

Е.В. ЖУРАВЛЕВ, А.С. КУЗЬМИНА, Ю.Н. МАЛЬЦЕВ

ОПИСАНИЕ МНОГООБРАЗИЙ КОЛЕЦ, В КОТОРЫХ КОНЕЧНЫЕ КОЛЬЦА ОДНОЗНАЧНО ЗАДАЮТСЯ СВОИМИ ГРАФАМИ ДЕЛИТЕЛЕЙ НУЛЯ

Аннотация. Графом делителей нуля ассоциативного кольца R называется граф, вершинами которого являются все ненулевые элементы этого кольца, причем две различные вершины x и y соединяются ребром тогда и только тогда, когда $xy = 0$ или $yx = 0$.

В данной статье полностью описаны многообразия ассоциативных колец, в которых все конечные кольца однозначно задаются своими графами делителей нуля.

Ключевые слова: граф делителей нуля, конечное кольцо, многообразия ассоциативных колец.

УДК: 512.552

1. В данной работе рассматриваются ассоциативные кольца (не обязательно коммутативные и не обязательно имеющие единицу).

Определение. Графом делителей нуля кольца R называется граф $\Gamma(R)$, вершинами которого являются все ненулевые делители нуля кольца (односторонние и двусторонние), причем две различные вершины x , y соединяются ребром тогда и только тогда, когда $xy = 0$ или $yx = 0$.

Понятие графа делителей нуля было введено в работе [1]. И. Бек ввел это понятие для коммутативного кольца и вершинами графа делителей нуля считал все элементы кольца. В статье [2] определение было изменено: в качестве вершин графа делителей нуля коммутативного кольца авторы этой работы рассматривали лишь ненулевые делители нуля. Затем понятие графа делителей нуля было распространено и на некоммутативный случай (например, [3]).

Нетрудно привести примеры неизоморфных колец, графы делителей нуля которых равны. Например, если A — счетномерная алгебра с нулевым умножением над полем \mathbb{Z}_p , а B — счетномерная алгебра с нулевым умножением над полем \mathbb{Z}_q , где p, q — различные простые числа, то $\Gamma(A) \cong \Gamma(B)$, но $A \not\cong B$. Другими словами, даже в многообразии $\text{var} \langle xy = 0 \rangle$ существуют примеры бесконечных неизоморфных колец, графы делителей нуля которых имеют одинаковое строение. В связи с этим интерес представляет вопрос: при каких условиях из равенства графов делителей нуля следует изоморфизм колец. Некоторые результаты, дающие ответ на этот вопрос для коммутативных колец, были получены в работе [4]. В данной работе эта проблема исследуется на языке многообразий, а именно, исследуются многообразия ассоциативных колец, в которых каждое конечное кольцо однозначно определяется

Поступила 24.03.2012

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12.01.00329а) и при финансовой поддержке в рамках государственного задания Министерству образования и науки Российской Федерации на 2012–2014 гг. (проект № 1.4311.2011).

своим графом делителей нуля. Другими словами, изучаются свойства многообразия колец \mathfrak{M} , для которого из равенства $\Gamma(R) = \Gamma(S)$ для конечных колец $R, S \in \mathfrak{M}$ имеем $R \cong S$. Ранее такие многообразия исследовались в работах [5], [6]. Однако полного описания получено не было. В настоящей же работе многообразия, в которых все конечные кольца однозначно определяются своими графами делителей нуля, полностью описаны.

2. Введем обозначения и понятия, используемые в данной работе.

Полным n -вершинным графом K_n называется граф (без петель и кратных ребер) с n вершинами, в котором каждая вершина смежна с любой другой вершиной этого графа.

Пусть аддитивная группа кольца R разлагается в прямую сумму своих ненулевых аддитивных подгрупп A_i , где $i = 1, \dots, n$ и $n \geq 2$, т.е. $R = A_1 \dot{+} \dots \dot{+} A_n$. Если все подгруппы A_i являются двусторонними идеалами кольца R , то кольцо R называется *разложимым* (в обозначении $R = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$).

Порядок конечного кольца R обозначим через $|R|$. Для любого элемента $a \in R$, где R — произвольное кольцо, $\text{ann}(a) = \{x \in R; xa = ax = 0\}$. Для любых элементов x, y кольца R положим $[x, y] = xy - yx$ и $x \circ y = xy + yx$. Через \mathbb{Z}_n обозначим кольцо классов вычетов по модулю n , через \mathbb{Z}_n^* — множество обратимых элементов кольца \mathbb{Z}_n . Для простого числа p полагаем $N_{0,p} = \langle a \rangle$, $pa = 0$, $a^2 = 0$.

Пусть $\mathbb{Z}\langle X \rangle = \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, \dots \rangle$ — свободное ассоциативное кольцо от счетного числа переменных $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ и $f(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}\langle X \rangle$. Многочлен $f(x_1, \dots, x_d)$ *существенно зависит* от x_1, x_2, \dots, x_d , если $f(0, x_2, \dots, x_d) = \dots = f(x_1, \dots, x_{d-1}, 0) = 0$. Минимальная из степеней одночленов, входящих в запись $f(x_1, \dots, x_d)$ с ненулевым коэффициентом, называется *нижней степенью многочлена* $f(x_1, \dots, x_d)$.

Пусть \mathfrak{M} — многообразие колец. Через $T(\mathfrak{M})$ обозначим множество всех многочленов $f \in \mathbb{Z}\langle X \rangle$ таких, что $f = 0$ является тождеством на всех кольцах из \mathfrak{M} . Назовем множество $T(\mathfrak{M})$ *идеалом тождеств* многообразия \mathfrak{M} . Если идеал тождеств $T(\mathfrak{M})$ порождается (как вполне характеристический идеал) многочленами f_i , $i \in I$, то будем использовать обозначение $T(\mathfrak{M}) = \{f_i \mid i \in I\}^T$. Через $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N}$ обозначим объединение многообразий \mathfrak{M} и \mathfrak{N} . Нетрудно заметить, что $T(\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N}) = T(\mathfrak{M}) \cap T(\mathfrak{N})$.

Пусть $\mathfrak{M}_{1,p} = \text{var}\langle xyz = 0, x^2 = 0, px = 0 \rangle$ и $\mathfrak{M}_{2,p} = \text{var}\langle xyz = 0, [x, y] = 0, px = 0 \rangle$, где p — произвольное простое число. Заметим, что $\mathfrak{M}_{1,2} \subseteq \mathfrak{M}_{2,2}$, а при нечетном p имеем $\mathfrak{M}_{1,p} \cap \mathfrak{M}_{2,p} = \text{var}\langle xy = 0, px = 0 \rangle$. Далее, пусть F_i — приведенно свободное кольцо с шестью порождающими $\{x_1, \dots, x_6\}$ многообразия $\mathfrak{M}_{i,p}$, $i = 1, 2$. Рассмотрим кольца

$$A_{i,p} = F_i / \langle x_3x_4 - x_1x_2 \rangle, \quad B_{i,p} = F_i / \langle x_5x_6 - x_1x_2 - x_3x_4 \rangle,$$

где $\langle a, b, \dots \rangle$ — идеал кольца F_i , порожденный элементами $\{a, b, \dots\}$, $i = 1, 2$. В дальнейшем покажем, что $\Gamma(A_{1,p}) \cong \Gamma(B_{1,p})$ для любого простого числа p и $\Gamma(A_{2,p}) \cong \Gamma(B_{2,p})$ при нечетном простом p .

