

Б.Г. ГРЕБЕНЩИКОВ, С.И. НОВИКОВ

## О НЕУСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ С ЛИНЕЙНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, ПРИВОДИМОЙ К СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЕ

*Аннотация.* Рассматривается задача об устойчивости линейной системы дифференциальных уравнений с линейным запаздыванием, одна из подсистем которой сингулярна. Получены достаточные условия неустойчивости решения данной системы. При решении рассматриваемой задачи применяется преобразование Лапласа.

*Ключевые слова:* неустойчивость, функционально-дифференциальное уравнение, преобразование Лапласа, асимптотическое представление, мероморфная вектор-функция.

УДК: 517.929

*Abstract.* We investigate the stability of linear systems of differential equations with linear delay in the case when one of subsystems is singular. We establish sufficient conditions for the instability of solutions to such systems. We solve the considered problem with the help of the Laplace transformation.

*Keywords:* instability, functional-difference equation, Laplace transformation, asymptotic representation, meromorphic vector function.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается следующая система дифференциальных уравнений с линейным запаздыванием:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{x}(t)}{dt} &= \frac{1}{t} \left( A_1\hat{x}(t) + A_2\hat{x}(\mu t) + B_1\hat{y}(t) + B_2\hat{y}(\mu t) \right), \\ \frac{d\hat{y}(t)}{dt} &= A_3\hat{x}(t) + A_4\hat{x}(\mu t) + B_3\hat{y}(t) + B_4\hat{y}(\mu t),\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\hat{x} = \hat{x}(t)$  и  $\hat{y} = \hat{y}(t)$  являются  $m$ -мерными вектор-функциями времени  $t \geq t_0 > 0$ ,  $\mu = \text{const}$ ,  $0 < \mu < 1$ ,  $A_j, B_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) — постоянные матрицы размерности  $m \times m$ , причем предполагается, что матрицы  $A_2, A_4, B_2$  и  $B_4$  не являются нулевыми.

Целью данной работы является получение достаточных условий на коэффициенты системы (1), которые обеспечивают неустойчивость ее решения. Достаточные условия асимптотической устойчивости ранее были получены в [1]. Отметим, что более простые системы можно найти, например, в монографии [2].

Для того чтобы дать необходимые определения и сформулировать основной результат, приведем систему (1) с помощью замены аргумента  $\tau = \ln(t/t_0)$  к системе с постоянным

запаздыванием

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = A_1x(\tau) + A_2x(\tau - \sigma) + B_1y(\tau) + B_2y(\tau - \sigma), \quad (2)$$

$$\frac{dy(\tau)}{d\tau} = t_0e^\tau (A_3x(\tau) + A_4x(\tau - \sigma) + B_3y(\tau) + B_4y(\tau - \sigma)), \quad (3)$$

где  $\tau \geq 0$ ,  $\sigma = -\ln(\mu)$ .

Для начального момента времени  $\tau = 0$  решение этой системы  $\{x(\tau, \phi_1(\eta)), y(\tau, \phi_2(\eta))\}$  однозначно определяется начальной вектор-функцией  $\phi(\eta) = \{\phi_1(\eta), \phi_2(\eta)\}^\top$ ,  $\eta \in [-\sigma, 0]$  (знак  $^\top$  означает транспонирование вектора). Пусть  $\phi(\eta)$  не является функцией, тождественно равной нулю. Не ограничивая общности, можно считать, что  $\phi_1(\eta)$  и  $\phi_2(\eta)$  являются непрерывно дифференцируемыми вектор-функциями, так как при  $\tau \rightarrow +\infty$  происходит известный процесс “сглаживания” решений ([2], с. 63).

Норму вектора  $w = (w_1, w_2, \dots, w_m) \in R^m$  определим как  $\|w\| = \sum_{j=1}^m |w_j|$ , норму матрицы определяем в соответствии с нормой вектора. Через  $i$  всюду будем обозначать мнимую единицу.

**Определение 1.** Решение  $\{x(\tau, \phi_1(\eta)), y(\tau, \phi_2(\eta))\}^\top$  линейной системы (2)–(3), определенное в момент  $\tau = 0$  вектор-функцией  $\phi(\eta)$ , называется устойчивым, если при любых  $\tau \geq 0$  из неравенства  $\|\phi_1(\eta)\| + \|\phi_2(\eta)\| < K_1$  следует оценка

$$\|x(\tau, \phi_1(\eta))\| + \|y(\tau, \phi_2(\eta))\| < K_2,$$

где  $K_1, K_2$  — некоторые положительные константы.

Всякое решение, не обладающее этим свойством, будем называть неустойчивым.

**Определение 2.** Устойчивое решение  $\{x(\tau, \phi_1(\eta)), y(\tau, \phi_2(\eta))\}^\top$  линейной системы (2)–(3) называется асимптотически устойчивым, если

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} (\|x(\tau, \phi_1(\eta))\| + \|y(\tau, \phi_2(\eta))\|) = 0.$$

Наличие экспоненциального множителя в правой части подсистемы (3) делает ее неограниченной при  $\tau \rightarrow +\infty$ , что не позволяет для исследования асимптотического поведения решения системы (2)–(3) применять традиционные методы (метод функционалов Ляпунова–Красовского ([2], с. 405), метод усреднения в системах, содержащих медленные и быстрые движения ([3], с. 176)). Сказанное означает, что проблема исследования устойчивости рассматриваемой системы требует иных подходов.

