ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.03.01 : МАТЕМАТИКА

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Бакалаврская работа)

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Работа завершена:
«____»__________________2015 г. ___________________Ахмедгараева З.С.

Работа допущена к защите:
Научный руководитель
Кандидат физ.-мат. наук,доцент,
«____»__________________2015 г. ___________________ Салехов Л.Г.

Заведующий кафедрой:,
Доктор физ.-мат. наук, профессор
«____»__________________2015 г. ___________________ Елизаров А.М.

КАЗАНЬ – 2015 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Понятие элементарного решения операторов играет важную роль в решениях линейных уравнений в частных производных, а также уравнений свёрток в пространствах обобщенных функций. Конструкция элементарного решения дает информацию о регулярности решения рассматриваемого уравнения и его единственность. Для отыскания элементарных решений существуют различные методы, среди которых наиболее важным и современным является метод Фурье в пространстве обобщенных функций медленного роста и другие методы.

Целью моей бакалаврской работы является

• рассмотреть определение элементарного решения как для линейных уравнений в частных производных, так и для уравнений свёрток в пространствах обобщенных функций.

• рассмотреть теорию уравнений свёрток в свёрточных алгебрах и модулях.

• ввести определение преобразования Фурье в пространствах обобщенных функций медленного роста, его свойства.

• рассмотреть отыскание элементарных решений для различных, известных, а далее неизвестных операторов, применяя преобразование Фурье и другие методы.

• привести различные примеры задач, где привлекаются элементарные решения.

Теоритические сведения

Определение и свойства свертки

Определение 1 Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $\varphi : \Omega \curvearrowright \mathbb{R}^n$. *Носителем* функции φ называется

$$Supp \ \ \varphi := \overline{\{x \in \Omega | \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Лемма Пусть $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда $< f{*}g, \varphi > = < f \bigotimes g, \varphi^\Delta >$, где $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\varphi^\Delta := \varphi(x{+}y)$ на $\mathbb{R}^{2n}$.

N.B $\{\mathcal{L}^{'}(\mathbb{R}^n), "*"\} = \mathcal{A}_c$, то есть операция свертки в $\mathcal{L}^1$ обладает следующими свойствами:

1)ассоциативность;

2)коммутативность;

3)внутренний закон композиции $f, g \in \mathcal{A}, (f * g) \in \mathcal{A}$.

Перепишем лемму в следующем виде:

$$< f * g, \varphi > = \int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) \varphi(x) \, dy dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(y) g(z) \varphi(y+z) \, dy dz.$$

Доказательство

Для доказательства леммы, при интегрировании по x сделаем линейную и биективную замену $x - y = z$. Тогда $dx = dz$, $dx = dx_1, dx_2, ..., dx_n$ при переходе используем якобиан и он равен 1, так как линейная замена.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) \, dy \right\} \varphi(x) \, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) dy \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x-y) \varphi(x) dx \right\} = \int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(y) g(z) \varphi(y+z) \, dy dz.$$

N.B Заметим, что если функция f с компактным носителем, то φ^Δ не будет с компактным носителем, тогда $< S \bigotimes T, \varphi^\Delta >$ не определено.

Определение 2 Пусть S и $T \in \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R})$, носители которых допускают свертку, тогда *свертка* определяется по формуле

$$< S * T, \varphi > = < S \bigotimes T, \varphi^\Delta >$$

где $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Общие свойства свертки:

1) *Коммутативность*

   S и T две обобщенные функкции, носители которых образуют пару, допускающих свертку, тогда
$$S * T = T * S.$$

2) $\forall \ T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ имеет место следующие свойства:

   a)$\delta * T = T * \delta = T.$

   b)$\delta_a * T = T * \delta_a = \tau_a T, \ \forall a \in \mathbb{R}^n, \ \tau_a \varphi := \varphi(x-a).$

   c)$D^\alpha \delta * T = T * D^\alpha \delta = D^\alpha T \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$

3) *Ассоциативность*

   S, T, H — обобщенные функции, носители которых образуют пару, допускающих свертку, тогда
$$(S * T) * H = S * (T * H).$$

4) $Supp(S * T) \subset Supp S + Supp T.$

5) $\tau_a(S * T) = S * \tau_a T = \tau_a S * T, \ \ \forall a \in \mathbb{R}^n.$

6) $D^\alpha(S * T) = D^\alpha S * T = S * D^\alpha T$

Определение сверточной алгебры

Определение 3 Векторное подпространство $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ снабженное сверткой называется *сверточной алгеброй* если:

1)$S * T = T * S$, где $S, T \in \mathcal{A}$

2)$(S * T) * H = S * (T * H)$,где $\forall \ \ S, T, H \in \mathcal{A}$

3) $\forall \ \ S, T \in \mathcal{A}$,то $S * T \in \mathcal{A}$

Если сверточная алгебра обладает мерой Дирака $\delta \in \mathcal{A}$, то она называется *сверточной алгеброй с единицей.*

Известны следующие сверточные алгебры:

1)если $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ — обобщенная функция с компактным носителем снабдить операцией свертка $\{\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n), " * "\} = \mathcal{A}_c.$

2)$\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+) = \mathcal{D}'_{\mathbb{R}_+}(\mathbb{R})$ — пространство обощенных функций, носители которых содержаться в $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$, является сверточной алгеброй с единицей.