По теореме Тарского любое ненулевое многообразие колец содержит одно из минимальных многообразий: $\text{var}\mathbb{Z}_p$ или $\text{var}N_{0,p}$, где p — некоторое простое число [7]. Оказывается, что в минимальных многообразиях $\text{var}\mathbb{Z}_p$ и $\text{var}N_{0,p}$, где p — любое простое число, все конечные кольца однозначно определяются своими графами делителей нуля так же, как и в многообразии $\text{var}N_{0,p_1} \vee \dots \vee \text{var}N_{0,p_s}$ [5]. В многообразии $\text{var}N_{0,p_1} \vee \dots \vee \text{var}N_{0,p_s} \vee \text{var}\mathbb{Z}_p$, где p_1, \dots, p_s — попарно различные простые числа, p — любое простое число (возможно, совпадающее с одним из чисел p_i), каждое конечное кольцо однозначно определяется своим графом делителей нуля тогда и только тогда, когда $(p_i, p) \neq (3, 2)$ при $i \leq s$ [5]. Наша цель — показать, что любое многообразие, в котором все конечные кольца однозначно определяются своими графами делителей нуля, является подмногообразием многообразия вида $\text{var}N_{0,p_1} \vee \dots \vee \text{var}N_{0,p_s} \vee \text{var}\mathbb{Z}_p$, где p_1, \dots, p_s — попарно различные простые числа, p — любое простое число и $(p_i, p) \neq (3, 2)$ при всех $i \leq s$.

3. Основным результатом данной работы является

Теорема. Для любого многообразия \mathfrak{M} ассоциативных колец следующие условия эквивалентны:

- (1) произвольное конечное кольцо из \mathfrak{M} однозначно определяется своим графом делителей нуля,
- (2) $\mathfrak{M} \subseteq \text{var} \langle N_{0,p_1} \oplus \cdots \oplus N_{0,p_s} \oplus \mathbb{Z}_p \rangle$, где $s \in \mathbb{N}$ и $(p_i, p) \neq (3, 2)$ для любого числа $i \in \{1, \dots, s\}$.

Для доказательства этой теоремы понадобятся вспомогательные утверждения.

Покажем сначала, что $\Gamma(A_{1,p}) \cong \Gamma(B_{1,p})$, в то время как $A_{1,p} \not\cong B_{1,p}$ для любого простого числа p .

Замечание 1. Порядок алгебр $A_{1,p}$, $B_{1,p}$ равен p^{20} , а порядок алгебр $A_{2,p}$, $B_{2,p}$ равен p^{26} . Возникает вопрос о существовании в указанных многообразиях примеров неизоморфных конечных колец небольшого порядка с одинаковыми графами делителей нуля. Однако было доказано, что в многообразии $\mathfrak{M}_{1,2}$ все конечные кольца с порядками не больше 64 однозначно определяются своими графами делителей нуля (фактически были полностью описаны все конечные кольца в многообразии $\mathfrak{M}_{1,2}$, порядок которых не превышает 64).

Лемма 1. Множество $C_1 = \{\bar{x}_i \bar{x}_j; (i, j) \neq (3, 4), 1 \leq i < j \leq 6\}$ является базисом алгебры $A_{1,p}^2$, где p — простое число.

Доказательство. Множество C_1 является системой образующих векторного пространства $A_{1,p}^2$. Докажем, что это множество линейно независимо. Если множество C_1 линейно зависимо, то существуют элементы $\alpha, \delta_{ij} \in \mathbb{Z}_p$, не все равные нулю, такие, что в алгебре F_1 справедливо равенство

$$\sum_{\substack{i < j \\ (i,j) \neq (3,4)}} \delta_{ij} x_i x_j = \alpha (x_3 x_4 - x_1 x_2). \quad (1)$$

В этом равенстве положим $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$. Тогда $\delta_{12} = -\alpha$, другими словами, $\sum_{\substack{i < j \\ (i,j) \neq (3,4) \\ (i,j) \neq (1,2)}} \delta_{ij} x_i x_j = \alpha x_3 x_4$. Положим $x_1 = x_2 = x_5 = x_6 = 0$. Получим $\alpha = 0$ и $\delta_{ij} = 0$ для всех i, j таких, что $i < j$ и $(i, j) \neq (3, 4), (1, 2)$. Противоречие. \square

Лемма 2. Пусть $a = \sum_{i=1}^6 \alpha_i \bar{x}_i + u$, $b = \sum_{i=1}^6 \beta_i \bar{x}_i + v$ — произвольные элементы из кольца $A_{1,p}$, причем $u, v \in A_{1,p}^2$. Если $a, b \notin A_{1,p}^2$, то $ab = \bar{0}$ тогда и только тогда, когда $(\beta_1, \dots, \beta_6) = \lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_6)$ для некоторого ненулевого элемента $\lambda \in \mathbb{Z}_p$.

Доказательство. Пусть $(\beta_1, \dots, \beta_6) = \lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_6)$, где $0 \neq \lambda \in \mathbb{Z}_p$. Тогда $a = c + u$, $b = \lambda c + v$ и $ab = \lambda c^2 = \bar{0}$, так как $x^2 = 0$ — тождество в алгебре $A_{1,p}$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $ab = \bar{0}$. Тогда

$$ab = \left(\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix} \right) \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \sum_{\substack{i < j \\ (i,j) \neq (1,2) \\ (i,j) \neq (3,4)}} \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_j \end{vmatrix} \bar{x}_i \bar{x}_j = \bar{0}.$$

По лемме 1 множество $C_1 = \{\bar{x}_i \bar{x}_j; (i, j) \neq (3, 4), i < j\}$ — базис векторного пространства $A_{1,p}^2$. Поэтому получаем

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_j \end{vmatrix} = 0,$$

где $i < j$, $(i, j) \neq (1, 2)$ и $(i, j) \neq (3, 4)$.

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $\alpha_1 \neq 0$.

Поскольку

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_4 \end{vmatrix} = 0,$$

вторые строки этих определителей линейно выражаются через первые, т. е. $\beta_1 = \lambda\alpha_1$, $\beta_3 = \lambda\alpha_3$ и $\beta_1 = \mu\alpha_1$, $\beta_4 = \mu\alpha_4$ для некоторых элементов $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}_p$. Поскольку $\alpha_1 \neq 0$ и $(\lambda - \mu)\alpha_1 = \beta_1 - \beta_1 = 0$, то $\lambda = \mu$ и $\beta_4 = \lambda\alpha_4$. Аналогично доказывается, что $\beta_5 = \lambda\alpha_5$ и $\beta_6 = \lambda\alpha_6$.

Далее, из равенств $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix} = 0$, $\beta_3 = \lambda\alpha_3$ и $\beta_4 = \lambda\alpha_4$ следует $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$ и, значит, $\beta_2 = \lambda\alpha_2$. Таким образом, $(\beta_1, \dots, \beta_6) = \lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_6)$.

Случай 2. Пусть $\alpha_1 = 0$.