С системой (2)–(3) связываем следующие две матрицы:

$$D_1(\lambda) = A_1 + A_2e^{-\lambda\sigma} - \lambda E,$$

$$D_2(p) = B_3 + B_4e^{-\sigma p} - (A_3 + A_4e^{-\sigma p}) (A_1 + A_2e^{-\sigma p} - pE)^{-1} (B_1 + B_2e^{-\sigma p}),$$

где  $E$  — единичная матрица размерности  $m \times m$ .

Основным результатом данной работы является

**Теорема.** *Предположим, что все корни характеристического уравнения*

$$\det D_1(\lambda) = 0 \quad (4)$$

*имеют отрицательные вещественные части и все собственные значения матрицы  $B_3$  также имеют отрицательные вещественные части. Тогда если хотя бы один из корней характеристического уравнения*

$$\det D_2(p) = 0 \quad (5)$$

имеет положительную вещественную часть, то при любой  $\phi(\eta) = \{\phi_1(\eta), \phi_2(\eta)\}^\top \neq 0$  решение  $\{x(\tau, \phi_1(\eta)), y(\tau, \phi_2(\eta))\}$  системы (1) является неустойчивым.

Прежде чем доказывать основной результат, приведем нужные вспомогательные утверждения, в частности, исследуем особенности изображения по Лапласу вектор-функции  $y(\tau)$ . Этому посвящены второй и третий разделы статьи, четвертый раздел содержит доказательство основного результата, а в заключительном пятом разделе приведены примеры, иллюстрирующие эффективность полученных в настоящей работе результатов.

## 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

**Лемма 1.** Пусть все корни характеристического уравнения (4) и все собственные значения матрицы  $B_3$  имеют отрицательные вещественные части. Тогда для решения системы (2)–(3) справедлива следующая экспоненциальная оценка:

$$\begin{aligned} \|x(\tau, \phi_1(\eta))\| &\leq \widehat{L}_1 e^{\beta\tau} \left( \max_{\eta \in [-\sigma, 0]} \|\phi_1(\eta)\| + \max_{\eta \in [-\sigma, 0]} \|\phi_2(\eta)\| \right), \\ \|y(\tau, \phi_2(\eta))\| &\leq \widehat{L}_2 e^{\beta\tau} \left( \max_{\eta \in [-\sigma, 0]} \|\phi_1(\eta)\| + \max_{\eta \in [-\sigma, 0]} \|\phi_2(\eta)\| \right), \quad \tau \geq 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\beta = \text{const}$ ,  $\beta > 0$ ;  $\widehat{L}_j = \text{const}$ ,  $\widehat{L}_j > 1$ ,  $j = 1, 2$ .

*Доказательство.* Перейдем от системы (2)–(3) к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, заданной на конечном промежутке времени  $[0, \sigma]$  ([2], с. 103), положив  $x_{n+1}(\tau) = x(\tau + n\sigma)$ ,  $y_{n+1}(\tau) = y(\tau + n\sigma)$ ,  $\tau \in [0, \sigma]$ ,  $n = -1, 0, +1, \dots$ . В результате приходим к краевой задаче для счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx_{n+1}(\tau)/d\tau = A_1 x_{n+1}(\tau) + A_2 x_n(\tau) + B_1 y_{n+1}(\tau) + B_2 y_n(\tau), \quad (7)$$

$$\varepsilon_n dy_{n+1}(\tau)/d\tau = e^\tau (A_3 x_{n+1}(\tau) + A_4 x_n(\tau) + B_3 y_{n+1}(\tau) + B_4 y_n(\tau)), \quad (8)$$

$$0 \leq \tau \leq \sigma, \quad \varepsilon_n = e^{-n\sigma}/t_0,$$

с краевыми условиями

$$x_{n+1}(0) = x_n(\sigma), \quad y_{n+1}(0) = y_n(\sigma), \quad n \geq 0.$$

Здесь функции  $x_0$  и  $y_0$  на отрезке  $[0, \sigma]$  определяются формулами  $x_0(\tau) = \phi_1(\tau - \sigma)$  и  $y_0(\tau) = \phi_2(\tau - \sigma)$  соответственно.

Ввиду того, что  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow +\infty$ , подсистема (8) является сингулярно возмущенной [3], [4]. Следовательно, совокупность подсистем (7)–(8) можно рассматривать как одну систему, содержащую медленные  $x_n$  и быстрые  $y_n$  переменные. Это обстоятельство позволяет исследовать поведение решения счетной системы (7)–(8) методами, аналогичными использованным ранее одним из авторов в [1]. В результате приходим к экспоненциальной оценке (6) для решения исходной системы (2)–(3).  $\square$

Таким образом, решение системы (2)–(3) при  $\tau \rightarrow +\infty$  растет не быстрее показательной функции с положительным показателем  $\beta$ .

