = \ln z$.

81-90. Вычислить интеграл от ФКП $\int\limits_{\Gamma}(1 + i - 2\overline{z})dz$ по заданной линии Γ, где Γ - отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$.

Интеграл от ФКП по дуге кривой: $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = \int\limits_{\Gamma}(u + iv)(dx + idy) =$

$$= \int\limits_{\Gamma}(u(x, y) + iv(x, y))dx + (-v(x, y) + iu(x, y))dy.$$

Правило вычисления криволинейного интеграла 2-го рода $\int\limits_{\Gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$: если $\Gamma: y = \varphi(x), a \le x \le b$, то

$$\int\limits_{\Gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{a}^{b}\left(P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x)\right)dx.$$

Уравнение прямой Γ, проходящей через две точки: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Решение:

1) Выделим действительную и мнимую часть подынтегральной функции $f(z) = 1 + i - 2\overline{z} = u(x, y) + iv(x, y)$:

$$f(z)=1+i-2\overline{z}=1+i-2\cdot\overline{(x+iy)}=1+i-2(x-iy)=(1-2x)+i(1+2y)$$
$$\Rightarrow\ u(x,y)=1-2x,\ v(x,y)=1+2y.$$

2) Представим исходный интеграл в виде криволинейного интеграла 2-го рода:

$$\int\limits_{\Gamma}(1+i-2\overline{z})dz=\int\limits_{\Gamma}((1-2x)+i(1+2y))(dx+idy)=$$

$$=\int\limits_{\Gamma}((1-2x)+i(1+2y))dx+(-1-2y+i(1-2x))dy.$$

3) Составим уравнение отрезка Γ, соединяющего точки $z_1=0$ и $z_2=1+i$, т.е. точки плоскости $M_1(0,0)$ и $M_2(1,1)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\ \Rightarrow\ \frac{x-0}{1-0}=\frac{y-0}{1-0}\ \Rightarrow\ \Gamma: y=x,\ 0\le x\le 1.$$

4) Сводим вычисление криволинейного интеграла 2-го рода к вычислению определённого интеграла:

$$\int\limits_{\Gamma}((1-2x)+i(1+2y))dx+(-1-2y+i(1-2x))dy=\begin{bmatrix} y=x \\ dy=(x)'dxy \\ dy=dx \\ 0\le x\le 1\end{bmatrix}=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}((1-2x)+i(1+2x))dx+(-1-2x+i(1-2x))dx=\int\limits_{0}^{1}(-4x+2i)dx=$$

$$=-4\int\limits_{0}^{1}xdx+2i\int\limits_{0}^{1}dx=-4\left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1\right)+2i\left(\left.x\right|_0^1\right)=-4\cdot\frac{1}{2}+2i\cdot 1=-2+2i.$$

Ответ: $\int\limits_{\Gamma}(1+i-2\overline{z})dz=-2+2i$.

91-100. Вычислить интеграл по замкнутому контуру, используя интегральную формулу Коши или теорему Коши (обход кривой осуществляется против часовой стрелки):

а) $\oint\limits_{\Gamma} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} dz$, где $\Gamma: |z-1|=1$; **б)** $\oint\limits_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2} dz$, где $\Gamma: |z|=4$.

$\oint\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$; $\oint\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$ - интегральные формулы Коши; $\oint\limits_{\Gamma} f(z) dz = 0$ - теорема Коши. Здесь $f(z)$ - ФКП, аналитическая в области D, ограниченной контуром Γ и непрерывная в области $\overline{D} = D \cup \Gamma$; $z_0 \in D$.

Решение.

1а) Изображаем замкнутый контур Γ и ограниченную им область D (Рис. 8).

2а). Находим все конечные особые точки z_k, в которых подынтегральная ФКП не является аналитической и изображаем их в комплексной плоскости.

Особыми точками подынтегральной ФКП $\frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}$ являются точки $z_1 = -1$ и $z_2 = 1$, в которых она не определена (Рис.8).

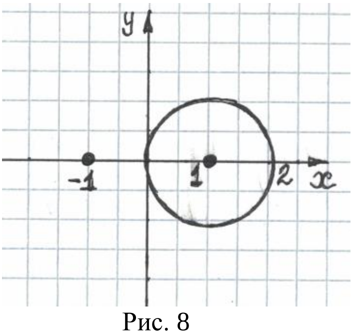


Рис. 8

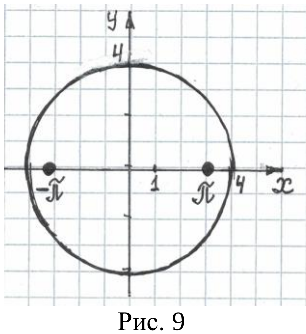


Рис. 9

3а) Делаем вывод о принадлежности точек z_k области D и способе вычисления интеграла.

Точка $z_1 = -1 \notin D$, точка $z_2 = 1 \in D$; интеграл вычисляем непосредственным применением интегральной формулы Коши.

Если в области D:

1) Нет ни одной особой точки z_k, то вычисляем интеграл по теореме Коши.

2) Содержится только одна особая точка z_k такая, что имеет место представление подынтегральной функции в виде $\dfrac{f(z)}{z-z_k}$ или $\dfrac{f(z)}{(z-z_k)^{n+1}}$, где $n>0$, то вычисляем интеграл по соответствующей интегральной формуле Коши.

3) Содержится несколько особых точек z_k, то поступаем следующим образом: сначала подынтегральную функцию представляем в виде суммы функций, каждая из которых имеет только одну особую точку в области D; затем исходный интеграл представляем в виде суммы интегралов от функций вида $\dfrac{f(z)}{z-z_k}$ или $\dfrac{f(z)}{(z-z_k)^{n+1}}$, где $n>0$ и вычисляем их по соответствующим интегральным формулам Коши.

4а) Вычисляем интеграл.

Интеграл $\oint\limits_{\Gamma}\dfrac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}dz$ вычисляем по интегральной формуле Коши $\oint\limits_{\Gamma}\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\dfrac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$.

Для этого сначала представляем подынтегральную функцию $\dfrac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}$ в виде: $\dfrac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}=\dfrac{\sin\pi z}{(z-1)^2(z+1)^2}=\dfrac{f(z)}{(z-1)^2}$, где $f(z)=\dfrac{\sin\pi z}{(z+1)^2}$ является аналитической ФКП в области D, и применяем интегральную формулу Коши: $\oint\limits_{\Gamma}\dfrac{f(z)}{(z-1)^2}dz=\oint\limits_{\Gamma}\dfrac{f(z)}{(z-1)^{1+1}}dz=\dfrac{2\pi i}{1!}\cdot f'(1)$.

Затем находим $f'(z)$, как производную аналитической ФКП, пользуясь таблицей и правилами нахождения производной функции одного действительного переменного:

$$f'(z)=\left(\frac{\sin\pi z}{(z+1)^2}\right)'=\frac{(\sin\pi z)'\cdot(z+1)^2-(\sin\pi z)\cdot\left((z+1)^2\right)'}{(z+1)^4}=$$

$$=\frac{\pi\cos\pi z\cdot(z+1)^2-(\sin\pi z)\cdot 2(z+1)}{(z+1)^4}=\frac{\pi\cos\pi z\cdot(z+1)-(\sin\pi z)\cdot 2}{(z+1)^3}.$$

Тогда $f'(1)=\dfrac{\pi\cos\pi\cdot(1+1)-(\sin\pi)\cdot 2}{(1+1)^3}=\dfrac{\pi(-1)\cdot 2-0\cdot 2}{2^3}=-\dfrac{\pi}{4}$.

В результате получим $\oint\limits_{\Gamma}\dfrac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}dz=\dfrac{2\pi i}{1!}\cdot f'(1)=\dfrac{2\pi i}{1}\cdot\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\pi^2 i}{2}$.

1б) Изображаем замкнутый контур Γ и ограниченную им область D (Рис. 9).

2б). Находим все конечные особые точки z_k, в которых подынтегральная ФКП не является аналитической и изображаем их в комплексной плоскости.

Особыми точками подынтегральной ФКП $\dfrac{\cos z}{z^2-\pi^2}$ являются точки $z_1=-\pi$ и $z_2=\pi$, в которых она не определена (Рис.9).

3б) Делаем вывод о принадлежности точек z_k области D и способе вычисления интеграла.

Точка $z_1=-\pi\in D$, точка $z_2=\pi\in D$; непосредственное применение интегральной формулы Коши невозможно и требуется представление исходного интеграла в виде суммы интегралов от подынтегральных функций только с одной особой точкой в области D.

4б) Представляем исходный интеграл в виде суммы интегралов от подынтегральных функций только с одной особой точкой в области D и вычисляем по соответствующим интегральным формулам Коши.

Для этого сначала разложим рациональную дробь $\dfrac{1}{z^2-\pi^2}$, используя метод неопределённых коэффициентов, в сумму простых дробей:

$$\frac{1}{z^2-\pi^2}=\frac{1}{(z-\pi)(z+\pi)}=\frac{A}{z-\pi}+\frac{B}{z+\pi}=\frac{A(z+\pi)+B(z-\pi)}{(z-\pi)(z+\pi)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1\equiv A(z+\pi)+B(z-\pi)\Rightarrow 0\cdot z+1\equiv(A+B)z+(A\pi-B\pi)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\ A\pi-B\pi=1\end{cases}\Rightarrow A=\frac{1}{2\pi},\ B=-\frac{1}{2\pi}\Rightarrow\frac{1}{z^2-\pi^2}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{z-\pi}-\frac{1}{z+\pi}\right).$$

Тогда $\oint\limits_{\Gamma}\dfrac{\cos z}{z^2-\pi^2}dz=\oint\limits_{\Gamma}\dfrac{\cos z\,dz}{2\pi(z-\pi)}-\oint\limits_{\Gamma}\dfrac{\cos z\,dz}{2\pi(z+\pi)}$.

Затем находим каждый из интегралов по интегральной формуле Коши $\oint\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$:

$$\oint\limits_{\Gamma} \frac{\cos z\, dz}{2\pi(z-\pi)} = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\Gamma} \frac{\cos z\, dz}{z-\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi i \cdot \cos(\pi) = i \cdot (-1) = -i\,;$$

$$\oint\limits_{\Gamma} \frac{\cos z\, dz}{2\pi(z+\pi)} = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\Gamma} \frac{\cos z\, dz}{z-(-\pi)} = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi i \cdot \cos(-\pi) = i \cdot (-1) = -i\,.$$

В результате получим $\oint\limits_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2} dz = -i-(-i) = 0$.

Ответ: а) $\oint\limits_{\Gamma} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} dz = -\frac{\pi^2 i}{2}$; **б)** $\oint\limits_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2} dz = 0$.

101-110. Найти разложение ФКП в ряд Тейлора в точке z_0 по степеням $(z-z_0)$, указать круг его сходимости, если:

а) $f(z) = \frac{1}{3-z}$, $z_0 = 0$; **б)** $f(z) = \frac{1}{z}$, $z_0 = 2$.

Решение.

а) Воспользуемся известным разложением (Приложение 6.4) $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $|z|<1$.

Чтобы воспользоваться данным разложением, выполним преобразование $f(z) = \frac{1}{3-z} = \frac{1}{3\left(1-\frac{z}{3}\right)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}}$ и обозначим $\frac{z}{3} = t$. Тогда получим

$$f(z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \left[\frac{z}{3} = t\right] = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \left[t = \frac{z}{3}\right] = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n,$$ где

$|t| < 1 \Rightarrow \left|\frac{z}{3}\right| < 1$. Откуда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}$, $|z| < 3$.

б) Воспользуемся известным разложением (Приложение 6.4) $\dfrac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots+(-1)^n z^n+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$, $|z|<1$.

Чтобы воспользоваться данным разложением, выполним преобразование $f(z)=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{z-2+2}=\dfrac{1}{2+(z-2)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{(z-2)}{2}}$ и обозначим $\dfrac{z-2}{2}=t$. Тогда получим

$$f(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-2}{2}}=\left[\frac{z-2}{2}=t\right]=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n=$$

$$=\left[t=\frac{z-2}{2}\right]=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2}\right)^n,$$

где $|t|<1\Rightarrow\left|\dfrac{z-2}{2}\right|<1$. Откуда $f(z)=\dfrac{1}{z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(z-2)^n}{2^{n+1}}$, $|z-2|<2$.

Ответ: а) $\dfrac{1}{3-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{3^{n+1}}$, $|z|<3$; **б)** $\dfrac{1}{z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(z-2)^n}{2^{n+1}}$, $|z-2|<2$.

111-120. Найти разложение ФКП $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-z_0)$ в комплексной плоскости, указать главную и правильную часть ряда Лорана, если:

а) $f(z)=\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}$, $z_0=0$; **б)** $f(z)=\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}$, $z_0=2$.

Ряд вида $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-z_0)^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=$

$$=\ldots\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots+\frac{c_{-1}}{(z-z_0)}+c_0+c_1(z-z_0)+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots,$$

который сходится к аналитической функции $f(z)$ в некотором кольце $r<|z-z_0|<R$, называется *рядом Лорана* этой функции; r,R - некоторые действительные числа; z_0 - *центр* ряда; $\ldots c_{-n},\ldots,c_{-1},c_0,c_1,\ldots,c_n\ldots$ - коэффициенты ряда (некоторые комплексные числа), $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n$ - *главная часть* ряда Лорана; $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ - *правильная часть* ряда Лорана.

Для построения разложения ФКП $f(z)$ в ряд Лорана по степеням z следует:

1) Найти все конечные особые точки z_k, в которых $f(z)$ не является аналитической ФКП, и установить в каких кольцах комплексной плоскости $f(z)$ будет аналитической ФКП.

2) Найти разложение ФКП в ряд Лорана в кольцах аналитичности, пользуясь табличными разложениями ФКП в ряд Маклорена (Приложение 6.4).

Замечание. Чтобы найти разложение ФКП $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-z_0)$ следует перейти к комплексной переменной $t=z-z_0$ и искать разложение $f(z)$ по степеням $(z-z_0)$ через разложение ФКП $f^*(t)$ по степеням t.

Решение.

а1) Находим все конечные особые точки ФКП $f(z)=\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}$, предварительно представив ФКП в виде $f(z)=\dfrac{2z+3}{(z+2)(z+1)}$.

Особыми точками ФКП $f(z)$ являются точки $z_1=-2$ и $z_2=-1$, в которых $f(z)$ не определена. Следовательно, $f(z)$ будет аналитической ФКП в кольцах $0\le|z|<1$, $1<|z|<2$, $2<|z|<+\infty$ (Рис. 10).

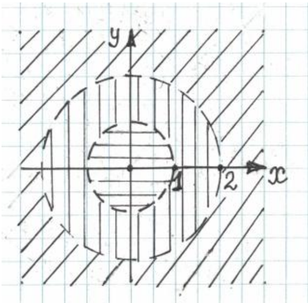


Рис. 10

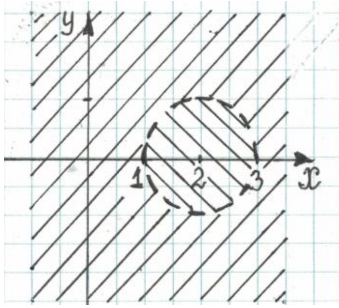


Рис. 11

а2) Находим разложение $f(z)$ в ряд Лорана в указанных кольцах, пользуясь табличным разложением ФКП в ряд Маклорена.

$$\boxed{\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \;,\; |z| < 1 .}$$

Чтобы это можно было сделать, представим $f(z) = \dfrac{2z+3}{(z+2)(z+1)}$ в виде суммы простых дробей, используя метод неопределённых коэффициентов:

$$f(z) = \frac{2z+3}{(z+2)(z+1)} = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z+1} = \frac{A(z+1) + B(z+2)}{(z+2)(z+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2z+3 \equiv A(z+1) + B(z+2) \;\Rightarrow\; 2z+3 \equiv (A+B)z + (A+2B) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ A+2B=3 \end{cases} \Rightarrow A=1,\, B=1 \Rightarrow\; f(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z+1} .$$

Рассмотрим кольцо $0 \le |z| < 1$:

$$f(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z+1} = \frac{1}{2\left(1+\dfrac{z}{2}\right)} + \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+1}} + 1\right) z^n}_{\text{правильная часть}} .$$

Рассмотрим кольцо $1 < |z| < 2$:

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z+1}=\frac{1}{2\left(1+\frac{z}{2}\right)}+\frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n+$$

$$+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}}_{\text{правильная часть}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}}_{\text{главная часть}}.$$

Рассмотрим кольцо $2<|z|<+\infty$:

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)}+\frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n+$$

$$+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2^n+1)}{z^{n+1}}}_{\text{главная часть}}.$$

б1) Переходим к новой комплексной переменной $t=z-2$:

$$f(z)=\frac{2z-3}{z^2-3z+2}=\begin{bmatrix}t=z-2\\ z=t+2\end{bmatrix}=\frac{2(t+2)-3}{(t+2)^2-3(t+2)+2}=\frac{2t+1}{t^2+t}=f^*(t).$$

б2) Находим все конечные особые точки ФКП $f^*(t)=\dfrac{2t+1}{t^2+t}$, предварительно представив ФКП в виде $f^*(t)=\dfrac{2t+1}{t(t+1)}$.

Особыми точками ФКП $f^*(t)$ являются точки $t_1=0$ и $t_2=-1$, в которых $f^*(t)$ не определена. Следовательно, $f^*(t)$ будет аналитической ФКП в кольцах $0<|t|<1$, $1<|t|<+\infty$ (Рис. 11).

б3) Находим разложение $f^*(t)$ в ряд Лорана в указанных кольцах по степеням t, пользуясь табличным разложением ФКП в ряд Маклорена.

$$\boxed{\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots+(-1)^n z^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\ |z|<1.}$$

Чтобы это можно было сделать, представим $f^*(t)=\dfrac{2t+1}{t(t+1)}$ в виде суммы простых дробей, используя метод неопределённых коэффициентов:

$$f^*(t)=\frac{2t+1}{t(t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}=\frac{A(t+1)+Bt}{t(t+1)} \Rightarrow 2t+1\equiv A(t+1)+Bt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2t+1\equiv (A+B)t+A \Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow A=1, B=1 \Rightarrow f^*(t)=\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}.$$

Рассмотрим кольцо $0<|t|<1$:

$$f^*(t)=\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}=\frac{1}{t}+\frac{1}{1+t}=\frac{1}{t}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n .$$

Рассмотрим кольцо $1<|t|<+\infty$:

$$f^*(t)=\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}=\frac{1}{t}+\frac{1}{t\left(1+\frac{1}{t}\right)}=\frac{1}{t}+\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{t}\right)^n=\frac{1}{t}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{t^{n+1}}.$$

б4) Находим разложение $f(z)$ в ряд Лорана в соответствующих кольцах по степеням $(z-2)$ (Рис. 11).

В кольце $0<|z-2|<1$:

$$f(z)=\frac{2z-3}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z-1}=\underbrace{\frac{1}{z-2}}_{\textit{главная часть}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n}_{\textit{правильная часть}};$$

В кольце $1<|z-2|<+\infty$:

$$f(z)=\frac{2z-3}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z-1}=\underbrace{\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}}}_{\textit{главная часть}}.$$

Ответ: а) В кольце $0\le|z|<1$ $f(z)=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}+1\right)z^n}_{\textit{правильная часть}};$

в кольце $1<|z|<2$ $f(z)=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}}_{\textit{правильная часть}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}}_{\textit{главная часть}};$

в кольце $2<|z|<+\infty$ $f(z)=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2^n+1)}{z^{n+1}}}_{\text{главная часть}}$.

б) В кольце $0<|z-2|<1$ $f(z)=\underbrace{\frac{1}{z-2}}_{\text{главная часть}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n}_{\text{правильная часть}}$;

в кольце $1<|z-2|<+\infty$ $f(z)=\underbrace{\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}}}_{\text{главная часть}}$.

121-130. Вычислить интеграл по замкнутому контуру, используя теорему о вычетах: $\oint_L \frac{dz}{z^5+z^3}$, где $L:|z|=2$.

Теорема Коши о вычетах: $\oint_L f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{N} res\left[f(z),z_k\right]$.

Точка z_0 - простой полюс ФКП $f(z)$, если $f(z)=\frac{\varphi(z)}{z-z_0}$, где $\varphi(z)$ - аналитическая ФКП в точке z_0 и некоторой её окрестности и $\varphi(z_0)\neq 0$.

Точка z_0 - полюс порядка m ФКП $f(z)$, если $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$, где $\varphi(z)$ - аналитическая ФКП в точке z_0 и некоторой её окрестности и $\varphi(z_0)\neq 0$.

Если z_0 - простой полюс, то $res\left[f(z),z_0\right]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$.

Если z_0 - полюс порядка m, то $res\left[f(z),z_0\right]=\frac{\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)^m f(z)\right)^{(m-1)}}{(m-1)!}$.

Если ФКП $f(z)=\dfrac{P_m(z)}{Q_n(z)}=\dfrac{a_0z^m+\ldots+a_{m-1}z+a_m}{b_0z^n+\ldots+b_{n-1}z+b_n}$ и нули знаменателя не совпадают с нулями числителя, то нуль k-ого порядка знаменателя $Q_n(z)$ является полюсом k-ого порядка ФКП $f(z)$.

Решение.

1) Находим все конечные особые точки ФКП $f(z)=\dfrac{1}{z^5+z^3}$, предварительно представив ФКП в виде $f(z)=\dfrac{1}{z^3(z^2+1)}=\dfrac{1}{z^3(z+i)(z-i)}$, и устанавливаем их характер.

Особыми точками ФКП $f(z)$ являются точки $z_1=0$ - полюс 3-его порядка $f(z)$, так как $z_1=0$ - нуль 3-его порядка знаменателя; $z_2=-i$ - полюс 1-ого порядка $f(z)$, так как $z_2=-i$ - нуль 1-ого порядка знаменателя; $z_3=i$ - полюс 1-ого порядка $f(z)$, так как $z_3=i$ - нуль 1-ого порядка знаменателя.

2) Изображаем контур интегрирования L и конечные особые точки ФКП $f(z)$ в комплексной плоскости (Рис.12).

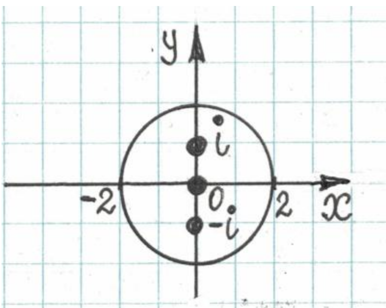


Рис. 12

3) Записываем формулу для вычисления интеграла $\oint\limits_L \frac{dz}{z^5+z^3}$, согласно теореме Коши о вычетах: $\oint\limits_L \frac{dz}{z^5+z^3} = 2\pi i\left(res\left[f(z),0\right]+res\left[f(z),-i\right]+res\left[f(z),i\right]\right)$. Вычеты вычисляются во всех особых точках, так как все они принадлежат области, ограниченной замкнутым контуром L.

4) Вычисляем вычеты $f(z)$ в особых точках, принадлежащих области, ограниченной контуром L и находим значение интеграла:

$$res\left[f(z),i\right] = \lim_{z\to i}\left((z-i)f(z)\right) = \lim_{z\to i}\left((z-i)\cdot\frac{1}{z^3(z-i)(z+i)}\right) =$$

$$= \lim_{z\to i}\left(\frac{1}{z^3(z+i)}\right) = \frac{1}{i^3(i+i)} = \frac{1}{-i\cdot 2i} = \frac{1}{2};$$

$$res\left[f(z),-i\right] = \lim_{z\to -i}\left((z+i)f(z)\right) = \lim_{z\to -i}\left((z+i)\cdot\frac{1}{z^3(z-i)(z+i)}\right) =$$

$$= \lim_{z\to -i}\left(\frac{1}{z^3(z-i)}\right) = \frac{1}{(-i)^3(-i-i)} = \frac{1}{i\cdot(-2i)} = \frac{1}{2};$$

$$res\left[f(z),0\right] = \lim_{z\to 0}\frac{\left(z^3 f(z)\right)''}{2!} = \lim_{z\to 0}\frac{\left(z^3\cdot\frac{1}{z^3(z^2+1)}\right)''}{2!} = \lim_{z\to 0}\frac{\left(\frac{1}{(z^2+1)}\right)''}{2!}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{(z^2+1)}\right)' = -\frac{(z^2+1)'}{(z^2+1)^2} = -\frac{2z}{(z^2+1)^2} \;\Rightarrow\; \left(-\frac{2z}{(z^2+1)^2}\right)' =$$

$$= -2\cdot\frac{z'\cdot(z^2+1)^2 - z\cdot\left((z^2+1)^2\right)'}{(z^2+1)^4} = -2\cdot\frac{1\cdot(z^2+1)^2 - z\cdot 2(z^2+1)\cdot 2z}{(z^2+1)^4} =$$

$$= -2\cdot\frac{(z^2+1)-4z^2}{(z^2+1)^3} = 2\cdot\frac{3z^2-1}{(z^2+1)^3} \;\Rightarrow\; res\left[f(z),0\right] = \frac{2}{2}\cdot\frac{3\cdot 0^2-1}{(0^2+1)^3} = -1.$$

Тогда $\oint\limits_L \frac{dz}{z^5+z^3} = 2\pi i\left(res\left[f(z),0\right] + res\left[f(z),-i\right] + res\left[f(z),i\right]\right) =$

$$= 2\pi i\left(-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = 2\pi i \cdot 0 = 0.$$

Ответ: $\oint\limits_L \frac{dz}{z^5+z^3} = 0$.

131-140. Разложить в ряд Фурье 2π-периодическую функцию $f(x)$ определённую следующим образом: $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi \le x < 0,\\ x, & 0 \le x \le \pi.\end{cases}$ (в ответе указать первые пять отличные от нуля члена ряда). Построить график 2π-периодической функции $f(x)$.

Разложение в ряд Фурье 2π-периодической функции $f(x)$ - кусочно-монотонной и непрерывной на промежутке $[-\pi,\pi]$, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода, во всякой точке её непрерывности имеет вид:
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx),$$
где коэффициенты a_n и b_n определяются формулами:
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ n=0,1\ldots;\qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx,\ n=1,2\ldots$$

Решение:

1) Найдём коэффициенты ряда Фурье: a_n $(n=0,1,2,\ldots)$ и b_n $(n=1,2,\ldots)$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\pi} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

$$a_n = (n=1,2,\ldots) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nxdx =$$

[*для вычисления интегралов применим метод интегрирования по частям*]

$$= \left[\begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = (x)'dx = dx \\ dv = \cos nxdx \Rightarrow v = \int \cos nxdx = \frac{1}{n}\sin nx \end{array}\right] =$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{x}{n}\sin nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}-\int\limits_{-\pi}^{0}\frac{\sin nx}{n}dx\right]+\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{x}{n}\sin nx\right)\Bigg|_{0}^{\pi}-\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right]=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{x}{n}\sin nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}-\left(-\frac{1}{n^2}\cos nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}\right]+\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{x}{n}\sin nx\right)\Bigg|_{0}^{\pi}-\left(-\frac{1}{n^2}\cos nx\right)\Bigg|_{0}^{\pi}\right]=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2}\cos(-n\pi)\right]+\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos(n\pi)-\frac{1}{n^2}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\textit{учитываем, что}\\ \sin(n\pi)=\sin(-n\pi)=0\\ \cos(n\pi)=\cos(-n\pi)=(-1)^n\\ \sin(2n\pi)=0,\ \cos(2n\pi)=1\end{array}\right]=\frac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2};$$

$$b_n=(n=1,2,\ldots)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}(-x)\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}x\sin nxdx=$$

[*для вычисления интегралов применим метод интегрирования по частям*]

$$=\left[\begin{array}{c}u=x\Rightarrow du=(x)'dx=dx\\ dv=\sin nxdx\Rightarrow v=\int\sin nxdx=-\frac{1}{n}\cos nx\end{array}\right]=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{x}{n}\cos nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}-\int\limits_{-\pi}^{0}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)dx\right]+\frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{x}{n}\cos nx\right)\Bigg|_{0}^{\pi}-\int\limits_{0}^{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)dx\right]=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{x}{n}\cos nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}-\left(-\frac{\sin nx}{n^2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}\right]+\frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{x}{n}\cos nx\right)\Bigg|_{0}^{\pi}-\left(-\frac{\sin nx}{n^2}\right)\Bigg|_{0}^{\pi}\right]=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\right)\Bigg|_{0}^{\pi}=\left[\begin{array}{c}\textit{учитываем, что}\\ \sin(n\pi)=\sin(-n\pi)=0\\ \cos(n\pi)=\cos(-n\pi)=(-1)^n\\ \sin(2n\pi)=0,\ \cos(2n\pi)=1\end{array}\right]=0.$$

Таким образом, получили, что:

$$a_0=\pi,\quad a_n=\frac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2}\ (n=1,2,\ldots),\quad b_n=0\ (n=1,2,\ldots).$$

2) Запишем разложение 2π-периодической функции $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi \le x < 0,\\ x, & 0 \le x \le \pi.\end{cases}$

в ряд Фурье: $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\dfrac{\pi}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2}\cos nx$.

Полученное равенство имеет смысл во всех точках.

Если 2π-периодическая функция имеет точки разрыва 1-го рода, то: *полученное равенство имеет смысл во всех точках, кроме точек её разрыва*.

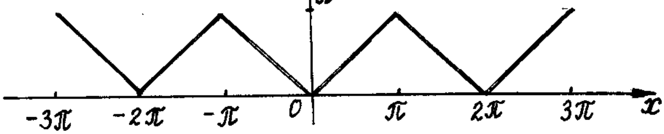
3) Запишем разложение, указав в нём первые пять ненулевых членов ряда Фурье. Для этого вычислим первые пять ненулевых коэффициента ряда Фурье: $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots : a_0=\pi\ne 0$, $a_1=\dfrac{2((-1)^1-1)}{\pi 1^2}=-\dfrac{4}{\pi}\ne 0$, $b_1=0$,

$a_2=\dfrac{2((-1)^2-1)}{\pi 2^2}=0$, $b_2=0$, $a_3=\dfrac{2((-1)^3-1)}{\pi 3^2}=-\dfrac{4}{9\pi}\ne 0$, $b_3=0$,

$a_4=\dfrac{2((-1)^4-1)}{\pi 4^2}=0$, $b_4=0$, $a_5=\dfrac{2((-1)^5-1)}{\pi 5^2}=-\dfrac{4}{25\pi}\ne 0$, $b_5=0$,

$a_6=\dfrac{2((-1)^6-1)}{\pi 6^2}=0$, $b_6=0$, $a_7=\dfrac{2((-1)^7-1)}{\pi 7^2}=-\dfrac{4}{49\pi}\ne 0$. Таким образом, первыми пятью ненулевыми коэффициентами ряда Фурье являются коэффициенты $a_0=\pi$, $a_1=-\dfrac{4}{\pi}$, $a_3=-\dfrac{4}{9\pi}$, $a_5=-\dfrac{4}{25\pi}$, $a_7=-\dfrac{4}{49\pi}$ и разложение 2π-периодической функции $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi \le x < 0,\\ x, & 0 \le x \le \pi.\end{cases}$ в ряд Фурье имеет вид: $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\cos x-\dfrac{4}{9\pi}\cos 3x-\dfrac{4}{25\pi}\cos 5x-\dfrac{4}{49\pi}\cos 7x+\ldots$.

4) Построим график 2π-периодической функции $f(x)$:



Ответ: $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cos x-\frac{4}{9\pi}\cos 3x-\frac{4}{25\pi}\cos 5x-\frac{4}{49\pi}\cos 7x+\ldots$

141-150. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-1}{(x^2+8x+17)^2}dx$.

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\left[\text{если } \lim\limits_{|z|\to\infty}|f(z)|=\lim\limits_{|z|\to\infty}\frac{M}{|z|^{1+\delta}}, M>0,\delta>0\right]=\oint\limits_L f(z)dz=$
$=2\pi i\sum\limits_{k=1}^{N} res\left[f(z),z_k\right]$, где L - замкнутый контур, состоящий из оси Ox и верхней полуокружности бесконечно большого радиуса, проходимый против хода часовой стрелки (Рис. 13).

Решение:

1) Проверяем выполнение условия $\lim\limits_{|z|\to\infty}|f(z)|=\lim\limits_{|z|\to\infty}\frac{M}{|z|^{1+\delta}}, M>0,\delta>0$:

$$\lim_{|z|\to\infty}|f(z)|=\lim_{|z|\to\infty}\left|\frac{z^2-1}{(z^2+8z+17)^2}\right|=\lim_{|z|\to\infty}\left|\frac{z^2\left(1-\frac{1}{z^2}\right)}{z^4\left(1+\frac{8}{z}+\frac{17}{z^2}\right)^2}\right|=\left[\lim_{|z|\to\infty}\frac{1}{z}=0\right]=$$

$=\lim\limits_{|z|\to\infty}\frac{1}{|z|^2}=\lim\limits_{|z|\to\infty}\frac{1}{|z|^{1+1}}=\lim\limits_{|z|\to\infty}\frac{M}{|z|^{1+\delta}}$, где $M=1>0,\delta=1>0$ (выполняется).

2) Находим все конечные особые точки ФКП $f(z)=\frac{z^2-1}{(z^2+8z+17)^2}$, предварительно представив ФКП в виде $f(z)=\frac{z^2-1}{(z+4-i)^2(z+4+i)^2}$, где $z=-4\pm i$ - корни квадратного уравнения $z^2+8z+17=0$, и устанавливаем их характер.

Особыми точками ФКП $f(z)$ являются точки $z_1=-4+i$ - полюс 2-ого порядка $f(z)$, так как $z_1=-4+i$ - нуль 2-ого порядка знаменателя;

$z_2 = -4 - i$ - полюс 2-ого порядка $f(z)$, так как $z_2 = -4 - i$ - нуль 2-ого порядка знаменателя.

3) Изображаем контур интегрирования L и конечные особые точки ФКП $f(z)$ в комплексной плоскости (Рис.14). Области D, ограниченной замкнутым контуром L, принадлежит только одна особая точка $z_1 = -4 + i$.

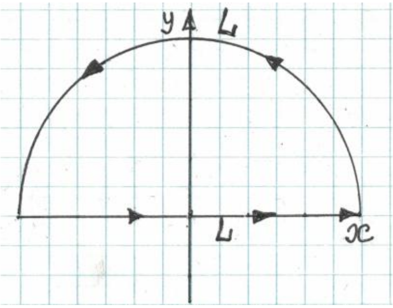


Рис. 13

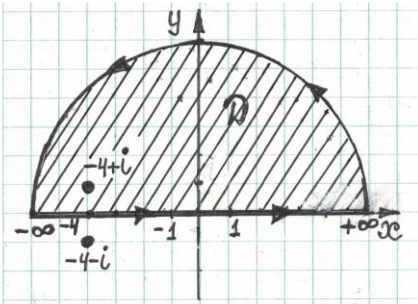


Рис. 14

4) Записываем формулу для вычисления интеграла $\oint\limits_L \frac{(z^2-1)dz}{(z^2+8z+17)^2}$, согласно теореме Коши о вычетах: $\oint\limits_L \frac{(z^2-1)dz}{(z^2+8z+17)^2} = 2\pi i res\left[f(z), z_1\right] = 2\pi i res\left[f(z), -4+i\right]$. Вычеты вычисляются только в особых точках, которые принадлежат области, ограниченной замкнутым контуром L.

5) Вычисляем вычеты $f(z)$ в особых точках, принадлежащих области, ограниченной контуром L и находим значение контурного интеграла и несобственного интеграла:

$$res\left[f(z), -4+i\right] = \lim_{z \to -4+i} \frac{\left((z+4-i)^2 f(z)\right)'}{1!} =$$

$$= \lim_{z \to -4+i} \frac{\left((z+4-i)^2 \cdot \frac{z^2-1}{(z+4-i)^2(z+4+i)^2}\right)'}{1!} = \lim_{z \to -4+i} \frac{\left(\frac{z^2-1}{(z+4+i)^2}\right)'}{1!}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{z^2-1}{(z+4+i)^2}\right)' = \frac{(z^2-1)'\cdot(z+4+i)^2-(z^2-1)\left((z+4+i)^2\right)'}{(z+4+i)^4} =$$

$$= \frac{2z\cdot(z+4+i)^2-(z^2-1)\left(2(z+4+i)\right)}{(z+4+i)^4} = \frac{2z\cdot(z+4+i)-2(z^2-1)}{(z+4+i)^3} =$$

$$= \frac{8z+2zi+2}{(z+4+i)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; res\left[f(z),-4+i\right] = \frac{8(-4+i)+2(-4+i)i+2}{(-4+i+4+i)^3} = \frac{-32}{(2i)^3} = \frac{-32}{-8i} = -4i\,.$$

Тогда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-1}{(x^2+8x+17)^2}dx = \oint\limits_L \frac{(z^2-1)dz}{(z^2+8z+17)^2} = 2\pi i\cdot(-4i) = 8\pi$.

Ответ: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-1}{(x^2+8x+17)^2}dx = 8\pi$.

151-160. Найти изображение $F(p)$ по заданному оригиналу $f(t)$:

а) $f(t)=3-4\sin 3t+e^{-5t}$; **б)** $f(t)=\sin^2 t$.

Решение.

а) Используя свойство линейности преобразования Лапласа и таблицу оригиналов и изображений (Приложение 6.5), находим

$$F(p)=L\{f(t)\}=L\left\{3-4\sin 3t+e^{-5t}\right\}=3L\{1\}-4L\{\sin 3t\}+$$

$$+L\left\{e^{-5t}\right\}=3\cdot\frac{1}{p}-4\cdot\frac{3}{p^2+9}+\frac{1}{p+5}=\frac{3}{p}-\frac{12}{p^2+9}+\frac{1}{p+5}\,.$$

б) Сначала, используя формулы тригонометрии, преобразуем оригинал $f(t)$: $f(t)=\sin^2 t=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)$. Затем, используя свойство линейности преобразования Лапласа и таблицу оригиналов и изображений (Приложение 6.5), находим:

$$F(p)=L\{f(t)\}=L\left\{\frac{1}{2}(1-\cos 2t)\right\}=\frac{1}{2}L\{1-\cos 2t\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(L\{1\}-L\{\cos 2t\}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4}\right).$$

Ответ: а) $F(p)=\frac{3}{p}-\frac{12}{p^2+9}+\frac{1}{p+5}$; **б)** $F(p)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4}\right)$.

161-170. Найти изображение $F(p)$ по заданному оригиналу $f(t)$**,** используя теоремы операционного исчисления (смещения, о дифференцировании изображения, об интегрировании изображения):

а) $f(t)=t^2 ch2t$ **; б)** $f(t)=t^2\sin 2t$ **; в)** $f(t)=\frac{\sin t}{t}$ **.**

Теорема смещения: Если $L\{f(t)\}=F(p)$, то $L\left\{e^{-bt}f(t)\right\}=F(p+b)$.

Теорема о дифференцировании изображения: Если $L\{f(t)\}=F(p)$, то $L\left\{t^n f(t)\right\}=(-1)^n F^{(n)}(p)$.

Теорема об интегрировании изображения: Если $L\{f(t)\}=F(p)$, то $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int\limits_p^{\infty}F(q)dq.$

Решение:

а) Найдём изображение оригинала $f(t)=t^2ch2t$ с помощью теоремы смещения. Для этого представим $f(t)=t^2ch2t$ в виде: $f(t)=t^2\left(\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}\right)=\frac{t^2}{2}e^{2t}+\frac{t^2}{2}e^{-2t}$ и воспользуемся изображением стандартного оригинала $L\left\{t^2\right\}=\frac{2!}{p^3}$. Тогда по теореме смещения получим:

$$F(p)=L\left\{t^2 ch2t\right\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(p-2)^3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(p+2)^3}=\frac{1}{(p-2)^3}+\frac{1}{(p+2)^3}=$$

$$=\frac{2(p^3+12p)}{(p^2-4)^3}.$$

б) Найдём изображение оригинала $f(t)=t^2\sin 2t$ с помощью теоремы о дифференцировании изображения. Воспользуемся изображением стандартного оригинала $L\left\{t\sin 2t\right\}=\dfrac{4p}{(p^2+4)^2}$. Тогда по теореме о дифференцировании изображения получим

$$F(p)=L\left\{t\cdot t\sin 2t\right\}=(-1)^1\cdot\left(\frac{4p}{(p^2+4)^2}\right)'=-4\cdot\frac{(p)'(p^2+4)^2-p\left((p^2+4)^2\right)'}{\left((p^2+4)^2\right)^2}=$$

$$=-4\cdot\frac{1\cdot(p^2+4)^2-p\cdot 2(p^2+4)(p^2+4)'}{\left((p^2+4)^2\right)^2}=-4\cdot\frac{(p^2+4)^2-4p^2(p^2+4)}{\left((p^2+4)^2\right)^2}=$$

$$=-4\cdot\frac{(p^2+4)^2-4p^2(p^2+4)}{\left((p^2+4)^2\right)^2}=\frac{4(3p^2-4)}{(p^2+4)^3}.$$

в) Найдём изображение оригинала $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$ с помощью теоремы об интегрировании изображения. Воспользуемся изображением стандартного оригинала $L\left\{\sin t\right\}=\dfrac{1}{p^2+1}$. Тогда по теореме об интегрировании изображения получим

$$F(p)=L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}=\int_p^{+\infty}\frac{1}{q^2+1}dq=arctgq\Big|_p^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-arctgp.$$

Ответ:

а) $F(p)=\dfrac{2(p^3+12p)}{(p^2-4)^3}$; **б)** $F(p)=\dfrac{4(3p^2-4)}{(p^2+4)^3}$; **в)** $F(p)=\dfrac{\pi}{2}-arctgp$.

171-180. Найти оригинал $f(t)$ по заданному изображению $F(p)$**:**

а) $F(p)=\dfrac{3}{p^2+4}-\dfrac{5p}{p^2-9}$;   **б)** $F(p)=\dfrac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$.

Решение.

а) Используя свойство линейности преобразования Лапласа и таблицу оригиналов и изображений (Приложение 6.5), находим:

$$F(p)=\frac{2}{p^2+9}-\frac{3p}{p^2-4}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{p^2+3^2}-3\cdot\frac{p}{p^2-2^2}\;\Rightarrow\; f(t)=\frac{2}{3}\sin 3t-3ch2t\,.$$

б) Сначала разложим изображение $F(p)$ на простые дроби, используя метод неопределённых коэффициентов:

$$F(p)=\frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}=\frac{A}{(p-1)}+\frac{Bp+C}{(p^2+2p+5)}=$$

$$=\frac{A(p^2+2p+5)+(p-1)(Bp+C)}{(p-1)(p^2+2p+5)}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5p+3\equiv A(p^2+2p+5)+(p-1)(Bp+C)\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5p+3\equiv(A+B)p^2+(2A-B+C)p+5A-C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} A+B=0\\ 2A-B+C=5\\ 5A-C=3\end{cases}\Rightarrow A=1,\ B=-1,\ C=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(p)=\frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}=\frac{1}{p-1}+\frac{-p+2}{p^2+2p+5}.$$

Затем, используя свойство линейности преобразования Лапласа и таблицу оригиналов и изображений (Приложение 6.5), находим:

$$F(p)=\frac{1}{p-1}+\frac{(-1)p+2}{p^2+2p+5}=\frac{1}{p-1}+\frac{(p+1)-3}{(p+1)^2+4}=\frac{1}{p-1}+$$

$$+\frac{(p+1)}{(p+1)^2+2^2}-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{(p+1)^2+2^2}\Rightarrow f(t)=e^t-e^{-t}\cos 2t+\frac{3}{2}e^{-t}\sin 2t\,.$$

Ответ: а) $f(t)=\frac{2}{3}\sin 3t-3ch2t$; **б)** $f(t)=e^t-e^{-t}\cos 2t+\frac{3}{2}e^{-t}\sin 2t$.

181-190. Решить операционным методом задачу Коши для дифференциального уравнения 2-го порядка: $x''+11x'+30x=0$, $x(0)=1$, $x'(0)=-2$.

Решение.

Пусть $L\{x(t)\}=X(p)$, тогда согласно таблице оригиналов и изображений (Приложение 6.5): $L\{x'(t)\}=pX(p)-x(0)$, $L\{x''(t)\}=p^2X(p)-px(0)-x'(0)$.

Применив преобразование Лапласа к ЛДУ, получим алгебраическое уравнение относительно изображения $X(p)$:

$$L\{x''(t)+11x'(t)+30x\}=L\{0\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(p^2X(p)-px(0)-x'(0)\right)+11\left(pX(p)-x(0)\right)+30X(p)=0\,.$$

Решаем полученное уравнение относительно $X(p)$, находим:

$$\left(p^2X(p)-p\cdot 1-(-2)\right)+11\left(pX(p)-1\right)+30X(p)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(p^2+11p+30)X(p)-p-9=0\Rightarrow X(p)=\frac{p+9}{p^2+11p+30}\,.$$

Используя свойство линейности преобразования Лапласа и таблицу оригиналов и изображений (Приложение 6.5), находим по изображению $X(p)$ оригинал $x(t)$:

$$X(p)=\frac{p+9}{p^2+11p+30}=\frac{p+9}{(p+5)(p+6)}=\frac{4}{p+5}-\frac{3}{p+6}\Rightarrow$$

$$x(t)=4e^{-5t}-3e^{-6t}.$$

Ответ: $x(t)=4e^{-5t}-3e^{-6t}$.

191-200. Решить операционным методом задачу Коши для системы дифференциальных уравнений: $\begin{cases} x'=2x-y+5 \\ y'=x+2y \end{cases}$, $x(0)=2,\ y(0)=-1$.

Решение.

Пусть $L\{x(t)\}=X(p)$, $L\{y(t)\}=Y(p)$, тогда согласно таблице оригиналов и изображений (Приложение 6.5): $L\{x'(t)\}=pX(p)-x(0)$, $L\{y'(t)\}=pY(p)-y(0)$.

Применив преобразование Лапласа к системе ЛДУ, получим систему алгебраических уравнений относительно изображений $X(p)$, $Y(p)$:

$$\begin{cases} L\{x'\}=L\{2x-y+5\} \\ L\{y'\}=L\{x+2y\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} pX(p)-x(0)=2X(p)-Y(p)+\dfrac{5}{p} \\ pY(p)-y(0)=X(p)+2Y(p) \end{cases}.$$

Подставим в полученную систему начальные условия $x(0)=2,\ y(0)=-1$, найдём $\begin{cases} pX(p)-2=2X(p)-Y(p)+\dfrac{5}{p} \\ pY(p)+1=X(p)+2Y(p) \end{cases}.$

Решив систему, получим:

$$X(p)=\frac{2p^2+2p-10}{p(p^2-4p+5)},\ Y(p)=\frac{-p^2+4p+5}{p(p^2-4p+5)}.$$

Преобразуем изображения $X(p)$, $Y(p)$ к табличным изображениям (Приложение 6.5), путём разложения дробей в сумму простых дробей методом неопределённых коэффициентов. Получим:

$$X(p)=\frac{2p^2+2p-10}{p(p^2-4p+5)}=-\frac{2}{p}+\frac{4p-6}{p^2-4p+5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(p)=-2\cdot\frac{1}{p}+4\cdot\frac{p-2}{(p-2)^2+1}+2\cdot\frac{1}{(p-2)^2+1};$$

$$Y(p)=\frac{-p^2+4p+5}{p(p^2-4p+5)}=\frac{1}{p}+\frac{-2p+8}{p^2-4p+5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(p)=\frac{1}{p}+2\cdot\frac{p-2}{(p-2)^2+1}+4\cdot\frac{1}{(p-2)^2+1}.$$

Используя свойство линейности преобразования Лапласа и таблицу оригиналов и изображений (Приложение 6.5), находим по изображениям $X(p)$, $Y(p)$ их оригиналы $x(t)$, $y(t)$:

$$X(p)=-2\cdot\frac{1}{p}+4\cdot\frac{p-2}{(p-2)^2+1}+2\cdot\frac{1}{(p-2)^2+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t)=-2+4e^{2t}\cos t+2e^{2t}\sin t,$$

$$Y(p)=\frac{1}{p}+2\cdot\frac{p-2}{(p-2)^2+1}+4\cdot\frac{1}{(p-2)^2+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=1-2e^{2t}\cos t+4e^{2t}\sin t.$$

Ответ: $x(t)=-2+4e^{2t}\cos t+2e^{2t}\sin t$, $y(t)=1-2e^{2t}\cos t+4e^{2t}\sin t$.

6.2. Краткие теоретические сведения.

Тема. <u>Комплексные числа и комплексная плоскость. Функции комплексного переменного.</u>

Комплексным числом называется число вида $z = x + iy$, где x, y - действительные числа, символ i - мнимая единица, для которой $i^2 = -1$. Число $x = \operatorname{Re} z$ - называется действительной частью комплексного числа z, число $y = \operatorname{Im} z$ - мнимой частью. Комплексное число $x + i0$ совпадает с действительным, а число iy называется чисто мнимым. Множество всех комплексных чисел обозначается C.

Комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости с системой координат Oxy (называемой комплексной плоскостью) точкой, обозначаемой той же буквой z и имеющей координаты (x, y). Действительные числа изображаются точками оси абсцисс, а чисто мнимые – оси ординат (поэтому ось Ox называется действительной осью, а ось Oy - мнимой осью). Комплексное число на комплексной плоскости изображается также радиус-вектором точки (x, y). Длина радиус-вектора называется ***модулем комплексного числа:*** $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, а угол его φ с осью Ox называется ***аргументом комплексного числа***: $\begin{cases} \cos\varphi = x/r \\ \sin\varphi = y/r \end{cases}$, $0 \le \varphi < 2\pi$ или $-\pi < \varphi \le \pi$. Аргумент φ комплексного числа вычисляют, по формуле:

$$\varphi = \begin{cases} arctg|y/x| & \text{если } z \in \{I \text{ квадранту}\} \\ \pi - arctg|y/x| & \text{если } z \in \{II \text{ квадранту}\} \\ \pi + arctg|y/x| & \text{если } z \in \{III \text{ квадранту}\} \\ 2\pi - arctg|y/x| & \text{если } z \in \{IV \text{ квадранту}\} \end{cases}, \text{ если } 0 \le \varphi < 2\pi,$$

или по формуле

$$\varphi = \begin{cases} arctg|y/x| & \text{если } z \in \{I \text{ квадранту}\} \\ \pi - arctg|y/x| & \text{если } z \in \{II \text{ квадранту}\} \\ -\pi + arctg|y/x| & \text{если } z \in \{III \text{ квадранту}\} \\ -arctg|y/x| & \text{если } z \in \{IV \text{ квадранту}\} \end{cases}, \text{ если } -\pi < \varphi \le \pi.$$

Комплексно-сопряжённым числу $z = x + iy$ называется число $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$.

Представление комплексного числа выражением $z = x + iy$ называется ***алгебраической формой*** комплексного числа, а выражением $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ - ***тригонометрической формой*** комплексного числа.

Арифметические действия (сложение, вычитание, умножение) над комплексными числами в алгебраической форме выполняют по правилам действий над многочленами, с учётом того, что $i^2 = -1$:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2);$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Деление комплексных чисел выполняют следующим образом: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$.

Возведение комплексного числа $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в натуральную степень n выполняют, используя ***формулу Муавра:*** $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$**.** Полученный результат представляют затем в алгебраической форме.

Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (не равного нулю) выполняют по формуле:

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right),\ k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

(здесь $\sqrt[n]{r}$ - действительное положительное число). Таким образом, корень степени n из комплексного числа имеет n различных значений, расположенных на комплексной плоскости на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$.

Корни z_1 и z_2 квадратного уравнения $az^2 + bz + c = 0$, где a,b,c - действительные числа, находятся по формулам:

1) если $D = b^2 - 4ac \geq 0$, то $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ - действительные;

2) если $D = b^2 - 4ac < 0$, то $z_{1,2} = \dfrac{-b}{2a} \pm i \cdot \dfrac{\sqrt{|D|}}{2a}$ - комплексно-сопряжённые.

Алгебраическим многочленом степени n называется выражение вида:

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n,$$

где $z \in C$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ - некоторые числа (вообще говоря, комплексные), называемые коэффициентами многочлена, причём $a_0 \neq 0$.

Алгебраическим уравнением степени n называется уравнение вида $P_n(z)=0$. Число z_0, для которого $P_n(z_0)=0$ называется ***корнем*** многочлена или уравнения.

Теорема Безу. Число z_0 является корнем многочлена $P_n(z)$ тогда и только тогда, когда $P_n(z)$ делится на $(z-z_0)$, т.е. когда $P_n(z)$ представляется в виде: $P_n(z)=(z-z_0)\cdot Q_{n-1}(z)$, где $Q_{n-1}(z)$ - многочлен степени $(n-1)$.

Число z_0 называется ***корнем кратности*** k многочлена $P_n(z)$, если $P_n(z)=(z-z_0)^k\cdot Q_{n-k}(z)$, где $Q_{n-k}(z_0)\neq 0$.

Для многочленов имеет место следующая теорема:

Теорема Гаусса (*основная теорема алгебры*). Всякий многочлен ненулевой степени n имеет ровно n корней, если каждый корень считать ровно столько раз, какова его кратность .

Всякий многочлен $P_n(z)$ с действительными коэффициентами всегда можно разложить в произведение линейных и квадратичных множителей с действительными коэффициентами.

Всякий квадратный многочлен az^2+bz+c с действительными коэффициентами на множестве комплексных чисел всегда можно разложить в произведение линейных множителей: $a\,z^2+bz+c=a\,(z-z_1)(z-z_2)$, где корни многочлена z_1 и z_2 находятся по формулам:

1) если $D=b^2-4ac\geq 0$, то $z_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ - действительные;

2) если $D=b^2-4ac<0$, то $z_{1,2}=\dfrac{-b}{2a}\pm i\cdot\dfrac{\sqrt{|D|}}{2a}$ - комплексно-сопряжённые.

Для нахождения корней алгебраического уравнения $P_n(z)=0$ $(n\geq 3)$ с действительными коэффициентами поступают, как правило, следующим образом: находят один из корней подбором (например, корнем может быть целый делитель свободного слагаемого a_n), а затем, последовательно применяя теорему Безу, сводят нахождение корней уравнения $P_n(z)=0$ к нахождению корней линейных и квадратных уравнений.

Расширенной (или полной) комплексной плоскостью называется комплексная плоскость переменной z с присоединением единственного комплексного числа $z=\infty$ (независимо от направления), ***окрестностью*** которой называется множество точек, удовлетворяющих условию $|z|>R$.

Функция $w=f(z)$ ***однозначна***, если каждому значению z из некоторой области ставится в соответствие одно, определённое комплексное число w.

Функция $w=f(z)$ называется ***однолистной*** в некоторой области, если в различных точках этой области она принимает различные значения. Например, функция $w=z^2$ - однозначна, но не однолистна, так как двум точкам на комплексной плоскости z и $-z$ отвечает одно и тоже значение w.

Для расширенной комплексной плоскости множество точек, состоящее из внутренних точек, любые две из которых можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат этому множеству, называется ***связной областью.***

Тема. Дифференцирование функций комплексного переменного.

Функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ называется ***дифференцируемой в точке*** z_0, если существует $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$, независимый от способа стремления Δz к нулю. Этот предел называется ***производной*** функции $f(z)$.

Если функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0, то существуют частные производные $u(x,y)$, $v(x,y)$ и выполняются соотношения, называемые ***условиями Коши-Римана***: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Функция $f(z)$, имеющая в каждой точке некоторой области непрерывную производную, называется ***аналитической*** в этой области. Например, функция $w=\bar{z}=x-iy$ - непрерывна на всей плоскости, но нигде не дифференцируема, т.е. не аналитическая.

Функция $w=f(z)$, где $f(z)$ - однозначная аналитическая в некоторой области G_z, осуществляет отображение этой области на область G_w комплексной плоскости w, называемое ***конформным***. Например, показательная функция $w=e^z$ отображает полосу на плоскости z шириной π $(0\le y\le\pi)$ на верхнюю полуплоскость $v\ge 0$, а функция $w=-e^{-z}$ отображает полуполосу $(0\le x\le\infty,\ \ 0\le y\le\pi)$ на полукруг единичного радиуса в верхней полуплоскости w .

Конформное отображение в точке $z_0\in G_z$ во-первых, сохраняет углы между любыми гладкими линиями, проходящими через точку z_0 и угол поворота бесконечно малого элемента равен аргументу производной $\alpha=\arg f'(z_0)$ и, во-вторых растяжение бесконечно малого элемента в точке z_0 постоянно и равно модулю производной $k=|f'(z_0)|$ для любого направления.

Функция $w=f(z)$, осуществляющая конформное отображение заданной односвязной области G_z на область G_w в плоскости w, определяется единственным образом заданием соответствия между тремя различными точками G_z и G_w.

Тема. <u>Интегрирование функций комплексного переменного.</u>

Интеграл от комплексной функции $f(z)=u+iv$ по некоторой кусочно-гладкой линии L конечной длины, определяется следующей формулой

$$\int\limits_L f(\varsigma)d\varsigma=\int ud\xi-vd\eta+i\int ud\eta-vd\xi,$$

где $d\varsigma=d\xi+id\eta$, и интегралы в правой части равенства – криволинейные интегралы второго рода. В частности, если L_ρ - окружность радиуса ρ с центром в точке z_0, обходимая в положительном направлении (против хода часовой стрелки) ($\varsigma=z_0+\rho e^{i\varphi}$), то $\int\limits_{L_\rho}\frac{d\varsigma}{\varsigma-z_0}=\int\limits_0^{2\pi}\frac{i\rho e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}}=2\pi i$ и не зависит ни от ρ, ни от z_0.

В интегральном исчислении теории функций комплексного переменного основную роль играет ***теорема Коши***: Если $f(z)$ - аналитическая функция в некоторой односвязной области G_z, то интеграл $\int\limits_\Gamma f(z)dz$, взятый вдоль любого замкнутого контура $\Gamma\subset G_z$, равен нулю.

Значения аналитической функции в точке, лежащей внутри замкнутого контура Γ определяется ***интегралом Коши*** $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}$ $\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z}=0,\quad \text{если } z \text{ лежит вне } \Gamma\right)$, а её n***-ая производная*** во внутренних точках области G_z равна $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z)^{n+1}}$.

Тема. <u>Ряды в комплексной плоскости. Ряды Фурье.</u>

Функция $f(z)$ - аналитическая внутри круга $|z-z_0|<R$ может быть представлена в этом круге единственным образом ***рядом Тейлора***

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, где $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\rho}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z_0)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, C_ρ - окружность радиуса ρ с центром в точке z_0.

Ряд вида $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, сходящийся в кольце $R_2<|z-z_0|<R_1$ к аналитической функции $f(z)$, называется ***рядом Лорана*** этой функции. Здесь $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z_0)^{n+1}}$ ($n=0,\pm1,\pm2,\dots$), C - произвольный замкнутый контур в кольце $R_2<|z-z_0|<R_1$, содержащий точку z_0 внутри.

Точка z_0 называется ***правильной***, если существует ряд Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ сходящийся к $f(z)$ внутри круга сходимости, принадлежащему $\overline{D}$. Точки $z_0\in\overline{D}$ не являющиеся правильными называются ***особыми точками*** $f(z)$.

Точка z_0 называется:

1) ***устранимой особой точкой*** функции $f(z)$, если $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=c_0$ ($c_0<\infty$);

2) ***полюсом порядка*** m функции $f(z)$, если её ряд Лорана в окрестности z_0 содержит m членов с отрицательными степенями $(z-z_0)$;

3) ***существенно особой точкой*** функции $f(z)$, если её ряд Лорана в окрестности z_0 содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями $(z-z_0)$.

Тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[-\ell,\ell]$ называется функциональный ряд вида $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}+b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$, где числа a_n и b_n, называемые ***коэффициентами Фурье*** функции $f(x)$, вычисляются по формулам:

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx\ ,\ b_n=\frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx\ ,\ n=0,1,2,\dots .$$

Функция $f(x)$ называется ***кусочно-монотонной*** на отрезке $[\alpha,\beta]$, если этот отрезок можно разбить конечным числом точек $x_1,x_2,\dots,x_{k-1}$ на интервалы $(\alpha, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{k-1}, \beta)$ так, что на каждом из интервалов функция либо только возрастает, либо только убывает, либо постоянна.

Если функция $f(x)$ на отрезке $[-\ell, \ell]$ кусочно-монотонна и непрерывна, за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода, то во всякой точке $x \in (-\ell, \ell)$, в которой $f(x)$ непрерывна, функцию можно разложить в тригонометрический ряд Фурье $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\dfrac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\dfrac{n\pi x}{\ell}\right)$. В точках разрыва $x \in (-\ell, \ell)$ функции $f(x)$ и точках $x = \pm\ell$ сумма ряда Фурье определяется формулами $S(x) = \dfrac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$ и $S(-\ell) = S(\ell) = \dfrac{f(-\ell+0) + f(\ell-0)}{2}$.

В частности, если: **1)** функция $f(x)$ - ***чётная***, то в точках $x \in (-\ell, \ell)$ непрерывности функции имеет место разложение $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\dfrac{n\pi x}{\ell}\right)$,где $a_n = \dfrac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{\ell}dx$, $n = 0,1,2,\ldots$;

2) функция $f(x)$ - ***нечётная***, то в точках $x \in (-\ell, \ell)$ непрерывности функции имеет место разложение $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(b_n \sin\dfrac{n\pi x}{\ell}\right)$, где $b_n = \dfrac{2}{\ell}\int\limits_0^{\ell} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{\ell}dx$, $n = 1,2,\ldots$.

Если функция $f(x)$ задана только в интервале $(0, \ell)$, то её можно продолжить в интервал $(-\ell, 0)$ либо как чётную, либо как нечётную, а затем разложить её в интервале $(0, \ell)$ в неполный ряд Фурье по синусам или по косинусам.

Тема. Теория вычетов и её применение.

Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется число равное интегралу $\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(\varsigma)d\varsigma$, где γ - замкнутый контур, содержащий изолированную особую точку, взятый в положительном направлении, и обозначается в виде $res[f(z), z_0]$: $res[f(z), z_0] = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(\varsigma)d\varsigma = c_{-1}$.

Для полюса m-го порядка имеем $res[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0) f(z)]$.

В частности, для полюса первого порядка $res[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0) f(z)]$.

Если функция $f(z)$ аналитическая всюду в замкнутой области $\overline{D}$, за исключением конечного числа N изолированных особых точек z_k ($k = \overline{1, N}$), лежащих внутри области $\overline{D}$, то $\int_{\Gamma} f(\varsigma) d\varsigma = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} res[f(z), z_k]$, где Γ полная граница области $\overline{D}$, проходимая в положительном направлении. Ели функция $f(z)$ аналитическая в расширенной плоскости, за исключением конечного числа N изолированных особых точек z_k ($k = \overline{1, N}$), включая $z = \infty$, то $\sum_{k=1}^{N} res[f(z), z_k] = 0$.

Теорию вычетов широко применяют для вычисления интегралов.

Тема. <u>Интегральное преобразование Лапласа. Основные теоремы операционного исчисления.</u>

Пусть $f(t)$ - функция (которая, вообще говоря, может принимать и комплексные значения) действительного аргумента t, $0 \le t < \infty$ такая, что:

1) она кусочно-непрерывна на $[0, \infty)$, т.е. непрерывна на данном промежутке, за исключением конечного числа точек, где она имеет разрывы первого рода;

2) существуют положительные числа M и s такие, что для всех $t \in [0, \infty)$ справедливо неравенство $|f(t)| < Me^{st}$. Точную нижнюю грань $s_0 = \inf s$ всех чисел s, для которых выполняется неравенство $|f(t)| \le Me^{st}$, называют **порядком (показателем) роста** функции $f(t)$.

Преобразованием Лапласа функции $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = a + ib$, $a > s$, определяемая равенством:

$$F(p) = \int_{0}^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

При этом функция $f(t)$ называется ***оригиналом***, а функция $F(p)$ - **его *изображением.*** Соответствие между оригиналом и его изображением символически записывается в виде $f(t) \leftarrow F(p)$ или $L\{f(t)\} = F(p)$.

Если функция $f(t)$ задана на всей числовой прямой ($-\infty < t < +\infty$), то вместо неё всюду в дальнейшем, без специальных оговорок, будем рассматривать функцию $f(t)\cdot\sigma_0(t)$, где $\sigma_0(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t \ge 0 \end{cases}$ - ***единичная функция Хевисайда,*** т.е. будем считать $f(t) = 0$ при $t < 0$, причём $f(0) = f(+0)$.

При нахождении изображений и оригиналов широко применяются ***таблица изображений*** **и оригиналов** преобразования Лапласа и его ***свойства***, а также формулы:

$$\sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}; \; \cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}; \; sht = \frac{e^{t}-e^{-t}}{2} \; ; \; chz = \frac{e^{t}+e^{-t}}{2} \; .$$

<u>Свойства преобразования Лапласа.</u>

1.Линейность: $L\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha L\{f(t)\} + \beta L\{g(t)\}$.

2. Теорема подобия: Если $L\{f(t)\} = F(p)$, то $L\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$.

3.Теорема смещения: Если $L\{f(t)\} = F(p)$, то $L\left\{e^{-bt}f(t)\right\} = F(p+b)$.

4.Теорема запаздывания: Если $L\{f(t)\} = F(p)$,то $L\{f(t-T)\} = e^{-pT}F(p)$.

5.Теорема о свертке: $L\left\{\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right\} = F_1(p)\cdot F_2(p)$, где $L\{f_1(t)\} = F_1(p)$, $L\{f_2(t)\} = F_2(p)$.

6.Теорема о дифференцировании изображения: Если $L\{f(t)\} = F(p)$, то $L\left\{t^n f(t)\right\} = (-1)^n F^{(n)}(p)$.

7.Теорема о дифференцировании оригинала: Если $L\{f(t)\} = F(p)$, то $L\left\{f^{(n)}(t)\right\} = p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$.

8.Теорема об интегрировании оригинала: Если $L\{f(t)\}=F(p)$, то

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}=\frac{F(p)}{p}.$$

9.Теорема об интегрировании изображения: Если $L\{f(t)\}=F(p)$, то

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_p^{\infty} F(q)dq.$$

Тема. <u>Применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений и их систем.</u>

Для нахождения решения $x(t)$ линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=f(t)$, удовлетворяющего начальным условиям $x(0)=x_0$, $x'(0)=x'_0$, … , $x^{(n-1)}(0)=x_0^{(n-1)}$, к обеим частям уравнения следует применить преобразование Лапласа и перейти к операторному уравнению $(p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n)X(p)+Q(p)=F(p)$, где $X(p)$ - изображение искомого решения $x(t)$, $F(p)$ - изображение функции $f(t)$, $Q(p)$ - некоторый многочлен, коэффициенты которого зависят от начальных данных $x_0, x'_0, \ldots, x_0^{(n-1)}$ ($Q(p)\equiv 0$, если $x_0=x'_0=\ldots=x_0^{(n-1)}=0$). Решив операторное уравнение относительно $X(p)$: $X(p)=\dfrac{F(p)-Q(p)}{p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n}$ и найдя оригинал для $X(p)$, получим искомое решение $x(t)$. Если начальные данные $x_0, x'_0, \ldots, x_0^{(n-1)}$ считать произвольными постоянными $C_1, C_2, \ldots, C_n$, то найденное решение будет являться общим решением данного дифференциального уравнения.

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами решаются аналогично. Отличие состоит лишь в том, что вместо одного операторного уравнения получится система операторных уравнений, линейных относительно изображений искомых функций.

6.3 Основные математические формулы.

Формулы сокращённого умножения:

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ **2.** $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

3. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

4. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ **5.** $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

Формулы тригонометрии:

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$ **2.** $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1,$

3. $1 + tg^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$, **4.** $1 + ctg^2\alpha = 1/\sin^2\alpha$ **.**

5. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$

6. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$

7. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ **8.** $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

9. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos[(\alpha+\beta)/2] \cdot \cos[(\alpha-\beta)/2]$

10. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin[(\alpha+\beta)/2] \cdot \sin[(\alpha-\beta)/2]$

11. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin[(\alpha+\beta)/2] \cdot \cos[(\alpha-\beta)/2]$

12. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin[(\alpha-\beta)/2] \cdot \cos[(\alpha+\beta)/2]$

13. $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$ **14.** $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$

Формулы приведения.

Функция	$\beta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = \pi \pm \alpha$	$\beta = \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = 2\pi - \alpha$
$\sin\beta$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$		$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
$tg\beta$	$\mp ctg\alpha$	$\pm tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$-tg\beta$	$\mp tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Значения тригонометрических функций некоторых углов.

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	0	∞	0
$ctg\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	$-1/\sqrt{3}$	∞	0	∞

Таблица производных и дифференциалов основных элементарных функций.

№ п/п	$f(x)$	$f'(x)$	$df(x)$
1	$x^{\alpha}\quad(\alpha\neq 0)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha x^{\alpha-1}dx$
2	$a^{x}\quad(a>0,\neq 1)$	$a^{x}\ln a$	$a^{x}\ln a dx$
3	e^{x}	e^{x}	$e^{x}dx$
4	$\log_{a}x\quad(a>0,\neq 1)$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\frac{dx}{x\ln a}$
5	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{dx}{x}$
6	$\sin x$	$\cos x$	$\cos xdx$
7	$\cos x$	$-\sin x$	$-\sin xdx$
8	tgx	$\frac{1}{\cos^{2}x}$	$\frac{dx}{\cos^{2}x}$
9	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^{2}x}$	$-\frac{dx}{\sin^{2}x}$
10	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$
11	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	$-\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$
12	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^{2}}$	$\frac{dx}{1+x^{2}}$
13	$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^{2}}$	$-\frac{dx}{1+x^{2}}$
14	chx	shx	$shxdx$
15	shx	chx	$chxdx$
16	thx	$\frac{1}{ch^{2}x}$	$\frac{dx}{ch^{2}x}$
17	$cthx$	$-\frac{1}{sh^{2}x}$	$-\frac{dx}{sh^{2}x}$

Таблица основных неопределенных интегралов.

№	$\int f(x)dx$	№	$\int f(x)dx$
1	$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$ $(k \in R, k \neq -1)$	**2**	$\int (x+a)^k dx = \frac{(x+a)^{k+1}}{k+1} + C$ $(k \in R, k \neq -1)$
3	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	**4**	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$
5	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $(a > 0, a \neq 1)$	**6**	$\int e^x dx = e^x + C$ $\int \mathrm{e}^{ax+b} dx = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b} + C$
7	$\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int \cos(ax+b)dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + C$	**8**	$\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a} + C$
9	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	**10**	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
11	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert tg\frac{x}{2}\right\rvert + C$	**12**	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
13	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$	**14**	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
15	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$	**16**	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$
17	$\int shxdx = chx + C$	**18**	$\int chxdx = shx + C$
19	$\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$	**20**	$\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$
21	$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \cdot \arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + C$		

22	$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \pm\frac{a^2}{2}\ln\lvert x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\rvert + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} + C$

6.4. Основные формулы ТФКП.

Комплексное число - число вида $z = x + iy$, где x, y -действительные числа, символ i - мнимая единица, для которой $i^2 = -1$.

Число $x = \operatorname{Re} z$ - *действительная часть* комплексного числа z, $y = \operatorname{Im} z$ - *мнимая часть*.

Комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости с системой координат Oxy точкой, имеющей координаты (x, y), а также радиус-вектором точки (x, y).

Модуль комплексного числа: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, *аргумент комплексного числа* - угол φ, который составляет его радиус-вектор с осью Ox.

Аргумент φ комплексного числа вычисляют, по формуле:

$$\varphi = \begin{cases} arctg\lvert y/x\rvert & \text{если } z\in\{I \text{ квадранту}\} \\ \pi - arctg\lvert y/x\rvert & \text{если } z\in\{II \text{ квадранту}\} \\ \pi + arctg\lvert y/x\rvert & \text{если } z\in\{III \text{ квадранту}\} \\ 2\pi - arctg\lvert y/x\rvert & \text{если } z\in\{IV \text{ квадранту}\} \end{cases}, \text{ если } 0 \le \varphi < 2\pi, \text{ или по}$$

формуле

$$\varphi = \begin{cases} arctg\lvert y/x\rvert & \text{если } z\in\{I \text{ квадранту}\} \\ \pi - arctg\lvert y/x\rvert & \text{если } z\in\{II \text{ квадранту}\} \\ -\pi + arctg\lvert y/x\rvert & \text{если } z\in\{III \text{ квадранту}\} \\ -arctg\lvert y/x\rvert & \text{если } z\in\{IV \text{ квадранту}\} \end{cases}, \text{ если } -\pi < \varphi \le \pi.$$

Комплексно-сопряжённым числу $z = x + iy$ называется число $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$.

Арифметические действия (сложение, вычитание, умножение) над комплексными числами в *алгебраической форме* выполняют по правилам действий над многочленами, с учётом того, что $i^2 = -1$. Деление комплексных чисел выполняют по формуле: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$.

Возведение комплексного числа $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в натуральную степень n выполняют, используя *формулу Муавра:* $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$.

Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (не равного нулю) выполняют по формуле: $\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right)$,

$k = 0, 1, 2, ..., (n-1)$ (здесь $\sqrt[n]{r}$ - действительное положительное число). Корень степени n из комплексного числа имеет n различных значений, расположенных на комплексной плоскости на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$.

Корни квадратного уравнения $az^2 + bz + c = 0$ на множестве комплексных чисел находятся по формулам:

1) если $D = b^2 - 4ac \geq 0$, то $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ - действительные;

2) если $D = b^2 - 4ac < 0$, то $z_{1,2} = \dfrac{-b}{2a} \pm i\dfrac{\sqrt{|D|}}{2a}$ - комплексно-сопряжённые.

Уравнение окружности с центром z_0 и радиусом r : $|z - z_0| = r$.

Основные элементарные ФКП:

1. $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$.

2. $\operatorname{Ln} z = \ln z + i2\pi k$, где $\ln z = \ln|z| + i\arg z$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $-\pi < \arg z \leq \pi$.

3. $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $tgz = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, $ctgz = \dfrac{\cos z}{\sin z}$.

4. $shz = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$, $chz = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$, $thz = \dfrac{\mathrm{s}hz}{\mathrm{c}hz}$, $cthz = \dfrac{\mathrm{c}hz}{\mathrm{s}hz}$.

Обратные тригонометрические и гиперболические ФКП:

1. $\operatorname{Arcsin} z = -iLn\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$ **2.** $\operatorname{Arc}tgz = -\dfrac{i}{2}Ln\left(\dfrac{i - z}{i + z}\right)$, где $z \neq \pm i$.

3. $\mathrm{Arccos}\, z = -iLn(z+\sqrt{z^2-1})$ **4.** $\mathrm{Arc}\, ctgz = \frac{i}{2} Ln\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$, где $z \neq \pm i$.

5. $\mathrm{Ars}\, hz = Ln(z+\sqrt{z^2+1})$. **6.** $\mathrm{Ar}\, thz = \frac{1}{2} Ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$, где $z \neq \pm 1$.

7. $\mathrm{Arc}\, hz = Ln(z+\sqrt{z^2-1})$. **8.** $\mathrm{Ar}\, cthz = \frac{1}{2} Ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$, где $z \neq \pm 1$.

Условия Коши-Римана: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Производная ФКП:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$x = (z+\overline{z})/2,\ y = (z-\overline{z})/(2i)$$

Уравнение Лапласа: $\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$.

Интеграл от ФКП по дуге кривой: $\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{AB} (u+iv)(dx+idy)$.

Правило вычисления криволинейного интеграла 2-го рода $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$: если $AB: y = \varphi(x),\ a \le x \le b$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \left(P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)\right)dx.$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Интегральные формулы Коши:

$$\oint\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0); \qquad \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

Теорема Коши: $\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$, где $f(z)$ - аналитична в области D, ограниченной контуром Γ и непрерывна в области $\bar{D} = D \cup \Gamma$. ▯

<u>Разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций</u>:

1) $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},\ z \in C.$

2) $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, z \in C.$

3) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},\ z \in C.$

4) $(1+z)^{\alpha} = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \ldots =$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n,\ |z| < 1,\ \alpha \in R \setminus N.$$

5) $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,\ |z| < 1.$

6) $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n,\ |z| < 1.$

7) $\ln(1+z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n},\ |z| < 1.$

8) $arctgz = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1},\ |z| < 1.$

9) $chz = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!},\ z \in C.$

10) $shz = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!},\ z \in C.$

Рядом Лорана называют ряд вида $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, $c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$, где Γ - произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащая внутри кольца $r<|z-z_0|<R$.

<u>Вычисление вычетов</u>:

1) Если z_0 - простой полюс, то $res\left[f(z),z_0\right]=c_{-1}=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$.

2) Если z_0 - простой полюс и $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z_0)\neq 0$, $\psi(z_0)=0$, $\psi'(z_0)\neq 0$, то $res\left[\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},z_0\right]=c_{-1}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$.

3) Если z_0 - полюс m-го порядка , то

$$res\left[f(z),z_0\right]=c_{-1}=\frac{\lim\limits_{z\to z_0}\left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right)\right)}{(m-1)!}.$$

Теорема Коши о вычетах: $\oint_{\Gamma} f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{N} res\left[f(z),z_k\right]$.

6.5. Основные формулы операционного исчисления.

Таблица оригиналов и изображений преобразования Лапласа

	$f(t)$	$F(p)$
1.	1	1/p
2.	$\sin at$	$a/(p^2+a^2)$
3.	$\cos at$	$p/(p^2+a^2)$
4.	e^{-at}	$1/(p+a)$
5.	$sh\ at$	$a/(p^2-a^2)$
6.	$ch\ at$	$p/(p^2-a^2)$
7.	$e^{-at}\cdot\sin bt$	$\dfrac{b}{(p+a)^2+b^2}$
8.	$e^{-at}\cdot\cos bt$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$
9.	$e^{-at}\cdot shbt$	$\dfrac{b}{(p+a)^2-b^2}$
10.	$e^{-at}\,chbt$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2-b^2}$
11.	t^n	$n!/p^{n+1}$
12.	$t\cdot\sin at$	$2pa/(p^2+a^2)^2$
13.	$t\cdot\cos at$	$(p^2-a^2)/(p^2+a^2)^2$
14.	$t\cdot e^{-at}$	$1/(p+a)^2$
15.	$t\cdot sh t$	$2p/(p^2-1)^2$
16.	$t\cdot cht$	$(p^2+1)/(p^2-1)^2$
17.	$t^n\cdot e^{at}/n!$	$1/(p-a)^{n+1}$
18.	$(\sin at-at\cos at)/2a^3$	$1/(p^2+a^2)^2$
19.	$f'(t)$	$pF(p)-f(0)$
20.	$f''(t)$	$p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$

Свойства преобразования Лапласа.

1.Линейность: $L\{\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t)\} = \alpha \cdot L\{f(t)\} + \beta \cdot L\{g(t)\}$

2.Теорема подобия: Если $L\{f(t)\} = F(p)$, то $L\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$.

3.Теорема смещения: Если $L\{f(t)\} = F(p)$, то $L\left\{e^{-bt} f(t)\right\} = F(p+b)$.

4.Теорема запаздывания: Если $L\{f(t)\} = F(p)$, то $L\{f(t-T)\} = e^{-pT} F(p)$.

5.Теорема о свертке: $L\left\{\int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau\right\} = F_1(p) \cdot F_2(p),$ где $L\{f_1(t)\} = F_1(p), \quad L\{f_2(t)\} = F_2(p)$.

6.Теорема о дифференцировании изображения: Если $L\{f(t)\} = F(p)$, то $L\left\{t^n f(t)\right\} = (-1)^n F^{(n)}(p)$.

7.Теорема о дифференцировании оригинала: Если $L\{f(t)\} = F(p)$, то

$$L\left\{f^{(n)}(t)\right\} = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

8.Теорема об интегрировании оригинала: Если $L\{f(t)\} = F(p)$, то $L\left\{\int\limits_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(p)}{p}$.

9.Теорема об интегрировании изображения: Если $L\{f(t)\} = F(p)$, то

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int\limits_p^\infty F(q)\, dq.$$

6.6 Образец оформления обложки с контрольной работой.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Набережночелнинский институт (филиал)
федерального государственного автономного образовательного
учреждения высшего образования
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

кафедра математики

Контрольная работа

по дисциплине
«Теория функций комплексного переменного
и операционное исчисление»

Вариант № ____
(номера выполняемых заданий: ___________________________)

Выполнил: студент группы №________
*Ф.И.О. студента*__________
зач. книжка - №__________
Проверил: преподаватель кафедры математики
*Ф.И.О. преподавателя*_____

Набережные Челны
20…

6.7. Таблица номеров выполняемых заданий.

Номер варианта	*Номера выполняемых заданий*									
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
1	**1**	**11**	**21**	**31**	**41**	**51**	**61**	**71**	**81**	**91**
2	**2**	**12**	**22**	**32**	**42**	**52**	**62**	**72**	**82**	**92**
3	**3**	**13**	**23**	**33**	**43**	**53**	**63**	**73**	**83**	**93**
4	**4**	**14**	**24**	**34**	**44**	**54**	**64**	**74**	**84**	**94**
5	**5**	**15**	**25**	**35**	**45**	**55**	**65**	**75**	**85**	**95**
6	**6**	**16**	**26**	**36**	**46**	**56**	**66**	**76**	**86**	**96**
7	**7**	**17**	**27**	**37**	**47**	**57**	**67**	**77**	**87**	**97**
8	**8**	**18**	**28**	**38**	**48**	**58**	**68**	**78**	**88**	**98**
9	**9**	**19**	**29**	**39**	**49**	**59**	**69**	**79**	**89**	**99**
10	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**	**100**
11	**3**	**12**	**21**	**32**	**43**	**52**	**61**	**72**	**83**	**92**
12	**4**	**13**	**22**	**33**	**44**	**53**	**62**	**73**	**84**	**93**
13	**5**	**16**	**27**	**38**	**49**	**60**	**69**	**78**	**87**	**96**
14	**6**	**17**	**28**	**39**	**50**	**59**	**68**	**77**	**86**	**95**
15	**7**	**18**	**29**	**40**	**49**	**58**	**67**	**76**	**85**	**94**
16	**8**	**19**	**30**	**39**	**48**	**57**	**66**	**75**	**84**	**93**
17	**9**	**20**	**29**	**38**	**47**	**56**	**65**	**74**	**83**	**92**
18	**1**	**12**	**23**	**34**	**45**	**56**	**67**	**78**	**89**	**100**
19	**2**	**13**	**24**	**35**	**46**	**57**	**68**	**79**	**90**	**99**
20	**3**	**14**	**25**	**36**	**47**	**58**	**69**	**80**	**89**	**98**
21	**4**	**15**	**26**	**37**	**48**	**59**	**70**	**79**	**88**	**97**
22	**5**	**14**	**23**	**32**	**41**	**52**	**63**	**74**	**85**	**96**
23	**6**	**15**	**24**	**33**	**42**	**51**	**62**	**73**	**84**	**95**
24	**7**	**16**	**25**	**34**	**43**	**52**	**61**	**72**	**83**	**94**
25	**8**	**17**	**26**	**35**	**44**	**53**	**62**	**71**	**82**	**93**
26	**9**	**18**	**27**	**36**	**45**	**54**	**63**	**72**	**81**	**92**
27	**10**	**19**	**28**	**37**	**46**	**55**	**64**	**73**	**82**	**91**
28	**2**	**11**	**22**	**33**	**44**	**55**	**66**	**77**	**88**	**99**
29	**3**	**12**	**21**	**32**	**43**	**54**	**65**	**76**	**87**	**98**
30	**4**	**13**	**22**	**31**	**42**	**53**	**64**	**75**	**86**	**97**

Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

Номер варианта	***Номера выполняемых заданий***									
	11	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*
1	**107**	**118**	**129**	**140**	**149**	**158**	**167**	**176**	**185**	**194**
2	**106**	**117**	**128**	**139**	**150**	**159**	**168**	**177**	**186**	**195**
3	**105**	**116**	**127**	**138**	**149**	**160**	**169**	**178**	**187**	**196**
4	**104**	**113**	**122**	**133**	**144**	**153**	**162**	**173**	**184**	**193**
5	**103**	**112**	**121**	**132**	**143**	**152**	**161**	**172**	**183**	**192**
6	**110**	**120**	**130**	**140**	**150**	**160**	**170**	**180**	**190**	**200**
7	**109**	**119**	**129**	**139**	**149**	**159**	**169**	**179**	**189**	**199**
8	**106**	**115**	**124**	**133**	**142**	**151**	**162**	**173**	**184**	**195**
9	**107**	**117**	**127**	**137**	**147**	**157**	**167**	**177**	**187**	**197**
10	**106**	**116**	**126**	**136**	**146**	**156**	**166**	**176**	**186**	**196**
11	**105**	**115**	**125**	**135**	**145**	**155**	**165**	**175**	**185**	**195**
12	**104**	**114**	**124**	**134**	**144**	**154**	**164**	**174**	**184**	**194**
13	**103**	**113**	**123**	**133**	**143**	**153**	**163**	**173**	**183**	**193**
14	**102**	**112**	**122**	**132**	**142**	**152**	**162**	**172**	**182**	**192**
15	**101**	**111**	**121**	**131**	**141**	**151**	**161**	**171**	**181**	**191**
16	**104**	**113**	**122**	**131**	**142**	**153**	**164**	**175**	**186**	**197**
17	**103**	**112**	**121**	**132**	**143**	**154**	**165**	**176**	**187**	**198**
18	**102**	**111**	**122**	**133**	**144**	**155**	**166**	**177**	**188**	**199**
19	**110**	**119**	**128**	**137**	**146**	**155**	**164**	**173**	**182**	**191**
20	**109**	**118**	**127**	**136**	**145**	**154**	**163**	**172**	**181**	**192**
21	**108**	**117**	**126**	**135**	**144**	**153**	**162**	**171**	**182**	**193**
22	**107**	**116**	**125**	**134**	**143**	**152**	**161**	**172**	**183**	**194**
23	**108**	**118**	**128**	**138**	**148**	**158**	**168**	**178**	**188**	**198**
24	**105**	**114**	**123**	**132**	**141**	**152**	**163**	**174**	**185**	**196**
25	**104**	**115**	**126**	**137**	**148**	**159**	**170**	**179**	**188**	**197**
26	**103**	**114**	**125**	**136**	**147**	**158**	**169**	**180**	**189**	**198**
27	**102**	**113**	**124**	**135**	**146**	**157**	**168**	**179**	**190**	**199**
28	**101**	**112**	**123**	**134**	**145**	**156**	**167**	**178**	**189**	**200**
29	**109**	**120**	**129**	**138**	**147**	**156**	**165**	**174**	**183**	**192**
30	**108**	**119**	**130**	**139**	**148**	**157**	**166**	**175**	**184**	**193**

Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

С О Д Е Р Ж А Н И Е