Если хотя бы один из элементов $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ не равен нулю, то рассуждаем так же, как в случае 1. Поэтому можем полагать $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ и, например, $\alpha_5 \neq 0$. (Заметим, что поскольку $a \notin A_{1,p}^2$, то один из элементов α_5 или α_6 отличен от нуля.) Аналогично можем считать $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$. Следовательно,

$$ab = \begin{vmatrix} \alpha_5 & \alpha_6 \\ \beta_5 & \beta_6 \end{vmatrix} \bar{x}_5 \bar{x}_6 = \bar{0} \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} \alpha_5 & \alpha_6 \\ \beta_5 & \beta_6 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. $\beta_5 = \lambda\alpha_5$, $\beta_6 = \lambda\alpha_6$ для некоторого ненулевого элемента $\lambda \in \mathbb{Z}_p$. Таким образом, $(\beta_1, \dots, \beta_6) = \lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_6)$. \square

Запишем аналоги лемм 1, 2 для кольца $B_{1,p}$.

Лемма 3. Множество $D_1 = \{\bar{x}_i \bar{x}_j; (i, j) \neq (5, 6), 1 \leq i < j \leq 6\}$ является базисом алгебры $B_{1,p}^2$ для любого простого числа p .

Лемма 4. Пусть $a = \sum_{i=1}^6 \alpha_i \bar{x}_i + u$, $b = \sum_{i=1}^6 \beta_i \bar{x}_i + v$ — произвольные элементы из кольца $B_{1,p}$, где $u, v \in B_{1,p}^2$. Если $a, b \notin B_{1,p}^2$, то $ab = \bar{0}$ тогда и только тогда, когда $(\beta_1, \dots, \beta_6) = \lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_6)$ для некоторого ненулевого элемента $\lambda \in \mathbb{Z}_p$.

Доказательство. Пусть $(\beta_1, \dots, \beta_6) = \lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_6)$, где $0 \neq \lambda \in \mathbb{Z}_p$. Тогда $a = c + u$, $b = \lambda c + v$ и $ab = \lambda c^2 = \bar{0}$, так как $x^2 = 0$ для любого элемента $x \in B_{1,p}$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $ab = \bar{0}$. Тогда

$$ab = \left(\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_5 & \alpha_6 \\ \beta_5 & \beta_6 \end{vmatrix} \right) \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \left(\begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_5 & \alpha_6 \\ \beta_5 & \beta_6 \end{vmatrix} \right) \bar{x}_3 \bar{x}_4 + \sum_{\substack{i < j \\ (i,j) \neq (1,2) \\ (i,j) \neq (3,4) \\ (i,j) \neq (5,6)}} \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_j \end{vmatrix} \bar{x}_i \bar{x}_j = 0.$$

По лемме 3 множество $D_1 = \{\bar{x}_i \bar{x}_j; (i, j) \neq (5, 6), i < j\}$ — базис векторного пространства $B_{1,p}^2$. Поэтому

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_5 & \alpha_6 \\ \beta_5 & \beta_6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_5 & \alpha_6 \\ \beta_5 & \beta_6 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_j \end{vmatrix} = 0,$$

если $i < j$, $(i, j) \neq (1, 2)$, $(i, j) \neq (3, 4)$ и $(i, j) \neq (5, 6)$.

Так же, как при доказательстве леммы 2, рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $\alpha_1 \neq 0$.

Аналогично доказательству леммы 2 получаем $\beta_i = \lambda\alpha_i$ для любого $i \neq 2$. Поэтому из равенства $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_5 & \alpha_6 \\ \beta_5 & \beta_6 \end{vmatrix} = 0$ вытекает $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$. Отсюда $\beta_2 = \lambda\alpha_2$. Таким образом, при $\alpha_1 \neq 0$ имеем $(\beta_1, \dots, \beta_6) = \lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_6)$.

Случай 2. Пусть $\alpha_1 = 0$.

Если хотя бы один из элементов $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ не равен нулю, то рассуждаем так же, как в случае 1. Поэтому можем считать, что $\alpha_i = \beta_j = 0$ при $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Значит,

$$ab = (\alpha_5\bar{x}_5 + \alpha_6\bar{x}_6)(\beta_5\bar{x}_5 + \beta_6\bar{x}_6) = \begin{vmatrix} \alpha_5 & \alpha_6 \\ \beta_5 & \beta_6 \end{vmatrix} (\bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_3\bar{x}_4) = \bar{0}.$$

Поскольку $a \notin B_{1,p}^2$, то, например, $\alpha_5 \neq 0$. Таким образом, $\beta_5 = \lambda\alpha_5, \beta_6 = \lambda\alpha_6$ для некоторого ненулевого элемента $\lambda \in \mathbb{Z}_p$, т. е. $(\beta_1, \dots, \beta_6) = \lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_6)$. \square

Замечание 2. В силу лемм 1, 2 граф $\Gamma(A_{1,p})$ имеет следующее строение. Во-первых, ненулевые элементы из $A_{1,p}^2$ образуют полный подграф $K_{p^{14}-1}$. Далее, для каждого элемента $b \in A_{1,p} \setminus A_{1,p}^2$ вершины множества $M_b = \{\lambda b + r; \lambda \in \mathbb{Z}_p^*, r \in A_{1,p}^2\}$ также образуют полный подграф Γ_b , причем для любого элемента $b \in A_{1,p} \setminus A_{1,p}^2$ каждая вершина подграфа Γ_b смежна только с вершинами этого подграфа и ненулевыми элементами из множества $A_{1,p}^2$. Из лемм 3, 4 видно, что аналогичное строение имеет граф делителей нуля кольца $B_{1,p}$.

Таким образом, справедливо

Следствие 1. $\Gamma(A_{1,p}) \cong \Gamma(B_{1,p})$ для любого простого числа p .

Предложение 1. Алгебра $A_{1,p}$ не изоморфна алгебре $B_{1,p}$ для любого простого числа p .

Доказательство. Предположим противное. Существует изоморфизм φ алгебры $B_{1,p}$ на алгебру $A_{1,p}$. Введем обозначения

$$\bar{x}_i = x_i + \langle x_1x_2 + x_3x_4 - x_5x_6 \rangle \in B_{1,p} \text{ и } \bar{x}'_i = x_i + \langle x_1x_2 - x_3x_4 \rangle \in A_{1,p}, \quad i = \overline{1, 6}.$$

Заметим, что $\varphi(B_{1,p}^2) \subseteq A_{1,p}^2$, а значит, отображение $\bar{\varphi} : B_{1,p}/B_{1,p}^2 \rightarrow A_{1,p}/A_{1,p}^2$, определенное по правилу $\bar{\varphi}(a + B_{1,p}^2) = \varphi(a) + A_{1,p}^2$, $a \in B_{1,p}$, также является изоморфизмом. Отсюда следует существование невырожденной матрицы $P = (p_{ij})_{6 \times 6}$, $p_{ij} \in \mathbb{Z}_p$, такой, что

$$\varphi(\bar{x}_k) = p_{1k}\bar{x}'_1 + p_{2k}\bar{x}'_2 + p_{3k}\bar{x}'_3 + p_{4k}\bar{x}'_4 + p_{5k}\bar{x}'_5 + p_{6k}\bar{x}'_6 + b_k, \quad k = \overline{1, 6},$$

где b_k — некоторые элементы из $A_{1,p}^2$.