Как и в ([2], с. 11), для исследования устойчивости будем использовать преобразование Лапласа. Через  $F_1(p)$  и  $F_2(p)$  обозначаем вектор-функции, являющиеся преобразованиями Лапласа решений  $x(\tau, \phi_1(\eta))$ ,  $y(\tau, \phi_2(\eta))$  системы (2)–(3), а именно,

$$F_1(p) = \int_0^{+\infty} x(\tau) e^{-p\tau} d\tau, \quad F_2(p) = \int_0^{+\infty} y(\tau) e^{-p\tau} d\tau.$$

Умножив обе части подсистемы (2) на  $e^{-p\tau}$ , а обе части подсистемы (3) — на  $e^{-(p+1)\tau}$  и проинтегрировав по  $\tau$  от нуля до  $+\infty$ , в полуплоскости  $\text{Re } p > \beta$  получаем следующие

уравнения:

$$(A_1 + A_2 e^{-\sigma p} - pE) F_1(p) + (B_1 + B_2 e^{-\sigma p}) F_2(p) + \widehat{f}_1(p) = 0, \quad (9)$$

$$F_2(p+1) = \frac{t_0}{p+1} (B_3 + B_4 e^{-\sigma p}) F_2(p) + \frac{t_0}{p+1} (A_3 + A_4 e^{-\sigma p}) F_1(p) + \frac{1}{p+1} \widehat{f}_2(p), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{f}_1(p) &= e^{-\sigma p} \left[ A_2 \int_{-\sigma}^0 \phi_1(\xi) e^{-p\xi} d\xi + B_2 \int_{-\sigma}^0 \phi_2(\xi) e^{-p\xi} d\xi \right] + \phi_1(0), \\ \widehat{f}_2(p) &= t_0 e^{-\sigma p} \left[ B_4 \int_{-\sigma}^0 \phi_2(\xi) e^{-p\xi} d\xi + A_4 \int_{-\sigma}^0 \phi_1(\xi) e^{-p\xi} d\xi \right] + \phi_2(0). \end{aligned}$$

Поскольку корни характеристического уравнения (4) имеют отрицательные вещественные части, можем, используя соотношение (9), определить  $F_1(p)$  в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > \beta$  формулой

$$F_1(p) = - [A_1 + A_2 e^{-\sigma p} - pE]^{-1} [(B_1 + B_2 e^{-\sigma p}) F_2(p) + \widehat{f}_1(p)].$$

Подставив найденное представление для  $F_1(p)$  в (10), для нахождения вектор-функции  $F_2(p)$  получаем векторное неоднородное функционально-разностное уравнение

$$F_2(p+1) = \frac{t_0}{p+1} (D_2(p) F_2(p) + \widehat{f}(p)). \quad (11)$$

Здесь

$$\widehat{f}(p) = - (A_3 + A_4 e^{-\sigma p}) (A_1 + A_2 e^{-\sigma p} - pE)^{-1} \widehat{f}_1(p) + \frac{1}{t_0} \widehat{f}_2(p).$$

### 3. ПОЛЮСЫ МЕРОМОРФНОЙ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ $F_2(p)$

Вектор-функции  $D_2(p)$  и  $\widehat{f}(p)$  являются мероморфными во всей комплексной плоскости. Их полюсы совпадают с нулями функции  $\det(D_1(p))$ . Поскольку все корни уравнения  $\det D_1(p) = 0$  имеют отрицательные вещественные части, то в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > 0$  вектор-функции  $D_2(p)$  и  $\widehat{f}(p)$  являются аналитическими.

Известно ([2], с. 124), что вектор-функция  $F_2(p)$  в области  $\operatorname{Re} p > \beta$  является аналитической и стремится к нулю, если  $\operatorname{Im} p \rightarrow \pm\infty$ . Следовательно, правее вертикальной прямой  $\operatorname{Re} p = \beta + 1$  справедливо предельное равенство

$$\lim_{|p| \rightarrow +\infty} F_2(p) = 0.$$

Из (11) находим

$$F_2(p) = \frac{p+1}{t_0} D_2^{-1}(p) F_2(p+1) - D_2^{-1}(p) \widehat{f}(p). \quad (12)$$

Используя функционально-разностное уравнение (12), аналитически продолжаем вектор-функции  $F_2(p)$  влево за вертикальную прямую  $\operatorname{Re} p = \beta$ , сохраняя за продолженной функцией прежнее обозначение (такое продолжение возможно, так как аналитическое продолжение удовлетворяет тем же функциональным соотношениям, что и исходная вектор-функция ([5], с. 195)). Очевидно, продолженная вектор-функция  $F_2(p)$  определена во всей комплексной плоскости.

**Лемма 2.** *Множество всех особых точек вектор-функции  $F_2(p)$  состоит из счетного числа полюсов, обусловленных нулями характеристических уравнений (4) и (5).*

*Доказательство.* Используя соотношение (12), определяем вектор-функцию  $F_2(p)$  влево от вертикальной прямой  $\operatorname{Re} p = \beta$  в области  $\beta - 1 + \varepsilon \leq \operatorname{Re} p \leq \beta + \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  — достаточно малое положительное число. Если  $\beta - 1 > 0$ , то возможны следующие два случая.

1) В данной полосе нет корней уравнения (5). В этом случае методами, совершенно аналогичными использованным ранее одним из авторов в работе [6] для исследования асимптотических свойств подобных функционально-разностных уравнений, нетрудно установить, что в данной области вектор-функция  $F_2(p)$  аналитична и при фиксированном значении  $\operatorname{Re} p$  справедливо асимптотическое представление

$$F_2(p+1) = \frac{\phi_2(0)}{p+1} + O\left(\frac{1}{|p+1|^2}\right), \quad \operatorname{Im} p \rightarrow \pm\infty. \quad (13)$$

2) В данной полосе имеются корни характеристического уравнения (5). Тогда первыми особыми точками вектор-функции  $F_2(p)$  (полюсами) будут корни характеристического уравнения. При этом вектор-функция  $F_2(p)$  в точках аналитичности будет по-прежнему удовлетворять асимптотическому представлению (13). Продолжая этот процесс, переходим в область  $\beta - 2 + \varepsilon \leq \operatorname{Re} p \leq \beta - 1 + \varepsilon$ . В том случае, если  $\beta - 2 > -\beta_1 + \varepsilon$ , где  $-\beta_1 = \max_j \operatorname{Re} \lambda_j$ ,

а  $\lambda_j$  — корни характеристического уравнения (4), полюсы вектор-функции по-прежнему определяются корнями характеристического уравнения (5). Если  $\beta - 2 \leq -\beta_1 + \varepsilon$ , то появляются дополнительно полюсы ввиду наличия корней характеристического уравнения (4). Продолжая наши рассуждения, получаем вектор-функцию  $F_2(p)$ , определенную во всей комплексной плоскости.

