

УДК 514.764.2

## ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И СОЛИТОНЫ РИЧЧИ

С.Е. Степанов, И.Г. Шандра, В.Н. Шелепова

### Аннотация

Солитон Риччи на гладком многообразии  $M$  представляет собой тройку  $(g_0, \xi, \lambda)$ , где  $g_0$  – полная риманова метрика,  $\xi$  – векторное поле, а  $\lambda$  – константа такие, что тензор Риччи  $Ric_0$  метрики  $g_0$  удовлетворяет уравнению  $-2Ric_0 = L_\xi g_0 + 2\lambda g_0$ . В статье геометрия солитонов Риччи изучается в зависимости от свойств векторного поля  $\xi$ . В частности, доказано, что это векторное поле является гармоническим преобразованием.

**Ключевые слова:** риманово многообразие, инфинитезимальное гармоническое преобразование, солитон Риччи.

### 1. Лапласиан Яно

**1.1.** Пусть  $(M, g)$  – риманово многообразие размерности  $n \geq 2$  со связностью Леви–Чивита  $\nabla$ ,  $\Lambda^p M = \Lambda^p(T^*M)$  и  $S^p M = S^p(T^*M)$  – векторные расслоения дифференциальных  $p$ -форм и ковариантных симметрических  $p$ -тензоров ( $p \geq 1$ ) на  $M$ .

С помощью римановой метрики  $g$  в слоях тензорных расслоений  $\Lambda^p M$  и  $S^p M$  индуцируется риманова структура, а в случае компактности многообразия  $M$  задается *глобальное скалярное произведение* формулой

$$\langle \omega, \theta \rangle = \int_M \frac{1}{p!} g(\omega, \theta) dv$$

для произвольных сечений  $\omega, \theta \in C^\infty \Lambda^p M$  и соответственно  $\omega, \theta \in C^\infty S^p M$  и канонической формы объема  $dv$  многообразия  $(M, g)$ .

Каждый дифференциальный оператор  $D$ , действующий между пространствами сечений тензорных расслоений на многообразии  $(M, g)$ , обладает каноническим формально сопряженным оператором  $D^*$ , который (см. [1, с. 626]) определяется равенством  $\langle D \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, D^* \cdot \rangle$ . Хорошо известно (см. [2, с. 166–167]), что для внешнего дифференцирования  $d : C^\infty \Lambda^p M \rightarrow C^\infty \Lambda^{p+1} M$  формально сопряженным оператором служит оператор кодифференцирования  $\delta : C^\infty \Lambda^{p+1} M \rightarrow C^\infty \Lambda^p M$ , или, по другой терминологии, *дивергенция*. На базе операторов  $d$  и  $\delta$  строится известный самосопряженный лапласиан Ходжа–де Рама  $\Delta = d\delta + \delta d : C^\infty \Lambda^p M \rightarrow C^\infty \Lambda^p M$ .

При этом имеет место ортогональное относительно глобального скалярного произведения разложение Ходжа  $C^\infty \Lambda^p M = \Delta(C^\infty \Lambda^p M) \oplus \text{Ker } \Delta(C^\infty \Lambda^p M)$ , где вторая компонента  $\text{Ker } \Delta$  разложения представляет собою конечномерное векторное пространство гармонических  $p$ -форм (см. [2, с. 206]).

**1.2.** Для аналогичного  $d$  дифференциального оператора  $\delta^* : C^\infty S^p M \rightarrow C^\infty S^{p+1} M$ , представляющего собою композицию оператора ковариантного дифференцирования  $\nabla : C^\infty S^p M \rightarrow C^\infty(T^*M \otimes S^p M)$  с алгебраическим оператором

симметризации  $S^{p+1} : C^\infty(T^*M \otimes S^p M) \rightarrow C^\infty S^{p+1} M$ , формально сопряженным оператором будет оператор  $\delta : C^\infty S^{p+1} M \rightarrow C^\infty S^p M$ , называемый *дивергенцией* (см. [1, с. 54–55, 626]).

Рассмотрим дифференциальный оператор  $\square : C^\infty S^p M \rightarrow C^\infty S^p M$  такой, что  $\square = \delta\delta^* - \delta^*\delta$ . Непосредственно проверяется, что

$$\begin{aligned}\langle \square\omega, \theta \rangle &= \langle \delta\delta^*\omega, \theta \rangle - \langle \delta^*\delta\omega, \theta \rangle = \langle \delta^*\omega, \delta^*\theta \rangle - \langle \delta\omega, \delta\theta \rangle = \\ &= \langle \omega, \delta\delta^*\theta \rangle - \langle \omega, \delta^*\delta\theta \rangle = \langle \omega, \square\theta \rangle,\end{aligned}$$