Учитывая свойства изоморфизма, получаем

$$\begin{aligned} & \varphi(\bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_3\bar{x}_4 - \bar{x}_5\bar{x}_6) = \\ & = (p_{11}\bar{x}'_1 + p_{21}\bar{x}'_2 + p_{31}\bar{x}'_3 + p_{41}\bar{x}'_4 + p_{51}\bar{x}'_5 + p_{61}\bar{x}'_6)(p_{12}\bar{x}'_1 + p_{22}\bar{x}'_2 + p_{32}\bar{x}'_3 + p_{42}\bar{x}'_4 + p_{52}\bar{x}'_5 + p_{62}\bar{x}'_6) + \\ & + (p_{13}\bar{x}'_1 + p_{23}\bar{x}'_2 + p_{33}\bar{x}'_3 + p_{43}\bar{x}'_4 + p_{53}\bar{x}'_5 + p_{63}\bar{x}'_6)(p_{14}\bar{x}'_1 + p_{24}\bar{x}'_2 + p_{34}\bar{x}'_3 + p_{44}\bar{x}'_4 + p_{54}\bar{x}'_5 + p_{64}\bar{x}'_6) - \\ & - (p_{15}\bar{x}'_1 + p_{25}\bar{x}'_2 + p_{35}\bar{x}'_3 + p_{45}\bar{x}'_4 + p_{55}\bar{x}'_5 + p_{65}\bar{x}'_6)(p_{16}\bar{x}'_1 + p_{26}\bar{x}'_2 + p_{36}\bar{x}'_3 + p_{46}\bar{x}'_4 + p_{56}\bar{x}'_5 + p_{66}\bar{x}'_6) = \\ & = (p_{11}p_{62} - p_{12}p_{61} + p_{13}p_{64} - p_{14}p_{63} - p_{15}p_{66} + p_{16}p_{65})\bar{x}'_1\bar{x}'_6 + \\ & + (p_{21}p_{62} - p_{22}p_{61} + p_{23}p_{64} - p_{24}p_{63} - p_{25}p_{66} + p_{26}p_{65})\bar{x}'_2\bar{x}'_6 + \\ & + (p_{31}p_{62} - p_{32}p_{61} + p_{33}p_{64} - p_{34}p_{63} - p_{35}p_{66} + p_{36}p_{65})\bar{x}'_3\bar{x}'_6 + \\ & + (p_{41}p_{62} - p_{42}p_{61} + p_{43}p_{64} - p_{44}p_{63} - p_{45}p_{66} + p_{46}p_{65})\bar{x}'_4\bar{x}'_6 + \\ & + (p_{51}p_{62} - p_{52}p_{61} + p_{53}p_{64} - p_{54}p_{63} - p_{55}p_{66} + p_{56}p_{65})\bar{x}'_5\bar{x}'_6 + f = 0, \end{aligned}$$

где $f = f(\bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \bar{x}'_3, \bar{x}'_4, \bar{x}'_5)$ – некоторый многочлен от переменных \bar{x}'_k , $k = \overline{1, 5}$, не содержащий переменную \bar{x}'_6 . Так как $\bar{x}'_1\bar{x}'_6, \bar{x}'_2\bar{x}'_6, \bar{x}'_3\bar{x}'_6, \bar{x}'_4\bar{x}'_6, \bar{x}'_5\bar{x}'_6$ линейно независимы, то

$$\begin{aligned} p_{11}p_{62} - p_{12}p_{61} + p_{13}p_{64} - p_{14}p_{63} - p_{15}p_{66} + p_{16}p_{65} &= 0, \\ p_{21}p_{62} - p_{22}p_{61} + p_{23}p_{64} - p_{24}p_{63} - p_{25}p_{66} + p_{26}p_{65} &= 0, \\ p_{31}p_{62} - p_{32}p_{61} + p_{33}p_{64} - p_{34}p_{63} - p_{35}p_{66} + p_{36}p_{65} &= 0, \\ p_{41}p_{62} - p_{42}p_{61} + p_{43}p_{64} - p_{44}p_{63} - p_{45}p_{66} + p_{46}p_{65} &= 0, \\ p_{51}p_{62} - p_{52}p_{61} + p_{53}p_{64} - p_{54}p_{63} - p_{55}p_{66} + p_{56}p_{65} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда с очевидным равенством $p_{61}p_{62} - p_{62}p_{61} + p_{63}p_{64} - p_{64}p_{63} - p_{65}p_{66} + p_{66}p_{65} = 0$ получим

$$(p_{62}, -p_{61}, p_{64}, -p_{63}, -p_{66}, p_{65}) \cdot P^T = 0.$$

Матрица P невырожденная и, в частности, не имеет нулевых строк, а значит, полученное равенство невозможно. Противоречие. \square

Из следствия 1 и предложения 1 вытекает

Следствие 2. Если в многообразии колец \mathfrak{M} все конечные кольца однозначно определяются своими графами делителей нуля, то для любого простого числа p многообразие \mathfrak{M} не содержит многообразия $\mathfrak{M}_{1,p}$.

Далее, покажем, что алгебры $A_{2,p}$ и $B_{2,p}$ не изоморфны для любого простого нечетного p , однако $\Gamma(A_{2,p}) \cong \Gamma(B_{2,p})$. Для этого понадобятся некоторые вспомогательные леммы.

Лемма 5. Множество $C_2 = \{\bar{x}_k^2, \bar{x}_i\bar{x}_j; (i, j) \neq (3, 4), 1 \leq i < j \leq 6, 1 \leq k \leq 6\}$ является базисом алгебры $A_{2,p}^2$ ($p > 2$).

Доказательство. Множество C_2 является системой образующих векторного пространства $A_{2,p}^2$. Если оно линейно зависимо, то существуют элементы $\alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_6, \delta_{ij} \in \mathbb{Z}_p$, не все равные нулю, такие, что в алгебре F_2 справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^6 \gamma_i x_i^2 + \sum_{\substack{i < j \\ (i,j) \neq (3,4)}} \delta_{ij} x_i x_j = \alpha(x_3 x_4 - x_1 x_2). \quad (2)$$

Полагая в равенстве (1) $x_1 = \dots = x_{i-1} = x_{i+1} = \dots = x_6$, где $1 \leq i \leq 6$, получим $\gamma_i x_i^2 = 0$, т.е. $\gamma_1 = \dots = \gamma_6 = 0$. Положим в равенстве (1) $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$. Тогда $\delta_{12} = -\alpha$, другими словами, $\sum_{\substack{i < j \\ (i,j) \neq (3,4)}} \delta_{ij} x_i x_j = \alpha x_3 x_4$. Полагая $x_1 = x_2 = x_5 = x_6 = 0$, получим $\alpha = 0$

$$\sum_{\substack{i < j \\ (i,j) \neq (1,2)}} \delta_{ij} x_i x_j$$

и $\delta_{ij} = 0$ для всех i, j таких, что $i < j$ и $(i, j) \neq (3, 4), (1, 2)$. \square

Лемма 6. Если $a = \sum_{i=1}^6 \alpha_i \bar{x}_i + u \in A_{2,p}$, где $p > 2$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_p$ для всех чисел $i \in \{1, \dots, 6\}$, $u \in A_{2,p}^2$, $a \notin A_{2,p}^2$, то $\text{ann}(a) = A_{2,p}^2$.