Пусть  $p_j^2 = r_j^2 k + i q_j^2$  ( $k = 0, -1, \dots$ ), где  $\hat{p}_j = r_j^2 + i q_j^2$  — нули функции  $\det D_2(p)$ ;  $p_j^1 = r_j^1 l + i q_j^1$  ( $l = 0, -1, \dots$ ), где  $\lambda_j = r_j^1 + i q_j^1$  — нули характеристического уравнения (4). Из расположения нулей функции  $\det D_1(p)$  видно, что в области  $\operatorname{Re} p < -\beta_1 + \varepsilon$  вектор-функция  $F_2(p)$  имеет полюсы в точках  $p_j^2$  и  $p_j^1$  и не имеет других особенностей.  $\square$

Установим следующий факт.

**Лемма 3.** *Множество полюсов вектор-функции  $F_2(p)$  не имеет конечных предельных точек.*

*Доказательство.* Известно ([2], с. 206), что существует положительная постоянная  $\bar{d}$ , для которой при всех  $s \neq l$  выполняется неравенство  $|p_s^1 - p_l^1| > \bar{d}$ . Поэтому множество  $\{p_j^1\}$  не имеет конечных предельных точек.

Обратимся ко второму набору полюсов вектор-функции  $F_2(p)$ . Для этого рассмотрим поведение корней уравнения (11) в полосе  $-\beta_1 + \varepsilon \leq \operatorname{Re} p \leq \beta$  при достаточно больших значениях  $|\operatorname{Im} p|$ .

Так как при больших  $|\operatorname{Im} p|$  и фиксированной величине  $\operatorname{Re} p \in [-\beta_1 + \varepsilon, \beta]$  выполняется ([2], с. 460)

$$\| (A_1 + A_2 e^{-\sigma p} - pE)^{-1} \| \rightarrow 0,$$

то при достаточно больших по модулю значениях  $\operatorname{Im} p$  вектор-функция  $D_2(p)$  как угодно близка к вектор-функции  $D_3(p) = B_3 + B_4 e^{-\sigma p}$ . Поэтому  $D_2(p) = B_3 + B_4 e^{-\sigma p} + \bar{\varepsilon}_1(p)$ ,  $\lim_{|p| \rightarrow \infty} \bar{\varepsilon}_1(p) = 0$ , а корни характеристического уравнения (5) при этом как угодно близки к корням характеристического уравнения

$$\det D_3(p) = 0. \quad (14)$$

Расположение же нулей функции  $\det D_3(p)$  хорошо изучено ([2], с. 434), а именно, ввиду того, что заменой  $z = e^{\sigma p}$  характеристическое уравнение (14) преобразуется в алгебраическое уравнение конечной степени, все нули функции  $\det D_3(p)$  содержатся в полосе

$$-C < \operatorname{Re} p < \beta, \quad C = \text{const}, \quad C > 0,$$

и отделены друг от друга. Следовательно, при достаточно больших  $|\operatorname{Im} p|$  нули функции  $\det D_2(p)$  также содержатся в этой полосе и отделены друг от друга.

Покажем, что полюсы вектор-функции  $F_2(p)$  отделены друг от друга. В самом деле, при достаточно больших  $|p|$  таких, что  $\operatorname{Re} p < -\beta_1 + \varepsilon$ ,  $p \neq p_j^1$ , выполняется  $D_1^{-1}(p) = O(\frac{1}{p})$ , причем нули функции  $\det D_1(p)$  отделены друг от друга ([2], с. 466). Тогда при указанных  $p$  полюсы вектор-функции  $F_2(p)$  близки к корням уравнения (14) (при  $p \neq p_j^1$ ) или совпадают с величинами  $p_j^1 = r_j^1 k + i q_j^1$ . Таким образом, при достаточно больших  $|p|$ , лежащих в полуплоскости  $\operatorname{Re} p < -\beta_1 + \varepsilon$ , полюсы вектор-функции  $F_2(p)$  отделены друг от друга.

Докажем теперь это свойство вообще при всех  $p$  из полуплоскости  $\operatorname{Re} p < -\beta_1 + \varepsilon$ . Пусть  $|p| \leq \bar{M}$  ( $\operatorname{Re} p < -\beta_1 + \varepsilon$ ),  $\bar{M}$  — достаточно большое положительное число. Изучим вначале вопрос о расположении нулей и полюсов  $\det D_2(p)$  в данной области.