следовательно,  $\square$  – *самосопряженный оператор*. Считая далее, что  $\vartheta \in T_x^*M - \{0\}$ , а  $\omega_x \in S_x^p M = S^p(T_x^*M)$ , найдем символ  $\sigma(\square)$  дифференциального оператора  $\square$  (см. [1, с. 627–628; 3, с. 64, 79, 87]). Имеем (см. [4])

$$\sigma(\square)(\vartheta, x)\omega_x = -\vartheta^\sharp \lrcorner (\vartheta \circ \omega_x) + \vartheta \circ (\vartheta^\sharp \lrcorner \omega_x) = -g(\vartheta, \vartheta)\omega_x$$

для тензорного симметрического умножения  $\circ$ , внутреннего произведения  $\lrcorner$  и изоморфизма  $\sharp : T^*M \rightarrow TM$ , соответствующего поднятию индекса. Произведенные вычисления позволяют сделать вывод, что оператор  $\square$  является *лапласианом*, и, следовательно, его ядро  $\text{Ker } \square$  является конечномерным векторным пространством (см. [1, с. 77, 631–632; 3, с. 178]). Тогда в соответствии с общей теорией (см. [1, с. 632–633]) на компактном римановом многообразии  $(M, g)$  имеет место следующее ортогональное относительно глобального скалярного произведения разложение

$$C^\infty S^p M = \square(C^\infty S^p M) \oplus \text{Ker } \square(C^\infty S^p M), \quad (1.1)$$

которое аналогично разложению Ходжа.

**1.3.** Рассмотрим действие  $\square : C^\infty T^*M \rightarrow C^\infty T^*M$ . Для этого в локальной системе координат  $x^1, x^2, \dots, x^n$  произвольной карты  $(U, \phi)$   $U$  многообразия  $M$  полагаем  $\omega = \omega_k dx^k$ , тогда

$$\begin{aligned}\square\omega_k &= (\delta\delta^* - \delta^*\delta)\omega_k = -g^{ij}\nabla_i(\nabla_j\omega_k + \nabla_k\omega_j) - \nabla_k(-g^{ij}\nabla_i\omega_j) = \\ &= -g^{ij}(\nabla_i\nabla_j\omega_k + R_{ki}\omega_j) = \Delta\omega_k - 2g^{ij}R_{ki}\omega_j,\end{aligned}$$

где  $\nabla_i$  – ковариантное дифференцирование в направлении векторного поля  $X_k = \partial/\partial x^k$ ,  $g^{ij}$  – локальные контравариантные компоненты метрического тензора  $g$ ,  $R_{ij}$  – локальные компоненты тензора Риччи  $\text{Ric}$  многообразия  $(M, g)$  и, наконец,  $\Delta\omega_k = (d\delta + \delta d)\omega_k = -g^{ij}\nabla_i\nabla_j\omega_k + g^{ij}R_{ik}\omega_j$  – локальное представление лапласиана Ходжа – де Рама (см. [5, с. 63]).

Если ввести в рассмотрение векторное поле  $\xi = \omega^\sharp$ , то  $\square\xi = \Delta\xi - 2\text{Ric}^*\xi$ . Именно в таком виде оператор  $\square$  был введен К. Яно (см. [6, с. 40]) для изучения киллинговых и гармонических векторных полей. На этом основании для любого  $p \geq 1$  оператор  $\square = \delta\delta^* - \delta^*\delta$  назовем *лапласианом Яно*.

## 2. Инфинитезимальные гармонические преобразования и солитоны Риччи

**2.1.** Произвольное векторное поле  $\xi \in C^\infty TM$  порождает в окрестности  $U$  каждой точки риманова многообразия  $(M, g)$  локальную 1-параметрическую группу инфинитезимальных преобразований  $\varphi_t(x) = \bar{x}^k = x^k + t\xi^k$  для локальной системы координат  $x^1, x^2, \dots, x^n$  в окрестности  $U$ , параметра  $t \in (-\varepsilon, +\varepsilon) \subset \mathbf{R}$  и

$\xi = \xi^k \partial_k$  (см. [7, с. 21–23; 8, с. 39–41]). Поэтому векторное поле  $\xi$  называют еще *инфинитезимальным преобразованием* в многообразии  $(M, g)$ . При этом символы Кристоффеля  $\Gamma_{ij}^k$  связности Леви–Чивита  $\nabla$  в результате инфинитезимального преобразования предстанут в следующем виде

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + t(\nabla_i \nabla_j \xi^k - R_{ijl}^k \xi^l) \quad (2.1)$$

для компонент  $R_{ijl}^k$  тензора кривизны  $R$  связности  $\nabla$  (см. [7, с. 37; 8, с. 40, 41]).

Если локальная однопараметрическая группа инфинитезимальных преобразований, порожденная полем  $\xi$  в окрестности каждой точки риманова многообразия  $(M, g)$ , состоит из инфинитезимальных гармонических преобразований, векторное поле  $\xi$  назовем *инфинитезимальным гармоническим преобразованием* риманова многообразия (см. [9]).