Доказательство. Пусть $b = \sum_{i=1}^6 \beta_i \bar{x}_i + v \in \text{ann}(a)$, где $\beta_i \in \mathbb{Z}_p$, $i \in \{1, \dots, 6\}$, $v \in A_{2,p}^2$. Тогда

$$\bar{0} = ab = \left(\sum_{i=1}^6 \alpha_i \bar{x}_i \right) \left(\sum_{i=1}^6 \beta_i \bar{x}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^6 \alpha_i \beta_i \bar{x}_i^2 + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 + \alpha_3 \beta_4 + \alpha_4 \beta_3) \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \sum_{\substack{i < j \\ (i,j) \neq (1,2) \\ (i,j) \neq (3,4)}} (\alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i) \bar{x}_i \bar{x}_j.$$

Из леммы 5 следует

$$\alpha_1 \beta_1 = \dots = \alpha_6 \beta_6 = 0, \quad \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 + \alpha_3 \beta_4 + \alpha_4 \beta_3 = 0 \quad \text{и} \quad \alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i = 0$$

для всех $i, j \in \{1, \dots, 6\}$ таких, что $i < j$, $(i, j) \neq (1, 2)$ и $(i, j) \neq (3, 4)$.

Пусть $\alpha_1 \neq 0$. Тогда из равенств $\alpha_1 \beta_1 = 0$ и $\alpha_1 \beta_i + \alpha_i \beta_1 = 0$, где $i = \overline{3, 6}$, получаем $\beta_1 = 0$ и $\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0$. Далее, из равенства $\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 + \alpha_3 \beta_4 + \alpha_4 \beta_3 = 0$ следует $\alpha_1 \beta_2 = 0$, т. е. $\beta_2 = 0$. Другими словами, в этом случае $b = v \in A_{2,p}^2$.

Рассмотрим случай, когда $\alpha_1 = 0$. Ввиду доказанного выше можем считать $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Значит, имеем равенства $\alpha_5 \beta_5 = \alpha_6 \beta_6 = 0$, $\alpha_5 \beta_6 + \alpha_6 \beta_5 = 0$. Поскольку $a \notin A_{2,p}^2$, то $\alpha_6 \neq 0$ или $\alpha_5 \neq 0$. Пусть $\alpha_5 \neq 0$. Тогда из равенства $\alpha_5 \beta_5 = 0$ получаем $\beta_5 = 0$. Поэтому $\alpha_5 \beta_6 = 0$. Отсюда $\beta_6 = 0$. Другими словами, $b \in A_{2,p}^2$. Случай $\alpha_6 \neq 0$ рассматривается аналогично. \square

Для алгебры $B_{2,p}$ ($p > 2$) справедливы аналоги лемм 5 и 6.

Аналогично лемме 5 доказывается

Лемма 7. Множество $D_2 = \{\bar{x}_k^2, \bar{x}_i \bar{x}_j; (i, j) \neq (5, 6), 1 \leq i < j \leq 6, 1 \leq k \leq 6\}$ является базисом алгебры $B_{2,p}^2$ ($p > 2$).

Лемма 8. Пусть $a = \sum_{i=1}^6 \alpha_i \bar{x}_i + u \in B_{2,p}$, где $p > 2$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_p$ для всех чисел $i \in \{1, \dots, 6\}$, $u \in B_{2,p}^2$ и $a \notin B_{2,p}^2$. Тогда $\text{ann}(a) = B_{2,p}^2$.

Доказательство. Возьмем элемент $b = \sum_{i=1}^6 \beta_i \bar{x}_i + v \in \text{ann}(a)$, где $\beta_i \in \mathbb{Z}_p$ для всех чисел $i \in \{1, \dots, 6\}$ и $v \in A_{2,p}^2$. Получаем

$$\begin{aligned} \bar{0} = ab &= \sum_{i=1}^6 \alpha_i \beta_i \bar{x}_i^2 + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 + \alpha_5 \beta_6 + \alpha_6 \beta_5) \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \\ &+ (\alpha_3 \beta_4 + \alpha_4 \beta_3 + \alpha_5 \beta_6 + \alpha_6 \beta_5) \bar{x}_3 \bar{x}_4 + \sum_{\substack{i < j \\ (i,j) \neq (1,2) \\ (i,j) \neq (3,4) \\ (i,j) \neq (5,6)}} (\alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i) \bar{x}_i \bar{x}_j. \end{aligned}$$

Из леммы 7 следует

$$\begin{aligned} \alpha_1 \beta_1 = \dots = \alpha_6 \beta_6 = 0, \quad \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 + \alpha_5 \beta_6 + \alpha_6 \beta_5 = 0, \\ \alpha_3 \beta_4 + \alpha_4 \beta_3 + \alpha_5 \beta_6 + \alpha_6 \beta_5 = 0 \quad \text{и} \quad \alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i = 0 \end{aligned}$$

для всех $i, j \in \{1, \dots, 6\}$ таких, что $i < j$ и $(i, j) \neq (1, 2), (3, 4), (5, 6)$.

Предположим $\alpha_1 \neq 0$. Из равенства $\alpha_1 \beta_1 = 0$ получаем $\beta_1 = 0$. Далее, из равенств $\alpha_1 \beta_i + \alpha_i \beta_1 = 0$, $i = \overline{3, 6}$, следует $\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0$. Наконец, из равенства $\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 + \alpha_5 \beta_6 + \alpha_6 \beta_5 = 0$ вытекает $\beta_2 = 0$. Таким образом, $b = v \in B_{2,p}^2$.

Аналогично рассматриваются случаи, когда отличен от нуля один из коэффициентов $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Итак, можем полагать, что $\alpha_i = 0$ для $i = \overline{1, 4}$. Так как $a \notin A_{2,p}^2$, то $\alpha_6 \neq 0$ или $\alpha_5 \neq 0$. Предположим $\alpha_5 \neq 0$. Из равенства $\alpha_5 \beta_5 = 0$ получаем $\beta_5 = 0$. Следовательно,

$\alpha_5\beta_6 = 0$, т.е. и $\beta_6 = 0$. Из равенств $\alpha_i\beta_5 + \alpha_5\beta_i = 0$, где $i = \overline{1,4}$, вытекает $\beta_i = 0$ для $i = \overline{1,4}$. Значит, $b = v \in B_{2,p}^2$. \square

Замечание 3. Таким образом, из лемм 5, 6 получим, что граф $\Gamma(A_{2,p})$ имеет следующее строение: множество ненулевых элементов из множества $A_{2,p}^2$ образует полный подграф, а любая вершина $a \in A_{2,p} \setminus A_{2,p}^2$ смежна со всеми вершинами из этого подграфа и только с ними. Из лемм 7, 8 видно, что аналогичное строение имеет граф делителей нуля кольца $B_{2,p}$.

Следствие 3. $\Gamma(A_{2,p}) \cong \Gamma(B_{2,p})$ для любого простого нечетного числа p .

Предложение 2. Алгебра $A_{2,p}$ не изоморфна алгебре $B_{2,p}$ для любого простого нечетного числа p .

Доказательство. Предположим противное. Пусть φ — изоморфизм $B_{2,p}$ на $A_{2,p}$. Обозначим $\bar{x}_i = x_i + \langle x_1x_2 + x_3x_4 - x_5x_6 \rangle \in B_{2,p}$ и $\bar{x}'_i = x_i + \langle x_1x_2 - x_3x_4 \rangle \in A_{2,p}$, $i = \overline{1,6}$. Заметим, что $\varphi(B_{2,p}^2) \subseteq A_{2,p}^2$, а значит, отображение $\bar{\varphi} : B_{2,p}/B_{2,p}^2 \rightarrow A_{2,p}/A_{2,p}^2$, определенное по правилу $\bar{\varphi}(a + B_{2,p}^2) = \varphi(a) + A_{2,p}^2$, $a \in B_{2,p}$, также является изоморфизмом. Отсюда следует существование невырожденной матрицы $P = (p_{ij})_{6 \times 6}$, $p_{ij} \in \mathbb{Z}_p$, такой, что

$$\varphi(\bar{x}_1) = p_{1k}\bar{x}'_1 + p_{2k}\bar{x}'_2 + p_{3k}\bar{x}'_3 + p_{4k}\bar{x}'_4 + p_{5k}\bar{x}'_5 + p_{6k}\bar{x}'_6 + b_k, \quad k = \overline{1,6},$$

где b_k , $k = \overline{1,6}$, — некоторые элементы из $A_{2,p}^2$.

Учитывая свойства изоморфизма, имеем

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_3\bar{x}_4 - \bar{x}_5\bar{x}_6) &= \\ &= (p_{11}\bar{x}'_1 + p_{21}\bar{x}'_2 + p_{31}\bar{x}'_3 + p_{41}\bar{x}'_4 + p_{51}\bar{x}'_5 + p_{61}\bar{x}'_6)(p_{12}\bar{x}'_1 + p_{22}\bar{x}'_2 + p_{32}\bar{x}'_3 + p_{42}\bar{x}'_4 + p_{52}\bar{x}'_5 + p_{62}\bar{x}'_6) + \\ &+ (p_{13}\bar{x}'_1 + p_{23}\bar{x}'_2 + p_{33}\bar{x}'_3 + p_{43}\bar{x}'_4 + p_{53}\bar{x}'_5 + p_{63}\bar{x}'_6)(p_{14}\bar{x}'_1 + p_{24}\bar{x}'_2 + p_{34}\bar{x}'_3 + p_{44}\bar{x}'_4 + p_{54}\bar{x}'_5 + p_{64}\bar{x}'_6) - \\ &- (p_{15}\bar{x}'_1 + p_{25}\bar{x}'_2 + p_{35}\bar{x}'_3 + p_{45}\bar{x}'_4 + p_{55}\bar{x}'_5 + p_{65}\bar{x}'_6)(p_{16}\bar{x}'_1 + p_{26}\bar{x}'_2 + p_{36}\bar{x}'_3 + p_{46}\bar{x}'_4 + p_{56}\bar{x}'_5 + p_{66}\bar{x}'_6) = \\ &= (p_{11}p_{62} + p_{12}p_{61} + p_{13}p_{64} + p_{14}p_{63} - p_{15}p_{66} - p_{16}p_{65})\bar{x}'_1\bar{x}'_6 + \\ &+ (p_{21}p_{62} + p_{22}p_{61} + p_{23}p_{64} + p_{24}p_{63} - p_{25}p_{66} - p_{26}p_{65})\bar{x}'_2\bar{x}'_6 + \\ &+ (p_{31}p_{62} + p_{32}p_{61} + p_{33}p_{64} + p_{34}p_{63} - p_{35}p_{66} - p_{36}p_{65})\bar{x}'_3\bar{x}'_6 + \\ &+ (p_{41}p_{62} + p_{42}p_{61} + p_{43}p_{64} + p_{44}p_{63} - p_{45}p_{66} - p_{46}p_{65})\bar{x}'_4\bar{x}'_6 + \\ &+ (p_{51}p_{62} + p_{52}p_{61} + p_{53}p_{64} + p_{54}p_{63} - p_{55}p_{66} - p_{56}p_{65})\bar{x}'_5\bar{x}'_6 + \\ &+ (p_{61}p_{62} + p_{63}p_{64} - p_{65}p_{66})\bar{x}'_6\bar{x}'_6 + f(\bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \bar{x}'_3, \bar{x}'_4, \bar{x}'_5) = 0, \end{aligned}$$

где $f(\bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \bar{x}'_3, \bar{x}'_4, \bar{x}'_5)$ — некоторый многочлен от переменных \bar{x}'_k , $k = \overline{1,5}$, не содержащий \bar{x}'_6 . Поскольку элементы $\bar{x}'_k\bar{x}'_6$, $k = \overline{1,6}$, линейно независимы, то

$$\begin{aligned} p_{11}p_{62} + p_{12}p_{61} + p_{13}p_{64} + p_{14}p_{63} - p_{15}p_{66} - p_{16}p_{65} &= 0, \\ p_{21}p_{62} + p_{22}p_{61} + p_{23}p_{64} + p_{24}p_{63} - p_{25}p_{66} - p_{26}p_{65} &= 0, \\ p_{31}p_{62} + p_{32}p_{61} + p_{33}p_{64} + p_{34}p_{63} - p_{35}p_{66} - p_{36}p_{65} &= 0, \\ p_{41}p_{62} + p_{42}p_{61} + p_{43}p_{64} + p_{44}p_{63} - p_{45}p_{66} - p_{46}p_{65} &= 0, \\ p_{51}p_{62} + p_{52}p_{61} + p_{53}p_{64} + p_{54}p_{63} - p_{55}p_{66} - p_{56}p_{65} &= 0, \\ p_{61}p_{62} + p_{63}p_{64} - p_{65}p_{66} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда с заменой последнего уравнения на $p_{61}p_{62} + p_{62}p_{61} + p_{63}p_{64} + p_{64}p_{63} - p_{65}p_{66} - p_{66}p_{65} = 0$ получим

$$(p_{62}, p_{61}, p_{64}, p_{63}, -p_{66}, -p_{65}) \cdot P^T = 0.$$

Так как матрица P невырожденная, то это равенство невозможно. Противоречие. \square

Из следствия 3 и предложения 2 вытекает

Следствие 4. Если в многообразии колец \mathfrak{M} все конечные кольца однозначно определяются своими графами делителей нуля, то для любого нечетного простого числа p многообразие \mathfrak{M} не содержит многообразия $\mathfrak{M}_{2,p}$.

Пусть \mathfrak{M} — многообразие, в котором все конечные кольца однозначно определяются своими графами делителей нуля. В работе [5] доказано, что $T(\mathfrak{M})$ содержит многочлены вида mx , $dx + x^2g(x)$, причем $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$, $\alpha_i \leq 3$ для всех $i \leq s$, $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $d = 1$ или $d = p_{i_1} \dots p_{i_k}$, где p_{i_1}, \dots, p_{i_k} — попарно различные простые делители числа m .

Далее, пусть $\mathfrak{N}_i = \text{var} \langle p_i^{\alpha_i} x = 0 \rangle \cap \mathfrak{M}$, где $1 \leq i \leq s$. Тогда $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_1 \vee \dots \vee \mathfrak{N}_s$ и $T(\mathfrak{M}) = T(\mathfrak{N}_1) \cap \dots \cap T(\mathfrak{N}_s)$.

Лемма 9. Если кольцо A удовлетворяет тождеству $x(y - y^n) = 0$, $n \geq 2$, а кольцо B удовлетворяет тождеству $x(y - y^m) = 0$, $m \geq 2$, то в кольце $A \oplus B$ выполняется тождество

$$x(y - y^{(n-1)(m-1)+1}) = 0.$$

Доказательство. Пусть a, b — произвольные элементы из кольца A . Тогда

$$ab = ab^n = ab \cdot b^{n-1} = (ab \cdot b^{n-1})b^{n-1} = ab \cdot b^{2(n-1)} = \dots = ab^{1+(n-1)t},$$

где t — произвольное неотрицательное целое число. Другими словами, в кольце A выполняются тождества $xy = xy^{1+(n-1)t}$, $t \geq 1$. Аналогично доказывается, что кольцо B удовлетворяет тождествам $xy = xy^{1+(m-1)s}$, где s — произвольное целое неотрицательное число. Значит, $xy = xy^{1+(n-1)(m-1)}$ — тождество в кольце $A \oplus B$. \square

Предложение 3. Множество $T(\mathfrak{N}_i)$ содержит многочлен $x(y - y^{p_i})$, $i = 1, \dots, s$.

Доказательство. Из предложений 2.6 и 2.7 работы [6] следует, что $T(\mathfrak{N}_i)$ содержит многочлены вида $p_i^{\alpha_i} x$ и $dx + x^2f(x)$, где $d = 1$ или $d = p_i$, $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\alpha_i \leq 3$. Если $d = 1$, то идеал тождеств $T(\mathfrak{N}_i)$ содержит многочлен $x + x^2f(x)$, и из [8] следует, что \mathfrak{N}_i порождается полем \mathbb{Z}_{p_i} или $\mathfrak{N}_i = \text{var} \langle x = 0 \rangle$. В каждом из этих случаев получаем, что $T(\mathfrak{N}_i)$ содержит многочлен $x(y - y^{p_i})$.

Рассмотрим случай, когда $d = p_i$, т.е. $p_i x + x^2f(x) \in T(\mathfrak{N}_i)$. В силу следствия 2 многообразия \mathfrak{N}_i не содержит многообразия \mathfrak{M}_{1,p_i} . Это означает, что существует многочлен $g(x_1, \dots, x_N) \in T(\mathfrak{N}_i)$, существенно зависящий от переменных x_1, \dots, x_N , такой, что $g(x_1, \dots, x_N) \notin \{xyz, x^2, p_i x\}^T$. Ясно, что $N \leq 2$.

Если $N = 1$, то

$$g(x) = bx + ap_i x + x^2h(x),$$

где $h(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $a, b \in \mathbb{Z}$, причем число b не делится на p_i . По лемме о наибольшем общем делителе (НОД) существуют целые числа u, v такие, что $bu + p_i v = 1$. Поскольку $p_i x + x^2f(x) \in T(\mathfrak{N}_i)$, то $T(\mathfrak{N}_i)$ содержит многочлен вида $g_1(x) = x + cp_i x + x^2h_1(x)$ для некоторых $c \in \mathbb{Z}$ и $h_1(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Отсюда получаем

$$(x + cp_i x + x^2h_1(x)) - c(p_i x + x^2f(x)) = x + x^2(h_1(x) - cf(x)) \in \mathfrak{N}_i.$$

Из теоремы 1.1 работы [6] следует, что $T(\mathfrak{N}_i)$ содержит многочлен $x(y - y^{p_i})$.

Если $N = 2$, то

$$g(x, y) = \alpha xy + \beta(x \circ y) + \gamma p_i xy + \varphi(x, y),$$

где $\varphi(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$, причем число α не делится на p_i , а нижняя степень многочлена $\varphi(x, y)$ больше 2. По лемме о НОД существуют целые числа u, v такие, что $\alpha u + p_i v = 1$. Поэтому $T(\mathfrak{N}_i)$ содержит многочлен

$$\begin{aligned}
g_1(x, y) &= ug(x, y) = u\alpha xy + u\beta(x \circ y) + u\gamma p_i xy + u\varphi(x, y) = \\
&= xy + u\beta(x \circ y) + (u\gamma - v)p_i xy + u\varphi(x, y) = \\
&= xy + u\beta(x \circ y) + (u\gamma - v)(-x^2 y^2 f(xy)) + u\varphi(x, y) = \\
&= xy + \beta_1(x \circ y) + \varphi_1(x, y),
\end{aligned}$$

где $\beta_1 = u\beta$ и $\varphi_1(x, y)$ — некоторый многочлен с целыми коэффициентами, нижняя степень которого больше 2. Итак, множество $T(\mathfrak{N}_i)$ содержит многочлен

$$g_1(x, y) = xy + \beta_1(x \circ y) + \varphi_1(x, y),$$

где $\beta_1 \in \mathbb{Z}$ и $\varphi_1(x, y)$ — многочлен с целыми коэффициентами, нижняя степень которого больше 2.

Рассмотрим случай $p_i = 2$. Тогда

$$g_1(x, x) = x^2 + 2\beta_1 x^2 + \varphi_1(x, x) = x^2 + \beta_1(-x^4 f(x^2)) + \varphi_1(x, x) = x^2 + x^3 \varphi_2(x) \in T(\mathfrak{N}_i)$$

для некоторого многочлена $\varphi_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Поэтому $T(\mathfrak{N}_i)$ содержит многочлен вида $x \circ y + \psi(x, y)$, где $\psi(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$, причем нижняя степень многочлена $\psi(x, y)$ больше 2. Следовательно,

$$g_1(x, y) = xy + \beta_1(-\psi(x, y)) + \varphi_1(x, y) = xy + \psi_1(x, y),$$

где $\psi_1(x, y) = -\beta_1\psi(x, y) + \varphi_1(x, y)$ — многочлен, нижняя степень которого больше 2. Из теоремы 1.1 работы [6] имеем $\mathfrak{N}_i \subseteq \text{var } N_{0,2} \oplus \mathbb{Z}_2$. Таким образом, $T(\mathfrak{N}_i)$ содержит многочлен $x(y - y^2)$.

Рассмотрим случай, когда p_i — нечетное число. В силу следствия 4 многообразие \mathfrak{N}_i не содержит многообразия \mathfrak{M}_{2,p_i} . Значит, существует многочлен $p(x_1, \dots, x_M) \in T(\mathfrak{N}_i)$, существенно зависящий от переменных x_1, \dots, x_M и такой, что $p(x_1, \dots, x_M) \notin \{xyz, [x, y], p_i x\}^T$. Ясно, что $M \leq 2$.

Положим сначала $M = 1$. Тогда можем записать

$$p(x) = \lambda x + \mu p_i x + \nu x^2 + \delta p_i x^2 + x^3 \sigma(x),$$

где $\sigma(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\lambda, \mu, \nu, \delta \in \mathbb{Z}$, причем либо λ — ненулевое число, не делящееся на p_i , либо ν — ненулевое число, не делящееся на p_i . Пусть λ не равно нулю и взаимно просто с числом p_i . Тогда по лемме о НОД существуют целые числа u, v такие, что $\lambda u + p_i v = 1$. Отсюда

$$\begin{aligned}
up(x) &= x + p_i(\mu u - v)x + \nu u x^2 + \delta u p_i x^2 + u x^3 \sigma(x) = \\
&= x + (\mu u - v)(-x^2 f(x)) + \nu u x^2 + \delta u p_i x^2 + u x^3 \sigma(x),
\end{aligned}$$

т.е. $T(\mathfrak{N}_i)$ содержит многочлен вида $x + x^2 q(x)$, где $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Ранее отмечали, что в этом случае $x(y - y^{p_i}) \in T(\mathfrak{N}_i)$. Пусть теперь $\lambda = 0$. Тогда число ν не равно нулю и не делится на p_i . Отсюда следует, что по лемме о НОД существуют целые числа u, v такие, что $\nu u + p_i v = 1$. Значит, имеем

$$\begin{aligned}
up(x) &= \mu u p_i x + x^2 + p_i(\delta u - v)x^2 + u x^3 \sigma(x) = \\
&= \mu u p_i x + x^2 + (\delta u - v)(-x^4 f(x^2)) + u x^3 \sigma(x) = \mu u p_i x + x^2 + x^3 \sigma_1(x)
\end{aligned}$$

для некоторого многочлена $\sigma_1(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Линеаризуя многочлен $\mu u p_i x + x^2 + x^3 \sigma_1(x)$, получим, что идеал тождеств $T(\mathfrak{N}_i)$ содержит многочлен вида $x \circ y + w(x, y)$, где $w(x, y)$ — некоторый многочлен с целыми коэффициентами, нижняя степень которого больше 2. В силу тождеств $x \circ y + w(x, y) = 0$ и $g_1(x, y) = 0$ $T(\mathfrak{N}_i)$ содержит многочлен вида $xy + w_1(x, y)$, где $w_1(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ и нижняя степень многочлена $w_1(x, y)$ больше 2. Согласно теореме 1 статьи [6] $T(\mathfrak{N}_i)$ содержит многочлен $x(y - y^{p_i})$.

Пусть $M = 2$. Тогда можем записать

$$p(x, y) = \lambda_1 xy + \mu_1[x, y] + \nu_1 p_i xy + \omega(x, y),$$

где $\lambda_1, \mu_1, \nu_1 \in \mathbb{Z}$, причем λ_1 не делится на p_i , и $\omega(x, y)$ — многочлен с целыми коэффициентами, нижняя степень которого больше 2. Используя лемму о НОД так же, как это было сделано выше, можем считать $\lambda_1 = 1$, т. е.

$$p(x, y) = xy + \mu_1[x, y] + \nu_1 p_i xy + \omega(x, y).$$

Пользуясь тождеством $p_i x + x^2 f(x) = 0$, получаем

$$p(x, y) = xy + \mu_1[x, y] + \nu_1(-x^2 y^2 f(xy)) + \omega(x, y) = xy + \mu_1[x, y] + \omega_1(x, y)$$

для некоторого многочлена $\omega_1(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$, нижняя степень которого больше 2. Тогда $p(x, x) = x^2 + x^3 \omega_2(x)$, где $\omega_2 \in \mathbb{Z}[x]$. Линеаризуя тождество $p(x, x) = 0$, получим, что многообразии \mathfrak{M}_i удовлетворяет тождеству вида $x \circ y + w(x, y) = 0$, где $w(x, y)$ — некоторый многочлен с целыми коэффициентами, нижняя степень которого больше 2. Из тождеств $x \circ y + w(x, y) = 0$ и $g_1(x, y) = 0$ следует тождество вида $xy + w_1(x, y) = 0$, где $w_1(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ и нижняя степень многочлена $w_1(x, y)$ больше 2. По теореме 1.1 статьи [6] получаем, что $T(\mathfrak{M}_i)$ содержит многочлен $x(y - y^{p_i})$. \square

Из предложения 3 и леммы 9 вытекает

Следствие 5. Пусть \mathfrak{M} — многообразие, в котором все конечные кольца однозначно определяются своими графами делителей нуля. Тогда множество $T(\mathfrak{M})$ содержит многочлен вида $x(y - y^N)$, где $N \geq 2$.

Теперь можем доказать основной результат данной работы.

Доказательство теоремы. Импликация (2) \Rightarrow (1) следует из предложения 4 работы [5]. Докажем импликацию (1) \Rightarrow (2). Пусть в многообразии \mathfrak{M} все конечные кольца однозначно определяются своими графами делителей нуля. Тогда по следствию 5 идеал тождеств $T(\mathfrak{M})$ содержит многочлен вида $x(y - y^N)$, где $N \geq 2$. По теореме 1.1 из статьи [6] имеем $\mathfrak{M} \subseteq \text{var}(N_{0,p_1} \oplus \dots \oplus N_{0,p_s} \oplus \mathbb{Z}_p)$, где $s \in \mathbb{N}$ и $(p_i, p) \neq (3, 2)$ для любого числа $i \in \{1, \dots, s\}$. \square

Авторы глубоко признательны рецензенту за внимательное прочтение нашей работы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Beck I. *Coloring of commutative rings*, J. Algebra **116**, 208–226 (1988).
- [2] Anderson D.F., Livingston P.S. *The zero-divisor graph of a commutative ring*, J. Algebra **217**, 434–447 (1999).
- [3] Akbari S., Mohammadian A. *On zero-divisor graphs of finite rings*, J. Algebra **314**, 168–184 (2007).
- [4] Akbari S., Mohammadian A. *On the zero-divisor graph of a commutative ring*, J. Algebra **274**, 847–855 (2004).
- [5] Кузьмина А.С. *О некоторых свойствах многообразий колец, в которых конечные кольца однозначно определяются своими графами делителей нуля*, Сиб. электронные матем. изв. **8**, 179–190 (2011).
- [6] Kuzmina A.S., Maltsev Y.N. *On varieties of rings whose finite rings are determined by their zero-divisor graphs*, Asian-European J. Math. **5(2)** 101–111 (2012).
- [7] Tarski A. *Equationally complete rings and relation algebras*, Indag. Math. **18**, 39–46 (1956).
- [8] Джекобсон Н. *Строение колец* (Ин. лит., М., 1961).

Е.В. Журавлев

доцент, кафедра алгебры и математической логики,
Алтайский государственный университет,
пр-т Ленина, д. 61, г. Барнаул, 656049, Россия,

e-mail: evzhuravlev@mail.ru

А.С. Кузьмина

*доцент, кафедра алгебры и методики обучения математике,
Алтайская государственная педагогическая академия,
ул. Молодежная, д. 55, г. Барнаул, 656031, Россия,*

e-mail: akuzminal@yandex.ru

Ю.Н. Мальцев

*профессор, кафедра алгебры и методики обучения математике,
Алтайская государственная педагогическая академия,
ул. Молодежная, д. 55, г. Барнаул, 656031, Россия,*

e-mail: maltsevyn@gmail.com

E.V. Zhuravlev, A.S. Kuz'mina, and Yu.N. Mal'tsev

Description of ring varieties whose finite rings are uniquely determined by their zero-divisor graphs

Abstract. The zero-divisor graph $\Gamma(R)$ of an associative ring R is a graph whose vertices are all nonzero zero-divisors (one-sided and two-sided) of R , and two distinct vertices x and y are joined by an edge if and only if either $xy = 0$ or $yx = 0$.

In the present paper, we give a full description of ring varieties whose finite rings are uniquely determined by their zero-divisor graphs.

Keywords: zero-divisor graph, finite ring, variety of associative rings.

E.V. Zhuravlev

*Associate Professor, Chair of Algebra and Mathematical Logic,
Altai State University,
61 Lenin str., Barnaul, 656049 Russia,*

e-mail: evzhuravlev@mail.ru

A.S. Kuzmina

*Associate Professor, Chair of Algebra and Mathematics Teaching Principles,
Altai State Pedagogical Academy,
55 Molodezhnaya str., Barnaul, 656031 Russia,*

e-mail: akuzminal@yandex.ru

Y.N. Maltsev

*Professor, Chair of Algebra and Mathematics Teaching Principles,
Altai State Pedagogical Academy,
55 Molodezhnaya str., Barnaul, 656031 Russia,*

e-mail: maltsevyn@gmail.com