Очевидно, для матрицы  $A_3 + A_4 e^{-\sigma p}$  обратная матрица будет иметь вид  $\hat{A}_3 + \hat{A}_4 e^{\sigma p}$ , где  $\hat{A}_3, \hat{A}_4$  — матрицы с постоянными компонентами. Рассмотрим вопрос о существовании этой обратной матрицы (именно, тогда  $\det(A_3 + A_4 e^{-\sigma p}) \neq 0$ ). Возможны два следующих случая:

1) матрица  $\hat{A}_3 + \hat{A}_4 e^{\sigma p}$  не существует в конечном числе изолированных точек, принадлежащих нашей области; 2) матрица  $\hat{A}_3 + \hat{A}_4 e^{\sigma p}$  не существует, тем не менее (не изменяя асимптотических свойств системы (2)–(3)) всегда можем слегка изменить компоненты матриц  $A_3, A_4$  так, чтобы имел место первый случай. Сделаем аналогичные предположения и относительно существования обратной матрицы  $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 e^{\sigma p} = (B_1 + B_2 e^{-\sigma p})^{-1}$ . Пусть  $A = (A_1 + A_2 e^{-\sigma p} - pE) \{ (\hat{A}_3 + \hat{A}_4 e^{\sigma p})(B_3 + B_4 e^{-\sigma p})(\hat{B}_1 + \hat{B}_2 e^{\sigma p}) - E \}$ . Тогда для нахождения нулей  $\det D_2(p)$  получаем уравнение

$$\det D_2(p) = \det(A_3 + A_4 e^{-\sigma p}) \det(A_1 + A_2 e^{-\sigma p} - pE)^{-1} \det A \det(B_1 + B_2 e^{-\sigma p}) = 0, \quad |p| \leq M.$$

Матрицы  $(A_3 + A_4 e^{-\sigma p})^{-1}, (A_1 + A_2 e^{-\sigma p} - pE)^{-1}, (B_1 + B_2 e^{-\sigma p})^{-1}$  в области  $|p| \leq M$  не существуют лишь в конечном числе изолированных точек. Следовательно, во всех остальных точках  $|p| \leq M$  получаем уравнение

$$\det A = 0, \tag{15}$$

где матрица  $A = \sum_{j=-1}^2 (M_j + pN_j) e^{j\sigma p}$ , а  $M_j$  и  $N_j$  — постоянные матрицы размерности  $m \times m$ ,

$j = -1, 0, 1, 2$ . Ввиду того, что экспоненциальными множителями матрицы  $A$  являются  $e^{j\sigma p}$ ,  $j = -1, 0, 1, 2$ , уравнение (15) имеет в области  $|p| \leq M$  лишь конечное число изолированных корней ([2], с. 452). В тех точках, где не существует  $(A_1 + A_2 e^{-\sigma p} - pE)^{-1}$ , мероморфная вектор-функция  $D_2(p)$  имеет изолированные полюсы, а в тех точках, в которых не существует матриц  $(A_3 + A_4 e^{-\sigma p})^{-1}, (B_1 + B_2 e^{-\sigma p})^{-1}, D_2(p)$  либо аналитическая, либо имеет изолированные полюсы ([7], с. 300). Следовательно, мероморфная вектор-функция  $D_2(p)$  в области  $|p| \leq M$  имеет конечное число нулей и полюсов. Учитывая зависимость полюсов вектор-функции  $F_2(p)$  от корней характеристических уравнений (4)–(5), получаем, что в области  $|p| \leq M$  вектор-функция  $F_2(p)$  содержит лишь конечное число полюсов. Следовательно, в любой полосе  $-\hat{K} \leq \operatorname{Re} p \leq \beta, \hat{K} = \text{const}, \hat{K} > 0$ , нет предельных точек множества полюсов вектор-функции  $F_2(p)$ .  $\square$

Из леммы 3 следует: расстояния между любыми двумя полюсами вектор-функции  $F_2(p)$  отделены от нуля, и в любой ограниченной области число полюсов вектор-функции  $F_2(p)$  конечно.

Покажем теперь, что решение  $y(\tau, \phi_2(\eta))$  подсистемы (3) экспоненциально устойчиво. Для этого рассмотрим семейство окружностей  $|p| = R_k = k, k = 1, 2, \dots$ . Предполагаем, что эти окружности не содержат полюсов вектор-функции  $F_2(p)$  (в противном случае так их деформируем, чтобы полученные в результате деформации контуры  $\gamma_k$  не содержали

полюсов  $F_2(p)$ ). Перенумеруем модули полюсов  $\bar{p}_j^2$  вектор-функции  $F_2(p)$  так, чтобы выполнялись неравенства

$$0 \leq |\bar{p}_0^2| \leq |\bar{p}_1^2| \leq \dots \leq |\bar{p}_{n_k-1}^2| \leq |\bar{p}_{n_k}^2| \leq \dots$$

Отсюда вытекает упорядоченная неубывающая бесконечная последовательность.

Обозначим систему деформированных контуров через  $\{\gamma_k\}$ . Так как мероморфная вектор-функция  $F_2(p)$  является изображением по Лапласу вектор-функции  $y(\tau, \phi_2(\eta))$  и асимптотическое представление (13) вектор-функции  $F_2(p)$  справедливо на кривых  $\{\gamma_k\}$ , то вектор-функция  $F_2(p)$  допускает асимптотическое разложение ([7], сс. 247, 288) для любых  $p$ , лежащих внутри контура  $\gamma_k$ ,

$$F_2(p) = L_0 + \sum_{j=1}^{n_k} (G_j(p) + L_j), \quad G_k(p) = \sum_{j=1}^{\nu_k} A_{-j}^{(k)} (p - \bar{p}_k)^{-j}. \quad (16)$$

Здесь  $\nu_k$  — кратность полюса  $\bar{p}_k$ ,  $A_{-j}^k = \text{const}$ ,  $j = 1, 2, \dots, \nu_k$ ,  $L_r = \text{const}$ ,  $r = 0, 1, \dots, n_k$ ,  $(A_{-j}^k, L_k$  — коэффициенты разложения в ряд Лорана вектор-функции  $F_2(p)$  в окрестности точки  $\bar{p}_k$  при соответствующих степенях  $(p - \bar{p}_k)^{-j}$ ). Известно ([7], с. 289), что ряд (16) равномерно относительно точек  $|p| < R_k$  сходится к вектор-функции  $F_2(p)$ , при этом первые члены ряда (16) обращаются в бесконечность в точках  $\bar{p}_0^2, \bar{p}_1^2, \dots, \bar{p}_{n_k}^2$ , т. е. там, где обращается в бесконечность вектор-функция  $F_2(p)$ .