Доказано (см. [9]), что диффеоморфизм  $\varphi : (M, g) \rightarrow (\bar{M}, \bar{g})$  является *гармоническим отображением* тогда и только тогда, когда тензор деформации  $T = \bar{\nabla} - \nabla$  подчиняется условию  $\text{trace}_g T = 0$ . В соответствии с этим на основании равенств (2.1) заключаем, что определяющими для инфинитезимального гармонического преобразования  $\xi$  будут служить уравнения

$$\square \xi = \Delta \xi - 2\text{Ric}^* \xi = 0. \quad (2.2)$$

Доказана (см. [3, 9, 10])

**Теорема 2.1.** *Инфинитезимальные гармонические преобразования в  $(M, g)$  и только они составляют ядро лапласиана Яно.*

Таким образом, на компактном римановом многообразии  $(M, g)$  в разложении  $C^\infty T^* M = \square(C^\infty T^* M) \oplus \text{Ker } \square(C^\infty T^* M)$  конечномерная компонента  $\text{Ker } \square$  состоит из инфинитезимальных гармонических преобразований.

Векторное поле  $\xi$  называется *инфинитезимальной изометрией*, если оно порождает однопараметрическую локальную группу локальных изометрий (см. [5, с. 60]). В этом случае по отношению к векторному полю  $\xi$  производная Ли  $L_\xi g = 0$ . На компактном римановом многообразии  $(M, g)$  последнее уравнение равносильно (см. [5, с. 63]) системе дифференциальных уравнений

$$\square \xi = \Delta \xi - 2\text{Ric}^* \xi = 0, \quad \delta \xi = 0.$$

Отсюда следует, что конечномерное векторное пространство инфинитезимальных гармонических преобразований  $\text{Ker } \square$  имеет в качестве подпространства векторное пространство инфинитезимальных изометрий  $\text{Ker } \square \cap \text{Ker } \delta$ .

Известно (см. [7, с. 240]), что на компактном римановом многообразии  $(M, g)$  имеет место ортогональное (относительно глобального скалярного произведения) разложение пространства 1-форм  $C^\infty(T^* M) = \text{Im } d \oplus \text{Ker } \delta$ . А потому  $\text{Ker } \square = (\text{Ker } \square \cap \text{Ker } \delta) \oplus (\text{Ker } \square \cap \text{Im } d)$ , где пространство  $\text{Im } d \cap \text{Ker } \square$  является ортогональным дополнением пространства инфинитезимальных изометрий  $\text{Ker } \square \cap \text{Ker } \delta$  до всего пространства  $\text{Ker } \square$  инфинитезимальных гармонических преобразований. В итоге имеем следующее ортогональное разложение:

$$C^\infty(T^* M) = \text{Im } \square \oplus (\text{Ker } \square \cap \text{Ker } \delta) \oplus (\text{Ker } \square \cap \text{Im } d),$$

которое служит аналогом разложения Ходжа  $C^\infty(T^* M) = \text{Im } \Delta \oplus (\text{Ker } d \cap \text{Ker } d)$ .

**Замечание.** Свойства и примеры инфинитезимальных гармонических преобразований были установлены нами в следующих статьях [4, 9, 10]. Ниже приведем еще один пример инфинитезимального гармонического преобразования.

**2.2.** На  $n$ -мерном гладком многообразии  $M$  семейство римановых метрик  $g_t = g(t)$ , определенных на временном интервале  $J \subset \mathbf{R}$ , включающем 0, называется *потоком Риччи* (см. [11, с. 21; 12, с. 98]), если выполняются уравнения Гамильтона потока Риччи  $\frac{\partial g}{\partial t} = -2\text{Ric}_0$  для  $g_0 = g(0)$  и тензора Риччи  $\text{Ric}_0$  метрики  $g_0$ .

С самоподобным решением этих уравнений на многообразии  $M$  размерности  $n \geq 2$  связано понятие *солитона Риччи* (см. [11, с. 22–23]) как триплета  $(g_0, \xi, \lambda)$  для метрики  $g_0$ , векторного поля  $\xi$  и постоянной  $\lambda$ , связанных уравнением

$$-2\text{Ric}_0 = L_\xi g_0 + 2\lambda g_0, \quad (2.3)$$

где  $\text{Ric}_0$  – тензор Риччи метрики  $g_0$  и  $L_\xi g_0 = \delta^* \omega$  – производная Ли метрического тензора  $g_0$  по отношению к  $\xi = \omega^\sharp$ . При  $\lambda = 0$ ,  $\lambda < 0$  и  $\lambda > 0$  солитон Риччи называется *устойчивым, стягивающимся и растягивающимся* соответственно. Солитон Риччи  $(g_0, \xi, \lambda)$  называется *градиентным* (см. [11, с. 22; 12, с. 154]), если 1-форма  $\omega$  является градиентом некоторой функции  $f \in C^\infty M$ . Функция  $f$  называется *потенциалом солитона Риччи*. В случае, когда  $\delta^* \omega = 0$ , солитон называется *тривиальным*, и в частности, когда  $\omega = 0$ , солитон называется *тривиальным*.

Из уравнения (2.3) вытекает, что  $\delta^* \omega = -2(\text{Ric} + 2\lambda g)$ , и, следовательно,  $\delta \omega = s + n\lambda$ , поэтому  $\square \omega = (\delta \delta^* - \delta^* \delta) \omega = -\delta(2\text{Ric}) - ds = 0$ . Доказана (см. [13])

**Теорема 2.2.** На  $n$ -мерном ( $n \geq 2$ ) многообразии  $M$  векторное поле  $\xi$  солитона Риччи  $(g_0, \xi, \lambda)$  является инфинитезимальным гармоническим преобразованием риманова многообразия  $(M, g_0)$ .

### 3. Инфинитезимальные гармонические преобразования и солитоны Риччи на компактном римановом многообразии

**3.1.** Пусть  $(M, g)$  – компактное риманово многообразие и  $\xi = \omega^\sharp$  – инфинитезимальное гармоническое преобразование. Из равенства  $\square \omega = \Delta \xi - 2\text{Ric}^* \xi = 0$  следует, что

$$2\langle \text{Ric}^* \xi, \xi \rangle = \langle \Delta \xi, \xi \rangle = \langle d\omega, d\omega \rangle + \langle \delta \omega, \delta \omega \rangle. \quad (3.1)$$

Из (3.1) с очевидностью выводится справедливость следующего утверждения.

**Теорема 3.1.** Компактное риманово многообразие  $(M, g)$  не допускает отличных от нуля инфинитезимальных гармонических преобразований, если тензор Риччи этого многообразия неположительно определен и хотя бы в одной точке многообразия определен строго отрицательно.

Для солитона Риччи  $(g_0, \xi, \lambda)$  из теоремы 3.1 следует, что  $\text{Ric}_0 = -\lambda g_0 < 0$ , откуда вытекает, что  $\lambda > 0$ , и солитон, следовательно, становится растягивающимся тривиальным. При этом заметим, что неравенство  $\text{Ric}_0(\xi, \xi) < 0$  несовместимо с (3.1). Справедливо

**Следствие 3.1.** На компактном многообразии  $M$  не существует солитона Риччи  $(g_0, \xi, \lambda)$ , для которого  $\text{Ric}_0(\xi, \xi) < 0$ . Если же для солитона Риччи  $(g_0, \xi, \lambda)$  тензор Риччи  $\text{Ric}_0 \leq 0$  и хотя бы в одной точке многообразия  $\text{Ric}_0 < 0$ , то такой солитон Риччи является растягивающимся тривиальным.

**Замечание.** Установленный в следствии 3.1 факт согласуется с доказанной ранее теоремой (см. [14]), согласно которой растягивающийся солитон Риччи на компактном многообразии является тривиальным.

Используя разложение пространства инфинитезимальных гармонических преобразований в ортогональную сумму подпространств инфинитезимальных изометрий и градиентных инфинитезимальных гармонических преобразований (см. п. 2.1), мы можем сформулировать (см. также [14])

**Следствие 3.2.** *На компактном многообразии  $M$  каждый солитон Риччи  $(g_0, \xi, \lambda)$  является градиентным.*

Для дальнейших исследований воспользуемся интегральной формулой (1.14) из главы 2 монографии [6] вида

$$\int_M [g(\square\omega, \omega) + n^{-1}(n-2)g(d\delta\omega, \omega) - 2^{-1}\|\delta^*\omega + 2n^{-1}(\delta\omega)g\|^2] dv = 0. \quad (3.2)$$

для произвольной 1-формы  $\omega \in C^\infty T^*M$  на компактном многообразии  $(M, g)$ . Для инфинитезимального гармонического преобразования  $\xi = \omega^\sharp$  формула (3.2) принимает следующий вид:

$$\int_M [2(n-2)g(d\delta\omega, \omega) - n\|\delta^*\omega + 2n^{-1}(\delta\omega)g\|^2] dv = 0 \quad (3.3)$$

Отметим здесь справедливость равенств

$$g(d\delta\omega, \omega) = \xi(\delta\omega) = -\xi(\operatorname{div} \xi) = -L_\xi(\operatorname{div} \xi).$$

На этом основании из (3.3) при условии, что  $L_\xi(\operatorname{div} \xi) \geq 0$ , выводится следующее равенство  $\delta^*\omega + 2n^{-1}(\delta\omega)g = 0$ . При этом на компактном многообразии требование  $g(d\delta\omega, \omega) = -L_\xi(\operatorname{div} \xi) \leq 0$  означает  $\operatorname{div} \xi = 0$ . Действительно, из  $\langle \delta\omega, \delta\omega \rangle = \langle d\delta\omega, \omega \rangle \leq 0$  вытекает, что  $\delta\omega = -\operatorname{div} \xi = 0$ , и тогда  $\delta^*\omega = L_\xi g = 0$ . Последнее уравнение является определяющим для *киллингова векторного поля*, или, по другой терминологии, *инфинитезимальной изометрии* риманова многообразия (см. [5, с. 60–61]). В свою очередь, условие  $\delta\omega = -\operatorname{div} \xi = 0$  непосредственно следует из этого уравнения. Доказана следующая

**Теорема 3.2.** *На компактном римановом многообразии  $(M, g)$  инфинитезимальное гармоническое преобразование  $\xi$ , подчиняющееся условию  $L_\xi(\operatorname{div} \xi) \geq 0$ , является инфинитезимальной изометрией, то есть  $L_\xi g = 0$ .*

Для солитона Риччи  $(g_0, \xi, \lambda)$  имеем  $d\delta\omega = d(s_0 + n\lambda) = ds_0 = L_\xi(s_0)$ . Поэтому справедливо

**Следствие 3.3.** *Если на компактном многообразии  $M$  скалярная кривизна  $s_0$  метрики  $g_0$  солитона Риччи  $(g_0, \xi, \lambda)$  подчиняется условию  $L_\xi(s_0) \geq 0$ , то солитон является эйнштейновым.*

**Замечание.** Для стягивающегося солитона Риччи  $(g_0, \xi, \lambda)$  на компактном многообразии  $M$  в размерности  $n = 3$  многообразие  $(M, g_0)$  изометрично сфере четырехмерного евклидова пространства, а в размерности  $n > 3$  условие эйнштейновости состоит в требовании обращения в нуль тензора Вейля (см. [14]). В [14] была также обозначена проблема получения других условий эйнштейновости для стягивающегося солитона Риччи при условии, что  $n > 3$ . Сформулированное выше утверждение является одним из возможных ответов на поставленный вопрос.

**3.2.** Рассмотрим инфинитезимальное гармоническое преобразование  $\xi$  на двумерном компактном римановом многообразии  $(M, g)$ . Из формулы (3.2) в этом случае следует, что  $\delta^* \omega + 2n^{-1}(\delta\omega)g = 0$ . Это равенство является определяющим для конформно киллингова векторного поля, или, по другой терминологии, инфинитезимального конформного преобразования  $\xi = \omega^\sharp$  риманова многообразия  $(M, g)$ . Обратно, если  $\xi = \omega^\sharp$  является инфинитезимальным конформным преобразованием, то согласно формуле (6.3) из главы 2 монографии [6], имеющей вид  $\square\omega + n^{-1}(n-2)d\delta\omega = 0$ , заключаем, что при  $n = 2$  поле  $\xi$  является инфинитезимальным гармоническим преобразованием. Справедлива

**Теорема 3.3.** *На двумерном компактном римановом многообразии  $(M, g)$  каждое инфинитезимальное гармоническое преобразование является инфинитезимальным конформным преобразованием. Верно и обратное.*

**Замечание.** Геометрия двумерного компактного многообразия  $M$  с градиентным солитоном Риччи  $(g_0, \xi, \lambda)$  известна (см. [14]). Так, например, установлено, что двумерное компактное многообразие  $M$  с градиентным стягивающимся солитоном Риччи  $(g_0, \xi, \lambda)$  изометрично сфере трехмерного евклидова пространства или двумерному вещественному проективному пространству.

#### 4. Инфинитезимальные гармонические преобразования и солитоны Риччи на некомпактном римановом многообразии

**4.1.** Пусть  $\xi$  – инфинитезимальное гармоническое преобразование в римановом многообразии  $(M, g)$  с отрицательным тензором Риччи. Полагаем  $f = g(\xi, \xi)/2$  функцией длины инфинитезимального гармонического преобразования  $\xi$ , тогда на основании (2.2) получаем

$$\Delta f = \|\nabla\xi\|^2 - \text{Ric}(\xi, \xi). \quad (4.1)$$

Если функция  $f = g(\xi, \xi)/2$  имеет локальный максимум в точке  $x \in M$ , то  $(\Delta f)_x \leq 0$ . С другой стороны, согласно предположению,  $\Delta f > 0$ , если  $\xi \neq 0$ . Поэтому векторное поле  $\xi$  должно быть нулевым в точке  $x$ . Так как  $f = g(\xi, \xi)/2$  имеет локальный максимум в точке  $x \in M$  (см. [5, с. 80]), то  $\xi$  обращается в нуль в некоторой окрестности точки  $x \in M$ . Нами доказан локальный вариант теоремы 3.1, а именно справедлива

**Теорема 4.1.** *Пусть  $(M, g)$  – риманово многообразие с отрицательным тензором Риччи. Если существует точка  $x \in M$ , в которой функция длины инфинитезимального гармонического преобразования  $\xi$  имеет локальный максимум, то  $\xi$  обращается в нуль в этой точке  $x \in M$  и некоторой ее окрестности  $U_x \subset M$ .*

Уравнения солитона Риччи  $(g_0, \xi, \lambda)$  в окрестности  $U_x \subset M$  принимают вид  $\text{Ric}_0 = -\lambda g_0$ , поэтому солитон является растягивающимся тривидальным. Справедливо утверждение, являющееся аналогом следствия 3.1

**Следствие 4.1.** *Пусть  $(g_0, \xi, \lambda)$  – солитон Риччи с отрицательно определенным тензором Риччи  $\text{Ric}_0$ . Если существует точка  $x \in M$ , в которой функция длины векторного поля  $\xi$  имеет локальный максимум, то в некоторой окрестности  $U_x \subset M$  этой точки  $\text{Ric}_0 = -\lambda g_0$ , и солитон становится растягивающимся тривидальным.*

Для функции  $f = g(\xi, \xi)/2$  длины векторного поля  $\xi$  солитона Риччи  $(g_0, \xi, \lambda)$  на основании уравнений (2.3) находим:  $\xi(f) = -\text{Ric}_0(\xi, \xi) - 2\lambda f$ . Если предположить, что функция  $f$  имеет критическую точку  $x \in M^n$ , в которой  $\xi_x \neq 0$ , то  $(df)_x = 0$ , и, следовательно,  $\text{Ric}_0(\xi_x, \xi_x) = -2\lambda f$ . В результате будет справедлива

**Теорема 4.2.** *Если существует критическая точка  $x \in M$  для функции  $f = g(\xi, \xi)/2$  длины векторного поля  $\xi$  солитона Риччи  $(g_0, \xi, \lambda)$ , в которой  $\xi_x \neq 0$ , то солитон будет стягивающимся (соответственно растягивающимся или стабильным), если в этой точке  $\text{Ric}_0(\xi_x, \xi_x) > 0$  (соответственно  $\text{Ric}_0(\xi_x, \xi_x) < 0$  или  $\text{Ric}_0(\xi_x, \xi_x) = 0$ ).*

**4.2.** Из теоремы 3.2 следует, что на компактном многообразии  $M$  солитон Риччи  $(g_0, \xi, \lambda)$  с постоянной скалярной кривизной  $s_0$  метрики  $g_0$  является эйнштейновым. Рассмотрим такой же солитон в некомпактном случае.

Пусть скалярная кривизна  $s_0$  метрики  $g_0$  солитона Риччи  $(g_0, \xi, \lambda)$  является постоянной величиной. На основании равенства  $\delta\Delta = \Delta\delta$  (см. [2, с. 167]) из уравнений (2.2) выводим:  $\Delta_H\delta\omega = \delta(2\text{Ric}_0^*\xi)$ ; правая часть обратится в нуль, поскольку  $\Delta\delta\omega = -\Delta\text{div}\xi = \Delta(s_0 + n\lambda) = 0$ , и одновременно для правой части имеем:

$$\begin{aligned} \delta(2\text{Ric}_0^*\xi) &= -(2\nabla^k R_{kj})\xi^j - 2R_{kj}\nabla^k\xi^j = \\ &= -\xi^j\nabla_j s_0 - R_{kj}(\nabla^k\xi^j + \nabla^j\xi^k) = -R_{kj}(\nabla^k\xi^j + \nabla^j\xi^k). \end{aligned}$$

В итоге приходим к равенству

$$R_{kj}(\nabla^k\xi^j + \nabla^j\xi^k) = 0. \quad (4.2)$$

Из уравнений солитона Риччи (2.3) находим:  $L_\xi g_{ij} = -2(R_{ij} + \lambda g_{ij})$ , с учетом этого из (4.2) выводим, что

$$-2R_{kj}(R^{kj} + \lambda g^{kj}) = -2(\|\text{Ric}_0\|^2 + \lambda s_0) = 0,$$

откуда

$$\lambda s_0 = -\|\text{Ric}_0\|^2 \leq 0. \quad (4.3)$$

Из (4.3) следует, во-первых, что ненулевые постоянные  $\lambda$  и  $s_0$  имеют разные знаки и, во-вторых, что при  $\lambda = 0$  или  $s_0 = 0$  метрика  $g_0$  с необходимостью становится Риччи-плоской. Причем в первом случае векторное поле  $\xi$  – инфинитезимальная изометрия, что очевидно, а во втором – *инфайнитезимальная гомотетия*, поскольку  $L_\xi g_0 = -2\lambda g_0$ .

Согласно тех же уравнений (2.3) имеем:  $R_{ij} = -2^{-1}L_\xi g_{ij} - \lambda g_{ij}$ , и тогда из (4.2) следует, что  $\|L_\xi g_{ij}\|^2 - 4\lambda(s_0 + n\lambda) = 0$ , откуда

$$\lambda(s_0 + n\lambda) = \frac{1}{4}\|L_\xi g_{ij}\|^2 \geq 0. \quad (4.4)$$

Если теперь предположить, что  $s_0 > 0$ , тогда из (4.4) при  $\lambda < 0$  следует, что  $0 < s_0 \leq n|\lambda|$ . Если же  $s_0 < 0$  и  $\lambda > 0$ , то из (4.4) следует, что  $-n\lambda \leq s_0 < 0$ . Доказана

**Теорема 4.3.** *Пусть  $(g_0, \xi, \lambda)$  – солитон Риччи на многообразии  $M^n$  ( $n \geq 2$ ) с метрикой  $g_0$  постоянной скалярной кривизны  $s_0$ . Если  $s_0 = 0$ , то метрика  $g_0$  будет Риччи-плоской, а векторное поле  $X_0$  – инфинитезимальной гомотетией. Если же  $s_0 \neq 0$ , то ненулевые  $\lambda$  и  $s_0$  имеют разные знаки и при этом для растягивающегося солитона имеем  $-n\lambda \leq s_0 < 0$ , а для стягивающегося солитона  $0 < s_0 \leq n|\lambda|$ .*

## 5. Солитоны Риччи на полном некомпактном римановом многообразии

**5.1.** С.Т. Яу в статье [15] получил обобщенную версию теоремы Стокса для полного некомпактного  $n$ -мерного риманова многообразия  $(M, g)$ . В качестве приложения им было доказано, что субгармоническая функция  $f$  такая, что  $\Delta f \geq 0$ , чей дифференциал  $df$  имеет интегрируемую норму на  $(M, g)$ , то есть  $\int_M \|df\| < \infty$ , является гармонической. Из этого утверждения, в частности, для градиентного солитона Риччи  $(g_0, \xi, \lambda)$  с субгармоническим потенциалом  $f$  следует, что  $\Delta f = s_0 + n\lambda = 0$ . Тогда из (4.4) имеем, что  $L_\xi g_0 = 0$ , и, следовательно,  $\text{Ric} = -\lambda g_0$ . Таким образом, справедлива

**Теорема 5.1.** *Пусть на  $n$ -мерном ( $n \geq 2$ ) связном многообразии  $M$  задан солитон Риччи  $(g_0, \xi, \lambda)$ , который удовлетворяет следующим условиям:*

- 1) риманово многообразие  $(M, g_0)$  – полное некомпактное;
- 2) векторное поле  $\xi$  является градиентным с субгармоническим потенциалом  $f$ , чей дифференциал  $df$  имеет интегрируемую на  $(M, g_0)$  норму.

*Тогда солитон Риччи  $(g_0, \xi, \lambda)$  является эйнштейновым.*

В статье [16] было доказано утверждение, вытекающее из основного результата С.Т. Яу. А именно, если на полном некомпактном  $n$ -мерном римановом многообразии  $(M, g)$  задано векторное поле  $\xi$  такое, что на  $(M, g)$  норма  $\|\xi\|$  является интегрируемой функцией и  $\text{div } \xi$  не меняет свой знак, то  $\text{div } \xi = 0$  на  $(M, g)$ . Поскольку для солитона Риччи  $\text{div } \xi = -(s_0 + n\lambda)$ , то из (4.4) выводим, что  $L_\xi g_0 = 0$ , и, следовательно,  $\text{Ric} = -\lambda g_0$ . Итак, имеет место

**Теорема 5.2.** *Пусть на  $n$ -мерном ( $n \geq 2$ ) связном многообразии  $M$  задан солитон Риччи  $(g_0, \xi, \lambda)$ , который удовлетворяет следующим условиям:*

- 1) риманово многообразие  $(M, g_0)$  – полное некомпактное;
- 2) норма  $\|\xi\|$  векторного поля  $\xi$  является интегрируемой на  $(M, g_0)$  функцией;
- 3)  $s_0 + n\lambda$  на  $(M, g_0)$  не меняет свой знак.

*Тогда солитон Риччи  $(g_0, \xi, \lambda)$  является эйнштейновым.*

**5.2.** Рассмотрим на двумерном связном многообразии  $M$  градиентный солитон Риччи  $(g_0, \xi, \lambda)$ , где  $\xi = \omega^\sharp$  и  $\omega = df$  для  $f \in C^\infty M$ . Тогда  $\text{Ric}_0 = 2^{-1}s_0 g_0$ , причем в общем случае  $s_0 \neq \text{const}$ . Для градиентного солитона  $(g_0, \xi, \lambda)$  уравнения (2.3) записываются в следующем виде:  $\nabla^0 \nabla^0 f = -(2^{-1}s_0 + \lambda)g_0$ , откуда следует, что  $\Delta f = 2(2^{-1}s_0 + \lambda)$ , поэтому уравнения градиентного солитона Риччи перепишутся следующим образом:  $\nabla^0 \nabla^0 f = -2^{-1}\Delta f g_0$ .