3)$\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ — пространство обобщенныых функций медленного роста, носители которых содержаться $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ $\{\mathcal{S}'(\mathbb{R}), " * "\} = \mathcal{A}_c$ также есть сверточная алгебра.

4)$\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ являются сверточной алгеброй, но без единицы.

Определение сверточного модуля

Определение 4 $\mathcal{A}$ - сверточная алгебра с единицей, $\mathfrak{M}$ - векторное подпространство обобщенных функций содержащее $\mathcal{A}$, $\mathfrak{M} \supset \mathcal{A}$, тогда $\mathfrak{M}$ - это *сверточный модуль* на сверточной алгебре $\mathcal{A}$, если $\forall A \in \mathcal{A}$, $\forall X \in \mathfrak{M}$, то $A * X = X * A \in \mathfrak{M}$ и обладающее свойствами:

1)$B * (A * X) = (B * A) * X$, $\forall A, B \in \mathcal{A}; \forall X \in \mathfrak{M}$;

2)$(A + B) * X = (A * X) + (B * X)$;

3)$A * (X + Y) = A * X + A * Y$, $\forall A \in \mathcal{A}; \forall X, Y \in \mathfrak{M}$,
сверточная алгебра $\mathcal{A}$ называется *алгеброй сверточных операторов* на $\mathfrak{M}$.

Примеры сверточных модулей:

1) Всякая сверточная алгебра с единицей, есть сверточный модуль на себя.

2)$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \equiv \mathfrak{M}$ на $\mathcal{A} = \mathscr{E}'(\mathbb{R})$.

3) Пространство обобщенных функций с параболическим носителем, есть сверточный модуль на алгебре обобщенных функций с гиперболическим носителем.

4)$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ является сверточным модулем на сверточной алгебре $\mathcal{A} = \Theta'_c(\mathbb{R}^n)$, где $\Theta'_c(\mathbb{R}^n)$ - пространство обобщенных фунций быстрого убывания.

Элементы теории уравнений сверток

Определение 5 Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра сверточный в пространстве $\mathfrak{M}$ на $\mathcal{A}$.

$$A * X = W,$$

где $A \in \mathcal{A}$; $X, W \in \mathfrak{M}$.

Определение 6 $E \in \mathfrak{M}$, E — обобщенная функция, которая удовлеторяет следующему уравнению сверток

$$A * E = \delta,$$

причем должно выполняться $A * E = E * A = \delta$.

Уравнения сверток в сверточной алгебре $\mathcal{D}'_+$

Известно, что $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ обозначает сверточную алгебру обобщенных функций на $\mathbb{R}$ с носителем на $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$.

$D \equiv \frac{d}{dt}$ — производная в смысле обобщенных функций.

Существование элементарного решенияв в $\mathcal{D}'_+$ у оператора $P(D)$

$P(D) = D^m + c_1 D^{m-1} + ... + c_{m-1} D + c_m$.

Теорема У оператора $P(D)$ $\exists!$ элементарное решение $E \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, и оно равно

$$E = Y(t)\mathbf{e}(t),$$

где $\mathbf{e}(t)$ решение классической задачи

$$"\mathbf{e}" : \begin{cases} P(D)\mathbf{e} = 0 \\ \mathbf{e}(0) = \mathbf{e}'(0) = ... = \mathbf{e}^{(m-2)}(0) = 0. \\ \mathbf{e}^{(m-1)}(0) = 1. \end{cases}$$

$$P(D)E = \delta.$$

Доказательство

$P(D)$ $\exists!$ $\mathbf{e}(t)$ — регулярная обобщенная функция.

$E = Y(t)\mathbf{e}(t)$ — доопределенный класс решений на всей оси $\mathbb{R}$.

$P(D)E = \delta$.

$D^j E = Y(t) D^j \mathbf{e} + \delta (D^{j-1}\mathbf{e})(0) + ... + D^{j-1}\delta \mathbf{e}(0), \quad j = \overline{0, m}$.

$\frac{dT_f}{dx} = T_{f'} + \sum\limits_{j=0}^{N} \delta_j \delta_{aj}$, где δ_j — скачок $\delta_j = \varphi(a_j + 0) - f(a_j - 0)$.

$c_j D^j E = Y(t) D^j \mathbf{e}(t)$.

$c_0 D^m E = Y(t) D^m \mathbf{e}(t) + \delta$.

$P(D)E = Y(t)P(D)\mathbf{e}(t) + \delta = \delta, \quad j = \overline{0, m-1}$.

Преобразования Фурье и его свойства

Определение 6 Пусть $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, тогда

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi} f(x)\, dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$\mathcal{F}$ называют *преобразованием Фурье.*

Тогда *копреобразование Фурье* определяется по формуле

$$(\bar{\mathcal{F}}f)(\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x\xi} f(x)\, dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Свойства:

1)$\mathcal{F}(\chi_a) = \delta_a, \chi_a = e^{2\pi i a\xi}$.

2)$\mathcal{F}(\delta_a) = \chi_a$.

3)$\mathcal{F}[(2\pi i\xi)^\alpha] = D^\alpha\delta, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

4)$\mathcal{F}(D^\alpha\delta) = (-2\pi i\xi)^\alpha$.

5)$\mathcal{F}(v.p.\frac{1}{x})(\xi) = -\pi i sgn\xi$.

6)$\mathcal{F}(sgn \;\; x) = \frac{1}{\pi i} v.p.\frac{1}{\xi}$.

Задачи, решенные методом преобразования Фурье

Задача 1.

Рассмотрим оператор вида:

$$P(D) = \left\{ \left(\frac{d}{dt} + \alpha \right)^{(2)} + \beta^2 \right\}, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

Найти $E \in \mathcal{D}'_+$.
Элементарное решение будем искать в виде:

$$E = Y(t)\mathbf{e}(t), \tag{1.1}$$

где $\mathbf{e}(t)$ решение классической задачи:

$$\text{"}\mathbf{e}\text{"}: \begin{cases} \left\{ \left(\frac{d}{dt} + \alpha \right)^{(2)} + \beta^2 \right\} \mathbf{e} = 0, \\ \mathbf{e}(0) = 0, \\ \mathbf{e}'(0) = 1. \end{cases} \tag{1.2}$$

Решение этой задачи имеет вид:

$$\mathbf{e}(t) = e^{-\alpha t} \frac{1}{\beta} \sin \beta t. \tag{1.3}$$

Тогда элементарное решение будет выглядеть:

$$E = Y(t) e^{-\alpha t} \frac{1}{\beta} \sin \beta t \in \mathcal{D}'_+. \tag{1.4}$$

Приложение. $P(D)U = T, \;\; T \in \mathcal{D}'_+, \;\; U \in \mathcal{D}'_+$, тогда

$$\exists! \;\; U = E * T.$$

Задача 2.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор в частных производных первого порядка с постоянными коэффициентами. Этот оператор известен, как оператор переноса.

$$P(D) = \left(a \frac{\partial}{\partial t} + b \frac{\partial}{\partial x} + c \right), \quad a, b, c - const.$$

Найти E. Предположим, что элементарное решение лежит в $\mathcal{S}'$.

$$\mathcal{F}_x \mid P(D)E = \delta(x, t). \tag{2.1}$$

Применим метод преобразования Фурье по x к обеим частям уравнения (2.1) и введем обозначение:

$$\mathcal{F}_x E(x,t) = \hat{E}(\xi,t). \tag{2.2}$$

Получаем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{c + 2\pi i\xi b}{a}\right)\hat{E}(\xi,t) = \frac{\delta(t)}{a}. \tag{2.3}$$

$$\hat{E}(\xi,t) = \frac{Y(t)}{a}e^{-\frac{c+2\pi i\xi b}{a}t}.$$

Применим обратное преобразование Фурье.

$$E(x,t) = \bar{\mathcal{F}}_\xi(\hat{E}(\xi,t)).$$

Используя свойство преобразования Фурье $\bar{\mathcal{F}}\bar{\chi}_a = \delta_a = \delta(x - \frac{b}{a}t)$.

$$E(x,t) = \frac{Y(t)}{a}e^{-\frac{c}{a}t}\delta(x - \frac{b}{a}t). \tag{2.4}$$

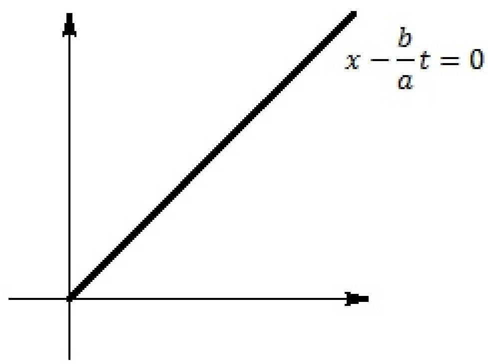

Рис. 1: График носителя меры Дирака.

Приложение.

$$P(D)U = T,$$

где $\forall\, T$ принадлежит сверточному модулю обобщенных функций с параболическим носителем.

$$U = E * T.$$

$$\begin{cases} P(D)u = f(x,t), t > 0, \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Тогда решение

$$u(x,t) = \frac{1}{a}\int\limits_0^t e^{-\frac{c}{a}(t-\tau)} f[x - \frac{b}{a}(t-\tau), \tau]\, d\tau. \tag{2.5}$$

Задача 3.

$$P(D) = \left(a\frac{\partial}{\partial t} + b\frac{\partial}{\partial x} + c\right)^{(2)}, \quad a, b, c - const.$$

Найти E.

Предположим, что элементарное решение лежит в $\mathcal{S}'$.

$$\mathcal{F}_x \mid P(D)E = \delta(x,t). \tag{3.1}$$

Применим метод преобразования Фурье по x к обеим частям уравнения (3.1) и введем обозначение:

$$\mathcal{F}_x E(x,t) = \hat{E}(\xi, t). \tag{3.2}$$

Получаем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{c + 2\pi i\xi b}{a}\right)^{(2)} \hat{E}(\xi,t) = \frac{\delta(t)}{a^2}. \tag{3.3}$$

Воспользуемся методом элементарных функций:

$$\text{"}\mathbf{e}\text{"}: \begin{cases} \left\{\left(\frac{d}{dt} + \frac{c+2\pi i\xi b}{a}\right)^{(2)}\right\}\mathbf{e} = 0. \\ \mathbf{e}(0) = 0, \\ \mathbf{e}'(0) = 1. \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\mathbf{e}(t) = e^{-\frac{1}{a}(c+2\pi i\xi b)t} t. \tag{3.5}$$

$$\hat{E}(\xi,t) = \frac{1}{a^2} Y(t) e^{-\frac{1}{a}(c+2\pi i\xi b)t} t. \tag{3.6}$$

Применим обратное преобразование Фурье.

$$E(x,t) = \bar{\mathcal{F}}_\xi(\hat{E}(\xi,t)).$$

Используя свойство преобразования Фурье $\bar{\mathcal{F}}\bar{\chi}_a = \delta_a = \delta(x - \frac{b}{a}t)$.

$$E(x,t) = \frac{Y(t)}{a^2} e^{-\frac{c}{a}t} \delta(x - \frac{b}{a}t)t. \tag{3.7}$$

Задача 4.