Пусть теперь характеристическое уравнение (11) имеет только корни  $p_j$  с отрицательными вещественными частями, т. е. найдется такое постоянное число  $\hat{\varepsilon} : -\beta_1 + \varepsilon < \hat{\varepsilon} < 0$ , что

$$\text{Re } p_j < \hat{\varepsilon}.$$

Из асимптотического представления (13) методами работы [6] получаем

$$\int_{-\hat{\varepsilon}-i\infty}^{-\hat{\varepsilon}+i\infty} F_2(p) e^{p\tau} dp = O(e^{-0.5\hat{\varepsilon}t}). \quad (17)$$

Следовательно, решение  $y(\tau, \phi_2(\eta))$  подсистемы (3) является асимптотически устойчивым.

#### 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть  $\hat{p}$  — корень уравнения (11) с положительной вещественной частью. Рассмотрим полосу  $-\hat{\varepsilon} \leq \text{Re } p \leq \beta$ , в которой содержатся полюсы мероморфной вектор-функции  $F_2(p)$ , расстояние между которыми не меньше некоторого положительного числа  $\hat{d}$ .

Построим систему вложенных замкнутых контуров  $\bar{\gamma}_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ), определяемых следующим образом:

а) левой границей каждого из контуров является прямая  $\text{Re } p = -\hat{\varepsilon}$ ; правой границей — прямая  $\text{Re } p = \beta$ , а верхней и нижней границами являются дуги  $\frown(j)$  и  $\smile(j)$  окружности радиуса  $r_j$  с центром в нуле;

б)  $r_0 = \widehat{M}$ ,  $r_j < r_{j+1}$ ,  $\lim_{j \rightarrow +\infty} r_j = \infty$ ;

в) между любыми двумя последовательными контурами расположен только один полюс вектор-функции  $F_2(p)$ .

Выполнения условия в) можно добиться за счет выбора величин  $r_j$  (более подробно об этом см. [2], с. 207).

Применяя теорему Коши о вычетах к каждому из интегралов

$$\int_{\bar{\gamma}_j} F_2(p) e^{p\tau} dp, \quad j = 1, 2, \dots,$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_{\bar{\gamma}_j} F_2(p)e^{p\tau} dp &= \int_{-\hat{\varepsilon}-iq_{1m}}^{-\hat{\varepsilon}+iq_{1m}} F_2(p)e^{p\tau} dp + \int_{\smile(j)} F_2(p)e^{p\tau} dp + \\ &+ \int_{\beta+iq_{2m}}^{\beta-iq_{2m}} F_2(p)e^{p\tau} dp + \int_{\smile(j)} F_2(p)e^{p\tau} dp = 2\pi i \sum_{j=1}^{n_k} \operatorname{res} (F_2(\bar{p}_j^2)e^{\bar{p}_j^2\tau}). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь  $-\hat{\varepsilon} \pm iq_{1m}$  — точки пересечения окружности радиуса  $r_j$  с центром в начале координат с вертикальной прямой  $\operatorname{Re} p = -\hat{\varepsilon}$ ;  $\beta \pm iq_{2m}$  — точки пересечения этой окружности с вертикальной прямой  $\operatorname{Re} p = \beta$ ;  $\smile(j)$  — верхняя часть дуги окружности, расположенной между вертикальными прямыми  $\operatorname{Re} p = -\hat{\varepsilon}$  и  $\operatorname{Re} p = \beta$ ;  $\smile(j)$  — нижняя часть дуги данной окружности, расположенная между теми же прямыми;  $\operatorname{res} (F_2(\bar{p}_j^2)e^{\bar{p}_j^2\tau})$  — вычет функции  $F_2(p)e^{p\tau}$  относительно точки  $p = \bar{p}_j^2$ , являющейся полюсом мероморфной вектор-функции  $F_2(p)$ .

Ввиду асимптотического представления (13)

$$\int_{\smile(j)} F_2(p)e^{p\tau} dp \rightarrow 0, \quad \int_{\smile(j)} F_2(p)e^{p\tau} dp \rightarrow 0 \quad (19)$$

при  $j \rightarrow +\infty$ .