Известно (см. теорему 6.3 главы 1 монографии [6]), что полное риманово многообразие  $(M, g)$  размерности  $n \geq 2$ , допускающее нетривиальное решение уравнения  $\nabla \nabla f = -n^{-1}(\Delta f)g$ , конформно сфере  $(n+1)$ -мерного евклидова пространства. Следовательно, мы можем сформулировать следующий результат.

**Теорема 5.3.** *Если на двумерном связном многообразии  $M$  существует градиентный солитон Риччи  $(g_0, \xi, \lambda)$  с полной метрикой  $g_0$  и скалярной кривизной  $s_0 \neq \text{const}$ , то риманово многообразие  $(M, g_0)$  конформно сфере 3-мерного евклидова пространства.*

**Замечание.** Известно (см. [14]), что каждое двумерное компактное многообразие со стягивающимся солитоном Риччи, который, как известно, в этом случае является градиентным, изометрично либо двумерной сфере, либо вещественному двумерному проективному пространству.

### Summary

*S.E. Stepanov, I.G. Shandra, V.N. Shelepoval.* Infinitesimal Harmonic Transformations and Ricci Solitons.

A Ricci soliton on a smooth manifold  $M$  is a triple  $(g_0, \xi, \lambda)$ , where  $g_0$  is a complete Riemannian metric,  $\xi$  a vector field, and  $\lambda$  a constant such that the Ricci tensor  $\text{Ric}_0$  of  $g_0$  satisfies the equation  $-2\text{Ric}_0 = L_\xi g_0 + 2\lambda g_0$ . In the paper, we study the geometry of Ricci solitons in dependence of the properties of the vector field  $\xi$ . In particular, we prove that this vector field is a harmonic transformation.

**Key words:** Riemannian manifold, infinitesimal harmonic transformation, Ricci soliton.

### Литература

1. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. – М.: Мир, 1990. – 703 с.
2. *Де Рам Ж.* Дифференцируемые многообразия. – М.: Иностр. лит., 1956. – 250 с.
3. *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи–Зингера об индексе. – М: Мир, 1970. – 359 с.
4. *Смольников М.В., Степанов С.Е., Шандра И.Г.* Инфинитезимальные гармонические преобразования // Изв. вузов. Матем. – 2004. – № 5. – С. 69–75.
5. *Кобаяси III.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. – М.: Наука, 1986. – 224 с.
6. *Yano K.* Integral formulas in Riemannian geometry. – N. Y.: Marcel Dekker, 1970. – 156 p.
7. *Кобаяси III., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
8. *Яно К., Бохнер С.* Кривизна и числа Бетти. – М.: Иностр. лит., 1957. – 152 с.
9. *Степанов С.Е., Шандра И.Г.* Гармонические диффеоморфизмы многообразий // Алгебра и анализ. – 2004. – Т. 16, № 2. – С. 154–171.
10. *Stepanov S.E., Shandra I.G.* Geometry of infinitesimal harmonic transformations // Ann. Global Anal. Geom. – 2003. – V. 24. – P. 291–299.
11. *Chow B., Knopf D.* The Ricci flow: An introduction / Mathematical surveys and monographs. V. 110. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2004. – 325 p.
12. *Chow B., Lu P., Ni L.* Hamilton's Ricci flow. Graduate studies in mathematics. V. 77. – Providence, RI: Amer. Math. Soc. – Science Press, 2006. – 608 p.
13. *Степанов С.Е., Шелепова В.Н.* О солитонах Риччи с условиями на скалярную кривизну и кривизну Риччи // Тез. докл. междунар. конф. «Геометрия в Одессе – 2008», 19–24 мая 2008 г. – Одесса: Фонд «Наука», 2008. – С. 127–128.
14. *Eminent M., La Nave G., Mantegazza C.* Ricci solitons – the equation point of view // Manuscr. Math. – 2008. – V. 127, No 3. – P. 345–367.
15. *Yau S.T.* Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifold and their applications to geometry // Indiana Univ. Math. J. – 1976. – V. 25. – P. 659–670.
16. *Caminha A., Sousa P., Camargo F.* Complete foliations of space forms by hypersurfaces. – ArXiv:0908.0786v1 [math.DG]. – 2009. – 6 Aug. – 11 p.

Поступила в редакцию  
25.08.09

---

**Степанов Сергей Евгеньевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Математика» Финансовой академии при Правительстве Российской Федерации, г. Москва.

E-mail: *stepanov@vtsnet.ru*

**Шандра Игорь Георгиевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика» Финансовой академии при Правительстве Российской Федерации, г. Москва.

E-mail: *ma-tematika@yandex.ru*

**Шелепова Вера Николаевна** – аспирант кафедры «Геометрия и методика преподавания математики» Владимирского государственного гуманитарного университета.

E-mail: *verrochka@list.ru*