Рассмотрим задачу Коши с нулевыми начальными условиями:

$$\begin{cases} P(D)u = f(x,t), \quad \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ u\big|_{t=0} = 0, \\ u_t\big|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

где $P(D)$ оператор такого вида:

$$P(D) = \left(a\frac{\partial}{\partial t} + b\frac{\partial}{\partial x} + c\right)^{(2)}, \quad a, b, c - const.$$

Введем регулярные обобщенные функции:

$$U = Y(t)u(x,t). \tag{4.2}$$

$$F = Y(t)f(x,t). \tag{4.3}$$

Эти обобщенные функции определены на всей фазовой плоскости.

$$PU = F. \tag{4.4}$$

Запишем уравнение свёрток:

$$P\delta(x,t) * U = F. \tag{4.5}$$

$$PE = \delta.$$

$$U = E(x,t) \underset{(x,t)}{*} F.$$

Запишем элементарное решение:

$$E(x,t) = \frac{Y(t)}{a^2} e^{-\frac{c}{a}t} \delta(x - \frac{b}{a}t)t. \tag{4.6}$$

$$U(x,t) = E(x,t) \underset{(x,t)}{*} Y(t)f(x,t) = \frac{Y(t)}{a^2} e^{-\frac{c}{a}t} \delta(x - \frac{b}{a}t)t \underset{(x,t)}{*} Y(t)f(x,t) =$$

свёртка по x:

$$= \frac{Y(t)}{a^2} e^{-\frac{c}{a}t} * Y(t)f(x - \frac{b}{a}t, t)t = \frac{1}{a^2} \int\limits_{\mathbb{R}} (t-\tau)Y(t-\tau)e^{-\frac{c}{a}(t-\tau)} Y(\tau) f(x - \frac{b}{a}\tau, \tau)\, d\tau =$$

$$\frac{1}{a^2} \int\limits_0^{+\infty} (t-\tau)Y(t-\tau)e^{-\frac{c}{a}(t-\tau)} f(x - \frac{b}{a}\tau, \tau)\, d\tau =$$

$$\frac{1}{a^2}\int\limits_0^t (t-\tau)e^{-\frac{c}{a}(t-\tau)}f(x-\frac{b}{a}\tau,\tau)\,d\tau.$$

Получаем интегральное представление решения задачи Коши:

$$U(x,t)=\frac{1}{a^2}\int\limits_0^t (t-\tau)e^{-\frac{c}{a}(t-\tau)}f(x-\frac{b}{a}\tau,\tau)\,d\tau. \tag{4.7}$$

Задача 5.

$$P(D)=\left\{\left(a\frac{\partial}{\partial t}+b\frac{\partial}{\partial x}+c\right)^{(2)}+d^2\right\},\quad a,b,c-const.$$

Найти. $E\in\mathcal{S}'$.

Предположим, что элементарное решение лежит в $\mathcal{S}'$.

$$\mathcal{F}_x \mid P(D)E=\delta(x,t). \tag{5.1}$$

Применим метод преобразования Фурье по x к обеим частям уравнения (5.1) и введем обозначение:

$$\mathcal{F}_x E(x,t)=\hat{E}(\xi,t). \tag{5.2}$$

Получаем обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\left[\left(\frac{d}{dt}+\frac{c+2\pi i\xi b}{a}\right)^{(2)}+\left(\frac{d}{a}\right)^2\right]\hat{E}(\xi,t)=\frac{\delta(t)}{a^2}. \tag{5.3}$$

Воспользуемся методом элементарных функций:

$$"\mathbf{e}":\begin{cases}\left\{\left(\frac{d}{dt}+\frac{c+2\pi i\xi b}{a}\right)^{(2)}+\left(\frac{d}{a}\right)^2\right\}\mathbf{e}=0,\\ \mathbf{e}(0)=0,\\ \mathbf{e}'(0)=1.\end{cases} \tag{5.4}$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$\left(\lambda+\frac{c+2\pi i\xi b}{a}\right)^{(2)}+\left(\frac{d}{a}\right)^2=0,$$

$$\lambda+\frac{c+2\pi i\xi b}{a}=\pm i\frac{d}{a},$$

$$\lambda=\pm i\frac{d}{a}-\frac{c+2\pi i\xi b}{a}. \tag{5.5}$$

Тогда решение "$\mathbf{e}$" запишется:

$$\mathbf{e}(t) = \frac{a}{d} e^{-\frac{c+2\pi i\xi b}{a}t} \sin \frac{d}{a} t.$$

$$\hat{E}(\xi, t) = \frac{Y(t)}{ad} e^{-\frac{c+2\pi i\xi b}{a}t} \sin \frac{d}{a} t. \tag{5.6}$$

Применим обратное преобразование Фурье.

$$E(x,t) = \bar{\mathcal{F}}_\xi(\hat{E}(\xi, t)). \tag{5.7}$$

Используя свойство преобразования Фурье $\bar{\mathcal{F}}\bar{\chi}_a = \delta_a = \delta(x - \frac{b}{a}t)$.

$$E(x,t) = \frac{Y(t)}{a^2} e^{-\frac{c}{a}t} \sin \frac{d}{a} t \delta(x - \frac{b}{a} t). \tag{5.8}$$

Задачи, решенные с помощью метода введения новой неизвестной функции

Задача 6.

Рассмотрим дифференциальный оператор хорошо известный, как даламбериан размерности 1 с релаксациями по временной переменной t и по пространственной переменной x, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$P(D) = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha \right)^{(2)} - a^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} + \beta \right)^{(2)} \right\}.$$

Найти E.

$$P(D)E = \delta(x,t). \tag{6.1}$$

Воспользуемся методом введения новой неизвестной функции:

$$E = e^{-(\alpha t + \beta x)t} \mathscr{E}. \tag{6.2}$$

Подставляем (6.2) $\rightarrow$ (6.1), получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathscr{E} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathscr{E} = \delta(x,t), \tag{6.3}$$

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2a} Y(at - |x|). \tag{6.4}$$

При подстановке (6.4) $\rightarrow$ (6.2), получаем

$$E = \frac{1}{2a} e^{-(\alpha t + \beta x)t} Y(at - |x|). \tag{6.5}$$

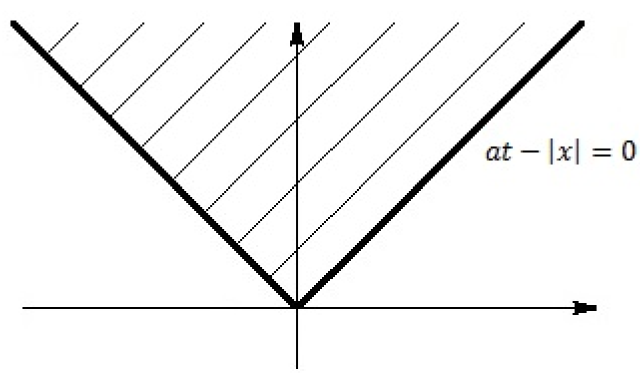

Рис. 2: Конус волнбудущего.

Приложение. $P(D)U = T$ в $\mathfrak{M}$ будет $\exists!$

$$U = E * T.$$

$$\begin{cases} P(D)u = f(x,t), \quad \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ u\big|_{t=0} = 0, \\ u_t\big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Тогда решение получаем в таком виде:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-(at-\tau)}^{x+(at-\tau)} e^{-[\alpha(t-\tau)+\beta(x-\xi)]t} f(\xi,\tau))\, d\xi\, d\tau, \tag{6.6}$$

при $\alpha = \beta = 0$, то получаем формулу Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-(at-\tau)}^{x+(at-\tau)} f(\xi,\tau))\, d\xi\, d\tau. \tag{6.7}$$

Задача 7.

$$P(D) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x} + c\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x} + c\right), \quad a, c - const.$$

Перепишем оператор в виде:

$$P(D) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\right)^{(2)} - a^2\frac{\partial}{\partial x}.$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\right)^{(2)} - a^2\frac{\partial}{\partial x}\right] E = \delta(x,t). \tag{7.1}$$

Воспользуемся методом введения новой неизвестной функции:

$$E = e^{-ct}\mathscr{E}. \tag{7.2}$$

Подставляем (7.2) $\to$ (7.1), получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathscr{E} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathscr{E} = \delta(x,t), \tag{7.3}$$

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2a} Y(at - |x|). \tag{7.4}$$

При подстановке (7.4) $\to$ (7.2), получаем

$$E = \frac{1}{2a} e^{-ct} Y(at - |x|). \tag{7.5}$$

N.B. Если $c = 0$, то имеем классический ответ даламбериана:

$$E = \frac{1}{2a} Y(at - |x|). \tag{7.6}$$

Задача 8.

Рассмотрим оператор вида:

$$P(D) = \left\{ \left(\frac{d}{dt} + \alpha \right)^{(2)} + \beta^2 \right\}^{(2)}, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

Найти $E \in \mathcal{D}'_+$.

$$P(D)E = \delta.$$

Применим метод итераций:

$$\left[\left(\frac{d}{dt} + \alpha \right)^{(2)} + \beta^2 \right] \left[\left(\frac{d}{dt} + \alpha \right)^{(2)} + \beta^2 \right] E = \delta. \tag{8.1}$$

$$PE = E_1, \tag{8.2}$$

$$E_1 = Y(t) e^{-\alpha t} \frac{1}{\beta} \sin \beta t. \tag{8.3}$$

$$PE_1 = \delta. \tag{8.4}$$

$$E = E_1 * E_1 = {E_1}^{*2} = \left\{ Y(t) e^{-\alpha t} \frac{1}{\beta} \sin \beta t \right\}^{*2} =$$

$$\frac{1}{\beta^2} \int\limits_0^{+\infty} Y(t - \tau) e^{-\alpha(t-\tau)} \sin \beta(t - \tau) Y(\tau) e^{-\alpha \tau} \sin \beta \tau \, d\tau =$$

$$\frac{1}{\beta^2} \int\limits_0^{t} e^{-\alpha(t-\tau)} \sin \beta(t - \tau) e^{-\alpha \tau} \sin \beta \tau \, d\tau = \frac{e^{-\alpha t}}{\beta^2} \int\limits_0^{t} \sin \beta(t - \tau) \sin \beta \tau \, d\tau. \tag{8.5}$$

Обозначим через

$$I(t) = \int\limits_0^{t} \sin \beta(t - \tau) \sin \beta \tau \, d\tau.$$

Воспользуемся формулой

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

$$I(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t [\cos\beta(t-2\tau) - \cos\beta t]\, d\tau = \frac{1}{2}\Bigg[\int\limits_0^t [\cos\beta(t-2\tau)\, d\tau - \cos\beta t\int\limits_0^t\, d\tau\Bigg].$$

Сделаем замену $t - 2\tau = \xi, d\tau = -\frac{1}{2}d\xi$, тогда

$$I(t) = \frac{1}{2}\Bigg[\int\limits_0^t \cos\beta\xi\, d\xi - t\cos\beta t\Bigg] = \frac{1}{2}\Bigg[\frac{\sin\beta t}{\beta} - t\cos\beta t\Bigg].$$

Тогда элементарное решение имеет вид:

$$E = \frac{Y(t)e^{-\alpha t}}{2\beta^2}\Bigg[\frac{\sin\beta t}{\beta} - t\cos\beta t\Bigg] \in \mathcal{D}_+^{'}. \tag{8.6}$$

Задача 9.

Рассмотрим задачу Коши вида:

$$\begin{cases} P(D)u = f(t), & t > 0 \\ u(0) = a_0, & a_0, a_1 \in \mathbb{R} \\ \frac{du}{dt}(0) = a_1, \end{cases} \tag{9.1}$$

где

$$P(D) = \Bigg\{\bigg(\frac{d}{dt} + \alpha\bigg)^{(2)} + \beta^2\Bigg\}, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Введем регулярные обобщенные функции:

$$U = Y(t)u, \tag{9.2}$$

$$F = Y(t)f(t). \tag{9.3}$$

Применяем оператор $P(D)$ к функции U, получаем

$$\frac{dU}{dt} = Y(t)u^{'} + \delta u = Y(t)u^{'} + \delta a_0. \tag{9.4}$$

$$\frac{d^2U}{dt} = Y(t)u^{''} + \delta a_1 + \delta^{'} a_0. \tag{9.5}$$

$$\begin{array}{r|l} \alpha^2 + \beta^2 & U = Y(t)u, \\ 2\alpha & \dfrac{dU}{dt} = Y(t)u^{'} + \delta u = Y(t)u^{'} + \delta a_0, \\ 1 & \dfrac{d^2U}{dt} = Y(t)u^{''} + \delta a_1 + \delta^{'} a_0. \end{array}$$

Складываем их, и получаем

$$LU = Y(t)Lu + 2\alpha\delta a_0 + \delta^{'} a_0 = Y(t)f(t) + (2\alpha a_0 + a_1)\delta + \delta^{'} a_0.$$

$$LU = F(t) + (2\alpha a_0 + a_1)\delta + \delta^{'} a_0.$$

$$LU = W.$$

Так как элементарное решение

$$E = Y(t)e^{-\alpha t}\frac{1}{\beta}\sin\beta t \in \mathcal{D}^{'}_{+} \Rightarrow \exists!$$

$$U = E * W. \tag{9.6}$$

$$U = E * \{F(t) + (2\alpha a_0 + a_1)\delta + \delta^{'} a_0\}. \tag{9.7}$$

Будем отыскавать интегральное представление по шагам:

$$1) E * F(t) = Y(t)e^{-\alpha t}\frac{1}{\beta}\sin\beta t * Y(t)f(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} Y(t-\tau)e^{-\alpha(t-\tau)}\frac{1}{\beta}\sin\beta(t-\tau)Y(\tau)f(\tau)\,d\tau =$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty} Y(t-\tau)e^{-\alpha(t-\tau)}\frac{1}{\beta}\sin\beta(t-\tau)f(\tau)\,d\tau = \int\limits_{0}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}\frac{1}{\beta}\sin\beta(t-\tau)f(\tau)\,d\tau.$$

$$2) E * (2\alpha a_0 + a_1)\delta = (2\alpha a_0 + a_1)\delta E.$$

$$3) E * a_0\delta^{'} = a_0\frac{\partial E}{\partial t}.$$

Тогда

$$U = \int\limits_{0}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}\frac{1}{\beta}\sin\beta(t-\tau)f(\tau)\,d\tau + (2\alpha a_0 + a_1)Y(t)e^{-\alpha t}\frac{1}{\beta}\sin\beta t + a_0\frac{\partial E}{\partial t}.$$

$$U = \frac{1}{\beta}\left[\int\limits_{0}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)}\sin\beta(t-\tau)f(\tau)\,d\tau + (2\alpha a_0 + a_1)Y(t)e^{-\alpha t}\sin\beta t + a_0 e^{-\alpha t}(\beta\cos\beta t - \alpha\sin\beta t)\right]. \tag{9.8}$$

Задачи, решенные с помощью метода предварительного дифференцирования

Задача 10.

Рассмотрим уравнение сверток:

$$Y(t)e^{-ct} * U = T \quad \in \mathcal{D}'_{+}. \tag{10.1}$$

$$Y(t)e^{-ct} * E = \delta(t). \tag{10.2}$$

Воспользуемся методом предварительного дифференцирования:

$$\frac{d(Y(t)e^{-ct})}{dt} = \delta - ce^{-ct}Y(t).$$

$$\frac{d(Y(t)e^{-ct})}{dt} + ce^{-ct}Y(t) = \delta. \tag{10.3}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\delta + c\delta\right) * Y(t)e^{-ct} = \delta. \tag{10.4}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\delta + c\delta\right) * \Bigg| \, Y(t)e^{-ct} * E = \delta(t). \tag{10.5}$$

$$E = \frac{d}{dt}\delta + c\delta. \tag{10.6}$$

$$Supp \;\; \delta = \{0\} \Rightarrow E \in \mathcal{D}'_{+},$$

тогда

$$U = E * T, \;\; \forall T \in \mathcal{D}'_{+}. \tag{10.7}$$

Задача 11.

Рассмотрим уранение сверток

$$Y(t)e^{-t}\sin\beta t * U = T \;\; \in \mathcal{D}'_{+}. \tag{11.1}$$

$$P(D)|P(D)\Big\{Y(t)e^{-t}\sin\beta t\Big\} = \delta.$$

$$P(D) = \left\{\left(\frac{d}{dt} + 1\right)^{(2)} + \beta^2\right\}. \tag{11.2}$$

$$P(D)E = \delta. \tag{11.3}$$

Применяем метод элементарных решений.

$$"\mathbf{e}" : \begin{cases} \Big\{\big(\frac{d}{dt}+1\big)^{(2)}+\beta^2\Big\}\mathbf{e} = 0, \\ \mathbf{e}(0) = 0, \\ \mathbf{e}^{'}(0) = 1. \end{cases} \tag{11.4}$$

Тогда элементарное решение будет выглядеть:

$$E = Y(t)e^{-t}\frac{1}{\beta}\sin\beta t. \tag{11.5}$$

Обе части уравнения (11.1) умножим сверточно на $\frac{1}{\beta}P(D)$, получим

$$U = \frac{1}{\beta}\Bigg[\bigg(\frac{d}{dt}+1\bigg)^{(2)}+\beta^2\Bigg]T. \tag{11.6}$$

Задача 12.

Рассмотрим уравнение

$$A(t) * X = W, \tag{12.1}$$

где $A(t) = Y(t)e^{pt}\frac{\operatorname{sh}\omega t}{\omega} * Y(t)e^{pt}\frac{\sin\omega t}{\omega}$.

Найти решение X уравнения (12.1).

Найдем вид оператора $P(D)$:

$$P(D)|P(D)\Big\{Y(t)e^{pt}\frac{\operatorname{sh}\omega t}{\omega}\Big\} = \delta.$$

$$P(D) = \Bigg\{\bigg(\frac{d}{dt}-p\bigg)^{(2)}-\omega^2\Bigg\}. \tag{12.2}$$

$$P(D)E = \delta.$$

$$"\mathbf{e}" : \begin{cases} \Big\{\big(\frac{d}{dt}-p\big)^{(2)}-\omega^2\Big\}\mathbf{e} = 0, \\ \mathbf{e}(0) = 0, \\ \mathbf{e}^{'}(0) = 1. \end{cases} \tag{12.3}$$

Решение этой задачи имеет вид:

$$\mathbf{e}(t) = e^{pt}\frac{1}{\omega}\operatorname{sh}\omega t. \tag{12.4}$$

Тогда элементарное решение будет выглядеть:

$$E = Y(t)e^{pt}\frac{1}{\omega}\operatorname{sh}\omega t. \tag{12.5}$$

Найдем вид оператора $Q(D)$:

$$Q(D)|Q(D)\Big\{Y(t)e^{pt}\frac{\sin\omega t}{\omega}\Big\} = \delta.$$

$$Q(D) = \Big\{\Big(\frac{d}{dt} - p\Big)^{(2)} + \omega^2\Big\}. \tag{12.6}$$

$$Q(D)E = \delta.$$

$$"\mathbf{e}" : \begin{cases} \Big\{\big(\frac{d}{dt} - p\big)^{(2)} + \omega^2\Big\}\mathbf{e} = 0, \\ \mathbf{e}(0) = 0, \\ \mathbf{e}^{'}(0) = 1. \end{cases} \tag{12.7}$$

Решение этой задачи имеет вид:

$$\mathbf{e}(t) = e^{pt}\frac{1}{\omega}\sin\omega t. \tag{12.8}$$

Тогда элементарное решение будет выглядеть:

$$E = Y(t)e^{pt}\frac{1}{\omega}\sin\omega t. \tag{12.9}$$

Обе части уравнения (12.1) умножим сверточно на $P(D)$, получим

$$P(D)\Big[Y(t)e^{pt}\frac{\operatorname{sh}\omega t}{\omega} * Y(t)e^{pt}\frac{\sin\omega t}{\omega}\Big]{*}X = P(D)\delta * W,$$

$$P(D)\delta * \Big[Y(t)e^{pt}\frac{\operatorname{sh}\omega t}{\omega} * Y(t)e^{pt}\frac{\sin\omega t}{\omega}\Big]{*}X = P(D)W.$$

N.B $P(D)\delta * W = P(D)W.$

$$P(D)\Big[Y(t)e^{pt}\frac{\operatorname{sh}\omega t}{\omega}\Big]{*}Y(t)e^{pt}\frac{\sin\omega t}{\omega} * X = P(D)W.$$

$P(D)\Big[Y(t)e^{pt}\frac{\operatorname{sh}\omega t}{\omega}\Big]= \delta.$

$$Q(D)|Y(t)e^{pt}\frac{\sin\omega t}{\omega} * X = P(D)W,$$

$$X = Q(D)\Big[P(D)W\Big]. \tag{12.10}$$

$$Q(D)[P(D)] = \left\{\left(\frac{d}{dt} - p\right)^{(2)} + \omega^2\right\}\left\{\left(\frac{d}{dt} - p\right)^{(2)} - \omega^2\right\} = \left\{\left(\frac{d}{dt} - p\right)^{(4)} - \omega^4\right\}.$$

Тогда решение уравнения (12.1) примет вид:

$$X = \left[\left(\frac{d}{dt} - p\right)^{(4)} - \omega^4\right]W. \tag{12.11}$$

Элементарные решения известных операторов

Задача 13.

Рассмотрим волновой оператор:

$$\Box_n = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

Найти E.
Перейдем к построению элементарного решения волнового оператора.

$$\mathcal{F}_x \mid \Box_n E = \delta(x,t). \tag{13.1}$$

Применим метод преобразования Фурье по x к обеим частям уравнения (13.1) и введем обозначение:

$$\mathcal{F}_x E_n(x,t) = \hat{E}_n(\xi,t). \tag{13.2}$$

В результате получим

$$\frac{d^2}{dt^2}\hat{E}_n(\xi,t) + (2\pi i|\xi|)^2\hat{E}_n(\xi,t) = \delta(t), \tag{13.3}$$

$$\hat{E}_n(\xi,t) = Y(t)\frac{\sin 2\pi|\xi|t}{2\pi|\xi|}. \tag{13.4}$$

Пусть $n = 3$. Применим обратное преобразование Фурье.

$$E(x,t) = \bar{\mathcal{F}}_\xi(\hat{E}_3(\xi,t)). \tag{13.5}$$

Используя свойство преобразования Фурье $\bar{\mathcal{F}}\bar{\chi}_a = \delta_a = \delta_{s(0,t)}$.

$$E_3(x,t) = \frac{Y(t)}{4\pi t}\delta_{s(0,t)}. \tag{12.6}$$

Итог: Оператор $\Box_3$ $\exists!$ элементарное решение с носителем, содержащийся в конусе волнбудущего в $\mathbb{R}^4$, и это решение дается формулой (13.6).

Задача 14.

Рассмотрим оператор диффузии(теплопроводности):

$$P(D)u(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t} - \triangle\, u(x,t),$$

где $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in \mathbb{R}, u(x,t) = u(x_1,...,x_n,t_1,...,t_n)$.

Найти E. Предположим, что $E \in \mathcal{S}'$, чтобы применить преобразование Фурье действовало в пространстве обобщенных функций.

$$\mathcal{F}_x \mid \frac{\partial E}{\partial t} - \triangle\, E = \delta(x,t). \tag{14.1}$$

Применим метод преобразования Фурье по x к обеим частям уравнения (14.1) и введем обозначение:

$$[\mathcal{F}_x E(x,t)](\xi,t) = \hat{E}(\xi,t). \tag{14.2}$$

Получаем

$$\frac{d}{dt}\hat{E}(\xi,t) + 4\pi|\xi|^2\hat{E}(\xi,t) = \delta(t). \tag{14.3}$$

Элементарное решение этого уравнения выглядит:

$$\hat{E}(\xi,t) = Y(t)e^{4\pi^2|\xi|^2 t}.$$

Применим обратное преобразование Фурье.

$$E(x,t) = \bar{\mathcal{F}}_\xi(\hat{E}_3(\xi,t)). \tag{14.4}$$

Применяя фундаментальное свойство преобразования Фурье, находим

$$E(x,t) = \frac{Y(t)e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^n}. \tag{14.5}$$

Список литературы

[1] Владимиров В. С. *Уравнения математической физики.*, М.:Наука., 2000 г., 400с..

[2] Владимиров В.С., Вашарин А.А., Каримова Х.Х., Михайлов В.П., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И. *Сборник задач по уравнениям математической физики.*, М.: ФИЗМАТЛИТ., , 2003 г., 288с..

[3] Шубин М. А., *Лекции об уравнениях математической физики .*, М.: МЦНМО., 2003 г., 303с..

[4] Агранович М. С., *Обобщенные функции и соболевские пространства.*, Лекции НМУ.,2003., 67с..

[5] Салехов Л. Г., *Лекции по уравнениям в частных производных.*, 2011г.

[6] Салехов Л. Г., *Лекции по технике ядер.*, 2012г.

[7] Салехов Л. Г., *Лекции по интегральным преобразованиям в пространстве обобщенных функций.*, 2014г.