Пусть  $S_k$  — область, т. е. открытое связное множество, ограниченное контуром  $\bar{\gamma}_k$ . Совокупность точек  $p \in S_k$  вместе с точками, принадлежащими границе  $\bar{\gamma}_k$ , образуют замкнутое множество  $\bar{M}_k$ , причем  $\bar{M}_k \subset \bar{M}_{k+1}$  при всех  $k = 0, 1, \dots$ . Через  $M_{k+1} \setminus M_k$  обозначаем разность множеств  $\bar{M}_{k+1}$  и  $\bar{M}_k$ . Пусть замкнутый контур  $C_k$  является границей множества  $\bar{M}_{k+1} \setminus \bar{M}_k$ . Интегрируя по замкнутому контуру  $\Gamma$ , образованному прямыми  $\operatorname{Re} p = -\hat{\varepsilon}$  и  $\operatorname{Re} p = \beta$ , а также верхней и нижней дугами окружностей контура  $\bar{\gamma}_k$ , расположенными между этими прямыми, получаем

$$\int_{\Gamma} F_2(p)e^{p\tau} dp = \int_{\bar{\gamma}_0} F_2(p)e^{p\tau} dp + \sum_{k=0}^m \int_{C_k} F_2(p)e^{p\tau} dp. \quad (20)$$

Учитывая (18) и (19), из (20) находим

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\omega}^{\beta+i\omega} F_2(p)e^{p\tau} dp \right) &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{-\hat{\varepsilon}-i\omega}^{-\hat{\varepsilon}+i\omega} F_2(p)e^{p\tau} dp \right) + \\ &+ \sum_{j=0}^{\hat{n}_0} \operatorname{res} (F_2(\bar{p}_j^2)e^{\bar{p}_j^2\tau}) + \sum_{k=\hat{n}_0+1}^{+\infty} \operatorname{res} (F_2(\bar{p}_k^2)e^{\bar{p}_k^2\tau}), \end{aligned} \quad (21)$$

где через  $\hat{n}_0$  обозначено количество полюсов в области, ограниченной контуром  $\bar{\gamma}_0$ . Из разложения (16) видно, что вычет вектор-функции  $F_2(p)e^{p\tau}$  относительно точки  $\bar{p}_k^2$  содержит столько членов, какова кратность полюса  $\bar{p}_k^2$ . Сумма вычетов представляет собой алгебраический многочлен степени  $\nu_k - 1$ , содержащий множителями коэффициенты  $A_{-l}^k$  ( $l = 1, 2, \dots, \nu_k$ ), где  $\nu_k$  — кратность полюса  $\bar{p}_k^2$ , а также величину  $e^{\bar{p}_k^2\tau}$ .

Ввиду того, что ряд (16) абсолютно сходится, величины  $e^{\bar{p}_k^2\tau}$  равномерно ограничены в полосе  $-\hat{\varepsilon} \leq \operatorname{Re} p \leq \beta$  при  $\tau \in [0, T]$ . Из (21) с учетом (17) получаем асимптотическое равенство

$$y(\tau) = \int_{\beta-i\omega}^{\beta+i\omega} F_2(p)e^{p\tau} dp = \sum_{j=0}^{+\infty} f_j(\tau)e^{\bar{p}_j^2\tau} + O(e^{-0.5\hat{\varepsilon}\tau}). \quad (22)$$



Ряд в правой части (22) сходится равномерно на любом ограниченном полуинтервале  $(0, T]$  и содержит конечное число экспоненциальных членов с показателями, вещественная часть которых строго положительная. Этот факт означает неустойчивость решения системы (2)–(3), а поэтому и исходной системы (1).  $\square$

## 5. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим асимптотическое поведение системы четвертого порядка, имеющей следующие параметры: запаздывание  $\sigma = 1$ , матрицы  $A_j, B_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) этой системы имеют компоненты

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для данной системы корни характеристического уравнения (4) удовлетворяют условию  $\operatorname{Re} \lambda_j \leq -0.318$ , а собственные значения матрицы  $B_3$  равны  $-1$ . Таким образом, условия теоремы выполнены.

Асимптотическое поведение решения этой системы определяется корнями нелинейного уравнения

$$p^2 e^{2p} + 2pe^{2p} - 5p^2 e^p - 82pe^p - 104e^p - 6pe^{-p} - 12e^{-p} - 2p^2 - 42p - 226 = 0. \quad (23)$$

Наименьший по модулю корень этого уравнения вычислен с помощью пакета прикладных программ MATHCAD и он равен  $\approx -2.972$ , т. е. имеет отрицательную вещественную часть. Тем не менее, поскольку матрица  $B_3^{-1}B_4$  имеет одно из собственных значений  $\approx -5.372$ , при достаточно больших  $\operatorname{Im}(p)$  один из корней уравнения (23) есть  $\bar{p} \approx 1.68 + 300i$ . Поскольку  $\operatorname{Re} \ln(-5.375) \approx 1.68$ , то решение данной системы является неустойчивым.

При заданной начальной вектор-функции  $\phi(\eta) = \{1; 1; 1; 1\}^\top$ ,  $\eta \in [-1, 0]$  и при  $\tau \in [0, 1.5]$  произведен численный расчет решения данной системы четвертого порядка с помощью пакета программ TIME-DELAY-TOOLBOX, разработанного в Уральском государственном университете (краткое описание численных методов, использованных при построении приближенного решения, приведено в [8]). График численного решения, представленный на рис. 1, иллюстрирует неустойчивость решения данной системы.

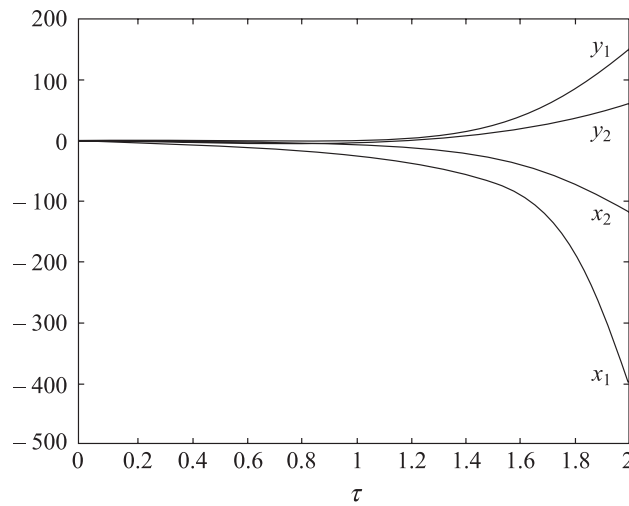


Рис. 1.

Для того чтобы проиллюстрировать, насколько полученные достаточные условия близки к критерию, рассмотрим асимптотическое поведение другой системы четвертого порядка, для которой

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -0.5 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Корни  $\lambda$  уравнения (4) удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re} \lambda \leq -0.318. \quad (24)$$

Матрица  $B_3$  имеет собственные значения, равные  $-2$ . Рассмотрим поведение корней соответствующего нелинейного уравнения

$$25p^2 e^{2p} + 25pe^{2p} - 3.75p^2 e^p + 3.13pe^p + 7.5e^p - 0.25p^2 - 4.75p - 0.25pe^{-p} - 3.38 = 0.$$

Среди всех корней этого уравнения наибольшую вещественную часть имеет корень, равный  $-0.181$ . Приведем еще несколько корней:  $-2.99 \pm 9.4i$ ;  $-3.43 \pm 33i$ ;  $-1.564 \pm 100i$ . Поскольку матрица

$$B_3^{-1} B_4 = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.2 \\ 0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет наибольшее собственное значение  $\hat{\lambda} = 0.15$ , вещественная часть корней  $p_j$  этого уравнения при  $|p_j| \rightarrow \infty$  стремится к величине  $\ln(0.15) \approx -1.89$ . Таким образом, все корни удовлетворяют условию  $\operatorname{Re} p \leq -0.18$ . Используя методы работы [6] и учитывая неравенство (24), можно показать, что решение этой системы экспоненциально устойчиво.

При начальной вектор-функции  $\phi(\eta) = \{1; 1; 1; 1\}^\top$ ,  $\eta \in [-1, 0]$ , при  $\tau \in [0, 10]$  был выполнен численный расчет решения данной системы. График численного решения, представленный на рис. 2, подтверждает асимптотическую устойчивость решения.

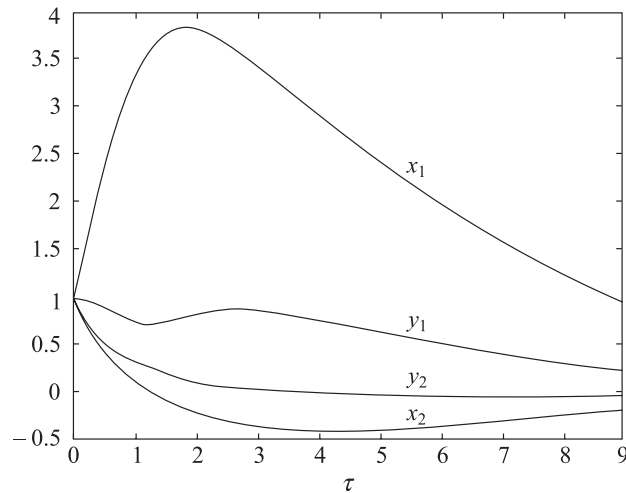


Рис. 2.

Приведенные примеры иллюстрируют тот факт, что асимптотическое поведение системы (2)–(3) определяется знаками вещественных частей корней уравнения (5).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гребенщиков Б.Г. *О существовании асимптотически периодического решения одной системы с запаздыванием* // Изв. Уральск. гос. ун-та. Сер. матем., механ. – 2003. – № 26. – С. 44–54.
- [2] Беллман Р., Кук К. *Дифференциально-разностные уравнения*. – М.: Мир, 1967. – 382 с.
- [3] Митропольский Ю.А. *Метод усреднения в нелинейной механике*. – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
- [4] Шиманов С.Н. *Об устойчивости дифференциально-разностных уравнений* // Устойчивость и нелинейные колебания. – Свердловск: Изд-во Уральск. ун-та, 1991. – С. 95–98.
- [5] Гурса Э. *Курс математического анализа*. Т. 2, ч. 1. М.–Л.: Гостехиздат, 1933. – 271 с.
- [6] Гребенщиков Б.Г. *Об устойчивости стационарных систем линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с запаздыванием, линейно зависящим от времени* // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 7. – С. 69–71.
- [7] Маркушевич А.И. *Краткий курс теории аналитических функций*. – М.: Наука, 1966. – 388 с.
- [8] Kim A.V., Kwon W.H., Pimenov V.G. et al. *Time-delay system toolbox (for use with MATLAB)*. – Beta Version, Korea, Seoul: Seoul National University. – 1998.

Б.Г. Гребенщиков

ведущий инженер, кафедра теоретической механики,  
Уральский государственный университет,  
620083, г. Екатеринбург, пр. Ленина, д. 51

С.И. Новиков

старший научный сотрудник, Институт математики и механики УрО РАН,  
620219, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, д. 16,

e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru

B.G. Grebenshchikov

Leading Engineer, Chair of Theoretical Mechanics,  
Ural State University,  
51 Lenin Ave., Ekaterinburg, 620083 Russia

S.I. Novikov

Senior Researcher,  
Institute of Mathematics and Mechanics,  
Ural Branch of Russian Academy of Sciences,  
16 S. Kovalevskaya str., Ekaterinburg, 620219 Russia,

e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru