М.М. Карчевский, М.Ф. Павлова

# УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ

Учебное пособие
Издание второе, дополненное

ИЗДАТЕЛЬСТВО «Лань»
2015

Излагаются основные методы исследования обобщенных решений линейных и нелинейных краевых задач для уравнений эллиптического и параболического типов.

Книга рассчитана на студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в области математического моделирования и численных методов решения задач математической физики, а также научных сотрудников, чьи интересы лежат в указанной области.

# Оглавление

# Предисловие первому изданию

Книга является расширенным изложением курсов лекций, читавшихся авторами студентам факультета вычислительной математики и кибернетики Казанского государственного университета, специализирующимся в области математического моделирования и численных методов решения задач математической физики.

Цель книги — познакомить читателя с методами исследования граничных задач для эллиптических и параболических уравнений. Мы последовательно придерживаемся концепции обобщенной разрешимости краевых задач. Значительное внимание уделяется исследованию гладкости обобщенных решений.

Книга рассчитана на студентов старших курсов физико-математических факультетов. Она будет полезна аспирантам соответствующих специальностей, а также научным работникам, использующим методы теории уравнений с частными производными.

Предполагается, что читатель знаком с общими университетскими курсами математического цикла. Необходимые дополнительные сведения из теории операторных уравнений, теории обобщенных функций, теории пространств Соболева содержатся в первой главе книги. Большинство результатов этой главы сопровождаются подробными доказательствами.

Многие вопросы, затронутые в книге, активно обсуждались с сотрудниками кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета. Авторы приносят им свою искреннюю благодарность.

Рукопись книги была внимательно прочитана С.И. Соловьевым и Е.М. Федотовым. Авторы постарались максимально учесть их замечания.

Во втором издании книги авторы исправили замеченные опечатки. Существенно расширен материал, относящийся к эллиптическим системам уравнений.

Глава 1
# ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

## § 1. Уравнения в пространстве Гильберта

**1. Уравнения с ограниченным положительно определенным оператором.** Пусть $H$ есть вещественное пространство Гильберта со скалярным произведением $(\cdot\,,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\| = (\cdot\,,\cdot)^{1/2}$. Напомним, что линейный оператор $A : H \to H$ называют *ограниченным*, если существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$\|Au\| \leqslant M\|u\| \quad \forall\, u \in H. \tag{1.1}$$

Норма ограниченного линейного оператора $A$ определяется равенством

$$\|A\| = \sup_{u\in H,\ u\neq 0} \|Au\|/\|u\|\,. \tag{1.2}$$

Линейный оператор называется *положительно определенным*, если существует положительная постоянная $m$ такая, что

$$(Au, u) \geqslant m(u, u) \quad \forall\, u \in H. \tag{1.3}$$

**Лемма 1.1 (Лакс — Мильграм).** *Пусть оператор $A$ ограничен и положительно определен. Тогда уравнение*

$$Au = f \tag{1.4}$$

*при любом $f \in H$ имеет единственное решение.*

Доказательство. При любом $\tau \neq 0$ уравнение (1.4) эквивалентно уравнению

$$u = u - \tau(Au - f).$$

Покажем, что при достаточно малом положительном $\tau$ оператор $Su = u - \tau(Au - f)$ — оператор сжатия. Тогда утверждение теоремы будет вытекать из теоремы Банаха о сжимающих отображениях. Пусть $u,\ v$ — произвольные элементы пространства $H$. Имеем

$$\|Su - Sv\|^2 = \|u - v - \tau(Au - Av)\|^2 = \|u - v\|^2 -$$

$$-2\tau\,(Au-Av,u-v)+\tau^2\|Au-Av\|^2,$$

откуда в силу условий (1.1), (1.3)

$$\|Su-Sv\|^2\leqslant\rho(\tau)\|u-v\|^2,$$

где $\rho(\tau)=1-2\tau m+\tau^2M^2$. Ясно, что $\rho(\tau)<1$ при $\tau\in(0,2m/M^2)$, и, следовательно, при указанных значениях $\tau$ оператор $S$ — оператор сжатия. □[1)]

Замечание 1.1. Из доказательства леммы Лакса — Мильграма вытекает, что решение задачи (1.4) может быть построено при помощи итерационного метода

$$u^{k+1}=u^k-\tau(Au^k-f),\quad k=0,1,2,\,\ldots,$$

сходящегося, если $\tau\in(0,2m/M^2)$, при любом начальном приближении $u^0\in H$.

Упражнение 1.1. Показать, что при выполнении условий леммы 1.1 оператор $A$ имеет ограниченный обратный оператор $A^{-1}$, причем $\|A^{-1}\|\leqslant 1/m$.

Часто оказывается полезным сопоставить линейному ограниченному оператору $A$ билинейную форму $a\colon H\times H\to\mathbb{R}$, определяемую тождеством

$$a(u,v)=(Au,v)\quad\forall\,u,v\in H.\tag{1.5}$$

Форма $a(\cdot\,,\cdot)$ при этом оказывается *ограниченной*, т. е.

$$|a(u,v)|\leqslant M\|u\|\|v\|\quad\forall\,u,v\in H,\tag{1.6}$$

где $M$ — постоянная из неравенства (1.1). Обратно, вследствие теоремы Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве любая ограниченная билинейная форма $a(\cdot\,,\cdot)$ однозначно определяет при помощи тождества (1.5) линейный ограниченный оператор $A$, причем $\|A\|\leqslant M$. Решение уравнения (1.4) можно определить тогда как элемент $u\in H$, удовлетворяющий тождеству

$$a(u,v)=l\,(v)\quad\forall\,v\in H,$$

где $l$ — линейный ограниченный функционал на $H$, задаваемый соотношением

$$l(v)=(f,v)\quad\forall\,v\in H.$$

[1)] Символ «□» обозначает конец доказательства.

**2. Уравнения с положительно определенным оператором.** Пусть $A$ — линейный ограниченный оператор, действующий в пространстве $H$. Используя теорему Рисса, нетрудно показать, что существует однозначно определенный линейный ограниченный оператор $A^* : H \to H$ такой, что

$$(Au, v) = (u, A^* v) \quad \forall\, u, v \in H. \tag{2.1}$$

Оператор $A^*$ называется оператором, *сопряженным* к оператору $A$. Нетрудно убедиться, что $\|A^*\| = \|A\|$.

Линейный ограниченный оператор $A$ называется *самосопряженным*, если $A^* = A$. Для того, чтобы линейный ограниченный оператор $A$ был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая ему билинейная форма $a(\cdot\,,\cdot)$ была *симметрична*, т. е.

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall\, u, v \in H.$$

В случае, когда оператор $A$ самосопряжен, с уравнением (1.4) связывают задачу минимизации квадратичного функционала: найти такой элемент $u \in H$, что

$$F(u) = \min_{v \in H} F(v), \text{ где } F(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v). \tag{2.2}$$

**Теорема 2.1.** *Пусть оператор $A$ самосопряжен и положительно определен. Тогда задачи* (1.4), (2.2) *эквивалентны.*

Доказательство. В силу самосопряженности и положительной определенности оператора $A$ на пространстве $H$ можно ввести новое скалярное произведение $(\cdot\,,\cdot)_a$ при помощи соотношения $(u, v)_a = a(u, v)$. Скалярное произведение $(\cdot\,,\cdot)_a$ называют *энергетическим* скалярным произведением, соответствующим оператору $A$. Вследствие условий (1.6), (1.3) норма, порождаемая энергетическим скалярным произведением (*энергетическая* норма $\|\cdot\|_a$), эквивалентна[1)] исходной норме пространства $H$. Пусть $u$ — решение задачи (1.4). Тогда функционал $F$ можно представить в виде

$$F(v) = \frac{1}{2}(v, v)_a - (u, v)_a.$$

[1)] Нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ называются *эквивалентными* на линейном нормированном пространстве $X$, если существуют постоянные $c_0,\ c_1 > 0$ такие, что $c_0\|u\|_1 \leqslant \|u\|_2 \leqslant c_1\|u\|_1\ \forall\, u \in X$.

После элементарных преобразований получим

$$F(v) = F_0(v) - \frac{1}{2}\|u\|_a^2,$$

где $F_0(v)=\dfrac{1}{2}\|u-v\|_a^2$. Таким образом, задача (2.2) эквивалентна задаче

$$F_0(u) = \min_{v\in H} F_0(v) \tag{2.3}$$

и имеет, очевидно, единственное решение, совпадающее с решением уравнения (1.4). $\square$

**3. Теоремы Фредгольма.** В этом пункте изучаются уравнения вида

$$Tu - u = f, \tag{3.1}$$

где $f$ — заданный элемент гильбертова пространства $H$, а оператор $T : H \to H$ — линейный вполне непрерывный оператор.

Напомним, что оператор, вообще говоря, нелинейный, отображающий линейное нормированное пространство $X$ в линейное нормированное пространство $Y$, называется *вполне непрерывным*, если он переводит всякое ограниченное множество из $X$ в относительно компактное множество пространства $Y$.

Упражнение 3.1. Показать, что линейный вполне непрерывный оператор непрерывен.

**Лемма 3.1.** *Линейный вполне непрерывный оператор отображает всякую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся последовательность.*

Докажем это утверждение применительно к тому случаю, когда линейный вполне непрерывный оператор $T$ действует в гильбертовом пространстве $H$. Пусть $u_n \rightharpoonup u$[1]. Для любого элемента $h \in H$ имеем $(h, Tu_n) = (T^*h, u_n) \to (T^*h, u) = (h, Tu)$, т. е. $Tu_n \rightharpoonup Tu$. Покажем, что на самом деле $Tu_n \to Tu$. Последовательность $\{u_n\}$ слабо сходится и, значит, ограничена. Поэтому из последовательности $\{Tu_n\}$ можно выбрать сильно сходящуюся подпоследовательность $Tu_{n_k}$. Пусть $Tu_{n_k} \to v$. Тогда, тем более, $Tu_{n_k} \rightharpoonup v$. В силу единственности предела слабо сходящейся последовательности $v = Tu$, т. е. $Tu_{n_k} \to Tu$. Понятно, что это же соотношение выполняется для любой сходящейся подпоследовательности последовательности $Tu_n$, поэтому $Tu_n \to Tu$.

[1] Символ «$\rightharpoonup$» обозначает слабую сходимость.

Используя теорему о том, что всякое ограниченное множество гильбертова пространства слабо компактно, нетрудно доказать, что справедлива

**Лемма 3.2.** *Если линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве, переводит всякую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся последовательность, то он вполне непрерывен.*

**Теорема 3.1.** *Пусть $T\colon H \to H$ — вполне непрерывный оператор, $H$ — гильбертово пространство. Тогда сопряженный оператор $T^*$ также вполне непрерывен.*

Доказательство. Будем опираться на лемму 3.2. А именно, предположим, что $u_n \rightharpoonup u$ и покажем, что тогда $T^*u_n \to T^*u$. При доказательстве леммы 3.1 установлено, что $T^*u_n \rightharpoonup T^*u$. Оператор $T$ вполне непрерывен, поэтому на основании леммы 3.1 имеем, что $\|TT^*u_n - TT^*u\| \to 0$. Отсюда вытекает, что

$$\|T^*u_n - T^*u\|^2 = (T^*u_n - T^*u, T^*u_n - T^*u) = \\ = (TT^*u_n - TT^*u, u_n - u) \to 0. \ \square$$

Пусть $A : H \to H$ — линейный оператор. Будем придерживаться в дальнейшем следующих обозначений: $\mathrm{Im}\,(A)$ — *область значений* (*образ*) оператора $A$, т. е.

$$\mathrm{Im}\,(A) = \{h \in H : \ h = Au, \ u \in H\};$$

$\mathrm{Ker}(A)$ — множество нулей (*ядро*) оператора $A$, т. е.

$$\mathrm{Ker}(A) = \{u \in H : \ Au = 0\}.$$

Буквой $I$ будем обозначать единичный оператор.

Пусть $V$ подпространство пространства $H$. Через $V^\perp$ будем обозначать подпространство элементов, ортогональных $V$:

$$V^\perp = \{u \in H : \ (u, v) = 0 \ \forall\, v \in V\}.$$

Элементарно доказывается

**Лемма 3.3.** *Если $A : H \to H$ — линейный ограниченный оператор, то $\mathrm{Ker}(A)$ — замкнутое подпространство пространства $H$.*

Всюду на протяжении этого пункта $T\colon H \to H$ — линейный вполне непрерывный оператор.

**Лемма 3.4.** $\mathrm{Ker}(T-I)$ — *конечномерное подпространство пространства* $H$.

Доказательство. Оператор $T-I$, очевидно, непрерывен, поэтому $\mathrm{Ker}(T-I)$ — подпространство пространства $H$, причем $Tu = u$ для любого $u \in \mathrm{Ker}(T-I)$. Таким образом, сужение оператора $T$ на подпространство $\mathrm{Ker}(T-I)$ есть единичный оператор, но единичный оператор может быть вполне непрерывным только на конечномерном пространстве. $\square$

**Лемма 3.5.** *Существует постоянная* $\gamma > 0$ *такая, что*

$$\|Tu - u\| \geqslant \gamma\|u\| \quad \forall\, u \in \mathrm{Ker}(T-I)^{\perp}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Если утверждение леммы не выполнено, то найдется последовательность элементов $\{u_n\} \subset \mathrm{Ker}(T-I)^{\perp}$ таких, что

$$\|u_n\| = 1, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3.3}$$

а

$$Tu_n - u_n \to 0. \tag{3.4}$$

Последовательность $\{u_n\}$ ограничена, поэтому существуют подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$ и элемент

$$u \in \mathrm{Ker}(T-I)^{\perp} \tag{3.5}$$

такие, что

$$u_{n_k} \rightharpoonup u. \tag{3.6}$$

По лемме 3.1 имеем $Tu_{n_k} \to Tu$, но тогда вследствие (3.4) и (3.6) получаем, что

$$u_{n_k} \to u. \tag{3.7}$$

Вновь используя (3.4), приходим к равенству $Tu - u = 0$, т. е.

$$u \in \mathrm{Ker}(T-I). \tag{3.8}$$

Из (3.5), (3.8) вытекает, что $u = 0$, а вследствие (3.3), (3.7) имеем, что $\|u\| = 1$. Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

**Лемма 3.6.** $\mathrm{Im}\,(T-I)$ — *замкнутое подпространство пространства* $H$.

Доказательство. Линейность множества $\mathrm{Im}\,(T-I)$ очевидна. Осталось доказать его замкнутость. Положим для упрощения записей $S = T - I$. Пусть последовательность $\{u_n\} \subset H$ такова, что
$$Su_n \to v. \tag{3.9}$$
Требуется установить, что $v \in \mathrm{Im}\,(T-I)$. Используя теорему об ортогональном разложении пространства Гильберта, можем написать $u_n = u_n' + u_n''$, где $u_n' \in \mathrm{Ker}\,(T-I)$, $u_n'' \in \mathrm{Ker}\,(T-I)^\perp$. Для любых натуральных $k, n$, используя лемму 3.5, получим
$$\|S(u_k - u_n)\| = \|S(u_k'' - u_n'')\| \geqslant \gamma\|u_k'' - u_n''\|, \quad \gamma = \mathrm{const} > 0,$$
откуда вследствие (3.9) вытекает, что последовательность $\{u_n''\}$ фундаментальна. Это означает, что существует элемент $u \in H$ такой, что $u_n'' \to u$. Вследствие (3.9) и непрерывности оператора $S$ отсюда получаем, что $v = \lim\limits_{n\to\infty} Su_n = \lim\limits_{n\to\infty} Su_n'' = Su$. □

**Теорема 3.2.** *Для того, чтобы при данном $f \in H$ уравнение* (3.1) *было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы*
$$f \in \mathrm{Ker}\,(T^* - I)^\perp.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнение (3.1) разрешимо, т. е. существует элемент $u \in H$ такой, что $f = Tu - u$. Пусть, далее, $v$ — произвольный элемент из $\mathrm{Ker}\,(T^* - I)$. Тогда
$$(f, v) = (Tu - u, v) = (u, T^*v - v) = 0.$$

Достаточность. Пусть $f \in \mathrm{Ker}\,(T^* - I)^\perp$. Покажем, что тогда уравнение (3.1) разрешимо, т. е. $f \in \mathrm{Im}\,(T-I)$. Действительно, если предположить, что $f \notin \mathrm{Im}\,(T-I)$, то по теореме об ортогональном разложении гильбертова пространства $f = f_1 + f_2$, где
$$f_1 \in \mathrm{Im}\,(T-I), \tag{3.10}$$
$$f_2 \in \mathrm{Im}\,(T-I)^\perp, \tag{3.11}$$
но, как установлено при доказательстве необходимости, из (3.10) вытекает, что $f_1 \in \mathrm{Ker}\,(T^* - I)^\perp$, следовательно,
$$f_2 = f - f_1 \in \mathrm{Ker}\,(T^* - I)^\perp. \tag{3.12}$$

С другой стороны, используя (3.11), получаем, что для любого $u \in H$
$$0 = (f_2, Tu - u) = (T^* f_2 - f_2, u),$$
т. е. $T^* f_2 - f_2 = 0$, или
$$f_2 \in \operatorname{Ker}(T^* - I). \tag{3.13}$$
Из (3.12), (3.13) вытекает, что $f_2 = 0$, поэтому $f \in \operatorname{Im}(T - I)$. □

Замечание 3.1. Теорема 3.2 означает, что если $T$ — вполне непрерывный оператор, то пространство $H$ допускает ортогональное разложение
$$H = \operatorname{Im}(T - I) \oplus \operatorname{Ker}(T^* - I). \tag{3.14}$$
Причем, поскольку $T^*$ — также вполне непрерывный оператор, а $T^{**} = T$, то
$$H = \operatorname{Im}(T^* - I) \oplus \operatorname{Ker}(T - I). \tag{3.15}$$
Разложение (3.15) можно интерпретировать так: для разрешимости уравнения
$$T^* u - u = g \tag{3.16}$$
необходимо и достаточно выполнения условия $g \in \operatorname{Ker}(T - I)^{\perp}$.

**Теорема 3.3.** *Для того, чтобы уравнение* (3.1) *было разрешимо при любой правой части, необходимо и достаточно, чтобы*
$$\operatorname{Ker}(T - I) = \{0\}, \tag{3.17}$$
*т. е. соответствующее однородное уравнение имело лишь нулевое решение.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что уравнение (3.1) разрешимо при любой правой части, а $\operatorname{Ker}(S) \neq \{0\}$, где, как и ранее, $S = T - I$. Заметим, что
$$\operatorname{Ker}(S^m) \subset \operatorname{Ker}(S^{m+1}) \quad \forall\, m \geqslant 1. \tag{3.18}$$
Действительно, если $S^m v = 0$, то и $S^{m+1} v = S S^m v = 0$. Покажем, что
$$\operatorname{Ker}(S^m) \neq \operatorname{Ker}(S^{m+1}) \quad \forall\, m \geqslant 1. \tag{3.19}$$
Фиксируем с этой целью произвольно ненулевой элемент $u \in \operatorname{Ker}(S)$ и образуем последовательность элементов $\{u_m\}$ по правилу: $u_1 = u$, $S u_m = u_{m-1}$, $m = 2, 3, \ldots$ Последовательность $\{u_m\}$

определена, так как уравнение (3.1) по предположению разрешимо при любой правой части. Ясно, что

$$S^m u_{m+1} = S^{m-1} S u_{m+1} = S^{m-1} u_m = \dots = S u_2 = u_1 \neq 0.$$

В то же время $S^{m+1} u_{m+1} = S u_1 = 0$, значит, $u_{m+1} \in \operatorname{Ker}(S^{m+1})$, но $u_{m+1} \notin \operatorname{Ker}(S^m)$, и (3.19) доказано. Из (3.18), (3.19) вытекает возможность построения последовательности $\{v_m\}$ такой, что

$$v_m \in \operatorname{Ker}(S^{m+1}),\ v_m \in \operatorname{Ker}(S^m)^{\perp},\ \|v_m\| = 1 \quad \forall\, m \geqslant 1. \tag{3.20}$$

Последовательность $\{Tv_m\}$ компактна, поскольку последовательность $\{v_m\}$ ограничена. Ясно, что

$$\begin{aligned} Tv_m - Tv_j = (Tv_m - v_m) - (Tv_j - v_j) - v_j + v_m = \\ = Sv_m - Sv_j - v_j + v_m. \end{aligned}$$

Считая, что $m > j$, получим вследствие (3.20), что

$$Sv_m,\ Sv_j,\ v_j \in \operatorname{Ker}(S^m), \text{а } v_m \in \operatorname{Ker}(S^m)^{\perp},$$

откуда вытекает, что $\|Tv_m - Tu_j\|^2 = \|Sv_m - Sv_j - v_j\|^2 + \|v_m\|^2 \geqslant 1$. Это противоречит компактности последовательности $\{Tv_m\}$, а стало быть, полной непрерывности оператора $T$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\operatorname{Ker}(T - I) = \{0\}$. Тогда (см. замечание 3.1) уравнение (3.16) разрешимо при любой правой части. Следовательно, как уже доказано, $\operatorname{Ker}(T^* - I) = \{0\}$. Значит, по теореме 3.2 уравнение (3.1) разрешимо при любой правой части. □

Упражнение 3.2. Показать, что если условие (3.17) выполнено, то решение уравнения (3.1) при любой правой части определяется однозначно и существует ограниченный оператор $(T - I)^{-1}$.

**Теорема 3.4.** *Размерности подпространств* $\operatorname{Ker}(T - I)$ *и* $\operatorname{Ker}(T^* - I)$ *совпадают.*

Доказательство. Пусть $\{u_i\}_{i=1}^m$ и $\{v_i\}_{i=1}^n$ – ортонормированные базисы в $\operatorname{Ker}(T - I)$ и $\operatorname{Ker}(T^* - I)$ соответственно. Предположим, что $m < n$. Введем в рассмотрение оператор

$$Uu = Tu + \sum_{i=1}^{m} (u, u_i) v_i \quad \forall\, u \in H. \tag{3.21}$$

Этот оператор вполне непрерывен как сумма вполне непрерывного и конечномерного операторов. Покажем, что уравнение

$$Uu - u = 0 \tag{3.22}$$

имеет лишь нулевое решение. Пусть $z$ — решение этого уравнения. Тогда

$$(v_j, Uz - z) = 0 \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n,$$

или

$$0 = (v_j, Tz - z) + \sum_{i=1}^{m} (z, u_i)(v_j, v_i) = (T^* v_j - v_j, z) + \\ + \sum_{i=1}^{m} (z, u_i)(v_j, v_i) \quad \forall\, j = 1, \ldots, n. \tag{3.23}$$

Используя равенства $T^* v_j - v_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $(v_j, v_i) = 0$ при $j \neq i$, из (3.23) получаем, что $(z, u_i) = 0$, для всех $i = 1, 2, \ldots, m$, то есть

$$z \in \operatorname{Ker}(T - I)^{\perp}. \tag{3.24}$$

Тогда вследствие (3.21) будем иметь $Uz = Tz$, а так как $Uz = z$, то $Tz - z = 0$. Вместе с (3.24) это дает, что $z = 0$. Таким образом, уравнение (3.22) имеет лишь нулевое решение, т. е. уравнение

$$Uu - u = f$$

разрешимо при любой правой части. Пусть $Uu - u = v_{m+1}$. Тогда

$$1 \;=\; \|v_{m+1}\|^2 \;=\; (v_{m+1}, Tu - u) + \sum_{i=1}^{m} (u, u_i)\,(v_{m+1}, v_i) =$$

$$= (T^* v_{m+1} - v_{m+1}, u) + \sum_{i=1}^{m} (u, u_i)(v_{m+1}, v_i) = 0,$$

что нелепо. Таким образом, доказана невозможность неравенства $m < n$. Поскольку $T^{**} = T$, неравенство $n < m$ также невозможно, т. е. $m = n$. $\square$

Полученные результаты позволяют дать полную картину разрешимости уравнений с линейным вполне непрерывным оператором.

1. Имеет место так называемая альтернатива Фредгольма: если $T: H \to H$ — линейный вполне непрерывный оператор, то либо уравнение

$$Tu - u = f \tag{3.25}$$

разрешимо при любой правой части, либо однородное уравнение

$$Tu - u = 0 \tag{3.26}$$

имеет нетривиальное решение.

2. Линейное пространство решений однородного уравнения (3.26) конечномерно. Его размерность совпадает с размерностью пространства решений уравнения

$$T^* u - u = 0. \tag{3.27}$$

3. Для разрешимости уравнения (3.25) необходимо и достаточно, чтобы его правая часть была ортогональна любому решению уравнения (3.27).

4. Если уравнение (3.25) разрешимо, то множество его решений $M$ есть замкнутое афинное множество, параллельное $\operatorname{Ker}(T - I)$, иными словами,

$$M = \widetilde{u} + \operatorname{Ker}(T - I),$$

где $\widetilde{u}$ — некоторое, произвольным образом фиксированное, решение уравнения (3.25). Поэтому существует единственный элемент $u_0 \in M$ с минимальной нормой, причем $u_0 \in \operatorname{Ker}(T - I)^{\perp}$, и, значит, вследствие леммы 3.5 справедлива априорная оценка

$$\|u_0\| \leqslant \gamma^{-1} \|Tu_0 - u_0\| = \gamma^{-1} \|f\|, \quad \gamma = \mathrm{const} > 0 \tag{3.28}$$

($\gamma$ зависит от оператора $T$, но не зависит от $f$).

Замечание 3.2. Все утверждения настоящего пункта без каких-либо изменений переносятся на уравнения вида

$$Tu - Au = f, \tag{3.29}$$

где $T$ — линейный вполне непрерывный оператор, $A$ — линейный ограниченный оператор, действующие в гильбертовом пространстве, причем для оператора $A$ существует линейный ограниченный обратный оператор $A^{-1}$. Действительно, в этом случае уравнение (3.29), очевидно, эквивалентно уравнению

$$A^{-1} T u - u = A^{-1} f$$

с линейным вполне непрерывным оператором $A^{-1} T$.

**4. Нелинейные уравнения с сильно монотонным и липшиц-непрерывным оператором.**

Оператор $A : H \to H$ называется *сильно монотонным*, если существует постоянная $c_0 > 0$ такая, что

$$(Au - Av, u - v) \geqslant c_0 \|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in H. \tag{4.1}$$

Оператор $A : H \to H$ называется *липшиц-непрерывным*, если существует постоянная $c_1$ такая, что

$$\|Au - Av\| \leqslant c_1 \|u - v\| \quad \forall u, v \in H. \tag{4.2}$$

Замечание 4.1. Условия (4.1), (4.2) обобщают на нелинейный случай условия (1.1), (1.3), т. е. условия ограниченности и положительной определенности линейного оператора.

**Теорема 4.1.** *Пусть выполнены условия* (4.1), (4.2). *Тогда уравнение*

$$Au = f \tag{4.3}$$

*имеет единственное решение при любой правой части* $f \in H$. *При этом справедлива априорная оценка*

$$\|u\| \leqslant c_0^{-1}(\|f\| + \|A0\|). \tag{4.4}$$

Доказательство. Уравнение (4.3) при любом $\tau \neq 0$ эквивалентно уравнению

$$u = Su,$$

где $Su = u - \tau(Au - f)$. При этом, как нетрудно убедиться, для любых $u, v \in H$ справедливо неравенство

$$\|Su - Sv\|^2 \leqslant q(\tau)\|u - v\|^2,$$

где $q(\tau) = 1 - 2\tau c_0 + \tau^2 c_1^2$. Ясно, что $q(\tau) < 1$ при $0 < \tau < 2c_0/c_1^2$. При этих условиях оператор $S$ — оператор сжатия. Следовательно, уравнение (4.3) имеет единственное решение при любой правой части. Для получения априорной оценки перепишем уравнение (4.3) в виде

$$Au - A0 = f - A0$$

и умножим обе части последнего равенства скалярно на $u$. Используя затем условие (4.1) и неравенство Коши — Буняковского, получим

$$c_0\|u\|^2 \leqslant (\|f\| + \|A0\|)\|u\|. \ \square$$

Замечание 4.2. Из доказательства теоремы 4.1 вытекает, что решение уравнения (4.3) может быть построено при помощи итерационного метода:

$$u^{k+1} = u^k - \tau(Au^k - f), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

сходящегося, если $\tau \in (0, 2c_0/c_1^2)$, при любом начальном приближении $u^0 \in H$.

## § 2. Элементы теории пространств Соболева

**1. Некоторые определения и обозначения из теории дифференцируемых функций.** Открытое связное множество $\Omega$ точек $n$-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ называется *областью.* Будем писать $\Omega_1 \subset\subset \Omega$, если $\Omega_1$ строго вкладывается в $\Omega$, иными словами, если существует компакт $K$ такой, что $\Omega_1 \subset K \subset \Omega$.

Пусть $u = u(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, — вещественная функция, определенная на некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Частную производную функции $u$ по переменной $x_i$ будем обозначать через $\partial u/\partial x_i$ или через $D_i u$. Будем говорить, что функция $u$ непрерывно дифференцируема $l$ раз на области $\Omega$, если у нее существуют и непрерывны на $\Omega$ все частные производные вплоть до порядка $l$ включительно. Как известно, в этом случае любая смешанная производная

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}, \quad i_1,\ i_2, \ldots,\ i_k \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

порядка $k \leqslant l$ не меняется при любой перестановке индексов $i_1$, $i_2, \ldots$, $i_k$. В связи с этим естественно пользоваться следующим обозначением. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс. Тогда

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

обозначает производную порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

Вектор

$$\nabla u(x) = (D_1 u(x),\ D_2 u(x), \ldots, D_n u(x))$$

называют градиентом функции $u$ в точке $x$.

**2. Основные функциональные пространства. Простейшие неравенства.** Всюду в дальнейшем $\Omega$ — ограниченная область евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $\Gamma$ — граница $\Omega$. Иногда границу области $\Omega$ будем обозначать через $\partial\Omega$.

Через $C(\bar{\Omega})$ будем обозначать линейное пространство непрерывных на $\bar{\Omega}$ вещественных функций с нормой

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} = \max_{x\in\bar{\Omega}} |u(x)|.$$

Для целого неотрицательного $m$ через $C^m(\Omega)$ будем обозначать множество всех функций, у которых существуют и непрерывны на $\Omega$ все производные до порядка $m$ включительно.

Функция $u$ называется *финитной* на $\Omega$, если существует компакт $K \subset \Omega$ такой, что $u(x) = 0$ при $x \notin K$. Множество $K$ называют *носителем* функции $u$ и обозначают через $\operatorname{supp} u$.

Через $C_0^k(\Omega)$ будем обозначать множество $k$ раз дифференцируемых финитных на $\Omega$ функций, $C_0^\infty(\Omega)$ — множество бесконечно дифференцируемых финитных на $\Omega$ функций.

Будем говорить, что функция $u$ принадлежит множеству $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, если она имеет компактный носитель и бесконечное число раз дифференцируема на $\mathbb{R}^n$.

Через $C^m(\bar{\Omega})$ будем обозначать множество всех функций из $C^m(\Omega)$, у которых все производные $D^\alpha u$, $|\alpha| \leqslant m$, ограничены и равномерно непрерывны на $\Omega$. Линейное пространство $C^m(\bar{\Omega})$ является банаховым относительно нормы

$$\|u\|_{C^m(\bar{\Omega})} = \max_{|\alpha|\leqslant m} \max_{x\in\Omega} |D^\alpha u(x)|.$$

Будем говорить, что функция $u \in C(\bar{\Omega})$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\lambda \in (0, 1]$, если существует постоянная $K$ такая, что[1]

$$|u(x) - u(y)| \leqslant K|x - y|^\lambda \quad \forall\, x, y \in \Omega.$$

Через $C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ будем обозначать линейное подмножество функций из $C^m(\bar{\Omega})$, удовлетворяющих вместе со всеми производными до порядка $m$ включительно *условию Гельдера* с показателем $\lambda$. Пространство $C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ есть банахово пространство относительно нормы

$$\|u\|_{C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})} = \|u\|_{C^m(\bar{\Omega})} + \max_{|\alpha|\leqslant m} \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^\lambda}.$$

---

[1] Как обычно, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ для $x \in \mathbb{R}^n$.

Нетрудно видеть, что множество, ограниченное в пространстве $C^{0,\lambda}(\bar{\Omega})$, равномерно ограничено и равностепенно непрерывно и, следовательно, по теореме Арцела компактно в пространстве $C(\bar{\Omega})$.

Через $L_p(\Omega)$, как обычно, будем обозначать линейное вещественное пространство функций, измеримых на $\Omega$ и суммируемых со степенью $p \geqslant 1$ в смысле Лебега. Норма на пространстве $L_p(\Omega)$ задается равенством

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \Big(\int\limits_{\Omega} |u|^p dx\Big)^{1/p}.$$

Пространство $L_\infty(\Omega)$ — линейное пространство функций с конечной нормой

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)|,$$

где $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega} |u(x)|$ — существенная верхняя грань функции $|u|$ на $\Omega$, т. е. нижняя грань всех чисел $N$ таких, что $|u(x)| \leqslant N$ почти всюду на $\Omega$.

Отметим, что $\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = \lim\limits_{p\to\infty} \|u\|_{L_p(\Omega)}$ для любой функции $u \in L_\infty(\Omega)$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $\Omega_1 \subset \Omega$ такое, что $|u(x)| \geqslant \|u\|_{L_\infty(\Omega)} - \varepsilon$ для любого $x \in \Omega_1$, $\operatorname{mes}\Omega_1 > 0$, следовательно, для любого $p > 1$ справедливо неравенство

$$(\|u\|_{L_\infty(\Omega)} - \varepsilon)(\operatorname{mes}\Omega_1)^{1/p} \leqslant \|u\|_{L_p(\Omega)} \leqslant (\operatorname{mes}\Omega)^{1/p}\|u\|_{L_\infty(\Omega)},$$

откуда очевидным образом вытекает доказываемое предельное соотношение.

Приведем некоторые часто используемые в дальнейшем неравенства.

*Неравенство Юнга*

$$\alpha\beta \leqslant (\varepsilon\alpha)^p/p + \left(\frac{\beta}{\varepsilon}\right)^q/q \tag{2.1}$$

справедливо при любых $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$, $p > 1$, $q = p/(p-1)$.

Частный случай этого неравенства при $p = q = 2$ называют *неравенством Коши с $\varepsilon$*.

Пусть $u \in L_{p_1}(\Omega),\ v \in L_{p_2}(\Omega), 1/p_1 + 1/p_2 = 1$. Тогда $uv$ принадлежит $L_1(\Omega)$ и выполнено *неравенство Гельдера*

$$\Big|\int\limits_\Omega u(x)v(x)dx\Big| \leqslant \Big(\int\limits_\Omega |u(x)|^{p_1}dx\Big)^{1/p_1}\Big(\int\limits_\Omega |v(x)|^{p_2}dx\Big)^{1/p_2}. \quad (2.2)$$

Справедливо и *обобщенное неравенство Гельдера*

$$\Big|\int\limits_\Omega u_1(x)u_2(x)\cdots u_m(x)dx\Big| \leqslant \quad (2.3)$$

$$\leqslant \Big(\int\limits_\Omega |u_1(x)|^{p_1}dx\Big)^{1/p_1}\Big(\int\limits_\Omega |u_2(x)|^{p_2}dx\Big)^{1/p_2}\cdots\Big(\int\limits_\Omega |u_m(x)|^{p_m}dx\Big)^{1/p_m},$$

если $u_i \in L_{p_i}(\Omega),\ i = 1, \ldots, m,\ 1/p_1 + 1/p_2 + \cdots + 1/p_m = 1$.

Неравенство (2.2) при $p_1 = p_2 = 2$ называют *неравенством Коши — Буняковского*.

Мы будем также часто использовать аналогичные неравенства для сумм, а именно, *неравенство Коши*

$$\Big|\sum_{i=1}^m a_i b_i\Big| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^m |a_i|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^m |b_i|^2\Big)^{1/2},$$

*неравенство Гельдера*

$$\Big|\sum_{i=1}^m a_i b_i\Big| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^m |a_i|^{p_1}\Big)^{1/p_1}\Big(\sum_{i=1}^m |b_i|^{p_2}\Big)^{1/p_2}, \quad 1/p_1 + 1/p_2 = 1,$$

а также неравенство для сумм, соответствующее обобщенному неравенству Гельдера (2.3).

Часто оказывается полезной следующая формула для вычисления нормы в пространстве $L_p(\Omega)$:

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \sup_{v \in L_q(\Omega),\ v\neq 0}\Big(\int\limits_\Omega uvdx\Big/\|v\|_{L_q(\Omega)}\Big),\ 1/p + 1/q = 1. \quad (2.4)$$

Для ее доказательства достаточно заметить, что вследствие неравенства Гельдера

$$\int\limits_\Omega uvdx \leqslant \|u\|_{L_p(\Omega)}\|v\|_{L_q(\Omega)} \quad \forall\, v \in L_q(\Omega).$$

Полагая $v(x) = |u(x)|^{p-1}\text{sign}\, u(x)$, получим $v \in L_q(\Omega),\ \|v\|_{L_q(\Omega)} =$ $= \|u\|^{p-1}_{L_p(\Omega)}$,

$$\int\limits_\Omega uvdx = \|u\|^p_{L_p(\Omega)},$$

т. е.

$$\int\limits_\Omega uvdx = \|u\|_{L_p(\Omega)}\|v\|_{L_q(\Omega)}.$$

Мы будем использовать также так называемое *интерполяционное неравенство*

$$\|u\|_{L_r(\Omega)} \leqslant \|u\|^\theta_{L_s(\Omega)}\|u\|^{1-\theta}_{L_t(\Omega)}, \tag{2.5}$$

справедливое для $1 \leqslant s \leqslant r \leqslant t < \infty$, $1/r = \theta/s + (1-\theta)/t$, $u \in\ L_s(\Omega) \cap L_t(\Omega)$.

Для доказательства неравенства (2.5) достаточно воспользоваться неравенством Гельдера:

$$\int\limits_\Omega |u|^r dx = \int\limits_\Omega |u|^{\theta r}|u|^{(1-\theta)r} dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_\Omega |u|^{\theta r \frac{s}{\theta r}}\right)^{\theta r/s} \left(\int\limits_\Omega |u|^{(1-\theta)r\frac{t}{(1-\theta)r}}\right)^{(1-\theta)r/t}.$$

При этом надо учесть, что $\theta r/s + (1-\theta)r/t = 1$.

Отметим некоторые свойства пространства $L_p(\Omega)$.

1) Пространство $L_p(\Omega),\ 1 \leqslant p \leqslant \infty$ — полное нормированное пространство.

2) Множество $C(\bar\Omega)$ всюду плотно в $L_p(\Omega),\ 1 \leqslant p < \infty$.

3) Всякая функция $u \in L_p,\ 1 \leqslant p < \infty$, непрерывна в целом, т. е.
$$\lim_{h\to 0}\int\limits_\Omega |u(x+h) - u(x)|^p dx = 0. \tag{2.6}$$

В равенстве (2.6) функция $u$ считается продолженной нулем вне $\Omega$.

**3. Усреднение функций.** Введем в рассмотрение функцию $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ при помощи соотношения:

$$\eta(x) = \begin{cases} C \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что при любом значении положительной постоянной $C$ функция $\eta$ неотрицательна, непрерывна и бесконечное число раз непрерывно дифференцируема на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Постоянную $C$ в дальнейшем будем считать выбранной так, что

$$\int\limits_{R^n} \eta(x)\, dx = 1.$$

Пусть, далее, для любого $\varepsilon > 0$

$$\eta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\, \eta(x/\varepsilon), \; x \in \mathbb{R}^n.$$

Элементарно проверяется, что

$$\operatorname{supp} \eta_\varepsilon = \bar{B}(0, \varepsilon), \qquad \int\limits_{R^n} \eta_\varepsilon(x)\, dx = 1.$$

Здесь и всюду в дальнейшем $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$ — открытый шар радиуса $r$ с центром в точке $x_0$.

Обозначим через $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ линейное пространство функций, определенных почти всюду на $\Omega$ и принадлежащих $L_p(\Omega')$ для любой подобласти $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Для $f \in L_{1,\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ положим

$$f^\varepsilon(x) = \int\limits_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x - y)\, f(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

Функцию $f^\varepsilon$ будем называть *усреднением по Соболеву* функции $f$, функцию $\eta_\varepsilon$ — *усредняющим ядром.*

Заменой переменных (3.1) приводится к виду

$$f^\varepsilon(x) = \int\limits_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(y)\, f(x - y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2}$$

В равенствах (3.1), (3.2) мы принимаем, что функция $f$ продолжена нулем вне области $\Omega$.

**Лемма 3.1.** *Если $K$ — компактное подмножество $\Omega$, то существует такая функция $\psi$ из $C_0^\infty(\Omega)$, что $0 \leqslant \psi \leqslant 1$ и $\psi = 1$ в окрестности $K$.*

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon < \varepsilon'$, $\varepsilon + \varepsilon' < \delta$, где

$$\delta = \operatorname{dist}(K, \partial\Omega) \equiv \inf_{x\in K,\ y\in\partial\Omega} |x - y|.$$

Положим $u = 1$ на компактном множестве $K_{\varepsilon'} = K + \bar{B}(0, \varepsilon')$ и $u = 0$ вне $K_{\varepsilon'}$ и рассмотрим функцию

$$\psi_\varepsilon(x) = \int\limits_{R^n} u(x - y)\eta_\varepsilon(y)\, dy\,.$$

Ясно, что $\operatorname{supp} \psi_\varepsilon \subset K_{\varepsilon+\varepsilon'}$, и $\psi_\varepsilon = 1$ в $K_{\varepsilon'-\varepsilon}$. $\square$

Пусть $\Omega_k$, $k = 1, 2, \ldots,$ — счетная система открытых множеств. Говорят, что эта система образует локально конечное покрытие открытого множества $\Omega$, если $\Omega = \bigcup\limits_{k\geqslant 1} \Omega_k$, $\Omega_k \subset\subset \Omega$ для любого $k \geqslant 1$, и любой компакт $K \subset \Omega$ пересекается лишь с конечным числом множеств $\Omega_k$.

**Теорема 3.1 (о разложении единицы).** *Пусть $\Omega_k$, $k = 1, 2, \ldots,$ есть локально конечное покрытие $\Omega$. Тогда существует система функций $\mu_k$, $k = 1, 2, \ldots,$ такая, что*

$$\mu_k \in C_0^\infty(\Omega_k),\ 0 \leqslant \mu_k(x) \leqslant 1,$$
$$\sum_{k\geqslant 1} \mu_k(x) = 1,\ x \in \Omega. \tag{3.3}$$

Замечание 3.1. Как будет видно из доказательства теоремы, при каждом $x \in \Omega$ в сумме (3.3) отлично от нуля лишь конечное число слагаемых $\mu_k(x)$; система функций $\mu_k$, $k = 1, 2, \ldots,$ называется разложением единицы, соответствующим данному локально конечному покрытию открытого множества $\Omega$.

Доказательство. Установим сначала, что существует другое локально конечное покрытие $\{\Omega'_k\}$ множества $\Omega$ такое, что $\Omega'_k \subset\subset \Omega_k$ для всех $k \geqslant 1$. Построим открытое множество $\Omega'_1 \subset\subset \Omega_1$. Пусть

$$K_1 = \Omega \setminus \bigcup_{k\geqslant 2} \Omega_k.$$

Тогда $K_1 \subset \Omega_1 \subset\subset \Omega$ и $K_1$ замкнуто в $\Omega$. Следовательно, $K_1 \subset\subset \Omega_1$. В качестве $\Omega_1'$ возьмем открытое множество такое, что

$$K_1 \subset\subset \Omega_1' \subset\subset \Omega_1.$$

Система множеств $\Omega_1', \Omega_2, \ldots$ образует локально конечное покрытие $\Omega$. Аналогично построим открытое множество $\Omega_2' \subset\subset \Omega_2$ и т. д. В результате, придем к требуемому покрытию $\Omega_k'$, $k = 1$, $2, \ldots$ По лемме 3.1 существуют функции $\eta_k \in C_0^\infty(\Omega_k)$ такие, что

$$\eta_k(x) = 1,\ x \in \Omega_k',\ 0 \leqslant \eta_k(x) \leqslant 1,$$

причем по построению $\sum\limits_{k \geqslant 1} \eta_k(x) \geqslant 1$ в любой точке $x \in \Omega$. Поскольку $\Omega_k'$ — локально конечное покрытие $\Omega$, то в каждой точке $x \in \Omega$ лишь конечное число функций $\eta_k$ отлично от нуля. Полагая

$$\mu_k(x) = \frac{\eta_k(x)}{\sum\limits_{k \geqslant 1} \eta_k(x)},\ k = 1, 2, \ldots,$$

получим требуемое разложение единицы. $\square$

**Теорема 3.2.** *Для любой функции $f \in L_{1,\,\mathrm{loc}}(\Omega)$ справедливы следующие утверждения:*

1) $f^\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

2) $f^\varepsilon \to f$ *почти всюду на* $\mathbb{R}^n$,

3) *если* $f \in C(\Omega)$, *то* $f^\varepsilon \to f$ *равномерно на любом компакте* $K$ *из* $\Omega$,

4) *если* $f \in L_{p,\ \mathrm{loc}}(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, *то* $f^\varepsilon \to f$ *в* $L_{p,\ \mathrm{loc}}(\Omega)$.

Доказательство. 1) Из (3.1) сразу вытекает, что функция $f^\varepsilon$ обращается в нуль в точках, удаленных от области $\Omega$ на расстояние, большее $\varepsilon$. Пусть, как обычно, $e_i$ — орт координатной оси $x_i$. Ясно, что для почти всех $y \in \Omega$ и при любом $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\ [\eta_\varepsilon\,(x + he_i - y)\ -\ \eta_\varepsilon\,(x - y)]\ f(y) = \frac{\partial \eta_\varepsilon(x - y)}{\partial x_i} f(y),$$

причем

$$\left|\frac{1}{h}\ [\eta_\varepsilon\,(x+he_i-y)\ -\ \eta_\varepsilon\,(x-y)]\ f(y)\right| =$$
$$= \left|\frac{\partial\eta_\varepsilon(x+\theta he_i-y)}{\partial x_i} f(y)\right| \leqslant M_\varepsilon |f(y)|,$$

где $\theta \in (0,1)$, $M_\varepsilon$ — постоянная, зависящая от $\varepsilon$. Поэтому вследствие теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла существует

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^\varepsilon(x+he_i)-f^\varepsilon(x)}{h} = \frac{\partial f^\varepsilon(x)}{\partial x_i} = \int\limits_\Omega \frac{\partial\eta_\varepsilon(x-y)}{\partial x_i} f(y)dy.$$

Совершенно аналогично устанавливаются существование производных любого порядка функции $f^\varepsilon$ и равенство

$$D^\alpha f^\varepsilon(x) \ = \int\limits_\Omega D_x^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)\, f(y)\, dy, \tag{3.4}$$

справедливое для любого мультииндекса $\alpha$ [1)].

2) Поскольку $f \in L_{1,\ \mathrm{loc}}(\Omega)$, то почти все точки $\Omega$ — точки Лебега этой функции (см. [30]), т. е.

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\mathrm{mes}\ B(x,r)} \int\limits_{B(x,r)} |f(x)-f(y)|dy = 0$$

почти всюду на $\Omega$. Следовательно,

$$|f^\varepsilon(x)-f(x)| = \left|\int\limits_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)(f(x)-f(y))dy\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon^n}\int\limits_{B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)|f(x)-f(y)|dy \leqslant$$
$$\leqslant C\frac{1}{\mathrm{mes}\ B(x,\varepsilon)}\int\limits_{B(x,\varepsilon)} |f(x)-f(y)|dy \to 0$$

[1)] В обозначении $D_x^\alpha$ нижний индекс показывает, что дифференцирование ведется по $x$.

при $\varepsilon \to 0$ почти всюду на $\Omega$.

3) Пусть $K \subset \Omega$ — компакт. Выберем компакт $K_1$ такой, что $K \subset\subset K_1 \subset \Omega$. Повторяя рассуждения предыдущего пункта, получим

$$|f^\varepsilon(x) - f(x)| \leqslant C|f(x) - f(y)| \quad \forall\, x \in K,\ |x-y| \leqslant \varepsilon. \tag{3.5}$$

Здесь постоянная $C$ зависит лишь от размерности пространства. При достаточно малом $\varepsilon$ можно считать, что $y \in K_1$. Функция $f$ равномерно непрерывна на $K_1$. Поэтому из оценки (3.5) очевидным образом вытекает равномерная на $K$ сходимость $f^\varepsilon$ к $f$ при $\varepsilon \to 0$.

4) Пусть теперь $f \in L_{p,\,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega$ — подобласти $\Omega$. Покажем сначала, что при достаточно малых положительных $\varepsilon$

$$\|f^\varepsilon\|_{L_p(\Omega_1)} \leqslant \|f\|_{L_p(\Omega_2)}. \tag{3.6}$$

При $1 < p < \infty$, используя неравенство Гельдера, нетрудно получить, что для $x \in \Omega_1$ и достаточно малых положительных $\varepsilon$

$$|f^\varepsilon(x)| = \left|\int\limits_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) f(y)\,dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon^{1-1/p}(x-y)\eta_\varepsilon^{1/p}(x-y)|f(y)|\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)\,dy\right)^{1-1/p} \left(\int\limits_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)|f(y)|^p\,dy\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int\limits_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)|f(y)|^p\,dy\right)^{1/p} \leqslant \left(\int\limits_{\Omega_2} \eta_\varepsilon(x-y)|f(y)|^p\,dy\right)^{1/p}.$$

Интегрируя это неравенство по $\Omega_1$ и используя затем теорему Фубини, получим

$$\int\limits_{\Omega_1} |f^\varepsilon(x)|^p\,dx \leqslant \int\limits_{\Omega_1}\left(\int\limits_{\Omega_2} \eta_\varepsilon(x-y)|f(y)|^p\,dy\right)dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_2} |f(y)|^p \left( \int\limits_{\Omega_1} \eta_\varepsilon(x-y)dx \right) dy = \int\limits_{\Omega_2} |f(y)|^p dy,$$

что означает справедливость неравенства (3.6).

При $p = 1$ неравенство (3.6) получается непосредственно без применения неравенства Гельдера.

Пусть $\delta > 0$, выберем $g \in C(\Omega_2)$ так, что $\|f - g\|_{L_p(\Omega_2)} \leqslant \delta/3$. Тогда

$$\|f^\varepsilon - f\|_{L_p(\Omega_1)} \leqslant \|f^\varepsilon - g^\varepsilon\|_{L_p(\Omega_1)} + \|g^\varepsilon - g\|_{L_p(\Omega_1)} + \|g - f\|_{L_p(\Omega_1)} \leqslant$$
$$\leqslant 2\|f - g\|_{L_p(\Omega_2)} + \|g^\varepsilon - g\|_{L_p(\Omega_1)} \leqslant 2\delta/3 + \|g^\varepsilon - g\|_{L_p(\Omega_1)}.$$

Вследствие равномерной сходимости $g^\varepsilon \to g$ на $\bar{\Omega}_1$ можно указать такое $\varepsilon > 0$, что $\|g^\varepsilon - g\|_{L_p(\Omega_1)} \leqslant \delta/3$. $\square$

**4. Обобщенные функции.** Пусть, как и раньше, $C_0^\infty(\Omega)$ есть множество бесконечно дифференцируемых финитных на $\Omega$ функций.

Говорят, что последовательность $\{\varphi_k\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ сходится к функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, если существует множество $K \subset\subset \Omega$ такое, что $\operatorname{supp} \varphi_k \subset K$ для любого $k = 1, 2, \ldots$ и $D^\alpha \varphi_k \to D^\alpha \varphi$ при $k \to \infty$ равномерно на $K$ для любого мультииндекса $\alpha$.

Линейное множество функций $C_0^\infty(\Omega)$, наделенное указанной сходимостью, называют пространством *пробных* функций и обозначают через $\mathcal{D}(\Omega)$.

Всякий линейный непрерывный на пространстве $\mathcal{D}(\Omega)$ функционал называется *обобщенной* функцией. Обобщенные функции часто также называют *распределениями*. Множество всех распределений обозначают через $\mathcal{D}'(\Omega)$. Значение функционала $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ на элементе $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ обозначают через $\langle f, \varphi \rangle$. Непосредственно из определений вытекает, что форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ билинейна.

Поясним, что непрерывность функционала $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ означает, что если последовательность $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ сходится к $\varphi$, то $\langle f, \varphi_k \rangle \to \langle f, \varphi \rangle$ при $k \to \infty$.

Говорят, что последовательность распределений $\{f_k\}$ из $\mathcal{D}'(\Omega)$ сходится к распределению $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, если $\langle f_k, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle$ при $k \to \infty$ для любого $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Приведем примеры обобщенных функций.

1. Регулярные распределения. Пусть $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Определим функционал $f_u$ на пространстве $\mathcal{D}(\Omega)$ соотношением

$$f_u(\varphi) = \int\limits_\Omega u\varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{4.1}$$

Линейность функционала $f_u$ очевидна. Докажем его непрерывность. Для этого достаточно убедиться, что если $\varphi_k \to 0$ в пространстве $\mathcal{D}(\Omega)$, то $f_u(\varphi_k) \to 0$ при $k \to \infty$. По определению сходимости в пространстве $\mathcal{D}(\Omega)$ существует компакт $K \subset \Omega$ такой, что $\operatorname{supp} \varphi_k \subset K$ для любого $k = 1, 2 \ldots$ и последовательность $\{\varphi_k\}$ равномерно стремится к нулю на $K$, но тогда

$$|f_u(\varphi_k)| = \Bigl|\int\limits_K u\varphi_k dx\Bigr| \leqslant \max_{x \in K} |\varphi_k(x)| \int\limits_K |u(x)| dx \to 0$$

при $k \to \infty$. Таким образом, всякая функция $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ порождает обобщенную функцию $f_u$, определяемую соотношением (4.1). Такие распределения принято называть *регулярными*.

**Теорема 4.1.** *Пусть $u, v \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $f_u = f_v$. Тогда $u = v$ почти всюду на $\Omega$.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что если

$$f_u(\varphi) = \int\limits_\Omega u\varphi dx = 0 \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

то $u = 0$ почти всюду на $\Omega$. Заметим, что если $\varphi \in C_0(\Omega)$, то ее усреднение $\varphi^\varepsilon$ принадлежит $\mathcal{D}(\Omega)$ для всех достаточно малых положительных $\varepsilon$, и $\varphi^\varepsilon \to \varphi$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно на $\Omega$ (см. теорему 3.2). Можно считать поэтому, что

$$\int\limits_\Omega u\varphi dx = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_0(\Omega). \tag{4.2}$$

Пусть $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ — подобласть $\Omega$, $\varepsilon > 0$. Тогда $\int\limits_{\Omega_1} |u| dx$ существует, и по теореме об абсолютной непрерывности интеграла Лебега найдется положительное $\delta$ такое, что для любого измеримого множества $A \subset \Omega_1$, у которого мера меньше $\delta$, справедлива оценка $\int\limits_A |u|dx \leqslant \varepsilon$. Функция $\operatorname{sign} u$, а, следовательно, и $\chi_{\Omega_1} \operatorname{sign} u$ измеримы, поэтому по теореме Лузина найдется такая функция $\psi \in C_0(\Omega)$, что $\operatorname{supp} \psi \subset \Omega_1$, $|\psi(x)| \leqslant 1$ $\forall\, x \in \Omega_1$ и $\operatorname{mes} \Omega_{u,\psi} \leqslant \delta$, где

$$\Omega_{u,\psi} = \{x \in \Omega : \ \psi(x) \neq \chi_{\Omega_1}(x) \operatorname{sign} u(x)\},$$

$\chi_{\Omega_1}$ —характеристическая функция множества $\Omega_1$. Используя (4.2), получим

$$\int\limits_{\Omega_1} |u(x)|dx = \int\limits_{\Omega} u(x)\chi_{\Omega_1}(x) \operatorname{sign} u(x)dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega} u(x)\psi(x)dx + \int\limits_{\Omega} u(x)(\chi_{\Omega_1}(x) \operatorname{sign} u(x) - \psi(x))dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega_{u,\psi}} u(x)(\chi_{\Omega_1}(x) \operatorname{sign} u(x) - \psi(x))dx \leqslant 2 \int\limits_{\Omega_{u,\psi}} |u(x)|dx,$$

следовательно,

$$\int\limits_{\Omega_1} |u(x)|dx \leqslant 2\varepsilon,$$

и, поскольку $\varepsilon$ — произвольное положительное число, то $u(x) = 0$ почти всюду на $\Omega_1$, а, значит, в силу произвольности $\Omega_1$ и на $\Omega$. $\square$

Из только что доказанной теоремы вытекает, что если, как обычно, не различать эквивалентные измеримые функции, т. е. функции, совпадающие почти всюду на $\Omega$, то соответствие между функциями из $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ и обобщенными функциями, задаваемое формулой (4.1), является взаимнооднозначным. В связи с этим можно отождествить пространство $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ с линейным пространством регулярных распределений и принять, что для $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$

$$\langle u, \varphi \rangle = \int\limits_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

2. Функция Дирака ($\delta$-функция). Этот пример показывает, что множество обобщенных функций не исчерпывается ре-

гулярными распределениями. Пусть $x_0 \in \Omega$. Определим функционал $\delta_{x_0}$ на пространстве $\mathcal{D}(\Omega)$, полагая

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0) \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{4.3}$$

Элементарно проверяется, что функционал $\delta_{x_0}$ линеен и непрерывен на $\mathcal{D}(\Omega)$, т. е. является обобщенной функцией. Покажем, что не существует функции $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ такой, что

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \int\limits_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{4.4}$$

т. е. $\delta_{x_0}$ не является регулярным распределением. Предположим противное, и пусть функция $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ такова, что тождество (4.4) выполняется. Функция $\varphi(x) = |x - x_0|^2\varphi_0(x)$, где $\varphi_0(x)$ — произвольная функция из $\mathcal{D}(\Omega)$, принадлежит $\mathcal{D}(\Omega)$. Поэтому

$$\int\limits_{\Omega} u(x)|x - x_0|^2\varphi_0(x)dx = \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = 0 \quad \forall\, \varphi_0 \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Таким образом, получаем, что функция $f(x) = u(x)|x - x_0|^2$, принадлежащая пространству $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\Omega} f(x)\varphi_0(x)dx = 0 \quad \forall\, \varphi_0 \in \mathcal{D}(\Omega).$$

По теореме 4.1 отсюда вытекает, что $f(x) = 0$ почти всюду в области $\Omega$. Поэтому и $u(x) = 0$ почти всюду в области $\Omega$. Тогда вследствие (4.4), (4.3) получаем

$$\varphi(x_0) = 0 \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

что нелепо. Итак, установлено, что обобщенная функция $\delta_{x_0}$ не является регулярной. Ее принято называть *$\delta$-функцией Дирака*, сосредоточенной в точке $x_0$. Часто ее обозначают через $\delta(x - x_0)$. Вообще, нерегулярные обобщенные функции называют сингулярными.

**5. Дифференцирование обобщенных функций.** Для функции $u \in C^1(\Omega)$, используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\varphi dx = -\int\limits_\Omega u\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{5.1}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$. Поскольку $u, \partial u/\partial x_i \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, равенство (5.1) можно представить в виде

$$\langle u, \partial\varphi/\partial x_i\rangle = -\langle \partial u/\partial x_i, \varphi\rangle \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{5.2}$$

трактуя $u$ и $\partial u/\partial x_i$ как регулярные распределения.

Соотношение (5.2) можно положить в основу определения производной произвольной обобщенной функции, считая, что производная обобщенной функции $u$ по переменной $x_i$ есть линейный функционал на пространстве $\mathcal{D}(\Omega)$, обозначаемый через $\partial u/\partial x_i$ и задаваемый тождеством:

$$\langle \partial u/\partial x_i, \varphi\rangle = -\langle u, \partial\varphi/\partial x_i\rangle \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{5.3}$$

Непосредственно из определения понятия сходимости в пространстве $\mathcal{D}(\Omega)$ вытекает, что этот функционал непрерывен. Таким образом, любая обобщенная функция $u$ имеет производную. Понятно, что производная $\partial u/\partial x_i$ однозначно определяется по $u$. Аналогичным образом при помощи тождества

$$\langle D^\alpha u, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, D^\alpha \varphi\rangle \quad \forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{5.4}$$

(также основанного на формуле интегрирования по частям) вводится понятие производной любого порядка от обобщенной функции $u$.

Непосредственно из определения вытекает, что любая обобщенная функция является бесконечное число раз дифференцируемой, а операция дифференцирования является линейной, т. е.

$$D^\alpha(au_1 + bu_2) = aD^\alpha u_1 + bD^\alpha u_2 \quad \forall\,u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega),\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Приведем пример вычисления производной от обобщенной функции, показывающий, в частности, что производной регулярного распределения может служить сингулярная обобщенная функция. Пусть $\Omega = \{-1 < x < 1\}$ — интервал на вещественной оси. Введем в рассмотрение *функцию Хевисайда*

$$u(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0, \\ 1, & \phantom{-}0 \leqslant x < 1. \end{cases}$$

Для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ имеем

$$\langle u, \varphi' \rangle = \int\limits_{-1}^{1} u(x)\varphi'(x)dx = \int\limits_{0}^{1} \varphi'(x)dx = -\varphi(0) = -\langle \delta_0, \varphi \rangle,$$

т. е. производной функции Хевисайда (регулярной обобщенной функции) является $\delta$-функция, сосредоточенная в нуле.

**6. Обобщенные производные в смысле Соболева.**

**Определение 6.1.** *Функция $u(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ имеет обобщенную производную по переменной $x_i$, если существует такая функция $u_i^*(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, что*

$$\int\limits_{\Omega} u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = -\int\limits_{\Omega} u_i^*(x) v\, dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Нетрудно видеть, что обобщенная производная, если она существует, определяется единственным образом. Действительно, если $\widetilde{u}_i^*$ — также обобщенная производная функции $u$ по переменной $x_i$, то

$$\int\limits_{\Omega} (\widetilde{u}_i^* - u_i^*) v\, dx = 0 \quad \forall\, v \in C_0^\infty(\Omega),$$

откуда, как показано в теореме 4.1, следует, что $\widetilde{u}_i^* = u_i^*$. Если функция $u \in C^1(\Omega)$, то ее производные $\partial u/\partial x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, совпадают с обобщенными производными.

Для обобщенных производных далее будем применять те же обозначения, что и для производных, понимаемых в классическом смысле.

Непосредственно из определения вытекает, что операция обобщенного дифференцирования является линейной, т. е. для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial(\alpha u + \beta v)}{\partial x_i} = \alpha\frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta\frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Обобщенные производные высших порядков определяются аналогично. А именно, функция

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n,$$

называется обобщенной производной функции $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, если

$$\int\limits_{\Omega} u(x) D^{\alpha} v(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega} D^{\alpha} u(x) v(x)\, dx \quad \forall\, v \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Далее всюду будем считать, что $D^0 u = u$.

Линейное пространство функций, имеющих на области $\Omega$ все обобщенные производные до порядка $k \geqslant 1$ включительно, будем обозначать через $W^k(\Omega)$.

Приведем примеры, иллюстрирующие различия между понятиями классической и обобщенной производной.

Пример 6.1. Функция $u(x) = |x|$ на интервале $(-1, 1)$ дифференцируема всюду, кроме точки $x = 0$. При этом функция $w(x) = \operatorname{sign}(x)$ является обобщенной производной функции $u$. В самом деле, для любой функции $v \in C_0^{\infty}(-1, 1)$ имеем

$$\int\limits_{-1}^{1} |x| v'(x)\, dx = -\int\limits_{-1}^{0} x v'(x)\, dx + \int\limits_{0}^{1} x v'(x)\, dx,$$

откуда, применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int\limits_{-1}^{1} |x| v'(x)\, dx = \int\limits_{-1}^{0} v(x)\, dx - \int\limits_{0}^{1} v(x)\, dx = -\int\limits_{-1}^{1} \operatorname{sign}(x) v(x)\, dx.$$

Пример 6.2. Пусть функция $u$ определена на интервале $(-1, 1)$ соотношением

$$u(x) = \begin{cases} -x, & x \leqslant 0, \\ 1 + x, & x > 0. \end{cases}$$

Ясно, что $u \in L_1\,(-1, 1)$. Функция $u$ дифференцируема на интервале $(-1, 1)$ всюду, кроме точки $x = 0$. Ее производная

$$u'(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

принадлежит $L_1\,(-1, 1)$, но не является обобщенной производной функции $u$. Действительно, в противном случае должно было бы выполняться тождество

$$\int\limits_{-1}^{1} uv'\,dx = -\int\limits_{-1}^{1} u'v\,dx \quad \forall\, v \in C_0^\infty(-1,1). \tag{6.1}$$

Используя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int\limits_{-1}^{1} uv'\,dx = \int\limits_{-1}^{0} uv'\,dx + \int\limits_{0}^{1} uv'\,dx = -\int\limits_{-1}^{1} u'v\,dx - v(0),$$

и поскольку, вообще говоря, $v(0) \neq 0$, тождество (6.1) не выполняется, т. е. функция $u'$ не является обобщенной производной функции $u$.

Этот пример наводит на мысль, что функция, имеющая обобщенную производную, должна быть непрерывной. В одномерном случае это действительно так. Более того, всякая функция, имеющая обобщенную производную на интервале $(a,b)$, абсолютно непрерывна на отрезке $[a,b]$.

Нетрудно показать, что и в случае произвольного числа измерений функция, непрерывная и кусочно непрерывно дифференцируемая на некоторой области, имеет все обобщенные производные первого порядка.

Однако, как показывает следующий пример, при $n \geqslant 2$ функция, имеющая обобщенные производные, не обязательно является ограниченной.

Пример 6.3. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, содержащая начало координат, $u(x) = \ln\ln(1 + 1/r)$, $r = |x|$. Функция $u$ и ее первые производные

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{r^2(1+r)\ln(1+1/r)},\ i = 1, \ldots, n,$$

неограниченно возрастают при $r \to 0$. Нетрудно убедиться, что функция $u$ принадлежит $L_p(\Omega)$ для любого $p \geqslant 1$, и функции $\partial u/\partial x_i$ принадлежат $L_p(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, при $1 \leqslant p \leqslant n$. Покажем, что $\partial u/\partial x_i$ — обобщенные производные функции $u$. Для любой функции $v \in C_0^\infty(\Omega)$ можно написать

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \ln\ln(1 + 1/r)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial x_i} \ln\ln(1 + 1/r)\,dx,$$

где $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \ r > \varepsilon\}$. Используя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial x_i} \ln\ln(1+1/r)\,dx = -\int\limits_{\Omega_\varepsilon} v \frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx + \\ + \int\limits_{|r|=\varepsilon} v \ln\ln(1+1/r)\cos(\nu, x_i)\,dx,$$

где $\nu$ — нормаль, внешняя к $\Omega_\varepsilon$. Нетрудно убедиться, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|r|=\varepsilon} v \ln\ln(1+1/r)\cos(\nu, x_i)\,dx = 0,$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx = -\int\limits_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx \quad \forall\, v \in C_0^\infty(\Omega),$$

т. е. $\partial u/\partial x_i$ — обобщенная производная функции $u$.

**7. Пространства Соболева.** Множество функций из пространства $L_p(\Omega)$, имеющих обобщенные производные $D^\alpha u$, принадлежащие $L_p(\Omega)$ для всех $\alpha$, $|\alpha| \leqslant s$, $s \geqslant 1$, образует линейное пространство. Вводя на этом пространстве норму

$$\|u\|_{W_p^s(\Omega)} = \Big(\int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|\leqslant s} |D^\alpha u|^p\,dx\Big)^{1/p} \tag{7.1}$$

при конечных $p \geqslant 1$ и норму

$$\|u\|_{W_\infty^s(\Omega)} = \max_{|\alpha|\leqslant s} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \big|D^\alpha u(x)\big| \tag{7.2}$$

при $p = \infty$, получим линейное нормированное пространство, называемое *пространством Соболева* и обозначаемое через $W_p^s(\Omega)$.

**Упражнение 7.1.** Показать, что при любых $p \geqslant 1$, $s \geqslant 1$ пространство $W_p^s(\Omega)$ есть банахово пространство.

Чаще всего в книге используется пространство Соболева $W_2^s(\Omega)$. Это пространство становится пространством Гильберта, если ввести на нем скалярное произведение

$$(u, v)_{W_2^s(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leqslant s} D^\alpha u \, D^\alpha v \, dx.$$

Пространство $W_2^s(\Omega)$ будем обозначать, обычно, через $H^s(\Omega)$. Замыкание по норме (7.1) линейного множества функций $C_0^\infty(\Omega)$ образует замкнутое подпространство пространства $W_p^s(\Omega)$, обозначаемое через $\overset{\circ}{W}{}_p^s(\Omega)$. При $p = 2$ для этого подпространства будем использовать также обозначение $H_0^s(\Omega)$.

**8. Аппроксимация гладкими функциями.** В этом пункте обсуждаются вопросы аппроксимации элементов пространств $W_p^s(\Omega)$ гладкими функциями. При этом существенно используются функции, усредненные по Соболеву.

**Теорема 8.1.** *Пусть $u \in W_p^s(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$. Тогда:*

1) $u^\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *для любого* $\varepsilon > 0$,

2) $u^\varepsilon \to u$ *в* $W_p^s(\Omega')$ *при* $\varepsilon \to 0$ *для любой подобласти* $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы установлено при доказательстве теоремы 3.2.

Далее, нетрудно видеть, что непосредственно из (3.4), с. 28, следует, что

$$D^\alpha u^\varepsilon(x) \;=\; (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega} D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x - y) \, u(y) \, dy \,.$$

Пусть теперь $\Omega' \subset\subset \Omega$ — подобласть области $\Omega$ и $\varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Тогда функция $\mu(y) = \eta_\varepsilon(x - y)$ принадлежит $C_0^\infty(\Omega)$ при любом $x \in \Omega'$. Поэтому

$$D^\alpha u^\varepsilon(x) \;=\; (-1)^{|\alpha| + |\alpha|} \int\limits_{\Omega} \eta_\varepsilon(x - y) \, D^\alpha u(y) \, dy \;=$$

$$=\; (D^\alpha u)^\varepsilon(x) \qquad \forall\, x \in \Omega', \; |\alpha| \leqslant s.$$

Поскольку $D^\alpha u \in L_p(\Omega)$ при $|\alpha| \leqslant s$, то по теореме 3.2

$$\|(D^\alpha u)^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L_p(\Omega')} \longrightarrow 0$$

при $\varepsilon \to 0$. В результате имеем

$$\|u^\varepsilon - u\|_{W_p^s(\Omega')} = \sum_{|\alpha| \leqslant s} \|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L_p(\Omega')} =$$

$$= \sum_{|\alpha| \leqslant s} \|(D^\alpha u)^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L_p(\Omega')} \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0\,. \ \square$$

**Теорема 8.2.** *Если $1 \leqslant p < \infty$, то линейное пространство $C^\infty(\Omega) \cap W_p^s(\Omega)$ плотно в $W_p^s(\Omega)$.*

Доказательство. Установим, что для любого $\delta > 0$ и всякого $u \in W_p^s(\Omega)$ найдется функция $\varphi \in C^\infty(\Omega) \cap W_p^s(\Omega)$ такая, что

$$\|u - \varphi\|_{W_p^s(\Omega)} \leqslant \delta\,. \tag{8.1}$$

Введем следующие обозначения. Для натурального $k$ положим

$$\Omega_k = \{x \in \Omega : \ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > 1/k\}.$$

Пусть для некоторого $n_0$ множество $\Omega_{n_0-1}$ не пусто. Положим

$$G_0 = \Omega_{n_0+1},\ G_k = \Omega_{n_0+k+1} \setminus \bar\Omega_{n_0+k-2},\ k = 1, 2, \ldots$$

Очевидно, что $\Omega = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} G_k$. Пусть $\mu_0, \mu_1, \ldots$ — разложение единицы, согласованное с множествами $G_0, G_1, \ldots$, образующими покрытие области $\Omega$. Ясно, что $\operatorname{supp}(\mu_k\, u) \subset G_k$, и если параметр $\varepsilon$ выбирать из условия

$$\varepsilon < \frac{1}{(k + n_0 + 1)(k + n_0 + 2)}\,, \tag{8.2}$$

то носитель усреднений $(\mu_k\, u)^\varepsilon$ будет принадлежать $V_k$, где

$$V_k = \begin{cases} G_{k+1} \cup G_k, & k = 0, \\ G_{k+1} \cup G_k \cup G_{k-1}, & k \neq 0. \end{cases}$$

Поскольку $V_k \subset\subset \Omega$, то по теореме 8.1 можно выбрать параметр $\varepsilon_k$, удовлетворяющий (8.2), так, чтобы

$$\|(\mu_k u)^{\varepsilon_k} - \mu_k u\|_{W_p^s(\Omega)} = \|(\mu_k u)^{\varepsilon_k} - \mu_k u\|_{W_p^s(V_k)} < \frac{\delta}{2^{(k+1)}}.$$

Пусть $\varphi = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (\mu_k u)^{\varepsilon_k}$. Заметим, что в каждой точке области $\Omega' \subset\subset \Omega$ лишь конечное число слагаемых в этой сумме отлично от нуля. Следовательно, $\varphi$ принадлежит $C^\infty(\Omega)$. Для $x \in \Omega$ можем написать $u(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \mu_j(x) u(x)$. Поэтому

$$\|u - \varphi\|_{W_p^s(\Omega)} \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \|(\mu_k u)^{\varepsilon_k} - \mu_k u\|_{W_p^s(\Omega)} < \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\delta}{2^{j+1}} = \delta.$$

Итак, для произвольной $u \in W_p^s(\Omega)$ и при любом $\delta > 0$ имеет место оценка (8.1). $\square$

Дальнейшее описание свойств пространств Соболева связано с сужением класса рассматриваемых областей. Приведем соответствующие определения.

**Определение 8.1.** *Будем говорить, что ограниченная область $\Omega$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и ее граница $\Gamma$ принадлежат классу $C^{k,\lambda}$, если для любой точки $x_0 \in \Gamma$ найдется ее окрестность $\Delta(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ и декартова система координат $(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \ldots, \xi_n)$ такие, что в $\Delta(x)$ уравнение $\Gamma$ может быть записано в виде*

$$\xi_n = \gamma(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \ldots, \xi_{n-1})$$

*с функцией $\gamma$ класса $C^{k,\lambda}$, т. е. функцией, $k$ раз дифференцируемой, все $k$-е производные которой удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\lambda$. При этом будем предполагать, что для всех точек $x$, принадлежащих $\Delta(x_0) \cap \Omega$, выполнено неравенство $\xi_n > \gamma(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \ldots, \xi_{n-1})$. Будем говорить, что ограниченная область $\Omega$ евклидова пространства и ее граница $\Gamma$ принадлежат классу $C^k$, если известно только, что функция $\gamma$ непрерывно дифференцируема $k$ раз. Области, принадлежащие классу $C^{0,1}$, называют липшицевыми.*

Следующая теорема показывает, что для липшицевых областей пространство $W_p^s(\Omega)$ совпадает с замыканием по норме (7.1) линейного пространства $C^\infty\left(\bar\Omega\right)$. Здесь $C^\infty\left(\bar\Omega\right)$ — сужение на $\bar\Omega=\Omega\cup\Gamma$ множества бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^n$ функций.

**Теорема 8.3.** *Пусть область $\Omega$ принадлежит классу $C^{0,1}$, функция $u$ принадлежит $W_p^s(\Omega)$, $s\geqslant 1$, $1\leqslant p<\infty$. Тогда существует последовательность функций $u_k\in C^\infty(\bar\Omega)$ такая, что $u_k\to u$ в $W_p^s(\Omega)$. Иными словами, множество функций $C^\infty(\bar\Omega)$ плотно в пространстве $W_p^s(\Omega)$.*

Доказательство. Фиксируем произвольно точку $x^0\in\Gamma$. Поскольку $\Gamma\in C^{0,1}$, существуют $r>0$ и функция $\gamma:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$ класса $C^{0,1}$, а также вектор $y_0$ такие, что

$$\Omega\cap B(x^0,r)=\{x\in B(x^0,r): x_n>\gamma(x_1,x_2,\,\ldots,x_{n-1})\},$$

и для всех $x\in\bar\Omega\cap B(x^0,r)$ множество точек вида $x+ty_0$, $0<t<1$, принадлежит $\Omega$. Положим $\Omega'=\Omega\cap B(x^0,r/2)$ и пусть

$$x^\varepsilon=x+\varepsilon\lambda y_0,\ x\in\Omega',\ \varepsilon>0.$$

Ясно, что, фиксируя некоторое $\lambda>0$, можно добиться того, что при всех достаточно малых положительных $\varepsilon$ и $x\in\Omega'$ шар $B(x^\varepsilon,\varepsilon)$ принадлежит $\Omega\cap B(x^0,r)$. Для $x$, принадлежащих $\Omega'$, положим $u_\varepsilon(x)=\ u(x^\varepsilon)$ и определим $v^\varepsilon$ как усреднение $u_\varepsilon$, т. е. $v^\varepsilon(x)=(u_\varepsilon)^\varepsilon(x)$, $x\in\Omega'$. Покажем, что $v^\varepsilon\to u$ в $W_p^s(\Omega')$ при $\varepsilon\to 0$. Для любого мультииндекса $\alpha$, $|\alpha|\leqslant s$, имеем

$$\|D^\alpha v^\varepsilon-D^\alpha u\|_{L_p(\Omega')}\leqslant\|D^\alpha v^\varepsilon-D^\alpha u_\varepsilon\|_{L_p(\Omega')}+\|D^\alpha u_\varepsilon-D^\alpha u\|_{L_p(\Omega')}.$$

Сходимость первого слагаемого к нулю, фактически, установлена при доказательстве теоремы 8.1. Второе слагаемое стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$ вследствие непрерывности в целом функции из $L_p(\Omega')$. Выберем теперь некоторое $\delta>0$. Вследствие ограниченности области $\Omega$ можно указать конечное множество точек $x_i^0\in\Gamma$, положительных чисел $r_i$ и функций $v_i\in C^\infty(\bar\Omega_i)$, где $\Omega_i=\Omega\cap B(x_i^0,r_i/2)$, $i=1,2,\,\ldots,N$ таких, что $\Gamma\subset\bigcup\limits_{k=1}^{N}\Omega_k$,

$$\|v_i-u\|_{W_p^s(\Omega_i)}\leqslant\delta,\ i=1,2,\ldots,N. \tag{8.3}$$

Выберем теперь открытое множество $\Omega_0\subset\subset\Omega$ так, чтобы $\Omega\subset\bigcup\limits_{k=0}^{N}\Omega_k$. В соответствии с теоремой 8.1 можно указать функцию $v_0 \in C^\infty(\bar{\Omega}_0)$, удовлетворяющую условию

$$\|v_0 - u\|_{W_p^s(\Omega_0)} \leqslant \delta. \tag{8.4}$$

Пусть теперь $\mu_i,\ i = 0, 1, \ldots, N,$ — разложение единицы, соответствующее открытым множествам $\Omega_i,\ i = 0, 1, \ldots, N$. Положим $v = \sum\limits_{i=0}^{N} \mu_i v_i$. Ясно, что $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $u = \sum\limits_{i=0}^{N} \mu_i u$, поэтому для любого мультииндекса $\alpha, |\alpha| \leqslant s$, используя формулу Лейбница (дифференцирования произведения) и оценки (8.3), (8.4), получим

$$\|D^\alpha v - D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \sum_{i=0}^{N} \|D^\alpha(\mu_i v_i) - D^\alpha(\mu_i u)\|_{L_p(\Omega_i)} \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{i=0}^{N} \|v_i - u\|_{W_p^s(\Omega_i)} \leqslant CN\delta. \ \square$$

**9. Цепное правило.** В этом пункте устанавливается часто применяемое в дальнейшем правило обобщенного дифференцирования суперпозиции функций. Извлекаются некоторые полезные следствия из этого правила.

**Лемма 9.1.** *Пусть $f \in C^1(\mathbb{R}),\ f' \in L_\infty(\mathbb{R}),\ u \in W^1(\Omega)$. Тогда*

$$f(u) \in W^1(\Omega), \quad \nabla f(u) = f'(u)\nabla u. \tag{9.1}$$

Доказательство. Поскольку $u \in W^1(\Omega)$, можно указать последовательность $u_m \in C^\infty(\Omega)$ такую, что $u_m$, $\nabla u_m$ сходятся к $u$, $\nabla u$ в $L_{1,\,\mathrm{loc}}$ соответственно (см. теорему 8.1). Вследствие формулы конечных приращений Лагранжа для любой области $\Omega' \subset\subset \Omega$

$$\int\limits_{\Omega'} |f(u_m) - f(u)| dx \leqslant \sup |f'| \int\limits_{\Omega'} |u_m - u| dx \to 0$$

при $m \to \infty$. Далее,

$$\int\limits_{\Omega'} |f'(u_m)\nabla u_m - f'(u)\nabla u| dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega'} |f'(u_m)\nabla u_m - f'(u_m)\nabla u + f'(u_m)\nabla u - f'(u)\nabla u| dx \leqslant$$

$$\leqslant \sup |f'| \int\limits_{\Omega'} |\nabla u_m - \nabla u| dx + \int\limits_{\Omega'} |f'(u_m) - f'(u)||\nabla u| dx. \quad (9.2)$$

Последовательность $u_m$ сходится к $u$ в пространстве $L_1(\Omega')$. Поэтому из нее можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к $u$ почти всюду на $\Omega'$. Для сокращения записей будем обозначать эту подпоследовательность также через $u_m$. Поскольку функция $f'$ непрерывна, то и последовательность $f'(u_m)$ сходится к $f'(u)$ почти всюду на $\Omega'$. Кроме того,

$$|f'(u_m) - f'(u)||\nabla u| \leqslant 2 \sup |f'||\nabla u|,$$

т. е. подынтегральная функция в последнем слагаемом справа в неравенстве (9.2) мажорируется суммируемой функцией, следовательно, в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\int\limits_{\Omega'} |f'(u_m) - f'(u)||\nabla u| dx \to 0$$

при $m \to \infty$. Таким образом, установлено существование последовательности $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$, для которой

$$f(u_m) \to f(u), \quad \nabla f(u_m) \to f'(u)\nabla u \quad \text{при } m \to \infty \text{ в } L_{1,\mathrm{loc}}. \quad (9.3)$$

Для любого целого $m$ любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ имеем:

$$\int\limits_{\Omega} f(u_m) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int\limits_{\Omega} f'(u_m) \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \varphi dx.$$

Вследствие (9.3) в этом равенстве можно перейти к пределу. В результате получим

$$\int\limits_{\Omega} f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int\limits_{\Omega} f'(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

что эквивалентно (9.1). $\square$

Определим *положительную и отрицательную части* функции $u$ следующими равенствами: $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u^- = \min\{u, 0\}$. Ясно, что

$$u = u^+ + u^-, \quad |u| = u^+ - u^-, \quad u^- = -(-u)^+. \tag{9.4}$$

**Лемма 9.2.** *Пусть $u \in W^1(\Omega)$. Тогда $u^+, u^-, |u| \in W^1(\Omega)$ и*

$$\nabla u^+(x) = \begin{cases} \nabla u(x), & u(x) > 0; \\ 0, & u(x) \leqslant 0; \end{cases} \tag{9.5}$$

$$\nabla u^-(x) = \begin{cases} \nabla u(x), & u(x) < 0; \\ 0, & u(x) \geqslant 0; \end{cases} \tag{9.6}$$

$$\nabla |u|(x) = \begin{cases} \nabla u(x), & u(x) > 0; \\ 0, & u(x) = 0; \\ -\nabla u(x), & u(x) < 0. \end{cases} \tag{9.7}$$

Доказательство. Достаточно установить справедливость соотношения (9.5). Тогда (9.6), (9.7) будут следовать из (9.4). Для $\varepsilon > 0$ определим функцию

$$f_\varepsilon(u) = \begin{cases} (u^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon, & u > 0; \\ 0, & u \leqslant 0. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $f_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$, причем $0 \leqslant f'_\varepsilon \leqslant 1$, поэтому вследствие леммы 9.1

$$\int\limits_\Omega f_\varepsilon(u) \nabla \varphi dx = -\int\limits_{\Omega_+} \varphi \frac{u}{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2}} \nabla u dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty, \tag{9.8}$$

где $\Omega_+ = \{x \in \Omega,\ u(x) > 0\}$. Заметим теперь, что $f_\varepsilon(u) \leqslant u^+ + \varepsilon$, $|u|/\sqrt{u^2+\varepsilon^2} \leqslant 1$, $f_\varepsilon(u) \to u^+$, $u/\sqrt{u^2+\varepsilon^2} \to 1$ при $\varepsilon \to 0$ для любого $x \in \Omega_+$, следовательно, по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\int\limits_{\Omega} u^+ \nabla\varphi dx = -\int\limits_{\Omega_+} \varphi\nabla u dx \quad \forall\varphi \in C_0^\infty,$$

а это и означает справедливость формулы (9.5). $\square$

**Лемма 9.3.** *Пусть $u \in W^1(\Omega)$. Тогда $\nabla u = 0$ п. в. на том множестве, на котором функция $u$ постоянна.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что если $u$ постоянна на $\Omega$, то $\nabla u = 0$ на $\Omega$, поэтому без ограничения общности можно считать, что множество, фигурирующее в условиях леммы, это — множество, на котором функция $u$ равна нулю. Используя формулы (9.5), (9.6), получим, что $\nabla u = \nabla u^+ + \nabla u^-$, следовательно, $\nabla u = 0$ на множестве $\Omega_0 = \{x \in \Omega,\ u(x) = 0\}$. $\square$

**Упражнение 9.1.** Показать, что утверждения лемм 9.1–9.3 справедливы и для функции $u \in W_p^1(\Omega)$ при $p \in [1, \infty]$.

**10. Преобразование координат.** Пусть $\Phi$ — непрерывное взаимнооднозначное отображение области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ на область $G$ из $\mathbb{R}^n$. Обратное отображение будем обычно обозначать через $\Psi$, так что $\Psi = \Phi^{-1}$. Пусть далее $\varphi_j, \psi_j$ — компоненты отображений $\Phi$ и $\Psi$, т. е. равенства $y = \Phi(x)$ и $x = \Psi(y)$ в покоординатной записи имеют вид

$$y_j = \varphi_j(x), \quad x_j = \psi_j(y), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Будем говорить, что отображение $\Phi$ непрерывно дифференцируемо $s$ раз, если все его компоненты $\varphi_j$ принадлежат $C^s(\bar{\Omega})$.

Пусть $u$ — вещественная функция, измеримая на $\Omega$. Определим измеримую функцию $Au$ на области $G$ равенством

$$Au(y) = u(\Psi(y)). \tag{10.1}$$

Если отображение $\Phi$ непрерывно дифференцируемо, то, как известно, существуют постоянные $c_1, c_2 > 0$ такие, что

$$c_1 \leqslant |\det \Phi'(x)| \leqslant c_2 \quad \forall\, x \in \Omega, \tag{10.2}$$

где $\Phi'(x) = \partial(y_1, \ldots, y_n)/\partial(x_1, \ldots, x_n)$ — матрица Якоби отображения $\Phi$. Используя (10.2), нетрудно убедиться, что линейный оператор $A$, определяемый формулой (10.1), непрерывен из

$L_p(\Omega)$ в $L_p(G)$ при любом $p \in [1, \infty]$ и

$$c_1^{1/p} \|u\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \|Au\|_{L_p(G)} \leqslant c_2^{1/p} \|u\|_{L_p(\Omega)}.$$

**Теорема 10.1.** *Если отображения $\Phi$, $\Psi$ непрерывно дифференцируемы $s$ раз, $s \geqslant 1$, то оператор $A$ является непрерывным оператором из $W_p^s(\Omega)$ на $W_p^s(G)$ при любом $p \in [1, \infty)$; существует непрерывный обратный оператор $A^{-1}$.*

Доказательство. Убедимся сначала в справедливости оценки

$$\|Au\|_{W_p^s(G)} \leqslant c \, \|u\|_{W_p^s(\Omega)} \qquad \forall \, u \in W_p^s(\Omega). \tag{10.3}$$

По теореме 8.2 для произвольной функции $u \in W_p^s(\Omega)$ существует последовательность $\{u_k\}$ функций из $C^\infty(\Omega) \cap W_p^s(\Omega)$, сходящаяся в $W_p^s(\Omega)$ к $u$. По правилу дифференцирования сложной функции для любой производной порядка $|\alpha| \leqslant s$ можно написать

$$D^\alpha (Au_k)(y) = \sum_{1 \leqslant |\beta| \leqslant |\alpha|} M_{\alpha\beta}(y)(AD^\beta u_k)(y), \tag{10.4}$$

где $M_{\alpha\beta}$ есть полином степени не выше $|\beta|$ от производных порядка не выше $|\alpha|$, вычисленных от компонент отображения $\Psi$. Для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$ из (10.4) получим

$$(-1)^{|\alpha|} \int\limits_G Au_k(y) D^\alpha \varphi(y) dy =$$
$$= \sum_{1 \leqslant |\beta| \leqslant |\alpha|} \int\limits_G M_{\alpha\beta}(y)(AD^\beta u_k)(y)\varphi(y) dy. \tag{10.5}$$

После замены переменных $y = \Phi(x)$ это равенство приобретает вид

$$(-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u_k(x)(D^\alpha \varphi)(\Phi(x))|\det \Phi'(x)| dx =$$
$$= \sum_{1 \leqslant |\beta| \leqslant |\alpha|} \int\limits_\Omega M_{\alpha\beta}(\Phi(x)) D^\beta u_k(x) \varphi(\Phi(x))|\det \Phi'(x)| dx.$$

Поскольку $D^\beta u_k \to D^\beta u$ в $L_p(\Omega)$ для $|\beta| \leqslant s$, то в последнем интегральном тождестве можем перейти к пределу по $k \to \infty$ и затем обратным преобразованием $x = \Psi(y)$ получить (10.5) с заменой $u_k$ на $u$. Это означает, что если $u \in W_p^s(\Omega)$, то функция $Au$ имеет все обобщенные производные $D^\alpha Au$, $|\alpha| \leqslant s$, и для их вычисления можно использовать формулу вида (10.4). Из (10.4) непосредственно следует, что

$$\int\limits_G |D^\alpha (Au)(y)|^p \, dy \leqslant$$

$$\leqslant \Big( \sum_{1 \leqslant |\beta| \leqslant |\alpha|} 1 \Big)^p \max_{1 \leqslant |\beta| \leqslant |\alpha|} \sup_{y \in G} |M_{\alpha\beta}(y)|^p \int\limits_G \left|(D^\beta u)(\Psi(y))\right|^p dy \leqslant$$

$$\leqslant c \max_{1 \leqslant |\beta| \leqslant |\alpha|} \int\limits_\Omega \left|D^\beta u(x)\right|^p dx,$$

откуда вытекает оценка (10.3). Неравенство

$$\|u\|_{W_p^s(\Omega)} \leqslant c' \|Au\|_{W_p^s(G)}, \quad c' = \mathrm{const},$$

обеспечивающее существование и ограниченность обратного оператора $A^{-1}$, доказывается аналогично. □

**11. Продолжение функций.** Дальнейшее исследование свойств функций, принадлежащих пространству $W_p^s(\Omega)$, будет во многом опираться на возможность продолжения этих функций с сохранением класса на область $\Omega'$, содержащую $\Omega$.

**Теорема 11.1.** *Пусть $\Omega$ — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ класса $C^s$, $s \geqslant 1$, $u \in W_p^s(\Omega)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\Omega \subset\subset \Omega'$, $\Omega'$ — ограниченная область. Тогда существует функция $\widetilde{u} \in \overset{\circ}{W}{}_p^s(\Omega')$ такая, что $\widetilde{u}(x) = u(x)$ при $x \in \Omega$,*

$$\|\widetilde{u}\|_{W_p^s(\Omega')} \leqslant c \|u\|_{W_p^s(\Omega)}, \tag{11.1}$$

*причем постоянная $c$ зависит только от $p$, $s$, $\Omega$, $\Omega'$.*

Говорят, что функция $\widetilde{u}$ — продолжение функции $u$ на $\Omega'$ с сохранением класса.

В основе доказательства этой теоремы лежит

**Лемма 11.1.** *Пусть* $B = B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$ *— шар радиуса* $R$ *с центром в начале координат. Положим, что* $B^+ = B \cap \mathbb{R}^n_+$, $B^- = B \cap \mathbb{R}^n_-$, *где* $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$, $\mathbb{R}^n_- = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n < 0\}$. *Пусть, далее, функция* $u$ *определена на* $\bar{B}^+$ *и принадлежит* $C^s(\bar{B}^+)$, $s \geqslant 1$. *Определим функцию* $\tilde{u}$ *на* $\bar{B}$, *полагая*

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), \ x \in \bar{B}^+, \\ \sum\limits_{j=1}^{s+1} \lambda_j u(x_1, x_2, \ldots, -\mu_j x_n), \ x \in \bar{B} \setminus \bar{B}^+, \end{cases} \tag{11.2}$$

*где* $\mu_j = 1/j$, *а числа* $\lambda_j$ *выбраны так, что*[1)]

$$\sum_{j=1}^{s+1} \lambda_j (-\mu_j)^k = 1, \quad k = 0, \ldots s. \tag{11.3}$$

*Тогда* $\tilde{u} \in C^s(\bar{B})$, *причем*

$$\|\tilde{u}\|_{W^s_p(B)} \leqslant c \|u\|_{W^s_p(B^+)}, \tag{11.4}$$

*где постоянная* $c$ *не зависит от* $u$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что при $x_n < 0$

$$\frac{\partial^k \tilde{u}(x)}{\partial x_n^k} = \sum_{j=1}^{s+1} \lambda_j (-\mu_j)^k \, \frac{\partial^k u(x_1, x_2, \ldots, -\mu_j x_n)}{x_n^k}.$$

Поэтому, используя (11.3), получаем

$$\lim_{x_n \to -0} \frac{\partial^k \tilde{u}(x)}{\partial x_n^k} = \lim_{x_n \to +0} \frac{\partial^k \tilde{u}(x)}{\partial x_n^k}$$

для любого $k = 0, 1, \ldots, s$. Ясно, что и все производные функции $\tilde{u}$ порядка, не превосходящего $s$, по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ также непрерывны при переходе через гиперплоскость $x_n{=}0$. Таким образом, все производные $D^\alpha \tilde{u}$ при $|\alpha| \leqslant s$ непрерывны в $\bar{B}$, т. е. $\tilde{u} \in C^s(\bar{B})$. Неравенство (11.4) устанавливается, фактически, непосредственным вычислением $\|\widetilde{u}\|_{W^s_p(\Omega')}$ на основе представления (11.2). $\square$

---

[1)] Определитель системы уравнений (11.3) есть определитель Вандермонда, и поскольку все $\mu_j$ различны, то числа $\lambda_j$ определяются однозначно.

Доказательство теоремы 11.1. Предположим сначала, что функция $u$ принадлежит пространству $C^s(\bar{\Omega})$. Пусть точка $x_0$ принадлежит $\Gamma$. Поскольку $\Gamma \in C^s$, существует шар $B_0 = B(x_0, r)$ и декартова система координат $x_1, \ldots, x_n$ такие, что поверхность $\Gamma \cap B_0$ описывается уравнением $x_n = \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})$, где функция $\gamma \in C^s(B_0)$ и $x_n > \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})$ для $x \in B_0^+ = B_0 \cap \Omega$. Определим отображение $\Phi$ шара $B_0$ на некоторое открытое множество $\widehat{B}_0 \subset \mathbb{R}^n$ следующими равенствами:

$$\widehat{x}_i = \Phi_i(x) \equiv x_i, \; i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{11.5}$$

$$\widehat{x}_n = \Phi_n(x) \equiv x_n - \gamma(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \tag{11.6}$$

Положим $\Phi(B_0^+) = \widehat{B}_0^+$. В силу определения отображения $\Phi$ имеем $\widehat{B}_0^+ \subset \mathbb{R}^n_+$, причем

$$\partial \widehat{B}_0^+ = \Phi(B_0 \cap \Gamma) \subset \partial \mathbb{R}^n_+. \tag{11.7}$$

Из (11.5), (11.6) сразу же вытекает, что

$$\Phi \in C^s(B_0), \tag{11.8}$$

обратное отображение $\Psi = \Phi^{-1}$ существует и

$$\Psi \in C^s(\widehat{B}_0). \tag{11.9}$$

Определим на $\widehat{B}_0^+$ функцию $\widehat{u}(y) \in C^s(\widehat{B}_0^+)$ при помощи равенства $\widehat{u}(y) = u(\Psi(y))$. Пусть $\widehat{D}_0$ — шар с центром в точке $y_0 = \Phi(x_0)$, принадлежащий $\widehat{B}_0$. Используя конструкцию, описанную в лемме 11.1, продолжим функцию $\widehat{u}(y)$ с $\widehat{D}_0^+$ на $\widehat{D}_0$, сохраняя для простоты записей для продолженной функции то же обозначение. Пусть $\Omega_0 = \Psi(\widehat{D}_0)$. Ясно, что по построению $\Omega_0^+ = \Psi(\widehat{D}_0^+) \subset \Omega$. Определим на $\Omega_0$ функцию $\widetilde{u}_0(x)$ равенством $\widetilde{u}_0(x) = \widehat{u}(\Phi(x))$. Нетрудно видеть, что $\widetilde{u}_0(x) = u(x)$, если $x \in \Omega$, причем вследствие теоремы 10.1

$$\|\tilde{u}\|_{W_p^s(\Omega_0)} \leqslant c_0 \|\tilde{u}\|_{W_p^s(\Omega_0^+)}, \tag{11.10}$$

где постоянная $c_0$ зависит только от области $\Omega_0$. Поскольку $\Gamma$ компактна, существует конечное число точек $x_i \in \Gamma$, областей $\Omega_i$ и функций $\widetilde{u}_i$, $i = 1, \ldots, N$, обладающих описанными выше свойствами, причем $\Gamma \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} \Omega_i$. Выберем область $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ так, что

$\Omega \subset \bigcup\limits_{i=0}^{N} \Omega_i$, и пусть $\mu_0, \ldots, \mu_N$ — соответствующее этому покрытию области $\Omega$ разложение единицы. Положим $\tilde{u}_0(x) = u(x)$ при $x \in \Omega_0$ и определим на области $\Omega' = \bigcup\limits_{i=0}^{N} \Omega_i$ функцию $\tilde{u}$ при помощи равенства

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=0}^{N} \mu_i(x)\tilde{u}_i(x).$$

По построению $\tilde{u}(x) = u(x)$ при $x \in \Omega$, причем $\tilde{u} \in C_0^s(\Omega')$ и

$$\|\tilde{u}\|_{W_p^s(\Omega')} \leqslant c\|u\|_{W_p^s(\Omega)}, \tag{11.11}$$

где постоянная $c$ зависит только от области $\Omega$.

Пусть теперь функция $u \in W_p^s(\Omega)$ и пусть $\{u_m\}$ — последовательность функций из $C^s(\bar{\Omega})$, сходящаяся к $u$. Построим для каждой функции $u_m$ ее продолжение $\tilde{u}_m \in C_0^s(\Omega')$. Нетрудно видеть, что операция продолжения является линейной, следовательно, для любых целых $l, m \geqslant 1$

$$\|\tilde{u}_l - \tilde{u}_m\|_{W_p^s(\Omega')} \leqslant c\|u_l - u_m\|_{W_p^s(\Omega)},$$

поэтому последовательность $\{\tilde{u}_m\}$ сходится. Ее предел, функция $\tilde{u} \in \overset{\circ}{W}{}_p^s(\Omega')$, есть искомое продолжение функции $u$. $\square$

**12. Следы функций из соболевских пространств.** Функции из $W_p^s(\Omega)$, будучи элементами пространства $L_p(\Omega)$, фактически, являются классами эквивалентности, т. е. функции, совпадающие почти всюду на $\Omega$, считаются неразличимыми. Вследствие этого непосредственно говорить о значениях функции из $W_p^s(\Omega)$ на многообразиях размерности, меньшей чем $n$, и, в частности, на $\Gamma$, не имеет смысла. Тем не менее, для функций из $W_p^s(\Omega)$ удается ввести понятие следа, естественно обобщающее обычное понятие сужения непрерывной на $\bar{\Omega}$ функции на некоторую часть $\bar{\Omega}$.

В основе соответствующих рассуждений лежит

**Теорема 12.1.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область класса $C^1$, $u \in C^1(\bar{\Omega})$, $1 < p < \infty$. Тогда для любого $\delta > 0$*

$$\|u\|^p_{L_p(\Gamma)} \leqslant c\big((1+\delta^{-q})\|u\|^p_{L_p(\Omega)} + \delta^p\|\nabla u\|^p_{L_p(\Omega)}\big) \leqslant c_1(\delta)\|u\|^p_{W_p^1(\Omega)}, \tag{12.1}$$

*где* $q = p/(p-1)$. *Кроме того,*

$$\|u\|_{L_1(\Gamma)} \leqslant c_2 \|u\|_{W_1^1(\Omega)}. \tag{12.2}$$

*Постоянные* $c, c_1, c_2$ *не зависят от выбора* $u$.

Доказательство. Как и выше, положим

$$B^+ = B^+(0,R) = B(0,R) \cap \mathbb{R}^n_+, \ R > 0.$$

Пусть, далее, $\zeta \in C_0^\infty(B(0,R))$, $\zeta \geqslant 0$ в $B(0,R)$, $\zeta \equiv 1$ в $B(0,R/2)$, $\gamma$ — часть границы области $B^+(0,R/2)$, лежащая в плоскости $x_n = 0$, $\gamma_1$ — часть границы области $B^+(0,R)$, лежащая в плоскости $x_n = 0$. Используя формулу интегрирования по частям, нетрудно получить, что для любой функции $u$ из $C^1(\bar{B}^+)$

$$\int\limits_\gamma |u|^p dx \leqslant \int\limits_{\gamma_1} \zeta |u|^p dx = -\int\limits_{B^+} \frac{\partial(\zeta |u|^p)}{\partial x_n} dx =$$
$$= -\int\limits_{B^+} \left( |u|^p \frac{\partial \zeta}{\partial x_n} + p|u|^{p-1} \operatorname{sign}(u) \frac{\partial u}{\partial x_n} \zeta \right) dx. \tag{12.3}$$

Применяя неравенство Юнга (2.1), с. 22, получим, что для любого положительного числа $\delta$ и $p > 1$

$$\left| |u|^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_n} \right| \leqslant c(\delta^{-q} |u|^p + \delta^p |\nabla u|^p),$$

откуда вытекает, что

$$\int\limits_\gamma |u|^p dx \leqslant c \int\limits_{B^+} ((1 + \delta^{-q}) |u|^p + \delta^p |\nabla u|^p) dx. \tag{12.4}$$

При $p = 1$ непосредственно из (12.3) получаем, что

$$\int\limits_\gamma |u| dx \leqslant c \int\limits_{B^+} (|u| + |\nabla u|) dx. \tag{12.5}$$

Неравенства (12.1), (12.2) получаются из оценок (12.4), (12.5) при помощи локального «выпрямления» границы области $\Omega$

аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 11.1. □

Пусть теперь $u$ — произвольная функция из пространства $W_p^1(\Omega)$, $\{u_m\}$ — последовательность функций из $C^\infty(\bar{\Omega})$, сходящаяся к $u$. Вследствие (12.1), (12.2) при любом $p \geqslant 1$ имеем

$$\|u_l - u_m\|_{L_p(\Gamma)} \leqslant c\|u_l - u_m\|_{W_p^1(\Omega)} \to 0, \ l, m \to \infty, \tag{12.6}$$

т. е. последовательность сужений функций $u_m$ на $\Gamma$ фундаментальна в смысле сходимости в пространстве $L_p(\Gamma)$ и потому имеет предел, принадлежащий $L_p(\Gamma)$. Этот предел называют *следом функции* $u$, принадлежащей $W_p^1(\Omega)$, на $\Gamma$. Нетрудно видеть, что след функции $u$ не зависит от выбора последовательности $\{u_m\}$.

Таким образом, справедлива

**Теорема 12.2.** *Пусть выполнены условия теоремы* 12.1. *Тогда любая функция $u \in W_p^1(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$, имеет след на $\Gamma$, принадлежащий $L_p(\Gamma)$ и выполнены оценки* (12.1), (12.2).

Замечание 12.1. Если функция $u \in W_p^1(\Omega)$ непрерывна, то, опираясь на теоремы 3.2, 8.1, 11.1, нетрудно показать, что существует последовательность функций $\{u_m\}$ из $C^\infty(\bar{\Omega})$, сходящаяся к $u$ как по норме пространства $W_p^1(\Omega)$, так и равномерно. Отсюда вытекает, что след непрерывной функции из $W_p^1(\Omega)$ совпадает с сужением этой функции на $\Gamma$.

Замечание 12.2. Понятно, что совершенно аналогично можно ввести понятие следа и для любой поверхности класса $C^1$, принадлежащей $\bar{\Omega}$.

Замечание 12.3. Не следует думать, что множество следов на $\Gamma$ функций из $W_p^1(\Omega)$ заполняет все пространство $L_p(\Gamma)$. Более того, не всякая непрерывная на $\Gamma$ функция, даже при сколь угодно гладкой поверхности $\Gamma$, может быть продолжена в $\Omega$ так, чтобы она принадлежала $W_p^1(\Omega)$. Более подробно об этом см. п. 2, §1, главы 2.

При исследовании краевых задач особую роль играют функции, следы которых на $\Gamma$ равны нулю.

**Теорема 12.3.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область класса $C^1$. Для того, чтобы функция $u$ из $W_p^1(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$, имела нулевой след на $\Gamma$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция принадлежала пространству $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$.*

Доказательство. 1. Достаточность очевидна, так как по определению всякая функция из $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ есть предел последовательности функций из $C_0^\infty(\Omega)$, каждая из которых равна нулю на $\Gamma$.

2. Докажем необходимость. Имея в виду применение метода локального «выпрямления» границы, рассмотрим сначала случай, когда область, на которой определена функция $u$, есть единичный куб:

$$\omega = \{x: \ 0 < x_i < 1, \ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Пусть $\gamma = \{x \in \bar{\omega} : \ x_n = 0\}$. С целью упрощения дальнейших выкладок представим $\bar{\omega}$ в виде $\bar{\omega} = \gamma \times (0 \leqslant x_n \leqslant 1)$. Пусть функция $u$ принадлежит $W_p^1(\omega)$, след $u$ на $\gamma$ равен нулю. Это означает, что если последовательность функций $\{u_m\} \subset C^\infty(\bar{\omega})$ сходится к $u$ по норме пространства $W_p^1(\omega)$, то

$$\|u_m\|_{L_p(\gamma)} \to 0 \text{ при } m \to \infty. \tag{12.7}$$

Используя формулу Ньютона — Лейбница, получаем

$$u_m(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = u_m(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) + \\ + \int_0^{x_n} \frac{\partial u_m(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)}{\partial t} dt,$$

откуда после применения неравенства Гельдера будем иметь, что

$$\int_\gamma |u_m(x', x_n)|^p dx' \leqslant \\ \leqslant c \left( \int_\gamma |u_m(x', 0)|^p dx' + x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_\gamma \left| \frac{\partial u_m(x', t)}{\partial t} dt \right|^p dx' dt \right)$$

для всех $x_n \in [0, 1]$. Устремляя в этом неравенстве $m$ к бесконечности и используя (12.7), получим

$$\int_\gamma |u(x', x_n)|^p dx' \leqslant c x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_\gamma \left| \frac{\partial u(x', t)}{\partial t} dt \right|^p dx' dt. \tag{12.8}$$

Пусть теперь функция $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ и удовлетворяет следующим условиям: $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$, $\zeta \equiv 1$ на отрезке $[0,1]$ и $\zeta \equiv 0$ вне отрезка $[0,2]$. Положим $\zeta_m(x) = \zeta(mx)$. Ясно, что

$$\zeta_m(x) \equiv 0 \quad \text{при } x \geqslant 2/m. \tag{12.9}$$

Пусть, далее, $w_m(x) = u(x)(1 - \zeta_m(x_n))$. Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial w_m(x)}{\partial x_n} = \frac{\partial u(x)}{\partial x_n}(1 - \zeta_m(x_n)) - mu(x)\zeta'(mx_n),$$

$$\frac{\partial w_m(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}(1 - \zeta_m(x_n)),\ \ i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

следовательно, при $m > 2$

$$\int\limits_\omega |\nabla(w_m - u)|^p dx \leqslant c \int\limits_\omega |\zeta_m(x_n)|^p |\nabla u|^p dx + \\ + cm^p \int\limits_0^{2/m} \int\limits_\gamma |u(x', t)|^p dx' dt \equiv I_1 + I_2. \tag{12.10}$$

Оценим слагаемые в правой части полученного неравенства. Вследствие (12.9)

$$I_1 \leqslant c \int\limits_0^{2/m} \int\limits_\gamma |\nabla u(x', t)|^p dx' dt \to 0 \quad \text{при } m \to \infty. \tag{12.11}$$

Используя (12.8), можем написать, что

$$I_2 \leqslant cm^p \int\limits_0^{2/m} t^{p-1} \int\limits_0^t \int\limits_\gamma \left| \frac{\partial u(x', \tau)}{\partial \tau} \right|^p dx' d\tau dt,$$

следовательно,

$$I_2 \leqslant cm^p \int\limits_0^{2/m} t^{p-1} dt \int\limits_0^{2/m} \int\limits_\gamma \left| \frac{\partial u(x', t)}{\partial t} \right|^p dx' dt =$$

$$= \frac{c}{p} \int\limits_0^{2/m} \int\limits_\gamma \left| \frac{\partial u(x',t)}{\partial t} \right|^p dx'dt \to 0 \quad \text{при } m \to \infty. \qquad (12.12)$$

Далее,

$$\int\limits_\omega |w_m - u|^p dx = \int\limits_\omega |\zeta_m(x_n) u(x)|^p dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^{2/m} \int\limits_\gamma |u(x',t)|^p dx'dt \to 0 \quad \text{при } m \to \infty. \qquad (12.13)$$

Таким образом,

$$\|u - w_m\|_{W_p^1(\omega)} \to 0 \quad \text{при } m \to \infty, \qquad (12.14)$$

причем по построению $w_m(x) = 0$ при $0 < x_n < 1/m$.

Пусть теперь $\Omega$ — область класса $C^1$. В этом случае существуют конечное число областей $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ таких, что $\Gamma \subset \bigcup\limits_{i=1}^N \Omega_i$ и каждая из областей $\Omega_i$ обладает свойствами, описанными в определении 8.1, с. 41. Положим $\widehat{\Omega}_i = \Phi_i(\Omega_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, где отображения $\Phi_i$ построены так, как это описано в доказательстве теоремы 11.1. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, N$ определим на $\widehat{\Omega}_i$ функцию $\widehat{u}_i(y)$ равенством $\widehat{u}_i(y) = u(\Psi_i(y))$, $\Psi_i = \Phi_i^{-1}$. Вследствие теоремы 10.1 получаем, что $\widehat{u}_i(y) \in W_p^1(\widehat{\Omega}_i)$. Как и при доказательстве теоремы 11.1, продолжим функцию $\widehat{u}_i$ с сохранением класса на полупространство $\mathbb{R}^n_+$ так, чтобы она обращалась в нуль вне некоторого прямоугольника, содержащего $\widehat{\Omega}_i$. Далее, как и в предыдущем пункте доказательства, определим на этом прямоугольнике функцию $\widehat{w}_i$ такую, что $\|\widehat{w}_i - \widehat{u}_i\|_{W_p^1(\widehat{\Omega}_i)} \leqslant \varepsilon$, $\widehat{w}_i(y) = 0$ при $y_n < \delta(\varepsilon)$, где $\varepsilon$ — заданное положительное число, $\delta(\varepsilon) > 0$. Пусть, далее, $\Omega_0 \subset \Omega$, $\Omega \subset \bigcup\limits_{i=0}^N \Omega_i$, $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_N$ — соответствующее этому покрытию области $\Omega$ разложение единицы. Положим

$$\widetilde{u}(x) = \mu_0(x) u(x) + \sum_{i=1}^N \mu_i(x) w_i(x), \ x \in \Omega,$$

где $w_i(x) = \widehat{w}_i(\Phi_i(x)),\ x \in \Omega_i,\ i = 1, 2, \ldots, N$. Нетрудно видеть, что $\widetilde{u} \in W_p^1(\Omega)$, обращается в нуль в некоторой пограничной полоске области $\Omega$, и $\|u - \widetilde{u}\|_{W_p^1(\Omega)} \leqslant c\varepsilon$, где постоянная $c$ зависит лишь от $u$ и выбранного нами разложения единицы. Построив по функции $\widetilde{u}$ ее усреднение по Соболеву, получим функцию $\widetilde{u}^h$, принадлежащую при достаточно малом параметре усреднения $h = h(\varepsilon)$ пространству $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, причем $\|u - \widetilde{u}^{h(\varepsilon)}\|_{W_p^1(\widehat{\Omega}_i)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. $\square$

**13. Теоремы вложения** Функции, принадлежащие пространству $W_p^s(\Omega)$, при достаточно больших $s$ и $p$ обладают определенной гладкостью. Точнее говоря, при определенных условиях на $s, p$ и $n$ можно указать линейное нормированное пространство достаточно гладких функций $X$ такое, что $W_p^s(\Omega) \subset X$, и для любой функции $u \in W_p^s(\Omega)$

$$\|u\|_X \leqslant c\|u\|_{W_p^s(\Omega)}, \tag{13.1}$$

где постоянная $c$ может зависеть лишь от $s, p, n$ и области $\Omega$. В этом случае говорят, что пространство $W_p^s(\Omega)$ непрерывно вкладывается в пространство $X$. При более жестких условиях на $s$, $p$, $n$ вложение $W_p^s(\Omega)$ в $X$, обычно, оказывается компактным (вполне непрерывным), т. е. всякое ограниченное в пространстве $W_p^s(\Omega)$ множество оказывается компактным в пространстве $X$. Результаты такого сорта принято называть *теоремами вложения*.

**Теорема 13.1.** *Пусть $\Omega$ — ограниченная область, из $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $p \in [1, n)$, $q^* = np/(n-p)$. Тогда для любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$*

$$\|u\|_{L_{q^*}(\Omega)} \leqslant c\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}, \tag{13.2}$$

*где $c$ — постоянная, не зависящая от $u$*[1].

Доказательство. Установим сначала справедливость неравенства (13.2) при $p = 1$. Продолжая функцию $u$ нулем на все пространство $\mathbb{R}^n$ и сохраняя для продолженной функции то же обозначение, можем написать, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$

$$u(x) = \int\limits_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u(x_1, \ldots, x_{i-1}, \xi_i, x_{i+1} \ldots, x_n)}{\partial \xi_i} d\xi_i,$$

[1] Заметим, что $1/q^* = 1/p - 1/n$, следовательно, $q^* > p$.

следовательно,

$$|u(x)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \,\ldots, x_{i-1}, \xi_i, x_{i+1} \ldots, x_n)| d\xi_i$$

и потому

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leqslant \prod_{i=1}^{n} \Big( \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \,\ldots, x_{i-1}, \xi_i, x_{i+1} \ldots, x_n)| d\xi_i \Big)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по переменной $x_1$. Получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{n/(n-1)} dx_1 \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \Big( \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \,\ldots, x_{i-1}, \xi_i, x_{i+1} \ldots, x_n)| d\xi_i \Big)^{1/(n-1)} dx_1 =$$

$$= \Big( \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x)| dx_1 \Big)^{1/(n-1)} \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n} \Big( \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \,\ldots, x_{i-1}, \xi_i, x_{i+1}, \,\ldots, x_n)| d\xi_i \Big)^{1/(n-1)} dx_1. \quad (13.3)$$

Оценим теперь последний множитель в правой части неравенства (13.3) с помощью неравенства (2.3), с. 23, при

$$p_1 = p_2 = \,\ldots = p_{n-1} = n - 1.$$

В результате получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{n/(n-1)} dx_1 \leqslant \Big( \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x)| dx_1 \Big)^{1/(n-1)} \times$$

$$\times \Big( \prod_{i=2}^{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \,\ldots, x_{i-1}, \xi_i, x_{i+1}, \,\ldots, x_n)| dx_1 d\xi_i \Big)^{1/(n-1)}. \quad (13.4)$$

Неравенство (13.4) проинтегрируем по $x_2$ и выполним элементарные преобразования:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{n/(n-1)}dx_1dx_2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\Bigl(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x)|dx_1\Bigr)^{1/(n-1)}\times$$
$$\times\Bigl(\prod_{i=2}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x)|dx_1dx_i\Bigr)^{1/(n-1)} dx_2 =$$

$$= \Bigl(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x)|dx_1dx_2\Bigr)^{1/(n-1)} \int_{-\infty}^{\infty}\Bigl(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x)|dx_1\Bigr)^{1/(n-1)}\times$$
$$\times\Bigl(\prod_{i=3}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x)|dx_1dx_i\Bigr)^{1/(n-1)} dx_2. \qquad (13.5)$$

Вновь используя обобщенное неравенство Гельдера для оценки интеграла по $x_2$ от произведения $n-1$ сомножителей в правой части неравенства (13.5), можем написать

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{n/(n-1)}dx_1dx_2 \leqslant \Bigl(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x)|dx_1dx_2\Bigr)^{2/(n-1)}\times$$
$$\times\Bigl(\prod_{i=3}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x)|dx_1dx_2dx_i\Bigr)^{1/(n-1)}.$$

Продолжая аналогичные оценки, т. е. интегрируя последовательно по $x_3, \ldots, x_n$, получим

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{n/(n-1)}dx \leqslant \Bigl(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|dx\Bigr)^{n/(n-1)}. \qquad (13.6)$$

Это неравенство совпадает с (13.2) при $p = 1$. Для того, чтобы получить неравенство (13.2) при $p \in (1, n)$, запишем неравенство (13.6) для функции $v = |u|^\gamma$, где $\gamma$ — некоторое число, большее единицы. В результате элементарных преобразований и применения неравенства Гельдера будем иметь

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\gamma n/(n-1)} dx\right)^{(n-1)/n} \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla |u(x)|^{\gamma}| dx =$$

$$= \gamma \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\gamma-1} |\nabla u(x)| dx \leqslant$$

$$\leqslant \gamma \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{(\gamma-1)p/(p-1)} dx\right)^{(p-1)/p} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p dx\right)^{1/p}. \quad (13.7)$$

Выберем теперь $\gamma$ так, чтобы $(\gamma-1)p/(p-1) = \gamma n/(n-1)$. Получим, что $\gamma = p(n-1)/(n-p) > 1$, $\gamma n/(n-1) = np/(n-p) = q^*$. Заметим также, что $(n-1)/n - (p-1)/p = 1/q^*$, следовательно, неравенство (13.7) позволяет заключить, что

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{q^*} dx\right)^{1/q^*} \leqslant c \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p dx\right)^{1/p}. \ \square$$

**Теорема 13.2.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, функция $u$ принадлежит $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, $p \in [1, n)$. Тогда $u \in L_{q^*}(\Omega)$, и*

$$\|u\|_{L_{q^*}(\Omega)} \leqslant c \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}, \quad (13.8)$$

*где $c$ — постоянная, не зависящая от $u$.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{u}_m \in C_0^\infty(\Omega)$ — последовательность функций такая, что

$$u_m \to u \text{ в } W_p^1(\Omega). \quad (13.9)$$

Тогда

$$\|\nabla(u_k - u_m)\|_{L_p(\Omega)} \to 0 \quad \text{при } k, m \to \infty,$$

откуда на основании теоремы 13.1 получаем, что

$$\|u_k - u_m\|_{L_{q^*}(\Omega')} \to 0 \quad \text{при } k, m \to \infty.$$

Таким образом, последовательность $\{u_m\}$ сходится в пространстве $L_{q^*}(\Omega)$ и, конечно, в $L_p(\Omega)$. В силу единственности предела сходящейся последовательности получаем, что $u \in L_{q^*}(\Omega)$ и

$$\|u - u_m\|_{L_{q^*}(\Omega)} \to 0, \ m \to \infty. \tag{13.10}$$

Вновь используя теорему 13.1, можем написать, что

$$\|u_m\|_{L_q^*(\Omega)} \leqslant c\|\nabla u_m\|_{L_p(\Omega)}, \ m = 1, 2, \ldots,$$

откуда с учетом (13.9), (13.10) получаем (13.8). $\square$

Непосредственным следствием только что доказанной теоремы и теоремы о продолжении 11.1, с. 48, является

**Теорема 13.3.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область класса $C^1$, функция $u$ принадлежит пространству $W_p^1(\Omega)$, $p \in [1, n)$. Тогда $u \in L_{q^*}(\Omega)$, и*

$$\|u\|_{L_{q^*}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{W_p^1(\Omega)}, \tag{13.11}$$

*где $c$ — постоянная, не зависящая от $u$.*

Замечание 13.1. Ясно, что $q^* \to +\infty$ при $p \to n$, поэтому, как нетрудно убедиться, если $u \in W_n^1(\Omega)$, то

$$\|u\|_{L_q(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{W_n^1(\Omega)} \tag{13.12}$$

для любого $q \in [1, \infty)$. Здесь $\Omega$ — ограниченная область класса $C^1$, $c$ — постоянная, не зависящая от $u$. Подчеркнем, однако, что функция, принадлежащая $W_n^1(\Omega)$, не обязательно принадлежит $L_\infty(\Omega)$. Так, функция $u(x) = \ln\ln(1 + 1/|x|) \in W_n^1(\Omega)$, но не является ограниченной, если $\Omega$ содержит начало координат (см. пример 6.3, с. 37).

Отметим также, что для функций $u \in \overset{\circ}{W}{}_n^1(\Omega)$ неравенство (13.12) выполняется при любом $q \in [1, \infty)$ и в случае произвольной ограниченной области $\Omega$ из $\mathbb{R}^n$.

**Теорема 13.4.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область,*

$$p \in (n, \infty], \ \gamma = 1 - n/p, \ u \in C_0^\infty(\Omega).$$

*Тогда*

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{W_p^1(\Omega)}, \tag{13.13}$$

*где постоянная $c$ не зависит от $u$.*

Доказательство. Продолжим функцию $u$ нулем на все пространство $\mathbb{R}^n$, сохраняя за продолженной функцией то же обозначение. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $B(x,R)$, как и ранее, — шар радиуса $R$ с центром в точке $x$. Покажем, что существует постоянная $c$, зависящая только от $n$, такая, что

$$\fint\limits_{B(x,R)} |u(\xi) - u(x)| d\xi \leqslant c \int\limits_{B(x,R)} \frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{n-1}} d\xi, \tag{13.14}$$

где для $\omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\fint\limits_{\omega} u(\xi) d\xi = \frac{1}{\operatorname{mes}\omega} \int\limits_{\omega} u(\xi) d\xi.$$

Для любых $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ и $s \in \mathbb{R}$ справедливы очевидные равенства

$$u(x+s\xi) - u(x) = \int\limits_0^s \frac{du(x+t\xi)}{dt} dt = \int\limits_0^s \nabla u(x+t\xi) \cdot \xi \, dt,$$

следовательно,

$$|u(x+s\xi) - u(x)| \leqslant |\xi| \int\limits_0^s |\nabla u(x+t\xi)| dt \quad \forall s > 0.$$

Интегрируя это неравенство по поверхности шара $B(0,1)$, получим

$$\int\limits_{\partial B(0,1)} |u(x+s\xi) - u(x)| d\xi \leqslant \int\limits_0^s \int\limits_{\partial B(0,1)} |\nabla u(x+t\xi)| d\xi dt.$$

Полагая $y = x + t\xi$, выполним элементарные преобразования правой части последнего неравенства

$$\int\limits_0^s \int\limits_{\partial B(0,1)} |\nabla u(x+t\xi)| d\xi dt = \int\limits_0^s \int\limits_{\partial B(0,1)} |\nabla u(x+t\xi)| \frac{t^{n-1}}{t^{n-1}} d\xi dt =$$

$$= \int\limits_0^s \int\limits_{\partial B(0,1)} |\nabla u(x+t\xi)| \frac{t^{n-1}}{|x-y|^{n-1}} d\xi dt = \int\limits_{B(x,s)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy.$$

Отсюда вытекает, что при $0 < s \leqslant R$

$$\int\limits_{\partial B(0,1)} |u(x+s\xi)-u(x)|d\xi \leqslant \int\limits_{B(x,R)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}dy.$$

Умножим это неравенство на $s^{n-1}$ и проинтегрируем по $s$ от 0 до $R$. Получим

$$\int\limits_{B(x,R)} |u(x)-u(y)|dy \leqslant \frac{R^n}{n} \int\limits_{B(x,R)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}dy,$$

откуда следует неравенство (13.14).

Далее, вследствие очевидного тождества

$$u(x) = \fint\limits_{B(x,1)} (u(x)-u(y))dy + \fint\limits_{B(x,1)} u(y)dy$$

и неравенства (13.14) можем написать, что

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leqslant \fint\limits_{B(x,1)} |u(x)-u(y)|dy + \fint\limits_{B(x,1)} |u(y)|dy \leqslant \\ &\leqslant c \int\limits_{B(x,1)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}dy + c_1\|u\|_{L_p(B(x,1))} \leqslant \\ &\leqslant c \left(\int\limits_{B(x,1)} |\nabla u|^p dy\right)^{1/p} \left(\int\limits_{B(x,1)} \frac{dy}{|x-y|^{p(n-1)/(p-1)}}\right)^{(p-1)/p} + \\ &\qquad + c_1\|u\|_{L_p(B(x,1))}. \end{aligned} \tag{13.15}$$

Заметим теперь, что несобственный интеграл

$$\int\limits_{B(x,1)} \frac{dy}{|x-y|^{p(n-1)/(p-1)}}$$

сходится, поскольку $p(n-1)/(p-1) < n$ при $p > n$, следовательно, усиливая неравенство (13.15), можем написать, что

$$|u(x)| \leqslant c\|u\|_{W_p^1(\Omega)}.$$

Отсюда, поскольку $x$ — произвольная точка из $\Omega$, вытекает, что

$$\max_{x\in\bar{\Omega}}|u(x)| \leqslant c\|u\|_{W_p^1(\Omega)}. \tag{13.16}$$

Пусть теперь $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$. Положим $|x-y| = R$, $W = B(x,R) \cap B(y,R)$ и запишем очевидное неравенство

$$|u(x)-u(y)| \leqslant \fint_W |u(x)-u(\xi)|d\xi + \fint_W |u(y)-u(\xi)|d\xi.$$

Пользуясь тем, что величина отношения $\operatorname{mes}(W)/\operatorname{mes} B(x,R)$ зависит только от $n$, можем написать, что

$$\fint_W |u(x)-u(\xi)|d\xi \leqslant c \fint_{B(x,R)} |u(x)-u(\xi)|d\xi,$$

поэтому, используя неравенство (13.14) и неравенство Гельдера, получим

$$\fint_W |u(x)-u(\xi)|d\xi \leqslant c \fint_{B(x,R)} |u(x)-u(\xi)|d\xi \leqslant c \int_{B(x,R)} \frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{n-1}} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\int_{B(x,R)} |\nabla u|^p d\xi\right)^{1/p} \left(\int_{B(x,R)} \frac{d\xi}{|x-\xi|^{(n-1)p/(p-1)}}\right)^{(p-1)/p} \leqslant$$

$$\leqslant cR^{1-n/p}\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}. \tag{13.17}$$

Аналогично,

$$\fint_W |u(y)-u(\xi)|d\xi \leqslant cR^{1-n/p}\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)},$$

следовательно,

$$|u(x)-u(y)| \leqslant cR^{1-n/p}\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} = c|x-y|^{1-n/p}\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)},$$

поэтому
$$\sup_{x\neq y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{1-n/p}}\leqslant c\|\nabla u\|_{L_p(\Omega)}. \tag{13.18}$$
Из неравенств (13.16), (13.18) вытекает (13.13). $\square$

**Теорема 13.5.** *Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область класса $C^1$, $p\in(n,\infty]$, $\gamma=1-n/p$, $u\in W_p^1(\Omega)$. Тогда существует функция $u^*\in C^{0,\gamma}(\bar\Omega)$, равная $u$ почти всюду на $\Omega$, причем*
$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\bar\Omega)}\leqslant c\|u\|_{W_p^1(\Omega)}, \tag{13.19}$$
*где постоянная $c$ не зависит от $u$.*

Доказательство. Пусть $\Omega'$ — область, содержащая $\bar\Omega$, функция $\widetilde u\in\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega')$ — продолжение функции $u$ на $\Omega'$, для которого выполнена оценка
$$\|\widetilde u\|_{W_p^1(\Omega')}\leqslant c\|u\|_{W_p^1(\Omega)}, \tag{13.20}$$
где постоянная $c$ не зависит от функции $u$; $\{\widetilde u_m\}$ — последовательность функций из $C_0^\infty(\Omega')$, сходящаяся к $\widetilde u$ по норме пространства $W_p^1(\Omega')$. Вследствие теоремы 13.4 эта последовательность фундаментальна в пространстве $C^{0,\gamma}(\bar\Omega')$, поэтому существует такая функция $u^*\in C^{0,\gamma}(\bar\Omega')$, что $\|u^*-\widetilde u_m\|_{C^{0,\gamma}(\bar\Omega')}\to 0$ при $m\to\infty$. Понятно, что $u^*=\widetilde u$ почти всюду на $\Omega'$, причем, поскольку по теореме 13.4 $\|\widetilde u_m\|_{C^{0,\gamma}(\bar\Omega')}\leqslant c\|\widetilde u_m\|_{W_p^1(\Omega')}$, то $\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\bar\Omega')}\leqslant c\|\widetilde u\|_{W_p^1(\Omega')}$, откуда, применяя неравенство (13.20), получаем (13.19). $\square$

**Теорема 13.6.** *Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область класса $C^1$, $u\in W_p^k(\Omega)$. Тогда:*

1) *если $kp<n$, то $u\in L_q(\Omega)$, где $q=np/(n-kp)$ и*
$$\|u\|_{L_q(\Omega)}\leqslant c\|u\|_{W_p^k(\Omega)}; \tag{13.21}$$

2) *если $kp>n$, то $u\in C^{k-[n/p]-1,\gamma}(\Omega)$, где $[n/p]$ — целая часть $n/p$, $\gamma=[n/p]+1-n/p$, если $n/p$ — не целое число, $\gamma$ — некоторое положительное число, меньшее единицы, если $n/p$ — целое число, и*
$$\|u\|_{C^{k-[n/p]-1,\gamma}(\Omega)}\leqslant c\|u\|_{W_p^k(\Omega)}. \tag{13.22}$$

*Постоянные в неравенствах* (13.21), (13.22) *не зависят от* $u$.

Доказательство. 1. Пусть $kp < n$. По условию теоремы $D^\alpha u$ принадлежит $L_p(\Omega)$ для всех $|\alpha| = k$, и по теореме 13.3

$$\|D^\beta u\|_{L_q^*(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{W_p^k(\Omega)}, \text{ если } |\beta| = k - 1,$$

следовательно, $u \in W_{q^*}^{k-1}(\Omega)$. Аналогично, $u \in W_{q^{**}}^{k-2}(\Omega)$, где $1/q^{**} = 1/q^* - 1/n = 1/p - 2/n$. Продолжая этот процесс, получим, что $u \in L_q(\Omega)$, где $1/q = 1/p - k/n$, причем оценка (13.21), очевидно, будет выполнена.

2. Пусть теперь $kp > n$ и $n/p$ — нецелое число. Тогда, рассуждая как в предыдущем пункте доказательства, получим, что

$$u \in W_r^{k-l}(\Omega), \tag{13.23}$$

где $1/r = 1/p - l/n$, если $lp < n$. Можно считать при этом, что $lp < n < (l+1)p$, т. е. $l = [n/p]$. Ясно, что тогда $r = np/(n-pl) > n$, следовательно, по теореме 13.5 получаем, что $D^\alpha u \in C^{0,1-n/r}(\Omega)$ для $|\alpha| \leqslant k - l - 1$. Заметим, что

$$1 - n/r = 1 - n/p + l = [n/p] + 1 - n/p,$$

поэтому $u \in C^{k-[n/p]-1,[n/p]+1-n/p}(\bar{\Omega})$. При этом оценка (13.22), очевидно, выполнена.

3. Пусть, наконец, $kp > n$, и $n/p$ — целое число. Положим

$$l = [n/p] - 1 = n/p - 1.$$

Тогда, как и раньше, $u \in W_r^{k-l}$, где

$$r = np/(n - pl) = n.$$

Отсюда следует (см. замечание (13.1)), что $D^\alpha u \in L_q(\Omega)$ для любого $q \in [1, \infty)$ и для всех $\alpha$ таких, что

$$|\alpha| \leqslant k - l - 1 = k - n/p.$$

На основании теоремы 13.5 получаем, что $D^\alpha u \in C^{0,1-n/q}(\bar{\Omega})$ для любого $q \in (n, \infty)$ и для всех $|\alpha| \leqslant k - n/p - 1$. Таким образом, $u \in C^{k-[n/p]-1,\gamma}(\Omega)$ для любого $\gamma \in (0, 1)$. Оценка (13.22) также выполнена. $\square$

Упражнение 13.1. Пусть $u \in W_1^1(0,l)$, $0 < l < \infty$. Доказать, что существует функция $u^*$, непрерывная на отрезке $[0,l]$ и равная $u$ почти всюду на $(0,l)$, причем $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant l} |u^*(x)| \leqslant c\|u\|_{W_1^1(0,\,l)}$, где постоянная $c$ зависит только от $l$.

**Теорема 13.7.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область класса $C^1$, $p \in [1,n)$. Тогда при любом $q \in [1,q^*)$ пространство $W_p^1(\Omega)$ компактно вкладывается в пространство $L_q(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $M$ — множество, ограниченное в пространстве $W_p^1(\Omega)$, т. е. существует постоянная $c > 0$ такая, что для любой функции $u \in M$

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega)} \leqslant c. \tag{13.24}$$

Покажем, что множество $M$ компактно в пространстве $L_q(\Omega)$. Для этого, как известно, достаточно установить, что для любого $\delta > 0$ в этом множестве существует компактная $\delta$-сеть. Пусть $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая область, содержащая $\bar{\Omega}$. На основании теоремы 11.1 о продолжении можно считать, что каждая функция $u \in M$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega')$, причем существует такая постоянная $c_1 > 0$, что

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega')} \leqslant c_1 \quad \forall\, u \in M. \tag{13.25}$$

Выберем некоторое $\varepsilon > 0$ и образуем множество функций

$$M_\varepsilon = \{u^\varepsilon,\ u \in M\},$$

где через $u^\varepsilon$, как обычно, обозначено усреднение по Соболеву функции $u\in\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega')$. Очевидно, можно считать, что $u^\varepsilon\in\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega')$ (при необходимости расширяя $\Omega'$). Покажем, что существуют постоянные $c_2,\ \theta > 0$ такие, что

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L_q(\Omega')} \leqslant c_2\varepsilon^\theta \ \ \forall\, u \in M. \tag{13.26}$$

Это будет означать, что множество $M_\varepsilon$ образует $c_2\varepsilon^\theta$-сеть для множества $M$. Пусть сначала $u \in C_0^\infty(\Omega')$. Тогда

$$u^\varepsilon(x) - u(x) = \int\limits_{B(0,1)} \eta(\xi)(u(x-\varepsilon\xi) - u(x))d\xi =$$

$$= \int\limits_{B(0,1)} \eta(\xi) \int\limits_0^1 \frac{d}{dt} u(x - t\varepsilon\xi) dt d\xi = -\varepsilon \int\limits_{B(0,1)} \eta(\xi) \int\limits_0^1 \nabla u(x - t\varepsilon\xi) \cdot \xi dt d\xi$$

(здесь $\eta$ — усредняющее ядро, см. с. 25), следовательно,

$$\int\limits_{\Omega'} |u^\varepsilon(x) - u(x)| dx \leqslant \varepsilon \int\limits_{B(0,1)} \eta(\xi) \int\limits_0^1 \int\limits_{\Omega'} |\nabla u(x - t\varepsilon\xi)| dx dt d\xi \leqslant$$
$$\leqslant c\varepsilon \int\limits_{\Omega'} |\nabla u(\xi)| d\xi,$$

или

$$\|u - u^\varepsilon\|_{L_1(\Omega')} \leqslant c\varepsilon \|\nabla u\|_{L_1(\Omega')} \leqslant c\varepsilon \|\nabla u\|_{L_p(\Omega')}, \tag{13.27}$$

причем постоянная $c$ не зависит от $u$ и $\varepsilon$. Понятно, что неравенства (13.27) сохраняются и для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega')$. Это доказывается, как обычно, аппроксимацией функции $u$ последовательностью функций из $C_0^\infty(\Omega')$ и последующим предельным переходом. Таким образом,

$$\|u - u^\varepsilon\|_{L_1(\Omega')} \leqslant cc_1\varepsilon \quad \forall\, u \in M. \tag{13.28}$$

Далее, поскольку $1 \leqslant q < q^*$, можно воспользоваться интерполяционным неравенством (2.5), с. 24,

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L_q(\Omega')} \leqslant \|u^\varepsilon - u\|^\theta_{L_1(\Omega')} \|u^\varepsilon - u\|^{1-\theta}_{L_{q^*}(\Omega')},$$

где $\theta \in (0,1)$ определяется из условия $1/q = \theta + (1-\theta)/q^*$. По теореме 3.2, с. 27, (см. неравенство (3.6), с. 29) имеем $\|u^\varepsilon\|_{L_{q^*}(\Omega')} \leqslant \|u\|_{L_{q^*}(\Omega')}$. Вместе с (13.28), (13.24) это означает справедливость (13.26). Для завершения доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что при любом $\varepsilon > 0$ множество $M_\varepsilon$ компактно в $L_q(\Omega')$. Непосредственно из определения усредняющего ядра $\eta_\varepsilon$ вытекает, что для любого $x \in \Omega'$ и для любой функции $u \in M$

$$|u^\varepsilon(x)| \leqslant \int\limits_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x - \xi) |u(\xi)| d\xi \leqslant \max_{x \in \mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x) \|u\|_{L_1(\Omega')} \leqslant c\varepsilon^{-n},$$

$$|\nabla u_m^\varepsilon(x)| \leqslant \int\limits_{B(x,\varepsilon)} |\nabla \eta_\varepsilon(x-\xi)||u(\xi)|d\xi \leqslant$$
$$\leqslant \max_{x\in\mathbb{R}^n} |\nabla \eta_\varepsilon(x)|\|u\|_{L_1(\Omega')} \leqslant c\varepsilon^{-n-1}.$$

Эти оценки означают, что при любом $\varepsilon > 0$ множество $M_\varepsilon$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно и, следовательно, по теореме Арцела компактно в пространстве $C(\Omega')$ и, тем более, в пространстве $L_q(\Omega')$, а значит, и в пространстве $L_q(\Omega)$. □

Замечание 13.2. Поскольку $q^* > p$ и $q^* \to \infty$ при $p \to n$, то пространство $W_p^1(\Omega)$ компактно вкладывается в пространство $L_p(\Omega)$ при любом $p \in [1, n]$.

Непосредственно из теоремы 13.5 и теоремы Арцела вытекает

**Теорема 13.8.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область класса $C^1$, $p \in (n, \infty]$. Тогда пространство $W_p^1(\Omega)$ компактно вкладывается в пространство $C(\bar{\Omega})$.*

Опираясь на теоремы 13.7, 13.8, нетрудно получить

**Следствие 13.1.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область класса $C^1$, $p \in [1, \infty]$. Тогда пространство $W_p^1(\Omega)$ компактно вкладывается в пространство $L_p(\Omega)$.*

Это утверждение при $p = 2$ обычно называют *теоремой Реллиха*.

**Теорема 13.9.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область класса $C^1$, $p \in (1, \infty)$. Тогда, если множество функций ограничено в пространстве $W_p^1(\Omega)$, то множество их следов на $\Gamma$ компактно в пространстве $L_p(\Gamma)$. Иными словами, пространство $W_p^1(\Omega)$ компактно вкладывается в пространство $L_p(\Gamma)$.*

Доказательство. Пусть $M = \{u \in W_p^1(\Omega) : \|u\|_{W_p^1(\Omega)} \leqslant c\}$ есть ограниченное множество пространства $W_p^1(\Omega)$, $\{u_m\} \subset M$ — последовательность, фундаментальная в смысле сходимости в пространстве $L_p(\Omega)$, существование которой гарантируется следствием 13.1. Используя первое неравенство (12.1) (см. теорему 12.2, с. 53), получим

$$\|u_m - u_k\|_{L_p(\Gamma)}^p \leqslant c_1(1+\delta^{-q})\|u_m - u_k\|_{L_p(\Omega)}^p + \delta^p \|\nabla(u_m - u_k)\|_{L_p(\Omega)}^p \leqslant$$

$$\leqslant c_1(1+\delta^{-q})\|u_m-u_k\|^p_{L_p(\Omega)}+2\delta^p c. \quad (13.29)$$

Пусть $\varepsilon$ — произвольное положительное число, а $m$ и $k$ настолько велики, что $\|u_m-u_k\|_{L_p(\Omega)}\leqslant\varepsilon$. Тогда для любого $\delta>0$ имеем

$$\|u_m-u_k\|^p_{L_p(\Gamma)}\leqslant c_1(1+\delta^{-q})\varepsilon^p+2\delta^p c.$$

Полагая $\delta=\varepsilon^{p/(p+q)}$, получим $\|u_m-u_k\|^p_{L_p(\Gamma)}\leqslant c_1\varepsilon^p+c_2\varepsilon^{p^2/(p+q)}$, т. е. $\|u_m-u_k\|_{L_p(\Gamma)}\to 0$ при $m,k\to\infty$. $\square$

Приведем без доказательства более общую теорему о следах функций из пространства $W^s_p(\Omega)$.

**Теорема 13.10.** *Пусть* $\Gamma_m v$ — *сечение области* $\bar\Omega$ *гиперплоскостью размерности* $m<n$, $m>n-sp\geqslant 0$, $p>1$. *Тогда:*

1) *если* $n>sp$, *то пространство* $W^s_p(\Omega)$ *непрерывно вкладывается в пространство* $L_q(\Gamma_m)$ *при* $q=mp/(n-sp)$; *пространство* $W^s_p(\Omega)$ *компактно вкладывается в пространство* $L_{q^*}(\Gamma_m)$ $\forall\, q^*<q$;

2) *если* $n=sp$, *то пространство* $W^s_p(\Omega)$ *компактно вкладывается в* $L_q(\Gamma_m)$ $\forall\, q<\infty$.

Эта теорема справедлива и в том случае, когда $\Gamma_m$ — кусок достаточно гладкой поверхности [1)] размерности $m$, например, $\Gamma_m$ может быть частью границы области $\Omega$.

**Теорема 13.11.** *Если* $\Gamma$, *граница области* $\Omega$, — *липшицева кусочно непрерывно дифференцируемая поверхность, то для любой функции* $u\in W^s_p(\Omega)$, $p>1$, *на* $\Gamma$ *определены следы всех производных* $D^\alpha u$ *при* $|\alpha|<s$.

Доказательство. Ясно, что если $|\alpha|<s$, то $D^\alpha u\in W^1_p(\Omega)$, а при $m=n-1$, $s=1$ условие $m>n-sp$ теоремы 13.10 выполнено при любом $p>1$. $\square$

Большинство теорем настоящего пункта доказано в предположении, что область $\Omega$ есть область класса $C^1$. Это предположение было сделано нами исключительно с целью упрощения доказательств. На самом деле все утверждения сохраняются и для более широких классов областей, например, можно считать,

[1)] Достаточно предположить, что $\Gamma_m\in C^s$.

что области являются липшцевыми. Последнее предположение уже не может быть существенно ослаблено.

В качестве подтверждения сказанного приведем пример, показывающий, что утверждение теоремы 13.5 не выполняется, ес-

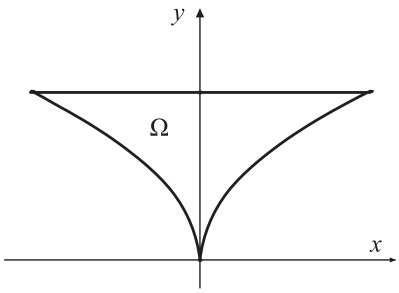


Рис. 1. Область из контрпримера

ли область $\Omega$ не принадлежит классу $C^{0,1}$. Пусть $\Omega$ — двумерная область, ограниченная кривой $y = |x|^\gamma$ $(\gamma < 1)$ и прямой $y = 1$ (рис. 1). В начале координат граница области имеет нулевой угол и потому, как нетрудно проверить, не принадлежит классу $C^{0,1}$. Рассмотрим функцию $u(x, y) = y^\beta$. Эта функция неограниченно возрастает, когда $y \to 0$ при любом $\beta < 0$, т. е. не является непрерывной. Заметим, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \beta y^{\beta-1},$$

причем

$$\int\limits_\Omega \Bigl|\frac{\partial u}{\partial y}\Bigr|^{2+\varepsilon} d\Omega = \beta^{2+\varepsilon} \int\limits_0^1 \int\limits_{-y^{1/\gamma}}^{y^{1/\gamma}} y^{(\beta-1)(2+\varepsilon)} dx dy =$$

$$= 2\beta^{2+\varepsilon} \int\limits_0^1 y^{(\beta-1)(2+\varepsilon)+1/\gamma} dy.$$

Существуют такие $\varepsilon > 0$, $\beta < 0$, что $(\beta - 1)(2 + \varepsilon) + 1/\gamma > -1$ при любом $\gamma < 1$. Это означает, что $u \in W^1_{2+\varepsilon}(\Omega)$, и, следовательно, теорема 13.5 для рассматриваемой области неверна.

**14. Теоремы об эквивалентных нормировках.** На пространстве $W_p^s(\Omega)$ часто бывает удобно вводить норму не при помощи соотношения (7.1) (или (7.2)), а некоторыми другими, эквивалентными, способами[1)]. Прежде всего заметим, что поскольку все нормы на конечномерном пространстве эквивалентны, а

$$\Big(\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha u(x)|^p\Big)^{1/p},\quad p\geqslant 1,$$

есть норма вектора $D^m u(x)$, компонентами которого являются все производные функции $u$ порядка $m$, то норму на пространстве $W_p^s(\Omega)$ можно определять эквивалентным образом при помощи равенства

$$\|u\|^p_{W_p^s(\Omega)}=\int\limits_\Omega\sum_{k=0}^s\|D^k u(x)\|^p dx,$$

где $\|\cdot\|$ — любая норма вектора $D^k u(x)$, состоящего из всех производных функции $u$ порядка $k$ в точке $x$.

Далее будут использоваться следующие обозначения для полунорм на пространствах Соболева:

$$|u|_{s,p,\Omega}=\Big(\int\limits_\Omega\sum_{|\alpha|=s}|D^\alpha u|^p dx\Big)^{1/p},\quad [u]_{s,p,\Omega}=\Big(\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n\Big|\frac{\partial^s u}{\partial x_i^s}\Big|^p\Big)^{1/p},$$

$$|u|_{s,\infty,\Omega}=\max_{|\alpha|=s}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|D^\alpha u(x)|,\ \ [u]_{s,\infty,\Omega}=\max_{i=1,\dots,n}\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}\Big|\frac{\partial^s u}{\partial x_i^s}(x)\Big|.$$

Отметим, прежде всего (см., например, [41, с. 393]), что в выражении для нормы пространства $W_p^s(\Omega)$ можно не использовать смешанные производные функции $u$, а именно, справедлива

**Теорема 14.1.** *Норма* $\|u\|'_{W_p^s(\Omega)}=\|u\|_{L_p(\Omega)}+[u]_{s,p,\Omega}$ *эквивалентна на пространстве* $W_p^s(\Omega)$ *норме, определенной равенством* (7.1) (*или* (7.2)).

Весьма общий прием построения эквивалентных норм на пространстве $W_p^s(\Omega)$ дает следующая теорема С.Л. Соболева.

---

[1)] См. сноску на с. 10.

**Теорема 14.2.** *Пусть* $f_0,\ f_1,\ \ldots,\ f_k$ *— линейные непрерывные функционалы на пространстве* $W_p^s(\Omega)$, $s \geqslant 1$, $p \in [1, \infty]$, *обладающие тем свойством, что из равенств*

$$|u|_{r,p,\Omega} = 0, \quad r = l, l+1, \ldots, s, \quad f_0(u) = f_1(u) = \ldots = f_k(u) = 0$$

*вытекает, что* $u = 0$. *Тогда выражение*

$$\|u\|'_{W_p^s(\Omega)} = |u|_{l,p,\Omega} + |u|_{l+1,p,\Omega} + \ldots + |u|_{s,p,\Omega} + |f_0(u)| + \ldots + |f_k(u)|$$

*определяет норму на пространстве* $W_p^s(\Omega)$, *эквивалентную исходной.*

Доказательство. Выражение $\|u\|'_{W_p^s(\Omega)}$, как нетрудно проверить, действительно определяет норму на пространстве $W_p^s(\Omega)$. Неравенство $\|u\|'_{W_p^s(\Omega)} \leqslant c_1 \|u\|_{W_p^s(\Omega)}$ $\forall\, u \in W_p^s(\Omega)$, $c_1 = \text{const}$,— следствие непрерывности функционалов $f_0, f_1, \ldots, f_k$. Остается доказать справедливость обратного неравенства

$$\|u\|_{W_p^s(\Omega)} \leqslant c_2 \|u\|'_{W_p^s(\Omega)} \quad \forall\, u \in W_p^s(\Omega),\ c_2 = \text{const}.$$

Предположим противное. Тогда найдется такая последовательность $\{u_m\}$, что

$$\|u_m\|_{W_p^s(\Omega)} = 1, \quad m \geqslant 1, \tag{14.1}$$

и, в то же время,

$$\|u_m\|'_{W_p^s(\Omega)} \to 0. \tag{14.2}$$

Пространство $W_p^s$ компактно вкладывается в пространство $W_p^{s-1}$ при любых $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $s \geqslant 1$ (см. следствие 13.1, с. 69). Поэтому из последовательности $\{u_m\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{u_{m_i}\}$, фундаментальную в пространстве $W_p^{s-1}(\Omega)$, т. е. такую, что

$$\|u_{m_i} - u_{m_j}\|_{W_p^{s-1}(\Omega)} \to 0 \text{ при } m_i,\ m_j \to \infty. \tag{14.3}$$

Кроме того, из (14.2) следует, что $|u_{m_i}|_{s,p,\Omega} \to 0$, поэтому

$$|u_{m_i} - u_{m_j}|_{s,p,\Omega} \to 0 \quad \text{при } m_i, m_j \to \infty.$$

Вместе с (14.3) это означает, что последовательность $\{u_{m_i}\}$ фундаментальна в $W_p^s(\Omega)$ и потому имеет предел, т. е. $u_{m_i} \to u$

в $W_p^s(\Omega)$. На основании условия (14.2), используя непрерывность функционалов $f_i$ и полунорм $|\cdot|_{j,p,\Omega}$, получим

$$|u|_{j,p,\Omega} = 0,\ j = l, l+1,\ \ldots,\ s, \quad f_j(u) = 0, \quad j = 0,\ 1,\ \ldots, k,$$

и, значит, $u = 0$. С другой стороны, из (14.1) вытекает, что

$$\lim_{m_i \to \infty} \|u_{m_i}\|_{W_p^s(\Omega)} = \|u\|_{W_p^s(\Omega)} = 1.$$

Полученное противоречие доказывает теорему. □

Приведем примеры, иллюстрирующие применение теорем об эквивалентных нормировках.

**1. Неравенство Фридрихса.** Используя неравенство (12.1) для $u \in W_p^1(\Omega)$, $1 < p < \infty$, получим, что $\|u\|_{L_p(\Gamma)} \leqslant c\, \|u\|_{W_p^1(\Omega)}$, поэтому можно определить линейный ограниченный на пространстве $W_p^1(\Omega)$ функционал

$$f_0(u) = \int\limits_\Gamma u\, dx.$$

Ясно, что если для $u \in W_p^1(\Omega)$ выполнены равенства

$$|u|^p_{1,p,\Omega} = \int\limits_\Omega |\nabla u|^p\, dx = 0, \tag{14.4}$$

$$f_0(u) = 0, \tag{14.5}$$

то $u(x) \equiv \mathrm{const}$ вследствие (14.4), а в силу (14.5) имеем $u(x) \equiv 0$. Поэтому на основании теоремы 14.2 норма

$$\|u\|'_{W_p^1(\Omega)} = |u|_{1,p,\Omega} + \Big|\int\limits_\Gamma u\, dx\Big|$$

эквивалентна исходной норме

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega)} = \Big(|u|^p_{1,p,\Omega} + |u|^p_{0,p,\Omega}\Big)^{1/p}$$

на пространстве $W_p^1(\Omega)$. Отсюда вытекает, что

$$\|u\|^p_{L_p(\Omega)} \leqslant \|u\|^p_{W_p^1(\Omega)} \leqslant c\,\Big(\int\limits_\Omega |\nabla u|^p dx + \Big|\int\limits_\Gamma u dx\Big|^p\Big).$$

В частности, для $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ имеем

$$\|u\|^p_{L_p(\Omega)} \leqslant c \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p dx. \tag{14.6}$$

Неравенство (14.6) называется *неравенством Фридрихса*[1]. Из него вытекает, что полунорма $|\cdot|_{1,p}$ есть норма на пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, эквивалентная $\|\cdot\|_{1,p}$. Действительно, как следствие неравенства (14.6) получаем:

$$\|u\|^p_{W^1_p(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} (|\nabla u|^p + u^p)\, dx \leqslant c \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p\, dx = c|u|^p_{1,p}.$$

Оценка $|u|_{1,p} \leqslant \|u\|_{W^1_p(\Omega)}$ очевидна.

Замечание 14.1. Неравенство Фридрихса (14.6) доказано нами как следствие теоремы об эквивалентных нормировках и неравенства (12.1). При этом использовано предположение о том, что граница области $\Omega$ липшицева. На самом деле неравенство Фридрихса справедливо для произвольной ограниченной области. Докажем это при $n=2$. Случай пространства произвольной размерности рассматривается аналогично. Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и ограничена. Можно считать, что $\Omega \subset \Omega'$, где $\Omega'$ — квадрат со стороной $a$: $\Omega' = \big\{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1,\ x_2 < a\big\}$. Для функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ определим функцию $\tilde{u}$ соотношением

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

Пусть $x \in \Omega'$. Используя формулу Ньютона — Лейбница, можно написать

$$\tilde{u}\,(x_1,\ x_2) = \int\limits_0^{x_1} \frac{\partial \tilde{u}\,(\xi_1,\ x_2)}{\partial \xi_1} d\xi_1,$$

откуда в силу неравенства Гельдера

$$|\tilde{u}\,(x_1,\ x_2)\,|^p \leqslant a^{p-1} \int\limits_0^a \left| \frac{\partial \tilde{u}\,(\xi_1,\ x_2)}{\partial \xi_1} \right|^p d\xi_1.$$

[1] Чаще всего мы будем использовать это неравенство при $p = 2$. Постоянную $c$ будем обозначать через $c_\Omega$, подчеркивая тем самым, что она зависит лишь от области $\Omega$.

Интегрируя последнее неравенство по $\Omega'$, получим

$$\int\limits_{\Omega'} |\tilde{u}|^p dx \leqslant a^p \int\limits_{\Omega'} \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1}\right|^p dx \leqslant a^p \int\limits_{\Omega'} |\nabla \tilde{u}|^p \, dx,$$

или, так как $\tilde{u}(x) \equiv 0$ вне $\Omega$,

$$\int\limits_{\Omega} |u|^p dx \leqslant a^p \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p dx \quad \forall\, u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{14.7}$$

Предположим теперь, что $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$. По определению пространства $\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ существует последовательность $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $\|u - u_m\|_{1,p} \to 0$ при $m \to \infty$. Ясно, что при этом

$$\int\limits_{\Omega} |u_m|^p dx \to \int\limits_{\Omega} |u|^p dx, \quad \int\limits_{\Omega} |\nabla u_m|^p \, dx \to \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx.$$

Записывая неравенство (14.7) для функции $u_m$ и переходя к пределу при $m \to \infty$, получим, что (14.7) выполнено для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$.

Подчеркнем, что, как показывает оценка (14.7), постоянная $c_\Omega$ в неравенстве Фридрихса стремится к нулю, если $\operatorname{mes}(\Omega) \to 0$.

**2. Неравенство Пуанкаре.** Пусть функционал $f_0(u)$ определен на пространстве $W_p^1(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, соотношением

$$f_0(u) = \int\limits_{\Omega} u \, dx.$$

Вследствие неравенства Гельдера

$$|f_0(u)| \leqslant c \left(\int\limits_{\Omega} |u|^p dx\right)^{1/p} \leqslant c \, \|u\|_{W_p^1(\Omega)},$$

т. е. $f_0(u)$ — линейный ограниченный функционал. Ясно, что если

$$f_0(u) = 0, \; |u|_{1,p,\Omega} = 0,$$

то $u(x) \equiv 0$, и по теореме 14.2 норма

$$\|u\|'_{W_p^1(\Omega)} = |u|_{1,p,\Omega} + \Big|\int\limits_\Omega u\,dx\Big|$$

эквивалента норме пространства $W_p^1(\Omega)$. Отсюда вытекает, что

$$\int\limits_\Omega |u|^p dx \leqslant c\,\Big\{\int\limits_\Omega |\nabla u|^p\,dx + \Big|\int\limits_\Omega u\,dx\Big|^p\Big\}.$$

Это неравенство называют *неравенством Пуанкаре*.

**3. Эквивалентные нормировки пространства $H_0^2(\Omega)$.** Если $\Omega$ — ограниченная область с липшицевой границей, то нормы

$$\|u\|_{2,\Omega}^{(1)} = \Big(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=2} (D^\alpha u)^2 dx\Big)^{1/2},\ \|u\|_{2,\Omega}^{(2)} = \Big(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\Big)^2\Big)^{1/2} dx,$$

$$\|u\|_{2,\Omega}^{(3)} = \Big(\int\limits_\Omega (\Delta u)^2\Big)^{1/2} dx,$$

определенные на $H_0^2(\Omega)$, эквивалентны норме $H^2(\Omega)$.

Напомним, что $H_0^2(\Omega)$ — подпространство $H^2(\Omega)$, получающееся замыканием множества $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $H^2(\Omega)$. Понятно поэтому, что соответствующие неравенства эквивалентности достаточно установить для функций из $C_0^\infty(\Omega)$. Сделаем это сначала для нормы $\|\cdot\|_{2,\Omega}^{(1)}$. Неравенство $\|u\|_{2,\Omega}^{(1)} \leqslant \|u\|_{2,\Omega}$ очевидно. Используя неравенство Фридрихса, получим

$$\int\limits_\Omega u^2 dx \leqslant c\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx,$$

$$\int\limits_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx \leqslant c\int\limits_\Omega \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 dx, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

следовательно, обратное неравенство $\|u\|_{2,\Omega} \leqslant c\|u\|_{2,\Omega}^{(1)}$ также доказано.

Сравним нормы $\|u\|^{(1)}_{2,\Omega}$ и $\|u\|^{(2)}_{2,\Omega}$. Ясно, что $\|u\|^{(2)}_{2,\Omega} \leqslant \|u\|^{(1)}_{2,\Omega}$. Для того, чтобы оценить $\|u\|^{(1)}_{2,\Omega}$ сверху, рассмотрим выражение

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx$$

при $i \neq j$ и преобразуем его при помощи формулы интегрирования по частям, перебрасывая производную по $x_j$ на второй множитель, а затем производную по $x_i$ — на первый. В результате получим

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\, dx = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \right)^2 \right) dx.$$

Эквивалентность норм $\|u\|^{(1)}_{2,\Omega}$, $\|u\|^{(2)}_{2,\Omega}$ доказана. Доказательство эквивалентности норм $\|u\|^{(1)}_{2,\Omega}$, $\|u\|^{(3)}_{2,\Omega}$ оставляем читателю в качестве упражнения.

**15. Разностные отношения.** Пусть $\Omega$ — область пространства $\mathbb{R}^n$, $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. Функция $u$ определена на $\Omega$. Для любых $x \in \Omega_0$, $h \in \mathbb{R}$, $0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega_0, \partial\Omega)$, можно вычислить

$$D_i^h u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$e_i$ — орт координатной оси $x_i$. Функцию $D_i^h u(x)$ называют *разделенной разностью* (*разностным отношением*) функции $u$ по переменной $x_i$.

**Теорема 15.1.** *Пусть* $u \in W_p^{(1)}(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$. *Тогда*

$$\|D_i^h u\|_{L_p(\Omega_0)} \leqslant \|D_i u\|_{L_p(\Omega)} \text{ \textit{при} } 0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega_0, \partial\Omega), \tag{15.1}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Предположим сначала, что функция $u$ принадлежит пространству $C^\infty(\Omega) \cap W_p^{(1)}(\Omega)$. Тогда для любого

$x \in \Omega_0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $|h| \in (0, \operatorname{dist}(\Omega_0, \partial\Omega))$ справедливо равенство

$$u(x + he_i) - u(x) = h \int\limits_0^1 \frac{\partial u(x + the_i)}{\partial x_i} dt,$$

следовательно,

$$|D_i^h u(x)| \leqslant \int\limits_0^1 \left| \frac{\partial u(x + the_i)}{\partial x_i} \right| dt.$$

Отсюда, используя неравенство Гёльдера, получаем

$$|D_i^h u(x)|^p \leqslant \int\limits_0^1 \left| \frac{\partial u(x + the_i)}{\partial x_i} \right|^p dt.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\Omega_0} |D_i^h u(x)|^p dx \leqslant \int\limits_0^1 \int\limits_{\Omega_0} \left| \frac{\partial u(x + the_i)}{\partial x_i} \right|^p dx dt \leqslant \int\limits_{\Omega} |D_i u(x)|^p dx.$$

Для произвольной функции $u \in W_p^{(1)}(\Omega)$ неравенство (15.1) устанавливается на основе теоремы 8.2, с. 40, т. е. при помощи аппроксимации ее функциями из $C^\infty(\Omega) \cap W_p^{(1)}(\Omega)$. $\square$

Справедливо и в некотором смысле обратное утверждение.

**Теорема 15.2.** *Пусть* $1 < p < \infty$, $u \in L_p(\Omega)$, *существует постоянная* $c$ *такая, что*

$$\|D_i^h u\|_{L_p(\Omega_0)} \leqslant c \text{ при } 0 < |h| < \operatorname{dist}(\Omega_0, \partial\Omega), \ i = 1, 2, \ldots, n. \quad (15.2)$$

*Тогда* $u \in W_p^{(1)}(\Omega_0)$, *причем*

$$\|D_i u\|_{L_p(\Omega_0)} \leqslant c, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \quad (15.3)$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_0)$. Тогда при любом $i = 1, 2, \ldots, n$ и достаточно малых $h > 0$ справедливо очевидное равенство

$$\int\limits_{\Omega_0} u(x)(\varphi(x + he_i) - \varphi(x)) dx = -\int\limits_{\Omega_0} (u(x) - u(x - he_i))\varphi(x) dx.$$

Перепишем его более кратко[1)]:

$$\int\limits_{\Omega_0} u D_i^h \varphi \, dx = -\int\limits_{\Omega_0} \varphi D_i^{-h} u \, dx. \tag{15.4}$$

Из оценки (15.2) и слабой компактности ограниченного множества в пространстве $L_p(\Omega_0)$ при $1 < p < \infty$ вытекает существование функции $v_i \in L_p(\Omega_0)$ и последовательности $h_k \to 0$ таких, что

$$D_i^{-h_k} u \rightharpoonup v_i \quad \text{в } L_p(\Omega_0). \tag{15.5}$$

Нетрудно проверить, что $D_i^{h_k}\varphi(x) \to D_i\varphi(x)$ при $x \in \Omega_0$, причем

$$\max_{x\in\Omega_0} |D_i^h \varphi(x)| \leqslant \max_{x\in\Omega_0} |D_i\varphi(x)|$$

равномерно по всем достаточно малым $h$. Поэтому в равенстве (15.4) можно перейти к пределу при $h_k \to 0$. В результате получим

$$\int\limits_{\Omega_0} u D_i \varphi \, dx = -\int\limits_{\Omega_0} \varphi v_i \, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega_0).$$

Таким образом, $v_i \in L_p(\Omega_0)$ есть обобщенная производная функции $u$, следовательно, $u \in W_p^{(1)}$. Хорошо известно, что если последовательность элементов $\{f_k\}$ банахова пространства слабо сходится к $f$, то

$$\|f\| \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \|f_k\|\,^{2)}.$$

Поэтому оценка (15.3) получается как следствие предельного соотношения (15.5) и оценки (15.2). □

Замечание 15.1. При $p = 1$ теорема 15.2 неверна.

Нам потребуется также следующий вариант теоремы 15.2.

**Теорема 15.3.** *Пусть* $\Omega = B(0,R)\bigcap\mathbb{R}^n_+$, $\Omega_0 = B(0,r)\bigcap\mathbb{R}^n_+$, $0 < r < R$, $1 < p < \infty$, $u \in L_p(\Omega)$ *и существует постоянная* $c$ *такая, что*

$$\|D_i^h u\|_{L_p(\Omega_0)} \leqslant c \quad \textit{при } 0 < |h| < R - r,\ i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{15.6}$$

---

[1)] Формулу (15.4) часто называют формулой интегрирования по частям для разностных отношений.

[2)] Иными словами, норма слабо полунепрерывна снизу.

*Тогда* $D_i u \in L_p(\Omega_0)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, *причем*

$$\|D_i u\|_{L_p(\Omega_0)} \leqslant c, \tag{15.7}$$

$i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Доказательство теоремы 15.3 аналогично доказательству теоремы 15.2.

**16. Пространство $H^{-s}(\Omega)$.** В теории дифференциальных уравнений часто используются пространства $W_p^s(\Omega)$ с отрицательным показателем $s$. Описанию этих пространств при $p = 2$ и изучению их свойств посвящен настоящий пункт.

Пусть $v \in L_2(\Omega)$, $u \in H_0^s(\Omega)$, $s \geqslant 1$,

$$f_v(u) = \int_\Omega vudx. \tag{16.1}$$

Нетрудно видеть, что $f_v$ — линейный функционал на пространстве $H_0^s(\Omega)$. Функционал $f_v$ ограничен, так как по неравенству Коши — Буняковского

$$|f_v(u)| \leqslant \|v\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|v\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{H^s(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^s(\Omega). \tag{16.2}$$

Введем на пространстве $L_2(\Omega)$ новую норму $\|\cdot\|_{-s}$, полагая

$$\|v\|_{-s} = \|f_v\| = \sup_{u \in H_0^s(\Omega),\ u \neq 0} \frac{|f_v(u)|}{\|u\|_{H^s(\Omega)}}. \tag{16.3}$$

Отображение $\|\cdot\|_{-s} : L_2 \to \mathbb{R}$ действительно является нормой. В самом деле, если $\|v\|_{-s} = 0$, то $f_v = 0$, следовательно,

$$\int_\Omega vudx = 0 \quad \forall\, u \in H_0^s(\Omega), \tag{16.4}$$

но тогда по теореме 4.1, с. 31, $v(x) = 0$ п. в. на $\Omega$. Остальные аксиомы нормы выполняются очевидным образом.

Поскольку $H_0^s(\Omega)$ — пространство Гильберта, то по теореме Рисса функционал $f_v$ для любого $v \in L_2(\Omega)$ представим в виде

$$f_v(u) = (w_v, u)_{H^s(\Omega)} \quad \forall\, u \in H_0^s(\Omega), \tag{16.5}$$

где элемент $w_v \in H_0^s(\Omega)$ однозначно определяется по $v$, причем

$$\|w_v\|_{H^s(\Omega)} = \|f_v\| = \|v\|_{-s}. \tag{16.6}$$

Введем на пространстве $L_2(\Omega)$ скалярное произведение $(u, v)_{-s}$ по формуле

$$(u, v)_{-s} = (w_u, w_v)_{H^s(\Omega)} \quad \forall\, u, v \in L_2(\Omega). \tag{16.7}$$

Нетрудно видеть, что все аксиомы скалярного произведения выполнены, причем $(v, v)_{-s} = \|v\|_{-s}^2$. Множество функций из $L_2(\Omega)$ относительно скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_{-s}$, очевидно, является предгильбертовым пространством. Его пополнение образует пространство Гильберта, которое будем обозначать через $H^{-s}(\Omega)$. По построению

$$H_0^s(\Omega) \subset L_2(\Omega) \subset H^{-s}(\Omega), \tag{16.8}$$

причем вследствие (16.2)

$$\|u\|_{H^{-s}(\Omega)} = \|u\|_{-s} \leqslant \|u\|_{L_2(\Omega)} \quad \forall\, u \in L_2(\Omega),$$

кроме того,

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|u\|_{H^s(\Omega)} \quad \forall\, u \in H_0^s(\Omega),$$

поэтому вложения (16.8) непрерывны.

Приведем примеры, показывающие, что при любом $s \geqslant 1$ пространство $H^{-s}(\Omega)$ шире пространства $L_2(\Omega)$.

Пример 16.1. Функция $u(x) = x^\alpha$, $\alpha > -1$, принадлежит пространству $H^{-1}(0, 1)$ [1)]. В самом деле, рассмотрим функцию

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant \varepsilon < 1, \\ x^\alpha, & \varepsilon < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Ясно, что $u_\varepsilon \in L_2(0, 1)$ при любом $0 < \varepsilon < 1$. Для любой функции $\varphi$ из $H_0^1(0, 1)$ имеем

$$\int_0^1 (u(x) - u_\varepsilon(x))\varphi(x)dx = \int_0^\varepsilon x^\alpha \varphi(x)dx = \frac{1}{\alpha+1}\int_0^\varepsilon (x^{\alpha+1})'\varphi(x)dx =$$

[1)] Функция $u(x) = x^\alpha \in L_2(0, 1)$ при $\alpha > -1/2$.

$$= -\frac{1}{\alpha+1}\int\limits_0^\varepsilon (x^{\alpha+1})\varphi'(x)dx + \frac{1}{\alpha+1}\varepsilon^{\alpha+1}\varphi(\varepsilon).$$

Используя неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\left|\int\limits_0^\varepsilon (x^{\alpha+1})\varphi'(x)dx\right| \leqslant \left(\int\limits_0^\varepsilon x^{2(\alpha+1)}dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^\varepsilon (\varphi'(x))^2dx\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^{\alpha+1}\|\varphi\|_{H^1(0,1)}.$$

Вследствие непрерывности вложения пространства $H^1(0,1)$ в $C[0,1]$ можем написать, что $|\varphi(\varepsilon)| \leqslant c\|\varphi\|_{H^1(0,1)}$, $c = \mathrm{const}$. Таким образом,

$$\left|\int\limits_0^1 (u(x) - u_\varepsilon(x))\varphi(x)dx\right| \leqslant \varepsilon^{\alpha+1}\frac{1+c}{1+\alpha}\|\varphi\|_{H^1(0,1)} \quad \forall\,\varphi \in H_0^1(0,1),$$

поэтому $\|u - u_\varepsilon\|_{H^{-1}(0,1)} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Идеальные элементы пространства $H^{-s}(\Omega)$, $s \geqslant 1$, могут и не быть функциями точки, но порождать линейные ограниченные функционалы на пространстве $H_0^s(\Omega)$.

Пример 16.2. Пусть функция $u_\varepsilon$ определена на отрезке $[-1,1]$ так, что

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \varepsilon, \\ 1/2\varepsilon, & |x| \leqslant \varepsilon, \end{cases}$$

$0 < \varepsilon < 1$. Для любой функции $\varphi$ из $H_0^1(-1,1)$

$$\int\limits_{-1}^1 u_\varepsilon(x)\varphi(x)dx - \varphi(0) = \int\limits_{-\varepsilon}^\varepsilon u_\varepsilon(x)\varphi(x)dx - \varphi(0) = \varphi(\xi) - \varphi(0),$$

где $\xi \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, откуда на основании неравенства Коши — Буняковского получаем

$$\left|\int\limits_{-1}^1 u_\varepsilon(x)\varphi(x)dx - \varphi(0)\right| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\left(\int\limits_{-\varepsilon}^\varepsilon (\varphi'(x))^2dx\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{\varepsilon}\|\varphi\|_{H^1(-1,1)}.$$

Можно сказать, таким образом, что последовательность функций $u_\varepsilon \in L_2(-1,1)$ сходится при $\varepsilon \to 0$ по норме пространства $H^{-1}(-1,1)$ к $\delta$-функции, сосредоточенной в начале координат.

Установим в общем случае связь пространства $H^{-s}(\Omega)$ с пространством $(H_0^s(\Omega))^*$, т. е. с пространством всех линейных ограниченных функционалов над пространством $H_0^s(\Omega)$, иными словами, с пространством, сопряженным к $H_0^s(\Omega)$.

Заметим, что множество функционалов, представимых в виде (16.1), где $v \in L_2(\Omega)$, плотно в $(H_0^s(\Omega))^*$, так как если $f_v(u) = 0$ $\forall\, v \in L_2(\Omega)$, то по теореме 4.1, с. 31, $u = 0$. Таким образом, для любого функционала $f \in (H_0^s(\Omega))^*$ найдется последовательность элементов $v_k \in L_2(\Omega)$ такая, что $f(u) = \lim\limits_{k\to\infty}(v_k, u)_{L_2(\Omega)}$ $\forall\, u \in H_0^s(\Omega)$. Более того, $\|f - f_{v_k}\| \to 0$ при $k \to \infty$. Поэтому $\|f_{v_k} - f_{v_l}\| = \|v_k - v_l\|_{H^{-s}(\Omega)} \to 0$ при $k, l \to \infty$, следовательно, существует элемент $v \in H^{-s}(\Omega)$ такой, что $\|v_k - v\|_{H^{-s}(\Omega)} \to 0$ при $k \to \infty$. Таким образом, каждому функционалу $f \in (H_0^s(\Omega))^*$ соответствует элемент $v \in H^{-s}(\Omega)$. Ясно, что это соответствие является взаимнооднозначным, линейным и изометричным, так как $\|v\|_{H^{-s}(\Omega)} = \lim\limits_{k\to\infty}\|v_k\|_{H^{-s}(\Omega)} = \lim\limits_{k\to\infty}\|f_{v_k}\| = \|f\|$. В дальнейшем функционал $f \in (H_0^s(\Omega))^*$, соответствующий элементу $v \in H^{-s}(\Omega)$, будем обозначать через $f_v$.

Определим билинейную форму (*отношение двойственности*)

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : H^{-s}(\Omega) \times H_0^s(\Omega) \to \mathbb{R},$$

полагая $\langle v, u\rangle = f_v(u)$ $\forall\, v \in H^{-s}(\Omega),\ u \in H_0^s(\Omega)$. Отметим, что вследствие (16.3)

$$|\langle v, u\rangle| \leqslant \|v\|_{H^{-s}(\Omega)}\|u\|_{H^s(\Omega)} \quad \forall\, v \in H^{-s}(\Omega),\ u \in H_0^s(\Omega). \tag{16.9}$$

Неравенство (16.9) называют обобщенным неравенством Коши — Буняковского.

Пространство $H^{-s}(\Omega)$ допускает естественную интерпретацию в терминах обобщенных функций. В самом деле, по теореме Рисса линейный функционал $\langle v, u\rangle$ может быть представлен в виде скалярного произведения, т. е.

$$\langle v, u\rangle = (w_v, u)_{H^s(\Omega)} \quad \forall\, u \in H_0^s(\Omega), \tag{16.10}$$

где функция $w_v \in H_0^s(\Omega)$ однозначно определяется по $v \in H^{-s}(\Omega)$.

Записывая (16.10) более подробно, получим

$$\langle v, u\rangle = \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|\leqslant s} D^\alpha w_v D^\alpha u\, dx \quad \forall\, u \in H_0^s(\Omega).$$

Полагая $D^\alpha w_v = g_{v,\alpha}$, можем написать

$$\langle v, u\rangle = \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|\leqslant s} g_{v,\alpha} D^\alpha u\, dx.$$

Ясно, что $g_{v,\alpha} \in L_2(\Omega)$ при любом $|\alpha| \leqslant s$.

Пусть обобщенная функция $\widetilde{f}_v \in D'(\Omega)$ задается равенством

$$\widetilde{f}_v = \sum_{|\alpha|\leqslant s} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha g_{v,\alpha}.$$

По определению (см. с. 34, 34)

$$\langle \widetilde{f}_v, u\rangle = \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|\leqslant s} g_{v,\alpha} D^\alpha u dx \quad \forall u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Это означает, что функционал $f_v$ можно считать продолжением функционала $\widetilde{f}_v$ с $C_0^\infty(\Omega)$ на $H_0^s(\Omega)$. Иначе говоря, всякий функционал $f \in (H_0^s(\Omega))^*$ можно представить в виде

$$f(u) = \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|\leqslant s} g_\alpha D^\alpha u dx, \quad g_\alpha \in L_2(\Omega).$$

Поскольку $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $H_0^s(\Omega)$, то это единственно возможное продолжение. Таким образом, указано взаимно однозначное и, очевидно, линейное соответствие между пространством $H^{-s}(\Omega)$ и линейным пространством обобщенных функций вида

$$\widetilde{f} = \sum_{|\alpha|\leqslant s} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha g_\alpha, \quad g_\alpha \in L_2(\Omega) \quad \forall\, |\alpha| \leqslant s. \tag{16.11}$$

Покажем, что линейное пространство обобщенных функций вида (16.11) можно нормировать так, чтобы указанное соответствие было изометрией. Пусть

$$L_2^N(\Omega) = \prod_{|\alpha|\leqslant s} L_2(\Omega),$$

где $N$ — количество различных мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ длины, не превосходящей $s$, есть прямое произведение гильбертовых пространств $L_2(\Omega)$. Нетрудно видеть, что множество векторов $g \in L_2^N(\Omega)$, удовлетворяющих условию

$$\langle \widetilde{f}, u\rangle = \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant s} g_\alpha D^\alpha u dx \quad \forall\, u \in C_0^\infty(\Omega) \tag{16.12}$$

при фиксированном $\widetilde{f} \in D'(\Omega)$, образует замкнутое аффинное множество $\mathcal{L}_s(\widetilde{f})$ в гильбертовом пространстве $L_2^N(\Omega)$. Поэтому существует, и притом только один, элемент $g^0 \in \mathcal{L}_s(\widetilde{f})$ такой, что

$$\|g^0\|_{L_2^N(\Omega)} = \min_{g\in\mathcal{L}_s(\widetilde{f})} \|g\|_{L_2^N(\Omega)}. \tag{16.13}$$

Нормируем линейное пространство распределений вида (16.11), полагая

$$\|\widetilde{f}\| = \min_{g\in\mathcal{L}_s(\widetilde{f})} \|g\|_{L_2^N(\Omega)}.$$

Пусть $v \in H^{-s}(\Omega)$. Покажем, что $\|v\|_{H^{-s}(\Omega)} = \|\widetilde{f}_v\|$. Непосредственно из определений (см. (16.3)) следует, что

$$\|v\|_{H^{-s}(\Omega)} \leqslant \|g\|_{L_2^N(\Omega)} \quad \forall\, g \in \mathcal{L}_s(\widetilde{f}_v),$$

полагая $g_\alpha = g_{v,\alpha}$, $|\alpha| \leqslant s$, получим, что

$$\|g\|_{L_2^N(\Omega)} = \|v\|_{H^{-s}(\Omega)},$$

т. е.

$$\|v\|_{H^{-s}(\Omega)} = \min_{g\in\mathcal{L}_s(\widetilde{f})} \|g\|_{L_2^N(\Omega)} = \|\widetilde{f}\|.$$

## § 3. Теоремы о неподвижной точке

**1. Теорема Брауэра.** Начнем с исследования топологических свойств непрерывных отображений в конечномерных евклидовых пространствах.

**Лемма 1.1.** *Пусть $V$ — компактное выпуклое множество пространства $\mathbb{R}^n$. Точка $0$ — внутренняя точка $V$. Тогда функция*[1]

$$p_V(x) = \inf\{t > 0 : \ x/t \in V\}, \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

*обладает следующими свойствами:*

$$p_V(x) > 0, \ \text{если } x \neq 0, \ p_V(0) = 0, \tag{1.2}$$

$$p_V(\alpha x) = \alpha p_V(x), \ \alpha \geqslant 0, \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

$$p_V(x+y) \leqslant p_V(x) + p_V(y). \tag{1.4}$$

Доказательство. Свойства (1.2), (1.3) очевидным образом вытекают из определения функции $p_V$. При доказательстве свойства (1.4) достаточно рассмотреть случай, когда $x \neq 0, y \neq 0$. Ясно, что тогда

$$\alpha = p_V(x) > 0, \ \beta = p_V(y) > 0, \tag{1.5}$$

$x/\alpha, \ y/\beta \in V$. Вследствие выпуклости множества $V$ имеем

$$z = \frac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha\frac{x}{\alpha} + \beta\frac{y}{\beta}\right) \in V.$$

Из определения функции $p_V$ очевидным образом вытекает, что

$$p_V(z) \leqslant 1 \quad \forall\, z \in V, \tag{1.6}$$

и, таким образом, используя (1.3), приходим к неравенству

$$p_V(x+y) \leqslant \alpha + \beta,$$

откуда вследствие (1.5) получаем (1.4). $\square$

**Следствие 1.1.** *Функция $p_V$ липшиц-непрерывна на $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Поскольку 0 — внутренняя точка множества $V$, существует $r_0 > 0$ такое, что $B(0, r_0) \subset V$, следовательно,

$$r_0 x/|x| \in V, \ \text{если } x \in \mathbb{R}^n, \ x \neq 0.$$

Поэтому (см. (1.6)) имеем $p_V(x) \leqslant r_0^{-1}|x| \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$. Из (1.4) вытекают неравенства

$$p_V(x) \leqslant p_V(x-y) + p_V(y), \ p_V(y) \leqslant p_V(y-x) + p_V(x),$$

[1] Функцию $p_V$ часто называют *функцией Минковского.*

следовательно,

$$|p_V(x) - p_V(y)| \leqslant \max(p_V(x-y), p_V(y-x)) \leqslant r_0^{-1}|x-y|. \ \square$$

**Лемма 1.2.** *Всякое компактное выпуклое множество $V \subset \mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью гомеоморфно замкнутому единичному шару $\bar{B}(0,1)$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $\bar{B}(0,1)$ принадлежит внутренности множества $V$. Пусть далее $V \subset \bar{B}(0,R)$. Тогда из определения функции $p_V(x)$ вытекает (см. также доказательство следствия 1.1), что

$$R^{-1}|x| \leqslant p_V(x) \leqslant |x|. \tag{1.7}$$

Для $x \in \mathbb{R}^n$ положим

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{p_V(x)}{|x|}x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Множество $V$ совпадает с множеством тех $x \in \mathbb{R}^n$, для которых $p_V(x) \leqslant 1$, поэтому $f(V) = \bar{B}(0,1)$. Ясно также, что отображение $f$ взаимнооднозначно, причем обратное отображение дается формулой

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{p_V(x)}x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Непрерывность функции $f$ в точке $x \neq 0$ следует, очевидно, из непрерывности функции $p_V$. Если $x_n \to 0$, то

$$|f(x_n)| = p_V(x_n) \to 0,$$

так как $p_V(x_n) \to 0$. Непрерывность функции $f^{-1}$ в точке $x \neq 0$ вытекает из непрерывности функции $p_V$ и первого неравенства (1.7). Если $x_n \to 0$, то вследствие того же неравенства

$$|f^{-1}(x_n)| = \frac{|x_n|^2}{p_V(x_n)} \leqslant \frac{R|x_n|^2}{|x_n|} = R|x_n| \to 0. \ \square$$

**Лемма 1.3.** *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *— область с кусочно гладкой границей. Пусть, далее, отображения* $u, \widetilde{u} : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ *удовлетворяют следующим условиям:* $u, \widetilde{u} \in C^2(\bar{\Omega})$, $u(x) = \widetilde{u}(x)$ $\forall\, x \in \partial\Omega$. *Тогда* $I(u) = I(\widetilde{u})$, *где*

$$I(v) = \int\limits_{\Omega} \det(\nabla v) dx,$$

$\nabla v = \{\partial v_i / \partial x_j\}_{i,j=1}^n$ *— матрица Якоби отображения* $v$.

Доказательство. Пусть $\varphi(t) = I(u_t)$, где

$$u_t = u + t(\widetilde{u} - u),$$

$t \in \mathbb{R}$. Для доказательства теоремы, очевидно, достаточно установить, что

$$\varphi'(t) = 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{1.10}$$

Пусть $J(u_t) = \det(\nabla u_t)$. Обозначая через $j_{kl}$ элементы определителя $J(u_t)$, можем написать

$$\varphi'(t) = \int\limits_{\Omega} \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial J(u_t)}{\partial j_{kl}} \frac{\partial(\widetilde{u}^k - u^k))}{\partial x_l} dx,$$

откуда после применения формулы интегрирования по частям следует, что

$$\varphi'(t) = -\int\limits_{\Omega} \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{\partial J(u_t)}{\partial j_{kl}} \right) (\widetilde{u}^k - u^k)\, dx.$$

Для доказательства соотношения (1.10) достаточно установить, что

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{\partial J(v)}{\partial j_{kl}} \right) = 0 \quad \text{в } \ \Omega, \ k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.11}$$

для любого дважды непрерывно дифференцируемого отображения $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Обозначим через $J_{kl}$ алгебраическое дополнение к элементу $j_{kl}$ матрицы $\nabla v$. Как известно из курса алгебры,

$$J\delta_{ik} = \sum_{s=1}^{n} j_{si} J_{sk}, \ i, k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.12}$$

где

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Отсюда, в частности, вытекает, что

$$\frac{\partial J}{\partial j_{kl}} = J_{kl}. \tag{1.13}$$

Продифференцируем равенства (1.12) по $x_k$, затем просуммируем почленно по $k$ от 1 до $n$. Получим с учетом (1.13)

$$\sum_{k,l,m=1}^{n} J_{lm} \frac{\partial^2 v_l}{\partial x_m \partial x_k} \delta_{ik} = \sum_{s,k=1}^{n} \left( \frac{\partial^2 v_s}{\partial x_i \partial x_k} J_{sk} + \frac{\partial v_s}{\partial x_i} \frac{\partial J_{sk}}{\partial x_k} \right),$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, или

$$\sum_{l,m=1}^{n} J_{lm} \frac{\partial^2 v_l}{\partial x_m \partial x_i} = \sum_{s,k=1}^{n} \left( \frac{\partial^2 v_s}{\partial x_i \partial x_k} J_{sk} + \frac{\partial v_s}{\partial x_i} \frac{\partial J_{sk}}{\partial x_k} \right), i = 1, 2, \ldots, n,$$

т. е.

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial v_s}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial J_{sk}}{\partial x_k} = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.14}$$

Из равенства (1.14) вытекает, что если $J(v(x_0)) \neq 0$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial J_{sk}(v(x_0))}{\partial x_k} = 0, \ s = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.15}$$

Если $J(v(x_0)) = 0$, то можно указать $\varepsilon_0 > 0$ такое, что

$$\det(\nabla v(x_0) + \varepsilon E) \neq 0 \text{ для } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

где $E$ — единичная матрица. Повторяя вышеизложенное применительно к отображению $\widetilde{v} = v + \varepsilon x$, получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial J_{sk}(v(x_0) + \varepsilon x_0)}{\partial x_k} = 0, \ s = 1, 2, \ldots, n,$$

откуда после перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$ следует (1.15). В силу (1.13) равенство (1.15) эквивалентно (1.11). $\square$

**Теорема 1.1 (Брауэр).** *Пусть отображение*

$$u : \bar{B}(0,1) \to \bar{B}(0,1)$$

*непрерывно. Тогда существует точка* $x \in \bar{B}(0,1)$ *такая, что*

$$u(x) = x^{1)}.$$

Доказательство. Покажем сначала, что не существует дважды непрерывно дифференцируемого отображения

$$w : \bar{B} \to \partial\bar{B} \tag{1.16}$$

(для краткости обозначаем $\bar{B}(0,1)$ через $\bar{B}$) такого, что

$$w(x) = x \quad \forall\, x \in \partial B. \tag{1.17}$$

Действительно, предполагая противное, получим что для отображения $\widetilde{w}(x) = x$ имеем $\widetilde{w}(x) = w(x)$ на $\partial B$, следовательно, по лемме 1.3, учитывая, что $\nabla\widetilde{w}(x) \equiv E$, имеем

$$\int\limits_B \det(\nabla w)dx = \int\limits_B \det(\nabla\widetilde{w})dx = \mathrm{mes}\,(B) > 0. \tag{1.18}$$

С другой стороны, из (1.16) вытекает, что $|w(x)|^2 = 1\ \forall\, x \in \bar{B}$. Вычисляя градиент от обеих частей последнего равенства, получим

$$(\nabla w)^T w = 0 \quad \forall\, x \in \bar{B}.$$

Поскольку $w(x) \neq 0\ \forall\, x \in \bar{B}$, это означает, что

$$\det(\nabla w(x)^T) = \det(\nabla w(x)) = 0 \quad \forall\, x \in \bar{B},$$

но данное тождество противоречит (1.18).

Покажем теперь, что не существует и просто непрерывного отображения $w$, удовлетворяющего условиям (1.16), (1.17). Если такое отображение существует, то его можно распространить на все пространство $\mathbb{R}^n$, полагая $w(x) = x$ для $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}$. По построению

$$w(x) \neq 0,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

1) Точка $x$ — неподвижная точка отображения $u$.

Пусть $\varepsilon > 0$, а

$$w_\varepsilon(x) = \int \eta_\varepsilon(x-y)w(y)dy, \ x \in \mathbb{R}^n,$$

где $\eta_\varepsilon$ — усредняющее ядро (см. с. 25). Ясно, что $w_\varepsilon(x) \neq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ при достаточно малых $\varepsilon$. Используя осесимметричность функции $\eta_\varepsilon$, нетрудно проверить, что

$$w_\varepsilon(x) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(0,2)$$

при достаточно малых $\varepsilon$. Положим

$$w_1(x) = 2w_\varepsilon(x)/|w_\varepsilon(x)|, \quad x \in \bar{B}(0,2).$$

Понятно, что $w_1$ — гладкое отображение, удовлетворяющее условиям (1.16), (1.17) применительно к шару $\bar{B} = \bar{B}(0,2)$. Таким образом, не существует непрерывного отображения $w$, удовлетворяющего условиям (1.16), (1.17). Предположим теперь, что непрерывное отображение $u : \bar{B} \to \bar{B}$ не имеет неподвижных точек. Определим отображение $w\colon \bar{B} \to \partial B$, принимая за $w(x)$ точку, получающуюся пересечением луча, исходящего из точки $u(x)$ и проходящего через точку $x$, со сферой $\partial B$. Построенное таким образом отображение, очевидно, непрерывно и удовлетворяет условиям (1.16), (1.17), что, как показано выше, невозможно. □

**Следствие 1.2.** *Пусть $V \subset \mathbb{R}^n$ — компактное выпуклое множество с непустой внутренностью, а отображение $u : V \to V$ непрерывно. Тогда существует точка $x \in V$ такая, что $u(x) = x$.*

Доказательство. Пусть $f$ — гомеоморфное отображение шара $\bar{B}(0,1)$ на множество $V$ (см. лемму 1.2). Положим

$$g(x) = f^{-1}(u(f(x))).$$

Функция $g$ по построению непрерывна и отображает шар $\bar{B}(0,1)$ в себя. Пусть $x_0 \in \bar{B}(0,1)$ — ее неподвижная точка, т. е.

$$x_0 = f^{-1}(u(f(x_0))).$$

Тогда $f(x_0) = u(f(x_0))$. Иными словами, $y_0 = f(x_0) \in V$ — неподвижная точка отображения $u$. □

При исследовании разрешимости систем нелинейных уравнений часто используется следующий результат, непосредственно вытекающий из теоремы Брауэра.

**Лемма 1.4.** *Пусть отображение* $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *непрерывно и*

$$u(x) \cdot x \geqslant 0, \;\; \textit{если}\; |x| = r > 0\,^{1)}. \tag{1.19}$$

*Тогда существует точка* $x \in \bar{B}(0,r)$ *такая, что* $u(x) = 0$.

Доказательство. Предположим, что вопреки утверждению леммы, $u(x) \neq 0$ для всех $x \in \bar{B}(0,r)$. Определим непрерывное отображение $w : \bar{B}(0,r) \to \partial B(0,r)$, полагая

$$w(x) = -\frac{r}{|u(x)|} u(x), \;\; x \in \bar{B}(0,r).$$

По теореме Брауэра существует $z \in \bar{B}(0,r)$ такая, что

$$w(z) = z. \tag{1.20}$$

Поскольку при этом $z \in \partial B(0,r)$, то принимая во внимание (1.20), (1.19), получим

$$r^2 = z \cdot z = w(z) \cdot z = -\frac{r}{|u(z)|} u(z) \cdot z \leqslant 0,$$

что противоречит (1.19). □

**2. Теорема Шаудера.** В этом пункте $X$ — вещественное банахово пространство.

**Теорема 2.1 (Шаудер).** *Пусть* $K \subset X$ *— компактное выпуклое множество, и пусть отображение* $A : K \to K$ *непрерывно. Тогда* $A$ *имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Поскольку множество $K$ компактно, то для любого положительного $\varepsilon$ существует конечное множество точек $u_1, u_2, \ldots, u_{N_\varepsilon} \in K$ таких, что открытые шары $B(u_i, \varepsilon)$, $i = 1, 2, \ldots, N_\varepsilon$, образуют покрытие $K$:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B(u_i, \varepsilon). \tag{2.1}$$

Пусть $K_\varepsilon$ замкнутая выпуклая оболочка точек $u_1, u_2, \ldots, u_{N_\varepsilon}$:

$$K_\varepsilon = \left\{ \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \lambda_i u_i : 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1, \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \lambda_i = 1 \right\}.$$

---

1) $a \cdot b = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$ — скалярное произведение векторов $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Множество $K$ выпукло, поэтому $K_\varepsilon \subset K$. Определим отображение $P_\varepsilon : K \to K_\varepsilon$ при помощи равенства

$$P_\varepsilon u = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N_\varepsilon} \operatorname{dist}(u, K - B(u_i, \varepsilon)) u_i}{\sum\limits_{i=1}^{N_\varepsilon} \operatorname{dist}(u, K - B(u_i, \varepsilon))}, \quad u \in K.$$

Вследствие соотношения (2.1) знаменатель этой дроби положителен при любом $u \in K$. Отсюда вытекает непрерывность отображения $P_\varepsilon$. Для любого $u \in K$

$$P_\varepsilon u - u = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N_\varepsilon} \operatorname{dist}(u, K - B(u_i, \varepsilon))(u_i - u)}{\sum\limits_{i=1}^{N_\varepsilon} \operatorname{dist}(u, K - B(u_i, \varepsilon))},$$

причем, очевидно, только те слагаемые в числителе (и знаменателе) отличны от нуля, для которых $\|u_i - u\| \leqslant \varepsilon$. Таким образом,

$$\|P_\varepsilon u - u\| \leqslant \varepsilon \quad \forall\, u \in K. \tag{2.2}$$

Введем в рассмотрение непрерывное отображение $A_\varepsilon : K_\varepsilon \to K_\varepsilon$:

$$A_\varepsilon u = P_\varepsilon A u \quad \forall\, u \in K_\varepsilon.$$

Множество $K_\varepsilon$, как нетрудно убедиться, есть ограниченное выпуклое замкнутое множество с непустой внутренностью в конечномерном пространстве размерности $M_\varepsilon \leqslant N_\varepsilon$. По теореме Брауэра (см. следствие 1.2) существует точка $u_\varepsilon \in K_\varepsilon$ такая, что $A_\varepsilon u_\varepsilon = u_\varepsilon$. Множество $K$ компактно, следовательно, можно указать такую последовательность $\varepsilon_j \to 0$ и такой элемент $u \in K$, что $u_{\varepsilon_j} \to u$. Покажем, что $u$ — неподвижная точка отображения $A$. Используя оценку (2.2), получим

$$\|u_{\varepsilon_j} - A u_{\varepsilon_j}\| = \|A_{\varepsilon_j} u_{\varepsilon_j} - A u_{\varepsilon_j}\| = \|P_{\varepsilon_j} A u_{\varepsilon_j} - A u_{\varepsilon_j}\| \leqslant \varepsilon_j,$$

откуда вследствие непрерывности $A$ вытекает, что $Au = u$. □

Приведем теперь модификацию теоремы Шаудера, сводящую исследование разрешимости нелинейного операторного уравнения к получению априорной оценки его возможных решений.

**Теорема 2.2 (Шефер).** *Пусть $A : X \to X$ — непрерывный, вполне непрерывный оператор*[1]*; существует постоянная $M > 0$ такая, что для любого $u \in X$, удовлетворяющего уравнению $u = \lambda Au$ при $\lambda \in [0,1]$, выполнено неравенство $\|u\| \leqslant M$. Тогда оператор $A$ имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Положим

$$\widetilde{A}u = \begin{cases} Au, & \text{если } \|Au\| \leqslant 2M, \\ 2M\dfrac{Au}{\|Au\|}, & \text{если } \|Au\| \geqslant 2M. \end{cases} \tag{2.3}$$

Как обычно, через $\bar{B}(0,2M)$ будем обозначать замкнутый шар радиуса $2M$ с центром в нуле. По построению оператор $\widetilde{A}$ действует из $X$ в $\bar{B}(0,2M)$. При этом оператор $\widetilde{A}$, как и оператор $A$, вполне непрерывен. Обозначим через $K$ выпуклую замкнутую оболочку компактного множества $\widetilde{A}(\bar{B}(0,2M))$. По теореме Мазура (см., например, [10, с. 451]) множество $K$ компактно, причем ясно, что $\widetilde{A} : K \to K$, следовательно, по теореме Брауэра существует элемент $u \in K$ такой, что $\widetilde{A}u = u$. Покажем, что $u$ — неподвижная точка оператора $A$. Если это не так, то вследствие (2.3) справедливо неравенство $\|Au\| \geqslant 2M$, и $u = \lambda Au$, где $\lambda = 2M/\|Au\| \leqslant 1$. Тогда по условию теоремы должно быть выполнено неравенство $\|u\| \leqslant M$, но, с другой стороны, в этом случае $\|u\| = \|\widetilde{A}u\| = 2M$. Полученное противоречие доказывает теорему. □

## § 4. Обыкновенные дифференциальные уравнения

**1. Неравенства Гронуолла.** В этом параграфе приводятся теоремы разрешимости задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \quad 0 < t < T, \tag{1.1}$$

$$y(0) = y_0. \tag{1.2}$$

Здесь $y = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$, $n \geqslant 1$.

Предварительно будут получены некоторые вспомогательные результаты.

[1] Определение вполне непрерывного оператора см. на с. 11.

**Лемма 1.1 (первое неравенство Гронуолла).** *Пусть $y$ — функция, абсолютно непрерывная на отрезке $[0,T]$, $p$, $q$ — суммируемые на $[0,T]$ функции, и пусть почти всюду на $[0,T]$ выполнено неравенство*

$$y'(t) \leqslant p(t)y(t) + q(t). \tag{1.3}$$

*Тогда*

$$y(t) \leqslant e^{p_1(t)}\Big(y(0) + \int\limits_0^t q(\tau)e^{-p_1(\tau)}d\tau\Big) \quad \forall\, t \in [0,T], \tag{1.4}$$

*где*

$$p_1(t) = \int\limits_0^t p(\tau)d\tau.$$

Доказательство. Умножим неравенство (1.3) на $e^{-p_1(t)}$ и запишем результат в виде

$$\frac{d}{dt}\Big(y(t)e^{-p_1(t)}\Big) \leqslant q(t)e^{-p_1(t)}.$$

Проинтегрировав последнее неравенство, получим (1.4). □

**Лемма 1.2 (второе неравенство Гронуолла).** *Пусть функции $p, q, y$ непрерывны на отрезке $[0,T]$, $p(t) > 0$ на отрезке $[0,T]$,*

$$y(t) \leqslant \int\limits_0^t p(\tau)y(\tau)d\tau + q(t) \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{1.5}$$

*Тогда*

$$y(t) \leqslant \int\limits_0^t p(\tau)q(\tau)e^{\int\limits_\tau^t p(s)ds}d\tau + q(t) \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{1.6}$$

Доказательство. Положим $\eta(t) = \int\limits_0^t p(\tau)y(\tau)d\tau$. Тогда неравенство (1.5) можно переписать в виде:

$$\eta'(t) \leqslant p(t)\eta(t) + p(t)q(t) \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{1.7}$$

Применяя лемму 1.1, получим отсюда, что

$$\eta(t) \leqslant e^{p_1(t)} \int\limits_0^t p(\tau)q(\tau)e^{-p_1(\tau)}d\tau \quad \forall\, t \in [0, T].$$

Подставляя найденную оценку в (1.5), получим неравенство

$$y(t) \leqslant e^{p_1(t)} \int\limits_0^t p(\tau)q(\tau)e^{-p_1(\tau)}d\tau + q(t) \quad \forall\, t \in [0, T],$$

совпадающее с (1.6). □

**2. Теоремы о разрешимости задачи Коши.** Будем обозначать в дальнейшем через $H^1(0, T)$ пространство Соболева вектор-функций $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $y_i \in L_2(0, T)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, имеющих обобщенные производные из $y_i' \in L_2(0, T)$. Пространство $H^1(0, T)$ вполне непрерывно вкладывается в пространство непрерывных векторных функций $C[0, T]$ (см. теорему 13.8, с. 69). Через $H_0^1(0, T)$ будем обозначать в этом пункте подпространство функций из $H^1(0, T)$, удовлетворяющих условию $y(0) = 0$. Норму в $H_0^1(0, T)$ определим равенством

$$\|y\|^2 = \int\limits_0^T |y'(t)|^2 dt.$$

**Теорема 2.1.** *Пусть $n$-мерная вектор-функция $f(t, \xi)$ измерима по $t \in [0, T]$ и непрерывна по $\xi \in \mathbb{R}^n$. Пусть, далее, существуют постоянная $c_0 \geqslant 0$ и суммируемая с квадратом на отрезке $[0, T]$ функция $k(t)$ такие, что почти всюду на $[0, T]$ справедливо неравенство*

$$|f(t, \xi)| \leqslant c_0|\xi| + k(t) \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

*Тогда задача (1.1), (1.2) имеет решение $y \in H^1(0, T)$.*

Доказательство. Полагая $v(t) = y(t) - y_0$, перепишем задачу (1.1), (1.2) в виде эквивалентной системы нелинейных интегральных уравнений

$$v(t) = Av(t), \quad t \in [0, T], \tag{2.2}$$

где

$$Av(t) = \int\limits_0^t f(\tau, v(\tau) + y_0)\, d\tau. \qquad (2.3)$$

Систему (2.2) будем трактовать как операторное уравнение в пространстве $H_0^1(0,T)$. Оператор $A$ как оператор, действующий в пространстве $H_0^1(0,T)$, вполне непрерывен. В самом деле, пусть последовательность $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ равномерно ограничена по норме пространства $H_0^1(0,T)$. Тогда из нее можно извлечь равномерно на $[0,T]$ сходящуюся подпоследовательность $\{y_{j_n}\}_{n=1}^{\infty}$. При этом, очевидно,

$$\|Ay_{j_m} - Ay_{j_n}\|^2 = \int\limits_0^T \left(f(t, y_{j_m}(t) + y_0) - f(t, y_{j_n}(t) + y_0)\right)^2 dt,$$

откуда на основании непрерывности функции $f$ по второму аргументу, оценки (2.1) и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получаем, что

$$\|Ay_{j_m} - Ay_{j_n}\| \to 0 \text{ при } m, n \to \infty.$$

Непрерывность оператора $A$ устанавливается аналогично. Для исследования разрешимости уравнения (2.2) используем теорему Шефера. Пусть $v$ — решение уравнения

$$v = \lambda Av, \quad \lambda \in [0,1]. \qquad (2.4)$$

Тогда, очевидно,

$$v'(t) = \lambda f(t, v(t) + y_0) \quad \text{п. в. на } 0 < t < T. \qquad (2.5)$$

Умножая это уравнение скалярно на $v(t)$, с учетом очевидного тождества

$$2v' \cdot v = \frac{d|v|^2}{dt}$$

и условия (2.1) получим

$$\frac{d|v|^2}{dt} \leqslant c_1|v|^2 + c_1 y_0^2 + k^2(t), \qquad (2.6)$$

где $c_1 = 1 + 3c_0$. Отсюда на основании первого неравенства Гроноулла имеем

$$|v(t)|^2 \leqslant Tc_1 y_0^2 + \int\limits_0^T k^2(t)\,dt. \tag{2.7}$$

Далее, вследствие уравнения (2.5)

$$\int\limits_0^T |v'(t)|^2 dt = \lambda^2 \int\limits_0^T |f(t, v(t) + y_0)|^2 dt.$$

Поэтому, учитывая условие (2.1), с помощью оценки (2.7) заключаем, что $\|v\| \leqslant c = \mathrm{const}$. Таким образом, для уравнения (2.2) выполнены все условия теоремы 2.2, с. 95, и, следовательно, оно имеет решение. $\square$

**Теорема 2.2.** *Пусть существует суммируемая на* $[0, T]$ *функция* $l(t)$ *такая, что почти всюду на* $[0, T]$

$$(f(t, \xi) - f(t, \eta)) \cdot (\xi - \eta) \leqslant l(t)|\xi - \eta|^2 \quad \forall\, \xi, \eta \in \mathbb{R}^n. \tag{2.8}$$

*Тогда задача* (1.1), (1.2) *может иметь не более одного решения.*

Доказательство. Пусть $z = y^1 - y^2$ — разность двух решений задачи (1.1), (1.2). Тогда почти всюду на $[0, T]$

$$2z' \cdot z = 2(f(t, y^1(t)) - f(t, y^2(t))) \cdot (y^1(t) - y^2(t)) \leqslant 2l(t)|z(t)|^2, \tag{2.9}$$

следовательно,

$$\frac{d|z(t)|^2}{dt} \leqslant l_1(t)|z(t)|^2, \tag{2.10}$$

где $l_1(t) = 2l(t)$. Отсюда вследствие начального условия $z(0) = 0$ и первого неравенства Гроноулла вытекает, что $z(t) = 0$ на отрезке $[0, T]$. $\square$

**Теорема 2.3.** *Пусть* $B \in L_\infty(0, T)$, $f \in L_2(0, T)$ *— матричная функция и вектор-функция, соответственно. Тогда задача Коши*

$$y' = B(t)y + f(t), \ 0 < t < T, \quad y(0) = y_0, \tag{2.11}$$

*имеет единственное решение* $y \in H^1(0, T)$.

Доказательство. Для функции $f(t,\xi) = B(t)\xi + f(t)$ выполнены условия (2.8), (2.1) при $l(t) = \|B(t)\|$, $c_0 = \|l(t)\|_{L_\infty(0,T)}$. Поэтому доказываемая теорема — следствие теорем 2.1, 2.2. $\square$

Замечание 2.1. Можно доказать (см., например, [34], [42]), что для однозначной разрешимости задачи (2.11) в классе абсолютно непрерывных функций достаточно, чтобы $B, f \in L_1(0,T)$.

# Глава 2
# ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

## § 1. Линейные эллиптические уравнения

**1. Введение.** В этом параграфе изучаются основные граничные задачи для линейных эллиптических уравнений второго порядка дивергентного вида. Общая схема исследований такова. Вводится понятие обобщенного решения краевой задачи как функции из соответствующего соболевского пространства, удовлетворяющей некоторому интегральному тождеству, порождаемому краевой задачей. Существование обобщенного решения устанавливается достаточно просто за счет применения методов теории операторных уравнений в гильбертовых пространствах. Далее значительно более сложными рассуждениями показывается, что при соответствующей гладкости исходных данных (коэффициентов уравнения, правой части, границы области) обобщенное решение также является достаточно гладкой функцией и удовлетворяет уравнению и граничным условиям в обычном (классическом) смысле.

Понятие обобщенного решения естественным образом возникает при изучении вариационных постановок задач математической физики. Рассмотрим в качестве примера задачу о равновесии мембраны, жестко закрепленной по контуру и находящейся под действием внешней силы плотности $f$. Эта задача может быть сформулирована как задача об отыскании функции $u = u(x)$, доставляющей минимальное значение интегралу (потенциальной энергии системы «мембрана — внешние силы»)

$$F(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} T|\nabla u|^2 dx - \int\limits_{\Omega} fu\,dx \qquad (1.1)$$

на множестве функций, равных нулю на границе $\Gamma$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Здесь $T = T(x)$ — заданная непрерывно дифференцируемая функция — натяжение мембраны.

Уравнение равновесия мембраны получается как необходимое условие минимума (уравнение Эйлера) функционала (1.1) и имеет вид

$$-\operatorname{div}(T\nabla u) = f, \quad x \in \Omega. \tag{1.2}$$

Присоединяя к уравнению (1.2) граничные условия жесткого закрепления

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{1.3}$$

получим задачу Дирихле для отыскания функции $u$.

Под классическим решением этой задачи понимают функцию $u$, непрерывную в $\bar{\Omega}$, дважды непрерывно дифференцируемую в области $\Omega$ и удовлетворяющую уравнению (1.2) и граничному условию (1.3).

Заметим, что функционал (1.1) определен на гораздо более широком множестве функций. Именно, он, очевидно, имеет смысл для любой функции $u \in H^1(\Omega)$. Учтем граничные условия (1.3), полагая, что $u \in H_0^1(\Omega)$. Таким образом, возникает задача об отыскании минимума функционала $F$ на пространстве $H_0^1(\Omega)$:

$$F(u) = \min_{v \in H_0^1} F(v). \tag{1.4}$$

Решение этой задачи естественно назвать обобщенным решением задачи Дирихле (1.2), (1.3).

Обобщенной постановке задачи (1.2), (1.3) можно придать и другую, эквивалентную, зачастую более удобную, форму. Заметим, что если $u$ — обобщенное решение задачи (1.2), (1.3), то для любой функции $v \in H_0^1(\Omega)$ и любого вещественного $t$ имеем

$$F(u + tv) \geqslant F(u).$$

Иными словами, функция вещественного переменного

$$\varphi(t) = F(u + tv)$$

достигает минимального значения при $t = 0$. Нетрудно видеть, что $\varphi$ — дифференцируемая функция, следовательно, $\varphi'(0) = 0$. Легко подсчитать, что

$$\varphi'(0) = \int_\Omega T\nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega fv \, dx,$$

поэтому, если $u$ — решение задачи (1.4), то

$$\int_\Omega T\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega fv \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.5}$$

Теперь можно сформулировать определение, эквивалентное введенному ранее определению обобщенного решения задачи (1.2), (1.3). Будем говорить, что функция $u \in H_0^1(\Omega)$ — обобщенное решение задачи (1.2), (1.3), если выполнено тождество (1.5).

Заметим, что к тождеству (1.5) можно придти и другим путем, удобным с точки зрения распространения понятия обобщенного решения на более сложные задачи. А именно, считая, что $u$ — классическое решение задачи (1.2), (1.3), умножим уравнение (1.2) на некоторую непрерывно дифференцируемую на $\Omega$ и равную нулю на $\Gamma$ функцию $v$ и проинтегрируем полученное равенство по области $\Omega$:

$$-\int\limits_{\Omega} v \operatorname{div}(T\nabla u)\; dx = \int\limits_{\Omega} fv\; dx. \tag{1.6}$$

Преобразуем интеграл в левой части равенства (1.6) при помощи формулы интегрирования по частям, учитывая при этом граничное условие для функции $v$. В результате придем к тождеству вида (1.5).

Таким образом, если $u$ — классическое решение задачи (1.2), (1.3), для которого существует интеграл

$$\int\limits_{\Omega} T\,|\nabla u|^2\, dx$$

(называемый интегралом Дирихле), то оно удовлетворяет интегральному тождеству (1.5). В этом смысле классическое решение задачи (1.2), (1.3) является и обобщенным решением.

Пусть теперь функция $u$, обобщенное решение задачи (1.2), (1.3), дважды непрерывно дифференцируема в $\Omega$. Покажем, что тогда $u$ — классическое решение задачи (1.2), (1.3). Действительно, выбирая в качестве функции $v$ в (1.5) непрерывную и непрерывно дифференцируемую функцию, равную нулю на $\Gamma$, при помощи формулы интегрирования по частям получим

$$\int\limits_{\Omega} (-\operatorname{div}(T\nabla u) - f)\, v\; dx = 0. \tag{1.7}$$

Отсюда следует, что $u$ — решение уравнения (1.2). Действительно, если предположить противное, то найдется точка $x_0 \in \Omega$ такая, что

$$(\operatorname{div}(T\nabla u) + f)\,(x_0) \neq 0.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$(\operatorname{div}(T\nabla u) + f)(x_0) > 0.$$

В силу непрерывности функции $\operatorname{div}(T\nabla u) + f$ это неравенство сохраняется и для некоторой окрестности точки $x_0$, лежащей внутри $\Omega$. Выберем теперь функцию $v$ так, чтобы она была положительной внутри указанной окрестности и тождественно равной нулю вне этой окрестности. Тогда интеграл в левой части равенства (1.7) будет положительным, что по доказанному невозможно ни при какой функции $v$, следовательно, $\operatorname{div}(T\nabla u) + f = 0$ всюду в области $\Omega$, т. е. $u$ — классическое решение задачи (1.2), (1.3).

Приведенные рассуждения показывают, что данное здесь определение обобщенного решения естественно обобщает понятие классического решения.

**2. Обобщенные решения краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка.** Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\Gamma$. Дальнейшие рассмотрения в этом параграфе будут посвящены уравнению

$$\mathcal{L}u \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (b_i u)}{\partial x_i} + a_0 u = \\ = f_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \quad x \in \Omega. \qquad (2.1)$$

Полагая $A(x) = A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, уравнению (2.1) можно придать более компактный вид

$$-\operatorname{div}(A\nabla u + ub) + a \cdot \nabla u + a_0 u = f_0 - \operatorname{div} f, \quad x \in \Omega. \qquad (2.2)$$

Будем считать выполненным условие строгой эллиптичности. Это означает, что матрица $A$ равномерно по $x \in \Omega$ положительно определена:

$$A(x)\xi \cdot \xi \geqslant c_0 |\xi|^2 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega, \quad c_0 = \mathrm{const} > 0. \qquad (2.3)$$

Уравнение (2.1) при выполнении условия (2.3) называют эллиптическим уравнением второго порядка в дивергентной форме.

В случае, когда

$$a_{ij}, b_i \in C^1(\Omega),\ \ u \in C^2(\Omega),$$

уравнение (2.1) можно переписать в так называемой недивергентной форме

$$\mathcal{L}u \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{a}_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \widetilde{a}_0 u = \widetilde{f}, \quad x \in \Omega, \qquad (2.4)$$

где

$$\widetilde{f} = f_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \quad \widetilde{a}_i = a_i - b_i - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{ji}}{\partial x_j}, \quad \widetilde{a}_0 = a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i}{\partial x_i}.$$

Без ограничения общности можно считать в этом случае, что матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ симметрична, так как слагаемые, соответствующие произвольно фиксированным индексам $i, j$, вследствие равенства $\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j = \partial^2 u/\partial x_j \partial x_i$ могут быть записаны в форме

$$a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + a_{ji}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Можно показать, что и наоборот, уравнение вида (2.4) в случае, когда коэффициенты дифференцируемы, можно привести к дивергентному виду (2.1).

Для уравнения (2.1), обычно, рассматриваются следующие граничные задачи.

*Задача Дирихле* (*первая краевая задача*). Эта задача состоит в отыскании решения уравнения (2.2), удовлетворяющего граничному условию

$$u(x) = g(x), \quad x \in \Gamma, \qquad (2.5)$$

где $g$ — заданная функция. Особо будем рассматривать так называемую однородную задачу Дирихле, когда граничное условие принимает вид

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \qquad (2.6)$$

*Третья граничная задача.* Состоит в отыскании решения уравнения (2.2), удовлетворяющего граничному условию

$$(A\nabla u + ub) \cdot \nu + \sigma u = g(x), \quad x \in \Gamma, \qquad (2.7)$$

где $\sigma$, $g$ — заданные функции, $\nu$ — внешняя единичная нормаль к $\Gamma$.

В случае, когда $\sigma \equiv 0$, говорят о *второй граничной задаче* или *задаче Неймана.*

Обобщенные постановки этих задач опираются на интегральное тождество, соответствующее уравнению (2.2). Для его построения умножим уравнение (2.2) на функцию $v$, проинтегрируем результат по области $\Omega$ и преобразуем формально интеграл, соответствующий первому слагаемому, при помощи интегрирования по частям. Получим

$$\int\limits_\Omega (A\nabla u \cdot \nabla v + a \cdot \nabla u\, v + ub \cdot \nabla v + a_0 uv)\, dx = \\ = \int\limits_\Omega (f_0 v + f \cdot \nabla v)\, dx + \int\limits_\Gamma (A\nabla u + ub) \cdot \nu v\, dx. \quad (2.8)$$

Дальнейшие рассуждения зависят от типа рассматриваемой граничной задачи.

Обратимся сначала к задаче Дирихле. В этом случае будем считать, что функция $v$ удовлетворяет граничному условию:

$$v(x) = 0, \ x \in \Gamma.$$

Интегральное тождество (2.8) принимает вид

$$\int\limits_\Omega (A\nabla u \cdot \nabla v + a \cdot \nabla u\, v + ub \cdot \nabla v + a_0 uv)\, dx = \\ = \int\limits_\Omega (f_0 v + f \cdot \nabla v)\, dx. \quad (2.9)$$

В дальнейшем будем предполагать, что наряду с условием эллиптичности (2.3) выполнены следующие условия:

$$a_{ij},\ a_i,\ a_0,\ b_i \in L_\infty(\Omega),\ i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.10)$$

$$f_0,\ f_i \in L_2(\Omega),\ i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.11)$$

Из условий (2.10) вытекает, в частности, существование положительной постоянной $c_1$ такой, что

$$A(x)\xi \cdot \xi \leqslant c_1 |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \text{ п. в. в } \Omega. \quad (2.12)$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условий (2.10), (2.11) интегралы, участвующие в (2.9), существуют при любых функциях $u, v \in H^1(\Omega)$.

Относительно функции $g$ будем предполагать, что она допускает продолжение в $H^1(\Omega)$. Иными словами, существует функция $w$, принадлежащая $H^1(\Omega)$, и такая, что ее след на $\Gamma$ совпадает с $g$.

**Определение 2.1.** *Функция* $u \in H^1(\Omega)$ *есть обобщенное решение задачи Дирихле* (2.2), (2.5), *если след функции* $u$ *на* $\Gamma$ *равен* $g$ *и для любой функции* $v \in H_0^1(\Omega)$ *выполняется интегральное тождество* (2.9).

В случае однородной задачи Дирихле (2.2), (2.6) определение 2.1 естественным образом видоизменяется.

**Определение 2.2.** *Функция* $u \in H_0^1(\Omega)$ — *обобщенное решение однородной задачи Дирихле* (2.2), (2.6), *если интегральное тождество* (2.9) *выполняется для любой функции* $v \in H_0^1(\Omega)$.

Заметим, что неоднородная задача Дирихле может быть сведена к однородной за счет изменения правой части уравнения.

Действительно, пусть $w$ — произвольная функция из $H^1(\Omega)$, след которой на $\Gamma$ равен $g$. Будем разыскивать решение неоднородной задачи Дирихле (2.2), (2.5) в виде $u = u_0 + w$, где $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. Тогда тождество (2.9) можно переписать в виде

$$\int\limits_{\Omega} (A\nabla u_0 \cdot \nabla v + a \cdot \nabla u_0\, v + u_0 b \cdot \nabla v + a_0 u_0 v)\, dx = \\ = \int\limits_{\Omega} (\widetilde{f}_0 v + \widetilde{f} \cdot \nabla v)\, dx,$$

где $\widetilde{f}_0 = f_0 - a \cdot \nabla w - a_0 w$, $\widetilde{f} = f - A\nabla w - wb$, причем вследствие (2.10) $\widetilde{f}_i \in L_2(\Omega)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, поскольку $w \in H^1(\Omega)$.

Сказанное дает возможность в дальнейшем ограничиться изучением обобщенной разрешимости однородной задачи Дирихле.

Рассуждая по аналогии с пунктом 1, нетрудно убедиться, что если выполнены соответствующие условия гладкости, то обобщенное решение задачи Дирихле удовлетворяет уравнению (2.2) и граничному условию (2.5) в классическом смысле.

Дадим теперь определение обобщенного решения третьей граничной задачи. Вновь обратимся к интегральному тождеству (2.8). Используя граничное условие (2.7), перепишем его в виде

$$\int\limits_{\Omega} (A\nabla u \cdot \nabla v + a \cdot \nabla u\, v + ub \cdot \nabla v + a_0 uv)\, dx + \int\limits_{\Gamma} \sigma uv\, dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega} (f_0 v + f \cdot \nabla v)\, dx + \int\limits_{\Gamma} gv\, dx. \quad (2.13)$$

Наряду с условиями (2.3), (2.10) будем предполагать, что

$$\sigma \in L_\infty(\Gamma), \quad (2.14)$$

$$g \in L_2(\Gamma). \quad (2.15)$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае все интегралы, входящие в (2.13), существуют при любых $u, v \in H^1(\Omega)$. При этом надо учесть тот факт, что для любой функции из $H^1(\Omega)$ существует след на $\Gamma$, принадлежащий $L_2(\Gamma)$.

**Определение 2.3.** *Обобщенным решением третьей краевой задачи называется функция $u \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющая интегральному тождеству* (2.13) *при любой функции $v \in H^1(\Omega)$.*

Как и в случае первой краевой задачи, можно показать, что при выполнении соответствующих условий гладкости обобщенное решение задачи удовлетворяет уравнению (2.2) и граничному условию (2.7) в классическом смысле.

Замечание 2.1. Следует обратить внимание на принципиальную разницу между граничными условиями первого и третьего рода. Граничные условия третьего рода вытекают как следствие из интегрального тождества (2.13), в то время как граничные условия Дирихле накладываются на искомое решение априори. В связи с этим принята такая терминология: граничные условия Дирихле называют *главными* граничными условиями, граничные условия третьего рода — *естественными*.

**3. Исследование разрешимости краевых задач на основе леммы Лакса — Мильграма.**

1. Задача Дирихле. Определим билинейную форму

$$\boldsymbol{a} : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

и линейную форму
$$\mathbf{f} : \mathbf{H_0^1(\Omega)} \to \mathbb{R}$$
при помощи соотношений
$$\boldsymbol{a}(u,v) = \int\limits_{\Omega} (A\nabla u \cdot \nabla v + a \cdot \nabla u \, v + ub \cdot \nabla v + a_0 uv)\, dx \qquad (3.1)$$
$\forall\, u, v \in H_0^1(\Omega)$,
$$\mathbf{f}(v) = \int\limits_{\Omega} (f_0 v + f \cdot \nabla v)\, dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \qquad (3.2)$$

Таким образом, отыскание обобщенного решения задачи Дирихле эквивалентно отысканию функции $u \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющей тождеству
$$\boldsymbol{a}(u,v) = \mathbf{f}(v) \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \qquad (3.3)$$

При выполнении условий (2.10), (2.11) формы $\boldsymbol{a}, \mathbf{f}$ непрерывны.

Непрерывность формы $\mathbf{f}$ была установлена ранее (см. с. 85). Докажем непрерывность формы $\boldsymbol{a}$. Используем неравенство Коши — Буняковского, а затем — Фридрихса. Получим
$$|\boldsymbol{a}(u,v)| \leqslant c_1 \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} + 2c_2 \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} + \\ + c_3 \|u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)},$$
где $c = c_1 + c_2 c_\Omega^{1/2} + c_3 c_\Omega$, $c_1, c_\Omega$ — постоянные из неравенств (2.12) и Фридрихса соответственно,
$$c_2 = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |a(x)| + \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |b(x)|, \quad c_3 = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |a_0(x)|.$$

Для формулировки условий положительной определенности формы $\boldsymbol{a}$ удобно ввести в рассмотрение постоянные
$$c_3^+ = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} a_0^+(x), \quad c_3^- = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |a_0^-(x)|.$$

Полагая $v = u$ в равенстве (3.1), получим
$$\boldsymbol{a}(u,u) \geqslant \int\limits_{\Omega} \Big(c_0 \, |\nabla u|^2 - 2c_2 |\nabla u| \, |u| - c_3^- u^2 + c_3^+ u^2\Big)\, dx.$$

Будем различать далее два случая.

1. Пусть известно лишь, что $c_3^+ \geqslant 0$. Используя неравенство Фридрихса, получим:

$$\boldsymbol{a}(u,u) \geqslant (c_0 - 2c_2 c_\Omega^{1/2} - c_3^- c_\Omega) \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dx. \tag{3.4}$$

2. Пусть $c_3^+ > 0$. Тогда с помощью неравенства Коши с $\varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ можем написать, что

$$\boldsymbol{a}(u,u) \geqslant (c_0 - c_2\varepsilon) \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dx + (c_3^+ - c_2/\varepsilon) \int\limits_\Omega u^2 dx. \tag{3.5}$$

Оценки (3.4), (3.5) позволяют сформулировать достаточные условия положительной определенности квадратичной формы $\boldsymbol{a}(\cdot,\cdot)$.

Так, оценка (3.4) гарантирует положительную определенность формы $\boldsymbol{a}$, когда либо $c_2$ и $c_3^-$, либо $c_\Omega$ достаточно малы. Последнее означает, что билинейная форма $\boldsymbol{a}$ положительно определена, если мера области $\Omega$ достаточно мала[1)].

Оценка (3.5) гарантирует положительную определенность формы $\boldsymbol{a}$ при достаточно большом значении $c_3^+$.

Таким образом, вследствие леммы 1.1, с. 8, справедлива

**Теорема 3.1.** *Пусть выполнены условия* (2.3), (2.10) *и условия на постоянные* $c_2$, $c_3^-$, $c_3^+$, $c_\Omega$, *обеспечивающие положительную определенность билинейной формы* $\boldsymbol{a}$. *Тогда задача* (2.2), (2.6) *имеет единственное обобщенное решение при любых* $f_0, f_1, \ldots, f_n$ *из пространства* $L_2(\Omega)$.

Упражнение 3.1. Показать, что при выполнении условий теоремы 3.1 для обобщенного решения задачи (2.2), (2.6) справедлива априорная оценка

$$\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c \sum_{i=0}^n \|f_i\|_{L_2(\Omega)},$$

где $c$ — постоянная, зависящая от коэффициентов оператора $L$ и области $\Omega$.

---

[1)] См. оценку (14.7), с. 76.

Замечание 3.1. При выполнении условий (2.10), (2.11) формы $\boldsymbol{a}$, $\mathbf{f}$ ограничены и потому могут быть записаны в виде

$$\boldsymbol{a}(u,v) = \langle \mathbf{A}u, v\rangle \ \forall\, u,v \in H_0^1(\Omega), \quad \mathbf{f}(v) = \langle \varphi, v\rangle \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$

где $\mathbf{A}$ — линейный ограниченный оператор, действующий из $H_0^1(\Omega)$ в $H^{-1}(\Omega)$, $\varphi$ — заданный элемент пространства $H^{-1}(\Omega)$, и задача (3.3) может быть интерпретирована как уравнение $\mathbf{A}u = \varphi$. При выполнении условий теоремы 3.1 это уравнение однозначно разрешимо при любой правой части $\varphi \in H^{-1}(\Omega)$.

Замечание 3.2. Нетрудно убедиться, что если выполнены условия теоремы 3.1, то неоднородная задача Дирихле (2.2), (2.5) имеет единственное обобщенное решение при любых функциях $f_0, f_1, \ldots, f_n \in L_2(\Omega)$ и любой функции $g \in L_2(\Gamma)$, допускающей продолжение в $H^1(\Omega)$.

Особо остановимся на важном для приложений случае, когда форма $\boldsymbol{a}$, соответствующая задаче (2.1), (2.5), симметрична. Как показывает соотношение (3.1), для этого достаточно потребовать выполнения условий

$$A = A^T, \quad a = b.$$

Если при этом выполнены и условия положительной определенности формы $\boldsymbol{a}$, то отыскание обобщенного решения задачи (2.2), (2.6) эквивалентно задаче минимизации:

$$F(u) = \min_{u \in H_0^1(\Omega)} F(v),$$

где

$$F(u) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \left(A\nabla u \cdot \nabla u + 2u\, a \cdot \nabla u + a_0 u^2\right) dx - \\ - \int\limits_\Omega (f_0 u + f \cdot \nabla u)\, dx. \quad (3.6)$$

Функционал (3.6) принято называть *энергетическим.*

Замечание 3.3. Подчеркнем, что при исследовании разрешимости однородной задачи Дирихле мы не использовали каких-либо условий на гладкость границы области $\Omega$.

2. Третья краевая задача. При исследовании обобщенной разрешимости задачи (2.2), (2.7) будем считать выполненными условия (2.3), (2.10), (2.14). Кроме того, предположим, что

$$a_0(x) \geqslant m_0 = \text{const} \geqslant 0, \qquad \sigma(x) \geqslant m_1 = \text{const} \geqslant 0, m_0 + m_1 > 0. \tag{3.7}$$

Введем в рассмотрение формы

$$\boldsymbol{a}(u,v) = \int\limits_{\Omega} (A\nabla u \cdot \nabla v + a \cdot \nabla u\, v + ub \cdot \nabla v + a_0 uv)\, dx + \int\limits_{\Gamma} \sigma uv \; dx \quad \forall\, u, v \in H^1(\Omega),$$

$$\mathbf{f}(v) = \int\limits_{\Omega} (f_0 v + f \cdot \nabla v)\; dx + \int\limits_{\Gamma} gv\, dx \quad \forall\, v \in H^1(\Omega).$$

Тогда отыскание обобщенного решения задачи (2.2), (2.7) эквивалентно отысканию функции $u \in H^1(\Omega)$ как решения уравнения

$$\boldsymbol{a}(u,v) = \mathbf{f}(v) \quad \forall\, v \in H^1(\Omega).$$

Заметим, прежде всего, что вследствие непрерывности вложения пространства $H^1(\Omega)$ в пространство $L_2(\Gamma)$ (см. теорему 12.2, с. 53)

$$\Big| \int\limits_{\Gamma} \sigma uv \; dx \Big| \leqslant c_4 c_{1\Omega} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, u, v \in H^1(\Omega),$$

где $c_4 = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Gamma} \sigma(x)$, $c_{1\Omega}$ — постоянная, зависящая от области $\Omega$. Отсюда вытекает, что билинейная форма $\boldsymbol{a} : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, ограничена.

Вновь применяя теорему 12.2, с. 53, получим, что интеграл $\int\limits_{\Gamma} gv \; dx$ при любом фиксированном $g \in L_2(\Gamma)$ порождает линейный ограниченный функционал на $H^1(\Omega)$, следовательно, линейная форма $\mathbf{f}$ непрерывна.

Установим условия положительной определенности формы $\boldsymbol{a}$. Будем считать, что $m_1 > 0$. Случай, когда функция $a_0$ строго положительна, рассматривается вполне аналогично. Рассуждая, как в случае первой краевой задачи, получим

$$\boldsymbol{a}(u,u) \geqslant c_0\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} - c_2\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{L_2(\Omega)} + m_1\|u\|^2_{L_2(\Gamma)}. \quad (3.8)$$

Нетрудно проверить, что норма

$$\|u\|_{1,*} = \left(\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} + \int\limits_{\Gamma} u^2 dx\right)^{1/2}$$

эквивалентна исходной норме на пространстве $H^1(\Omega)$, следовательно, $\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c_\Omega \|u\|_{1,*}$ с постоянной $c_\Omega$, зависящей лишь от области $\Omega$. Поэтому, усиливая неравенство (3.8), получим

$$\boldsymbol{a}(u,u) \geqslant (c - c_2 c_\Omega)\,\|u\|^2_{1,*},$$

где $c = \min(c_0, m_1) > 0$, причем $c - c_2 c_\Omega > 0$, если постоянная $c_2$ достаточно мала.

Таким образом, справедлива

**Теорема 3.2.** *Пусть выполнены условия* (2.3), (2.10), (2.14) *и условия, обеспечивающие положительную определенность билинейной формы* $\boldsymbol{a}$. *Тогда задача* (2.2), (2.7) *имеет единственное обобщенное решение при любых* $f_0, f_1, \ldots, f_n \in L_2(\Omega)$, $g \in L_2(\Gamma)$.

Упражнение 3.2. Показать, что при выполнении условий теоремы 3.2 для обобщенного решения задачи (2.2), (2.7) справедлива априорная оценка

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c\left(\sum_{i=0}^{n} \|f_i\|_{L_2(\Omega)} + \|g\|_{L_2(\Gamma)}\right),$$

где $c$ — постоянная, зависящая от коэффициентов оператора $L$, $\sigma$ и области $\Omega$.

**4. Принцип максимума.** Результаты настоящего пункта представляют собой естественное обобщение классического принципа максимума для оператора Лапласа на случай эллиптических операторов дивергентного вида. При их формулировке будем использовать следующие определения. Будем говорить, что функция $u \in H^1(\Omega)$ удовлетворяет условию $u \leqslant 0$ на $\Gamma$, если функция $u^+ \in H_0^1(\Omega)$, иными словами, функция $u^+$ имеет нулевой след на Г. Будем говорить, что $u \geqslant 0$ на Г, если $-u \leqslant 0$ на Г. Будем считать, что для функций $u, v \in H^1(\Omega)$ выполнено неравенство $u \leqslant v$ на Г, если $u - v \leqslant 0$ на Г. Определим $\sup\limits_{\Gamma} u$ как точную нижнюю грань таких постоянных $k$, что $u \leqslant k$ на Г. Положим $\inf\limits_{\Gamma} u = -\sup\limits_{\Gamma}(-u)$.

Замечание 4.1. Для гладких функций эти определения приводят к соответствующим неравенствам, понимаемым в классическом смысле.

**Теорема 4.1.** *Пусть выполнены условия* (2.3), (2.10) *и*

$$\int\limits_{\Omega} (a_0 v + b \cdot \nabla v)\, dx \geqslant 0 \tag{4.1}$$

*для любой неотрицательной функции* $v$ *из* $C_0^1(\Omega)$. *Пусть, далее,* $u$ *принадлежит* $H^1(\Omega)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $\boldsymbol{a}(u, v) \geqslant 0$ *для любой функции* $v \in C_0^1(\Omega)$, *неотрицательной в области* $\Omega$, *то*

$$\inf_{\Omega} u \geqslant \inf_{\Gamma} u^-;$$

2) *если* $\boldsymbol{a}(u, v) \leqslant 0$ *для любой функции* $v \in C_0^1(\Omega)$, *неотрицательной в области* $\Omega$, *то*

$$\sup_{\Omega} u \leqslant \sup_{\Gamma} u^+.$$

Замечание 4.2. Поскольку $a_0, b \in L_\infty(\Omega)$, условие (2.1) сохраняется по непрерывности и для любой неотрицательной функции $v \in \overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega)$ (см. теорему 8.1, с. 39, об аппроксимации гладким функциями).

Замечание 4.3. Если функции $b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, дифференцируемы, то условие (2.1) означает, что функция $a_0 - \operatorname{div} b$, являющаяся коэффициентом при $u$ в операторе $L$, неотрицательна в области $\Omega$.

Доказательство теоремы 4.1. Очевидно, достаточно установить справедливость второго утверждения теоремы, так как тогда первое получается заменой $u$ на $-u$.

Положим $l = \sup\limits_{\Gamma} u^+$ и выберем число $k$ из условия

$$l \leqslant k < \sup\limits_{\Omega} u.$$

Если такого числа $k$ не существует, то $\sup\limits_{\Omega} u \leqslant \sup\limits_{\Gamma} u^+$ и доказываемое утверждение справедливо. В противном случае положим $v = (u-k)^+$. Ясно, что $v \in H_0^1(\Omega)$ и

$$vu \geqslant 0. \tag{4.2}$$

Кроме того, нетрудно проверить, что $uv \in \overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega)$ и

$$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u. \tag{4.3}$$

Заметим также, что вследствие леммы 9.2, с. 45,

$$\nabla v = \begin{cases} \nabla u, & \text{при } u > k, \text{ т. е. при } v \neq 0; \\ 0, & \text{при } u \leqslant k, \text{ т. е. при } v = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Опираясь на теорему 8.1, с. 39, нетрудно убедиться, что неравенство $\boldsymbol{a}(u,v) \leqslant 0$, выполненное для любой неотрицательной функции $v$ из $C_0^1(\Omega)$, остается справедливым и для неотрицательной функции $v = (u-k)^+ \in H_0^1(\Omega)$. Используя формулу (4.3), перепишем его в виде

$$\int\limits_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla v dx \leqslant -\int\limits_{\Omega} (a-b)\cdot(\nabla u) v dx - \int\limits_{\Omega} (a_0 uv + b\cdot\nabla(uv)) dx. \tag{4.5}$$

Из (4.5), учитывая (4.2), (4.4), условие эллиптичности (2.3) и условие (2.1), получим

$$\int\limits_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v dx \leqslant c \int\limits_{D} v|\nabla v| dx, \tag{4.6}$$

где $D = \operatorname{supp} |\nabla v|$. Ясно, что $\operatorname{supp} |\nabla v| \subset \operatorname{supp} v$. Из (4.6), используя неравенство Коши — Буняковского, будем иметь

$$\|v\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant c\|v\|_{L_2(D)},$$

откуда на основании теоремы вложения 13.3, с. 61, получим, что

$$\|v\|_{L_{2n/(n-2)}(\Omega)} \leqslant c\|v\|_{L_2(D)}, \tag{4.7}$$

если $n \geqslant 3$; если $n = 2$, то точно так же получим, что

$$\|v\|_{L_q(\Omega)} \leqslant c\|v\|_{L_2(D)}, \tag{4.8}$$

где в качестве $q$ можно взять произвольное число, большее или равное единице[1]. Поскольку $2n/(n-2) > 2$ при $n \geqslant 3$, можно считать, что при любом $n \geqslant 2$ выполнено неравенство (4.8) с некоторым $q > 2$. Используя неравенство Гельдера, получим, что

$$\int\limits_D v^2 dx \leqslant \left(\int\limits_D (v^2)^{q/2} dx\right)^{2/q} \left(\int\limits_D 1^{q/(q-2)} dx\right)^{(q-2)/q} =$$

$$= \|v\|^2_{L_q(D)} (\operatorname{mes} D)^{(q-2)/q} \leqslant \|v\|^2_{L_q(\Omega)} (\operatorname{mes} D)^{(q-2)/q}.$$

Поэтому из (4.8) вытекает, что $\operatorname{mes} D \geqslant c^{-2q/(q-2)}$, причем постоянная в правой части этого неравенства не зависит от $k$. Приближая $k$ неограниченно к $\sup\limits_\Omega u$, получим, что функция $u$ достигает точной верхней грани на множестве положительной меры, и на нем вследствие леммы 9.3, с. 46, справедливо равенство $\nabla u = 0$, а значит вследствие (4.4) получаем, что $\nabla v = 0$ на этом же множестве. Это противоречит тому, что $\operatorname{mes}(D) > 0$. Остается принять, что $\sup\limits_\Omega u \leqslant l = \sup\limits_\Gamma u^+$. $\square$

**Теорема 4.2.** *Пусть для оператора $L$ выполнены условия, сформулированные в теореме 4.1, и пусть $u \in H^1_0(\Omega)$, $\boldsymbol{a}(u, v) = 0$ для любого $v \in H^1_0(\Omega)$. Тогда $u(x) = 0$ на $\Omega$.*

Доказательство. Для функции $u$ одновременно выполнены условия пунктов 1 и 2 теоремы 4.1, следовательно,

$$\inf_\Gamma u^- \leqslant u(x) \leqslant \sup_\Gamma u^+ \quad \text{на } \Omega,$$

и, поскольку $u \in H^1_0(\Omega)$, то $\inf\limits_\Gamma u^- = \sup\limits_\Gamma u^+ = 0$. $\square$

**5. Исследование обобщенной разрешимости задачи Дирихле на основе теорем Фредгольма.** Мы доказали ранее однозначную обобщенную разрешимость задачи (2.2), (2.6)

[1] См. замечание 13.1, с. 61.

при условии, что младшие члены уравнения достаточно малы. Привлекая теорию Фредгольма разрешимости уравнений с вполне непрерывными операторами (см п. 3, 1, гл. 1), можно указать более общие критерии существования решения этой задачи.

Сведем отыскание обобщенного решения задачи (2.2), (2.6) к уравнению второго рода с вполне непрерывным оператором в гильбертовом пространстве $H_0^1(\Omega)$. С этой целью перепишем интегральное тождество (2.9) в эквивалентном виде

$$\int\limits_\Omega (A\nabla u\cdot\nabla v + a\cdot\nabla u\, v + ub\cdot\nabla v + (a_0+\mu)uv)\,dx - \mu\int\limits_\Omega uv\,dx = \\ = \int\limits_\Omega (f_0 v + f\cdot\nabla v)\,dx, \quad (5.1)$$

где $\mu = \mathrm{const}$.

Введем в рассмотрение операторы $\mathbf{A}_\mu, \mathbf{T}$, действующие в пространстве $H_0^1(\Omega)$, и функцию $\mathbf{f}\in H_0^1(\Omega)$, определяемые тождествами

$$(\mathbf{A}_\mu u, v)_1 = \int\limits_\Omega (A\nabla u\cdot\nabla v + a\cdot\nabla u\, v + ub\cdot\nabla v + (a_0+\mu)uv)\,dx \\ \forall u, v\in H_0^1(\Omega),$$

$$(\mathbf{T}u, v)_1 = \int\limits_\Omega uv\,dx \quad \forall\, u, v\in H_0^1(\Omega),$$

$$(\mathbf{f}, v)_1 = \int\limits_\Omega (f_0 v + f\cdot\nabla v)\,dx \quad \forall\, v\in H_0^1(\Omega).$$

Задача построения обобщенного решения оказывается эквивалентной при этом уравнению

$$\mathbf{A}_\mu u - \mu\mathbf{T}u = \mathbf{f}. \quad (5.2)$$

Из рассуждений, проведенных на с. 109 при доказательстве непрерывности билинейной формы $\boldsymbol{a}$, непосредственно вытекает, что оператор $\mathbf{A}_\mu$ при любом $\mu$ и оператор $\mathbf{T}$ — линейные ограниченные операторы.

Из условий положительной определенности формы $\boldsymbol{a}$ (см. с. 110, а также упражнение 1.1, с. 9) непосредственно вытекает

**Лемма 5.1.** *При достаточно большом положительном* $\mu$ *существует ограниченный оператор* $\mathbf{A}_\mu^{-1} : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$.

**Лемма 5.2.** *Оператор* $\mathbf{T} : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ *вполне непрерывен.*

Доказательство. Для любого элемента $u \in H_0^1(\Omega)$ имеем

$$\|\mathbf{T}u\|_{H^1(\Omega)} = \sup_{v \in H_0^1(\Omega), v \neq 0} \frac{(Tu, v)_{H^1(\Omega)}}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} = \sup_{v \in H_0^1(\Omega), v \neq 0} \frac{\int\limits_\Omega uv\,dx}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{v \in H_0^1(\Omega), v \neq 0} \frac{\|u\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)}}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \leqslant \|u\|_{L_2(\Omega)}. \tag{5.3}$$

Пусть последовательность $\{u_n\}$ ограничена в $H_0^1(\Omega)$. Покажем, что из последовательности $\{\mathbf{T}u_n\}$ можно выбрать фундаментальную подпоследовательность. Это будет означать, что оператор $\mathbf{T}$ вполне непрерывен. Из последовательности $\{u_n\}$ можно выбрать фундаментальную в пространстве $L_2(\Omega)$ подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$ (см следствие 13.1, с. 69). Используя оценку (5.3), получим

$$\|\mathbf{T}u_{n_k} - \mathbf{T}u_{n_l}\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c\|u_{n_k} - u_{n_l}\|_{L_2(\Omega)} \to 0 \quad \text{при } n_k, n_l \to \infty. \ \square$$

Упражнение 5.1. Докажите, что оператор $\mathrm{T}_1$, действующий в пространстве $H^1(\Omega)$ и определяемый тождеством

$$(\mathbf{T}_1 u, v)_1 = \int\limits_\Omega (a \cdot \nabla u\, v + ub \cdot \nabla v)\,dx \quad \forall u, v \in H^1(\Omega),$$

вполне непрерывен.

Из лемм 5.1, 5.2 вытекает, что для уравнения (5.2) справедливы теоремы Фредгольма (см. замечание 3.2, с. 18). В частности, уравнение (5.2) однозначно разрешимо при любой правой части $\mathbf{f}$, если соответствующее однородное уравнение имеет лишь тривиальное решение. Иными словами, задача (2.2), (2.6) имеет единственное обобщенное решение при любых $f_i \in L_2(\Omega)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, если соответствующая однородная задача может иметь лишь тривиальное решение.

Опираясь на теорему 4.2, мы можем сформулировать, например, следующие достаточные условия однозначной обобщенной разрешимости задачи (2.2), (2.6).

**Теорема 5.1.** *Пусть для коэффициентов оператора $L$ выполнены условия теоремы* 4.1. *Тогда задача* (2.2), (2.6) *имеет единственное обобщенное решение при любых функциях $f_i \in L_2(\Omega)$, $i = 0, 1, \ldots, n$.*

Теория Фредгольма позволяет получить также часто используемую в дальнейшем априорную оценку обобщенного решения задачи (2.2), (2.6).

**Теорема 5.2.** *Пусть задача* (2.2), (2.6) *имеет обобщенное решение. Тогда существует обобщенное решение $u_0$ задачи* (2.2), (2.6) *с минимальной в пространстве $H_0^1(\Omega)$ нормой, и для него справедлива оценка*

$$\|u_0\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c \sum_{i=0}^{n} \|f_i\|_{L_2(\Omega)}, \tag{5.4}$$

*где постоянная $c$ зависит лишь от коэффициентов оператора $L$ и области $\Omega$.*

Доказательство. Множество обобщенных решений задачи (2.2), (2.6) совпадает с множеством решений уравнения (5.2). Будем считать, что постоянная $\mu$ выбрана так, что оператор

$$\mathbf{A}_\mu^{-1} : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$$

существует и ограничен. Тогда для уравнения (5.2) применима теория Фредгольма. Поэтому среди обобщенных решений задачи (2.2), (2.6) существует элемент $u_0$ с минимальной в пространстве $H_0^1(\Omega)$ нормой, и для него справедлива оценка

$$\|u_0\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c\|\mathbf{f}\|_{H^1(\Omega)}, \tag{5.5}$$

где постоянная $c$ зависит лишь от коэффициентов оператора $L$ и области $\Omega$ (см. оценку (3.28), с. 18). Выполняя далее оценку $\|\mathbf{f}\|_{H^1(\Omega)}$, аналогичную (5.3) (см. также упражнение 3.1, с. 110), получим (5.4). $\square$

**6. Уравнения четвертого порядка.** Пусть $\Omega$ — ограниченная двумерная область с границей $\Gamma$ класса $C^1$. Требуется найти функцию $u \in C^4(\Omega) \cap C^1\left(\bar{\Omega}\right)$, удовлетворяющую уравнению

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(a_{ijkl}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}\right) - \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} +$$

$$+\sum_{i=1}^{2} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = 0, \quad x \in \Omega, \quad (6.1)$$

и граничным условиям

$$u(x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \; x \in \Gamma. \quad (6.2)$$

Прежде чем ввести понятие обобщенного решения задачи (6.1), (6.2), заметим, что если функция $u \in C^1\left(\bar{\Omega}\right)$ и удовлетворяет условиям (6.2), то

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Действительно, вследствие первого условия (6.2) получаем, что $\partial u/\partial \tau = 0$, где $\tau$ — единичный вектор касательной к $\Gamma$, а

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial \nu} \cos(\nu, x_i) + \frac{\partial u}{\partial \tau} \cos(\nu, x_i), \quad i = 1, 2. \quad (6.3)$$

Умножим теперь уравнение (6.1) на функцию $v$, принадлежащую $C^4(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ и удовлетворяющую граничным условиям (6.2). После интегрирования по частям (дважды — в слагаемых, содержащих четвертые производные, и один раз — в слагаемых, содержащих вторые производные) с учетом граничных условий (6.2) для функции $v$ получим

$$\int\limits_{\Omega} \Bigg( \sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ijkl} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \\ + \sum_{i=1}^{2} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + a_0 u v \Bigg) dx = \int\limits_{\Omega} f v \, dx. \quad (6.4)$$

Теперь можно дать

**Определение 6.1.** *Функция $u \in H_0^2(\Omega)$ называется обобщенным решением задачи* (6.1) (6.2)*, если для любой функции $v$, принадлежащей пространству $H_0^2(\Omega)$, она удовлетворяет интегральному тождеству* (6.4).

Если предположить выполненными условия $f \in L_2(\Omega)$,

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{2} a_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geqslant c_0 \sum_{i,j=1}^{2} \xi_{ij}^2, \quad c_0 > 0, \tag{6.5}$$

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant 0 \tag{6.6}$$

при любых вещественных $\xi_{ij}$, $\xi_{ij} = \xi_{ji}$, $\xi_i$, $i, j = 1, \ldots, n$, а коэффициенты $a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $a_0^-$ считать достаточно малыми, то с использованием результатов об эквивалентных нормировках пространства $H_0^2(\Omega)$ (см. с. 77) существование и единственность обобщенного решения задачи (6.1), (6.2) устанавливается при помощи леммы Лакса — Мильграма точно так же, как для уравнений второго порядка.

Простейшим примером эллиптического уравнения четвертого порядка является бигармоническое уравнение

$$\Delta^2 u \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = f,$$

описывающее, например, малые прогибы тонкой упругой пластинки, находящейся под действием поперечной силы плотности $f$. Для бигармонического уравнения условия (6.5), (6.6), очевидно, выполнены.

## § 2. Гладкость обобщенных решений эллиптических уравнений

**1. Гладкость обобщенных решений внутри области.** Мы покажем в этом пункте, что гладкость обобщенного решения эллиптического уравнения

$$-\operatorname{div}(A\nabla u + ub) + a \cdot \nabla u + a_0 u = f, \quad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

увеличивается с увеличением гладкости его коэффициентов и правой части.

**Определение 1.1.** *Функция $u \in H^1(\Omega)$ называется обобщенным решением уравнения* (1.1), *если*

$$\int\limits_{\Omega} (A\nabla u \cdot \nabla v + a \cdot \nabla u\, v + ub \cdot \nabla v + a_0 uv)\, dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega} fv\, dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \quad (1.2)$$

Подчеркнем, что мы здесь не требуем, чтобы функция $u$ удовлетворяла каким-либо граничным условиям.

**Теорема 1.1.** *Пусть выполнено условие эллиптичности* (2.3)*, с.* 104*, и, кроме того,*

$$a_0, a_i \in L_\infty(\Omega),\ a_{ij}, b_i \in C^1(\Omega),\ i, j = 1, 2, \ldots, n,\ f \in L_2(\Omega). \quad (1.3)$$

*Пусть далее $u$ — обобщенное решение уравнения* (1.1)*. Тогда*

$$u \in H^2(\Omega_0) \quad (1.4)$$

*для любой области $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, справедлива оценка*

$$\|u\|_{H^2(\Omega_0)} \leqslant C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}), \quad (1.5)$$

*где $C$ — постоянная, зависящая только от $\Omega_0$, $\Omega$ и коэффициентов оператора $L$.*

Доказательство. Введем в рассмотрение наряду с областью $\Omega_0$ область $\Omega_1$ такую, что $\Omega_0 \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega$ и фиксируем функцию $\zeta$ из $C_0^\infty(\Omega)$, удовлетворяющую условиям $0 \leqslant \zeta(x) \leqslant 1$, $x \in \Omega$,

$$\zeta(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_1; \\ 1, & x \in \Omega_0. \end{cases}$$

Пусть $k \in [1, n]$ — целое число. Положим $v = -D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)$ в тождестве (1.2). Ясно, что при этом $h$, определяющее разделенные разности (см. с. 78), должно удовлетворять условиям $0 < h < \operatorname{dist}(\Omega_1, \partial\Omega)$. Используя формулу (15.4), с. 80, и элементарно проверяемое тождество

$$D_k^h(vw) = v(x + he_k)D_k^h w + w D_k^h v,$$

приведем (1.2) к виду

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \big(a_{ij}(x+he_k)D_k^h(D_i u)D_j(\zeta^2 D_k^h u)+$$

$$+(D_k^h a_{ij})D_i u D_j(\zeta^2 D_k^h u)\big)\,dx = \int\limits_{\Omega} \widetilde{f} v\,dx, \quad (1.6)$$

где $\widetilde{f} = f - (a\cdot\nabla u) - a_0 u + \operatorname{div}(ub)$. Напомним, что $D_i = \partial/\partial x_i$. Нетрудно видеть, что $\widetilde{f} \in L_2(\Omega)$, причем $|\widetilde{f}| \leqslant c(|f|+|u|+|\nabla u|)$. Обозначим левую часть равенства (1.6) через $I$ и представим ее как сумму двух слагаемых, $I = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \int\limits_{\Omega} \zeta^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x+he_k)D_k^h(D_i u)D_k^h(D_j u)\,dx,$$

$$I_2 = \int\limits_{\Omega} 2\zeta \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x+he_k)D_k^h(D_i u)D_k^h u D_j\zeta\,dx +$$

$$+\int\limits_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^{n} \zeta^2 D_k^h(a_{ij})D_i u D_k^h(D_j u) + 2\zeta D_k^h(a_{ij})D_i u D_k^h u D_j\zeta \right) dx.$$

Используя условие эллиптичности, получим, что

$$I_1 \geqslant c_0 \int\limits_{\Omega} \zeta^2 |D_k^h(\nabla u)|^2 dx. \quad (1.7)$$

Вследствие условия (1.3)

$$|I_2| \leqslant c\int\limits_{\Omega} \zeta(|D_k^h(\nabla u)||D_k^h u| + |D_k^h(\nabla u)||\nabla u| + |D_k^h u||\nabla u|)\,dx.$$

Применяя теперь неравенство Коши с $\varepsilon$, можем написать

$$|I_2| \leqslant \varepsilon\int\limits_{\Omega} \zeta^2 |D_k^h(\nabla u)|^2 dx + \frac{c}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega_1} (|D_k^h u|^2 + |\nabla u|^2)\,dx.$$

По теореме 15.1, с. 78, имеем

$$\int\limits_{\Omega_1} |D_k^h u|^2 dx \leqslant \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx,$$

поэтому, полагая $\varepsilon = c_0/2$, получим

$$I \geqslant I_1 - |I_2| \geqslant \frac{c_0}{2} \int\limits_\Omega \zeta^2 |D_k^h(\nabla u)|^2 dx - C \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx. \qquad (1.8)$$

Вновь используя теорему 15.1, с. 78, приходим к оценке

$$\int\limits_\Omega v^2 dx \leqslant c \int\limits_\Omega |\nabla(\zeta^2 D_k^h u)|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant c \int\limits_{\Omega_1} (|D_k^h u|^2 + \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2)\, dx \leqslant c \int\limits_\Omega (|\nabla u|^2 + \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2)\, dx,$$

используя которую и применяя неравенство Коши с $\varepsilon$, будем иметь

$$\left| \int\limits_\Omega \widetilde{f} v dx \right| \leqslant \varepsilon \int\limits_\Omega \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2\, dx + \frac{c}{\varepsilon} \int\limits_\Omega (f^2 + u^2 + |\nabla u|^2)\, dx.$$

Полагая здесь $\varepsilon = c_0/4$ и используя (1.8), получим

$$\int\limits_\Omega \zeta^2 |D_k^h \nabla u|^2\, dx \leqslant c \int\limits_\Omega (f^2 + u^2 + |\nabla u|^2)\, dx$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{\Omega_0} |D_k^h \nabla u|^2\, dx \leqslant c \int\limits_\Omega (f^2 + u^2 + |\nabla u|^2)\, dx$$

для $k = 1, \ldots, n$ и для всех достаточно малых $h$. Поэтому на основании теоремы 15.2, с. 79, можем заключить, что $D_i u$ принадлежит $H^1(\Omega_0)$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, следовательно, $u \in H^2(\Omega_0)$, и выполнена оценка (1.5). $\square$

Упражнение 1.1. Показать, что при выполнении условий теоремы 1.1 функция $u$ удовлетворяет уравнению (1.1) почти всюду в области $\Omega$.

**Теорема 1.2.** *Пусть выполнено условие эллиптичности* (2.3), *с.* 104. *Пусть далее* $m$ — *целое неотрицательное число и*

$$a_{ij}, b_i \in C^{m+1}(\Omega),\ i,j = 1, 2, \ldots, n,\ a_i \in C^m(\Omega),\ i = 0, 1, \ldots, n,$$

$$f \in H^m(\Omega)^{1)}.$$

*Если $u$ — обобщенное решение уравнения* (1.1), *то* $u \in H^{m+2}(\Omega_0)$ *для любой области* $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ *и справедлива оценка*

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega_0)} \leqslant c\big(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\big), \tag{1.9}$$

*где $c$ — постоянная, зависящая только от $\Omega_0$, $\Omega$ и коэффициентов оператора $L$.*

Доказательство. Используем индукцию по $m$. При $m = 0$ справедливость утверждения теоремы вытекает из теоремы 1.1. Выполним шаг индукции, а именно, считая утверждение теоремы при некотором $m \geqslant 1$ уже доказанным, установим, что оно будет справедливо при следующем значении $m$. Итак, пусть

$$a_{ij}, b_i \in C^{m+2}(\Omega),\ i,j = 1,2,\ldots,n,\ a_i \in C^{m+1}(\Omega),\ i = 0,1,\ldots,n,$$

$$f \in H^{m+1}(\Omega),$$

$u$ — обобщенное решение уравнения (1.1). Покажем, что $u$ принадлежит $H^{m+3}(\Omega_0)$ для любой области $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{H^{m+3}(\Omega_0)} \leqslant c(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}).$$

В силу индуктивного предположения $u \in H^{m+2}(\Omega_0)$, и выполнена оценка (1.9). Пусть $\Omega_0 \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \Omega$. Фиксируем произвольно некоторое целое $k \in [1,n]$, функцию $\widetilde{v} \in C_0^\infty(\Omega_1)$ и положим $v = -D_k\widetilde{v}$ в тождестве (1.2). Интегрируя по частям, нетрудно получить, что

$$\int\limits_\Omega (A\nabla\widetilde{u} \cdot \nabla\widetilde{v} + a \cdot \nabla\widetilde{u}\ \widetilde{v} + \widetilde{u}b \cdot \nabla\widetilde{v} + a_0\widetilde{u}\widetilde{v})\, dx = \int\limits_\Omega \widetilde{f}\widetilde{v}\, dx,$$

где

$$\widetilde{f} = D_k f + \sum_{i,j=1}^n (D_k a_{ij} D_i D_j u + D_j D_k a_{ij} D_i u) -$$
$$- \sum_{i=1}^n (D_k a_i D_i u + D_k D_i b_i u + D_k b_i D_i u + D_k a_0 u),$$

[1)] Здесь и далее $C^0(\Omega) = C(\Omega)$, $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$.

$\widetilde{u} = D_k u$. Вследствие предположения индукции $\tilde{f} \in H^m(\Omega_1)$, также в силу индуктивного предположения $\widetilde{u} \in H^{m+2}(\Omega_0)$ и

$$\|\widetilde{u}\|_{H^{m+2}(\Omega_0)} \leqslant c(\|\widetilde{f}\|_{H^m(\Omega_1)} + \|\widetilde{u}\|_{H^1(\Omega_1)}). \tag{1.10}$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned}\|\widetilde{f}\|_{H^m(\Omega_1)} &\leqslant c(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega_1)} + \|u\|_{H^{m+2}(\Omega_1)}) \leqslant \\ &\leqslant c(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega_1)} + \|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}) \leqslant \\ &\leqslant c(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\widetilde{u}\|_{H^1(\Omega_1)} \leqslant \|u\|_{H^2(\Omega_1)} &\leqslant c(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}) \leqslant \\ &\leqslant c(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}).\end{aligned}$$

Оценка (1.10) выполнена для любого целого $k \in [1, n]$, следовательно, $u \in H^{m+3}(\Omega_0)$,

$$\|u\|_{H^{m+3}(\Omega_0)} \leqslant c(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}).$$

Таким образом, шаг индукции выполнен. $\Box$

**Следствие 1.1.** *Пусть выполнено условие эллиптичности,*

$$a_{ij}, a_i, b_i \in C^\infty(\Omega),\ i, j = 1, 2, \ldots, n,\ f \in C^\infty(\Omega),$$

*$u$ — обобщенное решение уравнения* (1.1). *Тогда $u \in C^\infty(\Omega)$.*

**2. О разрешимости неоднородной задачи Дирихле.** В настоящем пункте мы используем результаты о гладкости решений эллиптических уравнений для того, чтобы на простейшем примере круговой области получить условие, обеспечивающее возможность продолжения функции, заданной на границе области $\Omega$, функцией из пространства $H^1(\Omega)$. Возможность такого продолжения вместе с условиями теоремы 3.1, с. 110, гарантирует в данном случае обобщенную разрешимость неоднородной задачи Дирихле (2.2), (2.5), §1.

**Теорема 2.1.** *Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$. Для того, чтобы функция $g \in L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$, была следом некоторой функции $w \in H^1(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2) < \infty, \tag{2.1}$$

*где*

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\cos k\varphi\,d\varphi, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\sin k\varphi\,d\varphi, \tag{2.2}$$

$k = 1, 2, \ldots$ — *коэффициенты Фурье функции* $g$ (*как функции полярного угла* $\varphi$).

Доказательство. Пусть функция $g$ является следом некоторой функции $w \in H^1(\Omega)$. Тогда неоднородная задача Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2.3}$$

$$u(x) = g(x), \quad x \in \Gamma, \tag{2.4}$$

$\Delta u = \partial^2 u/\partial x_1^2 + \partial^2 u/\partial x_2^2$, имеет единственное обобщенное решение $u \in H^1(\Omega)$ (см. замечание 3.2, с. 111). Это решение можно выписать в явном виде. В самом деле, используя следствие 1.1, заключаем, что $u \in C^\infty(\Omega)$ и потому является гармонической в любой подобласти $\Omega_1 \subset\subset \Omega$. Записывая уравнение (2.3) в полярных координатах и применяя метод разделения переменных, нетрудно показать, что функция $u$ представима в виде ряда

$$u(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi)\rho^k \tag{2.5}$$

($\rho, \varphi$ — полярные координаты точки $x$), сходящегося абсолютно и равномерно на любом компакте из $\Omega$. Вычисляя $\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}$, получим

$$\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k(\alpha_k^2 + \beta_k^2) < \infty, \tag{2.6}$$

так как $u \in H^1(\Omega)$. Пусть

$$u_n(\rho, \varphi) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi)\rho^k.$$

Ясно, что $u_n \in C^\infty(\bar{\Omega})$ при любом $n \geqslant 0$, причем

$$\|u_n - u_m\|^2_{L_2(\Gamma)} = \sum_{k=n+1}^{m} (\alpha_k^2 + \beta_k^2),$$

$n \leqslant m$. Вследствие оценки (2.6) получаем, что $\|u_n - u_m\|_{L_2(\Gamma)} \to 0$ когда $n, m \to \infty$. Вместе с очевидным предельным соотношением $\|u - u_n\|_{H^1(\Omega)} \to 0$, $n \to \infty$, это означает, что функция

$$u(1, \varphi) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi)$$

есть след функции $u$ на $\Gamma$. В силу единственности обобщенного решения задачи (2.3), (2.4) получаем, что $u(1, \varphi) = g(\varphi)$ почти всюду на интервале $(0, 2\pi)$, значит $\alpha_k = a_k$, $\beta_k = b_k$ при $k \geqslant 1$ и условие (2.1) вытекает из (2.6). Таким образом, необходимость условия теоремы доказана. Доказательство достаточности предоставляем читателю в качестве упражнения. $\square$

Для любой функции $g \in L_2(\Gamma)$

$$\|g\|^2_{L_2(\Gamma)} = a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty,$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(\varphi)\, d\varphi,$$

$a_k, b_k$, $k \geqslant 1$, определяются соотношениями (2.2). Условие (2.1) выделяет в пространстве $L_2(\Gamma)$ некоторое линейное подпространство функций, допускающих продолжение в $H^1(\Omega)$. Не всякая непрерывная на $\Gamma$ функция принадлежит этому подпространству. Приведем соответствующий пример, построенный Адамаром.

Пусть

$$\vartheta(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k^4 \varphi}{k^2}\,.$$

Нетрудно видеть, что указанный ряд абсолютно и равномерно сходится и потому функция $\vartheta$ непрерывна на отрезке $[0, 2\pi]$. В то же время,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k^4 \varphi}{k^2} = \sum_{l=1,16,81,\,\ldots} \frac{\cos l\varphi}{\sqrt{l}},$$

поэтому ряд в условии (2.1) для функции $\vartheta$ имеет вид

$$\sum_{l=1,16,81,\,...} 1$$

и, конечно, расходится, т. е. функция $\vartheta$ не может быть следом на $\Gamma$ никакой функции из $H^1(\Omega)$.

Упражнение 2.1. Показать, что если $g \in L_2(\Gamma)$, то для выполнения условия (2.1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{(g(\theta)-g(\varphi))^2}{(\theta-\varphi)^2}\,d\theta d\varphi < \infty,$$

иными словами, линейное пространство функций, продолжимых в $H^1(\Omega)$, — это пространство функций с конечной нормой

$$\|g\|^2 = \|g\|^2_{L_2(\Gamma)} + \int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma \frac{(g(x)-g(y))^2}{(x-y)^2}\,dxdy. \qquad (2.7)$$

Замечание 2.1. Последнее условие продолжимости без каких-либо изменений переносится на произвольные ограниченные области пространства $\mathbb{R}^n$ класса $C^2$. Линейное пространство функций, определенных на $\Gamma$, с конечной нормой (2.7) обозначают через $W_2^{1/2}(\Gamma)$, или $H^{1/2}(\Gamma)$.

**3. Гладкость обобщенного решения однородной задачи Дирихле.** В пункте 1 настоящего параграфа было показано, что при выполнении определенных условий гладкости на коэффициенты и правую часть уравнения (1.1) его обобщенное решение $u$ принадлежит $H^m(\Omega_0)$ для любой подобласти $\Omega_0 \subset\subset \Omega$. Отсюда, вообще говоря, не вытекает, что $u \in H^m(\Omega)$. Этот факт удается установить, если $u$ — решение некоторой граничной задачи для уравнения (1.1), а граница области $\Omega$ и функции, входящие в граничные условия, обладают определенной гладкостью. Мы в дальнейшем будем рассматривать лишь случай однородной задачи Дирихле.

**Теорема 3.1.** *Пусть выполнено условие эллиптичности* (2.3)*, с.* 104*, и, кроме того,*

$$a_{ij}, b_i \in C^1(\bar{\Omega}),\ a_0, a_i \in L_\infty(\Omega),\ f \in L_2(\Omega),\ \Gamma \in C^2, \qquad (3.1)$$

$i, j = 1, 2, \ldots, n.$
*Пусть $u$ — обобщенное решение уравнения* (1.1)*. Тогда функция $u$ принадлежит $H^2(\Omega)$, справедлива оценка*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant c(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}), \tag{3.2}$$

*где постоянная $c$ зависит только от коэффициентов уравнения и области $\Omega$.*

Прежде, чем доказывать теорему, установим следующий вспомогательный результат.

**Лемма 3.1.** *Пусть выполнены условия на коэффициенты оператора $L$ и правую часть $f$, сформулированные в теореме* 3.1*, и пусть $\Omega = B(0, R) \cap \mathbb{R}^n_+$; здесь, как и раньше, $B(x_0, R) \subset \mathbb{R}^n$ есть шар радиуса $R$ с центром в точке $x_0$, $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$. Пусть, далее, $u$ — обобщенное решение уравнения* (1.1) *в области $\Omega$, след которого при $x_n = 0$ равен нулю. Тогда $u \in H^2(\Omega_0)$, где $\Omega_0 = B(0, r) \bigcap \mathbb{R}^n_+$, $0 < r < R$,*

$$\|u\|_{H^2(\Omega_0)} \leqslant c(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}),$$

*где $c$ — постоянная, зависящая только от $R$, $r$ и коэффициентов уравнения* (1.1)*.*

Доказательство. Пусть $\zeta \in C_0^\infty(B(0, R))$, $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$, $\zeta \equiv 1$ на $B(0, r)$,

$$v(x) = -D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)(x) =$$
$$= -\frac{\zeta^2(x)(u(x+he_k)-u(x)) - \zeta^2(x-he_k)(u(x)-u(x-he_k))}{h^2}. \tag{3.3}$$

Здесь $h > 0$ достаточно мало, $k \in [1, n-1]$ — целое. Функция $u$ имеет нулевой след при $x_n = 0$, а сдвиги в (3.3) выполняются по направлениям, ортогональным $e_n$. Поэтому функция $v$ также имеет нулевой след при $x_n = 0$. По определению функция $\zeta$ тождественно равна нулю вблизи $\partial B(0, R)$, следовательно, при достаточно малом $h$ функция $v$ также обращается в нуль вблизи $\partial B(0, R)$. Таким образом, $v \in H_0^1(\Omega)$ при достаточно малом $h$ и может быть выбрана в качестве пробной функции в тождестве (1.2). Далее точно так же, как при доказательстве теоремы 1.1, устанавливается, что

$$\int\limits_{\Omega_0} |D_k^h \nabla u|^2 dx \leqslant c \int\limits_{\Omega} (f^2 + |\nabla u|^2)\, dx$$

для всех $k = 1, 2, \ldots, n-1$ и достаточно малых $h$. Отсюда (см. теорему 15.3, с. 80) вытекает, что $D_k u \in H^1(\Omega_0)$ для $k = 1, 2, \ldots n-1$ и справедлива оценка

$$\sum_{\substack{k,l=1\\ k+l<2n}}^{n} \|D_l D_k u\|_{L_2(\Omega_0)} \leqslant c(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}). \tag{3.4}$$

Для завершения доказательства леммы достаточно установить оценку вида (3.4) для $D_n^2 u$. Как показано выше (см. упражнение 1.1, с. 124), при выполнении условий леммы функция $u$ удовлетворяет уравнению (1.1) почти всюду в области $\Omega$, следовательно,

$$a_{nn} D_n^2 u = -\sum_{\substack{k,l=1\\ k+l<2n}}^{n} a_{kl} D_l D_k u + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{a}_k D_k u + \widetilde{a}_0 u - f, \tag{3.5}$$

где функции $\widetilde{a}_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, очевидным образом выражаются через коэффициенты уравнения (1.1) и их первые производные. Полагая $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_{n-1} = 0$, $\xi_n = 1$ в условии эллиптичности (2.3), с. 104, получим, что $a_{nn} \geqslant c_0 > 0$ в области $\Omega$, следовательно,

$$|D_n^2 u| \leqslant c\Big(\sum_{\substack{k,l=1\\ k+l<2n}}^{n} |D_l D_k u| + |\nabla u| + |u| + |f|\Big),$$

откуда, используя (3.4), получаем, что $u \in H^2(\Omega_0)$ и справедлива оценка
$$\|u\|_{H^2(\Omega_0)} \leqslant c(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}). \ \Box$$

Доказательство теоремы 3.1. Пусть $x_0 \in \Gamma$. Поскольку $\Gamma$ — поверхность класса $C^2$, существует шар $B = B(x_0, r)$ и декартова система координат $x_1, \ldots, x_n$ такие, что поверхность $\Gamma \cap B$ описывается уравнением $x_n = \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})$, где функция $\gamma$ дважды непрерывно дифференцируема, причем $x_n > \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})$ для $x \in B^+ = B \cap \Omega$. Определим отображение $\Phi$ шара $B$ в открытое множество $\widehat{B} \subset \mathbb{R}^n$ следующими равенствами:

$$\widehat{x}_i = \Phi_i(x) \equiv x_i, \ i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{3.6}$$

$$\widehat{x}_n = \Phi_n(x) \equiv x_n - \gamma(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \tag{3.7}$$

Положим $\Phi(B^+) = \widehat{B}^+$. В силу определения отображения $\Phi$ имеем $\widehat{B}^+ \subset \mathbb{R}^n_+$, причем

$$\partial\widehat{B}^+_0 \equiv \Phi(B \cap \Gamma) \subset \partial\mathbb{R}^n_+. \tag{3.8}$$

Из (3.6), (3.7) сразу же вытекает, что

$$\Phi \in C^2(B), \tag{3.9}$$

обратное отображение $\Psi = \Phi^{-1}$ существует и

$$\Psi \in C^2(\widehat{B}). \tag{3.10}$$

Матрицы Якоби этих отображений будем обозначать через $\Phi'(x)$, $\Psi'(\widehat{x})$, соответственно. Очевидно, что $\det\Phi'(x) \equiv 1$, $\det\Psi'(\widehat{x}) \equiv 1$. Поскольку $u$ — обобщенное решение уравнения (1.1), то

$$\int\limits_{B^+} (A\nabla u \cdot \nabla v + (a \cdot u)v + ub \cdot \nabla v + a_0 uv)\, dx = \\ = \int\limits_{B^+} fv\, dx \quad \forall v \in H^1_0(B^+). \tag{3.11}$$

В результате преобразования $\Phi : B^+ \to \widehat{B}^+$ тождество (3.11), как нетрудно проверить (см. соответствующие выкладки при доказательстве теоремы 10.1, с. 47), принимает вид

$$\int\limits_{\widehat{B}^+} (\widehat{A}\nabla\widehat{u} \cdot \nabla\widehat{v} + (\widehat{a} \cdot \widehat{u})\widehat{v} + \widehat{u}\,\widehat{b} \cdot \nabla\widehat{v} + \widehat{a}_0\widehat{u}\widehat{v})\, d\widehat{x} = \\ = \int\limits_{\widehat{B}^+} \widehat{f}\,\widehat{v}\, d\widehat{x} \quad \forall\,\widehat{v} \in H^1_0(\widehat{B}^+). \tag{3.12}$$

Здесь

$$\widehat{u}(\widehat{x}) = u(\Psi(\widehat{x})), \quad \widehat{A}(\widehat{x}) = [\Phi'(\Psi(\widehat{x}))]^T A(\Psi(\widehat{x}))\Phi'(\Psi(\widehat{x})),$$

$$\widehat{a}(\widehat{x}) = [\Phi'(\Psi(\widehat{x}))]^T a(\Psi(\widehat{x})), \quad \widehat{b}(\widehat{x}) = [\Phi'(\Psi(\widehat{x}))]^T b(\Psi(\widehat{x})).$$

При этом $\widehat{u} \in H^1(\widehat{B}^+)$ вследствие (3.10) и теоремы 10.1, с. 47, и ввиду (3.8) след $\widehat{u}$ на $\partial\widehat{B}_0^+$ равен нулю. Далее, вследствие (3.9), (3.10) и условий (3.1) на коэффициенты уравнения (1.1) имеем $\widehat{A}$, $\widehat{b} \in C^1(\widehat{B}^+)$, $\widehat{a}$, $\widehat{a}_0 \in L_\infty(\widehat{B}^+)$, $\widehat{f} \in L_2(\widehat{B}^+)$. Кроме того, для любого вектора $t \in \mathbb{R}^n$

$$\widehat{A}(\widehat{x})\, t \cdot t = A(\Psi(x))\Phi'(\Psi(\widehat{x}))t \cdot \Phi'(\Psi(\widehat{x}))t \geqslant c_0\, \Phi'(\Psi(\widehat{x}))t \cdot \Phi'(\Psi(\widehat{x}))t,$$

но $\Psi'(\widehat{x})\Phi'(\Psi(\widehat{x})) \equiv E$, следовательно,

$$|t|^2 = |\Psi'(\widehat{x})\Phi'(\Psi(\widehat{x}))t|^2 \leqslant c|\Phi'(\Psi(\widehat{x}))t|^2,$$

поэтому $\widehat{A}(\widehat{x})t \cdot t \geqslant \widehat{c}_0|t|^2$, где $\widehat{c}_0 = \mathrm{const} > 0$. Таким образом, для задачи (3.12) выполнены все условия леммы 3.1, следовательно, можно указать шар $B(x_0, \rho)$, $0 < \rho < r$, такой, что для области $\widehat{B}_\rho^+ = \Phi(B^+(x_0, \rho))$, принадлежащей шару достаточно малого радиуса с центром в точке $\widehat{x}_0 = \Phi(x_0)$, справедливы следующие утверждения:

$$\widehat{u} \in H^2(\widehat{B}_\rho^+), \quad \|\widehat{u}\|_{H^2(\widehat{B}_\rho^+)} \leqslant c\left(\|f\|_{L_2(\widehat{B}^+)} + \|u\|_{H^1(\widehat{B}^+)}\right),$$

где $c$ — постоянная, зависящая лишь от коэффициентов оператора $L$, и отображения $\Phi$. Используя теперь теорему 10.1, с. 47, получим, что $u \in H^2(B^+(x_0, \rho))$ и

$$\|u\|_{H^2(B^+(x_0,\rho))} \leqslant c(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}). \tag{3.13}$$

Применяя затем теорему 1.1 и выбирая конечное число точек $x_{0,k}$, таких, что шары $B(x_{0,k}, \rho_k)$ покрывают границу $\Gamma$ и для каждого из них справедлива оценка вида (3.13), получим утверждение доказываемой теоремы. □

**Следствие 3.1.** *При выполнении условий теоремы* 3.1 *справедлива и более точная оценка решения:*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant c(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}), \tag{3.14}$$

*где постоянная $c$ зависит только от коэффициентов уравнения и области $\Omega$.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что, если функция $u \in H_0^1(\Omega)$ есть обобщенное решение уравнения (1.1), то

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}). \tag{3.15}$$

Полагая $v = u$, запишем интегральное тождество (1.2) в виде

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla u\, dx = \int_\Omega (-a \cdot \nabla u\; u - ub \cdot \nabla u - a_0 u^2 + fu)\, dx, \quad (3.16)$$

откуда, используя условие эллиптичности и неравенство Коши — Буняковского, получим

$$c_0\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c(\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \\ + \|f\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{L_2(\Omega))}),$$

где постоянная $c$ зависит лишь от коэффициентов при младших членах в уравнении (1.1). Применяя теперь для оценки первого слагаемого в правой части полученного неравенства неравенство Коши с $\varepsilon$, приходим очевидным образом к (3.15). □

**Теорема 3.2.** *Пусть выполнено условие эллиптичности* (2.3), *с.* 104. *Пусть, далее, $m$ — целое неотрицательное число и*

$$a_{ij}, b_i \in C^{m+1}(\bar\Omega),\ i,j = 1,2,\ldots,n,\ a_i \in C^m(\bar\Omega),\ i = 0,1,\ldots,n,$$

$$f \in H^m(\Omega), \quad \Gamma \in C^{m+2}.$$

*Если функция $u \in H^1_0(\Omega)$ — обобщенное решение уравнения* (1.1), *то $u \in H^{m+2}(\Omega)$ и*

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leqslant c(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}), \quad (3.17)$$

*где $c$ — постоянная, зависящая только от области $\Omega$ и коэффициентов уравнения* (1.1).

Как и при доказательстве теоремы 3.1, установим сначала следующий вспомогательный результат.

**Лемма 3.2.** *Пусть выполнены условия на коэффициенты и правую часть $f$ уравнения* (1.1), *сформулированные в теореме* 3.2, *и пусть $\Omega = B(0,R)\bigcap\mathbb{R}^n_+$. Пусть далее $u$ — обобщенное решение уравнения* (1.1) *в области $\Omega$, след которого при $x_n = 0$ равен нулю. Тогда $u \in H^{m+2}(\Omega_0)$, где $\Omega_0 = B(0,r)\cap\mathbb{R}^n_+$, $0 < r < R$, и*

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega_0)} \leqslant c(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}),$$

*где $c$ — постоянная, зависящая только от $R$, $r, m$ и коэффициентов уравнения* (1.1).

Доказательство. Используем индукцию по $m$. При $m=0$ справедливость утверждения леммы вытекает из леммы 3.1. Выполним шаг индукции, а именно, предположим, что $f\in H^{m+1}(\Omega)$,

$a_{ij}, b_i \in C^{m+2}(\Omega),\ i,j=1,2,\ldots,n,\ a_i \in C^{m+1}(\Omega),\ i=0,1,\ldots,n,$

$u\in H^1(\Omega)$ — обобщенное решение уравнения (1.1), след которого равен нулю при $x_n=0$. Пусть $\Omega_1{=}B(0,t)\bigcap\mathbb{R}^n_+$, $0<r<t<R$. В силу индуктивного предположения имеем $u\in H^{m+2}(\Omega_1)$, выполнена оценка

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega_1)} \leqslant c(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}).$$

Фиксируем произвольно целое $k\in[1,n{-}1]$, функцию $\widetilde{v}\in C_0^\infty(\Omega_1)$ и положим $v=-D_k\widetilde{v}$ в тождестве (1.2). Интегрируя по частям, нетрудно получить (см. доказательство теоремы 1.2), что

$$\int\limits_{\Omega_1} (A\nabla\widetilde{u}\cdot\nabla\widetilde{v} + a\cdot\nabla\widetilde{u}\,\widetilde{v} + \widetilde{u}b\cdot\nabla\widetilde{v} + a_0\widetilde{u}\widetilde{v})\,dx = \int\limits_{\Omega_1} \widetilde{f}\widetilde{v}\,dx,$$

где

$$\widetilde{f} = D_k f + \sum_{ij=1}^n (D_k a_{ij} D_i D_j u + D_j D_k a_{ij} D_i u) -$$
$$- \sum_{i=1}^n (D_k a_i D_i u + D_k D_i b_i u + D_k b_i D_i u + D_k a_0 u) \in H^m(\Omega_1),$$

а $\widetilde{u}=D_k u$. Нетрудно видеть, что $\widetilde{u}\in H^1(\Omega_1)$, причем, поскольку $k\neq n$, то след $\widetilde{u}$ при $x_n=0$ равен нулю. В силу индуктивного предположения имеем $\widetilde{u}\in H^{m+2}(\Omega_0)$ и (ср. с доказательством теоремы 1.2)

$$\|\widetilde{u}\|_{H^{m+2}(\Omega_0)} \leqslant c(\|\widetilde{f}\|_{H^m(\Omega_1)} + \|\widetilde{u}\|_{H^1(\Omega_1)}) \leqslant$$
$$\leqslant c(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega_1)} + \|u\|_{H^1(\Omega_1)}).$$

Отсюда вытекает, что

$$\|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega_0)} \leqslant c(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega_1)} + \|u\|_{H^1(\Omega_1)}) \tag{3.18}$$

для $|\alpha|=m+3$, $\alpha\neq(0,0,\ldots,0,m+3)$. Для завершения доказательства теоремы получим оценку (3.18) при $\alpha=(0,0,\ldots,m{+}3)$.

Воспользуемся для этого равенством (3.5), вследствие которого на основании уже полученных оценок с учетом неравенства $a_{nn} \geqslant c_0 > 0$ будем иметь, что

$$\|D_n^2 u\|_{H^{m+1}(\Omega_0)} \leqslant c \sum_{\substack{k,l=1 \\ k+l<2n}}^{n} \|D_l D_k u\|_{H^{m+1}(\Omega_0)} + \\ + c \sum_{k=1}^{n} \|D_k u\|_{H^{m+1}(\Omega_0)} + c\|u\|_{H^{m+1}(\Omega_0)} + c\|f\|_{H^{m+1}(\Omega_0)} \leqslant \\ \leqslant c(\|f\|_{H^{m+1}(\Omega_1)} + \|u\|_{H^1(\Omega_1)}).$$

Отсюда вытекает оценка (3.18) при $\alpha = (0, 0, \ldots, 0, m+3)$. $\square$

Доказательство теоремы 3.2 с использованием леммы 3.2 протекает точно так же, как доказательство теоремы 3.1.

Объединяя оценку (3.17) с оценкой (5.4), с. 119, получим

**Следствие 3.2.** *Пусть выполнены условия теоремы* 3.2, *и есть обобщенное решение однородной задачи Дирихле для уравнения* (1.1) *с минимальной нормой. Тогда*

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leqslant c\|f\|_{H^m(\Omega)}, \tag{3.19}$$

*где $c$ — постоянная, зависящая только от коэффициентов уравнения* (1.1) *и области* $\Omega$.

**Следствие 3.3.** *Пусть выполнено условие эллиптичности* (2.3), *с.* 104,

$$a_{ij}, a_i, b_i \in C^\infty(\bar{\Omega}),\ i,j = 1, 2, \ldots, n,\ f \in C^\infty(\bar{\Omega}),\ \Gamma \in C^\infty,$$

*а функция $u \in H_0^1(\Omega)$ есть обобщенное решение уравнения* (1.1). *Тогда $u$ принадлежит* $C^\infty(\bar{\Omega})$.

## § 3. Принцип максимума для классических решений

**1. Слабый принцип максимума.** В этом параграфе будем рассматривать недивергентный эллиптический оператор

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_i D_j u + a \cdot \nabla u + a_0 u, \quad x \in \Omega. \tag{1.1}$$

Область $\Omega$ ограничена. Через $\Gamma$, как всегда, будем обозначать границу области $\Omega$. Коэффициенты $a_{ij}$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, $a_i$, $i = 0, 1,\ldots, n$, предполагаются непрерывными в $\bar{\Omega}$. Предполагается также выполненным условие равномерной эллиптичности (2.3), с. 104.

**Теорема 1.1.** *Пусть $a_0 \equiv 0$, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$,*

$$\mathcal{L}u \leqslant 0 \text{ в } \Omega. \tag{1.2}$$

*Тогда*

$$\max_{x\in\bar{\Omega}} u(x) = \max_{x\in\Gamma} u(x). \tag{1.3}$$

*Если при тех же условиях на функции $a_0$, $u$*

$$\mathcal{L}u \geqslant 0 \text{ в } \Omega, \tag{1.4}$$

*то*

$$\min_{x\in\bar{\Omega}} u(x) = \min_{x\in\Gamma} u(x).$$

При доказательстве теоремы будет использована алгебраическая

**Лемма 1.1.** *Пусть $A, B$ — вещественные симметричные матрицы порядка $n$, причем $A$ положительно определена, $B$ неотрицательна. Тогда*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} \geqslant 0. \tag{1.5}$$

Доказательство. Элементарными вычислениями проверяется, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} = \mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

где $\lambda_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, — собственные числа матрицы $AB$. Матрица $A$ обратима. Поэтому задача на собственные значения $ABx = \lambda x$ эквивалентна задаче на собственные значения $Bx = \lambda A^{-1}x$. Поскольку матрицы $A^{-1}$, $B$ симметричны, то все собственные значения этой задачи вещественны. Причем, если $\lambda$ — собственное число, а $x$ — соответствующий ему собственный вектор, то $\lambda = (Bx \cdot x)/(A^{-1}x \cdot x) \geqslant 0$, а значит $\mathrm{tr}(AB) \geqslant 0$. $\square$

Замечание 1.1. Нетрудно проверить, что для справедливости неравенства (1.5) достаточно, чтобы матрица $A$ была неотрицательной. Действительно, если $A$ неотрицательна, то при любом $\varepsilon > 0$ матрица $A + \varepsilon E$, где $E$ — единичная матрица, положительно определена, следовательно, $\operatorname{tr}((A + \varepsilon E)B) \geqslant 0$, т. е. $\operatorname{tr}(AB) + \varepsilon \operatorname{tr} B \geqslant 0$ $\forall \varepsilon > 0$. Устремляя $\varepsilon$ к нулю, получим, что $\operatorname{tr}(AB) \geqslant 0$ [1)].

Доказательство теоремы 1.1. Достаточно ограничиться рассмотрением того случая, когда выполняется условие (1.2), так как если $\mathcal{L}u \geqslant 0$ в $\Omega$, то $\mathcal{L}(-u) \leqslant 0$ в $\Omega$, причем точки, в которых достигается максимум $-u$, совпадают с точками, в которых достигается минимум функции $u$.

Предположим сначала, что

$$\mathcal{L}u < 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{1.6}$$

и существует точка $x_0 \in \Omega$ такая, что

$$u(x_0) = \max_{x \in \bar{\Omega}} u(x). \tag{1.7}$$

Поскольку $x_0$ — точка максимума, то $\nabla u(x_0) = 0$, а матрица вторых производных $B = -(D_i D_j)u(x_0)$ неположительна, поэтому вследствие леммы 1.1 получаем, что

$$\mathcal{L}u(x_0) = -\sum_{ij=1}^{n} a_{ij} D_i D_j u(x_0) + a \cdot \nabla u(x_0) \geqslant 0,$$

а это противоречит (1.6). Таким образом, при выполнении условия (1.6) максимум функции $u$ может достигаться только на границе области $\Omega$.

Обратимся теперь к рассмотрению общей ситуации (1.2). Положим $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_1}$, $x \in \Omega$, где $\lambda$, $\varepsilon$ — положительные постоянные. Ясно, что $\mathcal{L}u_\varepsilon \leqslant \varepsilon \mathcal{L} e^{\lambda x_1} = \varepsilon(-\lambda^2 a_{11} + \lambda a_1) e^{\lambda x_1}$. Вследствие условия эллиптичности $a_{11}(x) \geqslant c_0 > 0$, $x \in \bar{\Omega}$ (см. доказательство леммы 3.1, с. 130), далее, поскольку $a_1 \in C(\bar{\Omega})$, то $|a_1(x)| \leqslant c_1 = \text{const}$, $x \in \bar{\Omega}$, поэтому можно выбрать $\lambda$ так, что $\mathcal{L}u_\varepsilon < 0$ в $\Omega$ при любом $\varepsilon > 0$, следовательно,

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u_\varepsilon(x) = \max_{x \in \Gamma} u_\varepsilon(x) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим (1.3). $\square$

Исследуем теперь случай, когда $a_0 \geqslant 0$.

[1)] По поводу близких вопросов теории матриц см., например, [44], §7.5.

**Теорема 1.2.** *Предположим, что* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $a_0 \geqslant 0$ *в области* $\Omega$,

$$\mathcal{L}u \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{1.8}$$

*Тогда*

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) \leqslant \max_{x \in \Gamma} u^+(x). \tag{1.9}$$

*Если при тех же условиях на функции* $a_0$, *и*

$$\mathcal{L}u \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1.10}$$

*то*

$$\min_{x \in \bar{\Omega}} u(x) \geqslant \min_{x \in \Gamma} u^-(x). \tag{1.11}$$

*Здесь, как обычно,* $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$, $u^-(x) = \min\{u(x), 0\}$.

Доказательство. Точно так же, как при доказательстве теоремы 1.1, достаточно ограничиться рассмотрением случая (1.8). Пусть $\Omega_+ = \{x \in \Omega \ : u(x) > 0\}$. Записывая более подробно условие (1.8), получим

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_i D_j u + a \cdot \nabla u \leqslant -a_0 u \leqslant 0, \quad x \in \Omega_+,$$

откуда вследствие теоремы 1.1 получаем, что

$$\max_{x \in \bar{\Omega}_+} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega_+} u(x).$$

Это означает, очевидно, справедливость (1.9), если $\Omega_+ \neq \emptyset$ [1]. Если $\Omega_+ = \emptyset$, т. е. $u \leqslant 0$ в $\Omega$, то (1.9) выполняется тривиальным образом. □

**Следствие 1.1.** *Если при выполнении условий теоремы* 1.2,

$$\mathcal{L}u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

*то*

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)| = \max_{x \in \Gamma} |u(x)|.$$

---

[1] Как обычно, символом «$\emptyset$» обозначаем пустое множество.

**2. Сильный принцип максимума.** Будем говорить, что область $\Omega$ обладает *свойством внутреннего шара* в точке $x_0 \in \Gamma$, если существует открытый шар $B \subset \Omega$ такой, что $x_0 \in \partial B$ [2)].

**Лемма 2.1.** *Пусть $u \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\bar{\Omega})$, $a_0 \equiv 0$ в $\Omega$. Пусть, далее, $\mathcal{L}u \leqslant 0$ в $\Omega$, существует точка $x_0 \in \Gamma$ такая, что*

$$u(x_0) > u(x) \quad \forall x \in \Omega, \tag{2.1}$$

*выполнено условие внутреннего шара в точке $x_0$. Тогда*

$$\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu} > 0, \tag{2.2}$$

*где $\nu$ — нормаль к $\partial B$ в точке $x_0$, внешняя по отношению к $B$.*

*Если при тех же условиях $a_0 \geqslant 0$ в $\Omega$, то неравенство (2.2) выполняется при дополнительном предположении, что $u(x_0) \geqslant 0$.*

Доказательство. Будем считать сначала, что $a_0 \geqslant 0$ в $\Omega$ и $u(x_0) \geqslant 0$. Не ограничивая общности, можно предполагать, что центр шара $B$ расположен в начале координат, так что $B{=}B(0,r)$, где $r$ — радиус шара. Пусть $v(x) = e^{-\lambda|x|^2} - e^{-\lambda r^2}$, $\lambda = \text{const} > 0$. Элементарные вычисления дают:

$$\mathcal{L}v = e^{-\lambda|x|^2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(-4\lambda^2 x_i x_j + 2\lambda\delta_{ij}) - e^{-\lambda|x|^2} \sum_{i=1}^{n} a_i 2\lambda x_i + \\ + a_0(e^{-\lambda|x|^2} - e^{-\lambda r^2}),$$

где $\delta_{ij}$ — символ Кронекера. Используя условие эллиптичности, получим отсюда, что

$$\mathcal{L}v \leqslant e^{-\lambda|x|^2}(-4c_0\lambda^2|x|^2 + 2\lambda \operatorname{tr} A + 2\lambda|a||x| + c) \;\forall\, x \in B(0,r). \tag{2.3}$$

Пусть далее $S = B(0,r) \setminus \bar{B}(0,r/2)$. Ясно, что для всех достаточно больших $\lambda$

$$\mathcal{L}v \leqslant 0 \quad \text{в области } S. \tag{2.4}$$

Используя условие (2.1), нетрудно убедиться, что для всех достаточно малых положительных $\varepsilon$

$$u(x_0) \geqslant u(x) + \varepsilon v(x), \quad x \in \partial B(0,r/2). \tag{2.5}$$

---

[2)] Можно показать, что условие открытого шара выполняется в каждой точке $\Gamma$, если $\Gamma \in C^2$.

Кроме того,

$$u(x_0) \geqslant u(x) + \varepsilon v(x), \quad x \in \partial B(0, r), \tag{2.6}$$

поскольку $v(x) = 0$ при $x \in \partial B(0, r)$. Заметим теперь, что вследствие (2.4)

$$\mathcal{L}(u+\varepsilon v-u(x_0)) = \mathcal{L}(u+\varepsilon v)-a_0 u(x_0) \leqslant -a_0 u(x_0) \leqslant 0 \quad \text{в } S, \tag{2.7}$$

но тогда, используя (2.5), (2.6), на основании теоремы 1.2 получим, что $u+\varepsilon v-u(x_0) \leqslant 0$ в $S$. Отсюда, поскольку $u(x_0)+\varepsilon v(x_0)-u(x_0) = 0$, вытекает неравенство

$$\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu} + \varepsilon \frac{\partial v(x_0)}{\partial \nu} \geqslant 0.$$

Элементарные вычисления показывают, что

$$\frac{\partial v(x_0)}{\partial \nu} = \nabla v(x_0) \cdot x_0/r = -2\lambda r e^{-\lambda r^2},$$

следовательно,

$$\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu} \geqslant \varepsilon 2\lambda r e^{-\lambda r^2} > 0.$$

Таким образом, в случае, когда $u(x_0) \geqslant 0$ и $a_0 \geqslant 0$ в $\Omega$, лемма доказана. При $a_0 \equiv 0$ в области $\Omega$ неравенство (2.7), а, следовательно, и неравенство (2.2) выполняются без ограничений на знак $u(x_0)$. $\square$

**Теорема 2.1.** *Предположим, что* $u \in C^2(\Omega) \bigcap C(\bar{\Omega})$, $a_0 \equiv 0$ *в* $\Omega$, $\mathcal{L}u \leqslant 0$ *в* $\Omega$. *Тогда, если функция u достигает максимума на* $\bar{\Omega}$ *во внутренней точке* $\Omega$, *то она — тождественная постоянная. Если при тех же условиях* $\mathcal{L}u \geqslant 0$ *в* $\Omega$ *и функция u достигает минимума на* $\bar{\Omega}$ *во внутренней точке* $\Omega$, *то она — тождественная постоянная.*

Доказательство. Очевидно, что вновь можно ограничиться рассмотрением случая, когда $\mathcal{L}u \leqslant 0$ в $\Omega$. Пусть $M = \max\limits_{x \in \bar{\Omega}} u(x)$. Будем считать, что $u \not\equiv M$ на $\Omega$ и положим

$$\Omega_M = \{x \in \Omega \,:\, u(x) = M\}, \quad \Omega_- = \{x \in \Omega \,:\, u(x) < M\}.$$

Выберем в $\Omega_-$ точку $y$, расположенную ближе к $\Omega_M$, чем к $\Gamma$, и пусть $B$ есть наибольший шар с центром в точке $y$, внутренность которого принадлежит $\Omega_-$ (сделайте рисунок!). Понятно, что существует точка $x_0 \in \Omega_M$, одновременно принадлежащая $\partial B$. Для $\Omega_-$ в точке $x_0$ выполнено условие внутреннего шара, и $u(x_0) > u(x)$ для всех $x \in B$. По лемме 2.1 отсюда вытекает, что

$$\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu} = \nabla u(x_0) \cdot \nu > 0.$$

Здесь $\nu$ — нормаль к $\partial B$ в точке $x_0$, внешняя по отношению к $B$. Но, с другой стороны, $x_0 \in \Omega$ — точка максимума функции $u$, следовательно, $\nabla u(x_0) = 0$. $\square$

Совершенно аналогично с использованием леммы 2.1 доказывается

**Теорема 2.2.** *Предположим, что* $u \in C^2(\Omega) \bigcap C(\bar{\Omega})$, $a_0 \geqslant 0$ *в* $\Omega$, $\mathcal{L}u \leqslant 0$ *в* $\Omega$. *Тогда, если функция* $u$ *достигает неотрицательного максимума на* $\bar{\Omega}$ *во внутренней точке* $\Omega$, *то она — тождественная постоянная. Если при тех же условиях* $\mathcal{L}u \geqslant 0$ *в* $\Omega$ *и функция* $u$ *достигает неположительного минимума на* $\bar{\Omega}$ *во внутренней точке* $\Omega$, *то она — тождественная постоянная.*

## § 4. Квазилинейные эллиптические уравнения

**1. Оператор Немыцкого.** В этом пункте исследуются некоторые свойства нелинейных отображений пространства $L_p$. В дальнейшем эти свойства существенно используются при изучении квазилинейных уравнений с частными производными.

**Теорема 1.1.** *Пусть вещественная функция*

$$h(x,\xi),\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ \xi \in \mathbb{R},$$

*удовлетворяет условиям Каратеодори, т. е. измерима по* $x$ *при любом* $\xi \in \mathbb{R}$ *и непрерывна по* $\xi$ *для почти всех* $x \in \Omega$. *Пусть, далее, выполнено неравенство*

$$|h(x,\xi)| \leqslant c_1 + c_2|\xi|^{p-1},\ x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R},\ p > 1,$$

*где* $c_1, c_2 = \mathrm{const} > 0$. *Тогда функция* $h(x,u(x))$, $x \in \Omega$, *при любой функции* $u \in L_p(\Omega)$ *принадлежит* $L_q(\Omega)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. *Более того, оператор* $A : L_p(\Omega) \to L_q(\Omega)$, *действующий по правилу*

$$Au(x) = h(x,u(x)),\ x \in \Omega$$

(*оператор Немыцкого*), *ограничен и непрерывен.*

Доказательство. Покажем сначала, что если функция $u$ измерима, то и функция $h(x, u(x))$ измерима. Представим с этой целью функцию $u$ как равномерный предел последовательности простых (ступенчатых) функций $u_k(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_j \chi_j(x)$, где $\chi_j$ — характеристические функции измеримых множеств, образующих разбиение области $\Omega$, $c_j$ — постоянные. Ясно, что каждая из функций $h(x, u_k(x)) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} h(x, c_j)\chi_j(x)$ измерима. Вследствие непрерывности функции $h$ по второму аргументу имеем $h(x, u(x)) = \lim\limits_{k\to\infty} h(x, u_k(x))$ п. в. на $\Omega$. Поэтому функция $h(x, u(x))$ измерима. Пусть, далее, $u \in L_p(\Omega)$. Тогда

$$\int\limits_{\Omega} |h(x, u(x))|^q dx \leqslant \int\limits_{\Omega} |c_1 + c_2|u(x)|^{p-1}|^q dx \leqslant \\ \leqslant 2^{q/p} \int\limits_{\Omega} (c_1^q + c_2^q |u(x)|^p)\, dx,$$

т. е. функция $h$ определяет ограниченный оператор $A$, действующий из $L_p(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$. Докажем непрерывность этого оператора. Пусть последовательность функций $u_m \in L_p(\Omega)$ сходится к $u \in L_p(\Omega)$. Тогда любая ее подпоследовательность фундаментальна, и, следовательно. содержит такую подпоследовательность $\{u_{m_k}\}$, что $\|u_{m_{k+1}} - u_{m_k}\|_{L_p(\Omega)} \leqslant 1/2^k$, т. е. числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|u_{m_{k+1}} - u_{m_k}\|_{L_p(\Omega)}$$

является сходящимся. Тем более, сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|u_{m_{k+1}} - u_{m_k}\|_{L_1(\Omega)},$$

но тогда по теореме Б. Леви ряд $|u_{m_1}(x)| + \sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_{m_{k+1}}(x) - u_{m_k}(x)|$ сходится почти всюду на $\Omega$, следовательно, сходится (абсолютно) и ряд $u_{m_1}(x) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (u_{m_{k+1}}(x) - u_{m_k}(x))$. Таким образом, последовательность функций $\{u_{m_k}\}$ сходится к $u$ почти всюду и, кроме того, очевидно, что для любого члена этой последовательности справедлива оценка

$$|u_{m_k}(x)| \leqslant |u_{m_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |u_{m_{k+1}}(x) - u_{m_k}(x)| = g(x) \in L_p(\Omega).$$

Тогда $|h(x, u_{m_k}(x))| \leqslant c_1 + c_2|u_{m_k}(x))|^{p-1} \leqslant c_1 + c_2|g(x))|^{p-1}$, и на основании теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем

$$\int\limits_{\Omega} |h(x, u(x)) - h(x, u_{m_k}(x)|^q dx \to 0 \quad \text{при } k \to \infty. \tag{1.1}$$

Выполненные рассуждения показывают, что любая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$ содержит подпоследовательность, для которой выполнено предельное соотношение (1.1), а это означает, что оно выполнено и для всей последовательности $\{u_m\}$. $\square$

Непосредственным обобщением теоремы 1.1 является

**Теорема 1.2.** *Пусть вещественная функция*

$$h(x, \xi),\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ \xi \in \mathbb{R}^m,\ m \geqslant 1,$$

*измерима по $x$ при любом $\xi \in \mathbb{R}^m$ и непрерывна по $\xi$ для почти всех $x \in \Omega$. Пусть, далее, выполнено неравенство*

$$|h(x, \xi)| \leqslant c_1 + c_2|\xi|^{p-1},\ x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^m,\ p > 1, \tag{1.2}$$

*где $c_1, c_2 = \mathrm{const} > 0$. Тогда функция $h(x, u_1(x), \ldots, u_m(x))$ при любых $u_i \in L_p(\Omega)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, принадлежит $L_q(\Omega)$, $1/p + 1/q = 1$. Более того, порождаемый ей оператор ограничен и непрерывен как оператор, действующий из $[L_p(\Omega)]^m$ в $L_q(\Omega)$.*

**2. Уравнения с сильно монотонным оператором.** Естественным обобщением задачи (2.2), (2.6), 1, является задача Дирихле для квазилинейного уравнения:

$$-\operatorname{div} a(x, u, \nabla u) + a_0(x, u, \nabla u) = f, \quad x \in \Omega, \tag{2.1}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{2.2}$$

Здесь $a = (a_1(x, \xi_0, \xi), a_2(x, \xi_0, \xi), \ldots, a_n(x, \xi_0, \xi))$, $a_0 = a_0(x, \xi_0, \xi)$, $a_i(x, \xi_0, \xi)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, — заданные функции переменных $x \in \Omega$, $\xi_0 \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, измеримые по $x$ и непрерывные по $\xi_0$, $\xi$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$|\bar{a}(x, \bar{\xi}) - \bar{a}(x, \bar{\zeta})| \leqslant c_1 |\bar{\xi} - \bar{\zeta}| \quad \forall\, \bar{\xi}, \bar{\zeta} \in \mathbb{R}^{n+1},\ x \in \Omega, \tag{2.3}$$

$\bar{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, $\bar{\xi} = (\xi_0, \xi)$,

$$\big(\bar{a}(x, \bar{\xi}) - \bar{a}(x, \bar{\zeta})\big) \cdot (\bar{\xi} - \bar{\zeta}) \geqslant c_0 |\bar{\xi} - \bar{\zeta}|^2 \quad \forall\, \bar{\xi}, \bar{\zeta} \in \mathbb{R}^{n+1},\ x \in \Omega, \tag{2.4}$$

$c_0, c_1 = \mathrm{const} > 0$.

Условие (2.3) — условие липшиц-непрерывности векторного поля $\bar{a}(x, \bar{\xi})$, условие (2.4) принято называть условием *сильной монотонности* векторного поля $\bar{a}(x, \bar{\xi})$.

Для упрощения записей всюду в дальнейшем будем считать, что

$$\bar{a}(x, 0) = 0 \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{2.5}$$

Замечание 2.1. В случае, когда уравнение (2.1) линейно, т. е. $\bar{a}(x, \bar{\xi}) = A(x)\bar{\xi}$, где $A(x)$ — квадратная матрица, условие (2.3) означает принадлежность коэффициентов уравнения пространству $L_\infty(\Omega)$, а условие (2.4) — равномерную по $x$ положительную определенность матрицы $A(x)$, т. е. условие, более сильное, чем эллиптичность уравнения.

Будем предполагать, что $f \in L_2(\Omega)$. Под обобщенным решением задачи (2.1), (2.2) будем понимать функцию $u$ из пространства $H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\boldsymbol{a}(u, v) \equiv \int\limits_\Omega (a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla v + a_0(x, u, \nabla u) v)\, dx = \\ = \int\limits_\Omega f v\, dx \equiv l(v) \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.6}$$

Используя условия (2.5), (2.3) и неравенство Коши — Буняковского, получим

$$|\boldsymbol{a}(u,v)| \leqslant c_1 \int\limits_{\Omega} ((|u| + |\nabla u|)|\nabla v| + (|u| + |\nabla u|)|v|)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant c\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, u,v \in H_0^1(\Omega),$$

т. е. при любом фиксированном $u \in H_0^1(\Omega)$ форма $\mathbf{a}(u,v)$ — линейный, ограниченный функционал на $H_0^1(\Omega)$, а это означает, что существует оператор $\mathbf{A} : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$, определяемый тождеством

$$(\mathbf{A}u, v)_{H^1(\Omega)} = \mathbf{a}(u,v) \quad \forall\, u,v \in H_0^1(\Omega).$$

Интегральное тождество (2.6) эквивалентно уравнению

$$\mathbf{A}u = \mathbf{f}, \tag{2.7}$$

где $\mathbf{f} \in H_0^1(\Omega)$ однозначно определяется соотношением

$$(\mathbf{f}, v)_{H^1(\Omega)} = l(v) \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Элементарно доказывается

**Теорема 2.1.** *Пусть выполнены условия* (2.3), (2.4). *Тогда оператор* $\mathbf{A}$ *сильно монотонен и липшиц-непрерывен, т. е.*

$$(\mathbf{A}u - \mathbf{A}v, u - v)_{H^1(\Omega)} \geqslant c_0\|u - v\|^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, u,v \in H_0^1(\Omega),$$

$$\|\mathbf{A}u - \mathbf{A}v\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_1\|u - v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, u,v \in H_0^1(\Omega).$$

Таким образом (см. теорему 4.1, с. 19), уравнение (2.7) однозначно разрешимо при любой правой части $\mathbf{f} \in H_0^1(\Omega)$ и, следовательно, задача (2.1), (2.2) однозначно разрешима при любой правой части $f \in L_2(\Omega)$.

Из этой же теоремы вытекает, что решение уравнения (2.7) может быть построено при помощи итерационного процесса

$$u^{k+1} = u^k - \tau(\mathbf{A}u^k - \mathbf{f}), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{2.8}$$

сходящегося при любом начальном приближении $u^0 \in H_0^1(\Omega)$, если $0 < \tau < 2c_0/c_1^2$.

Перепишем соотношение (2.8) в виде

$$\boldsymbol{b}(u^{k+1}, v) = \boldsymbol{b}(u^k, v) - \tau(\boldsymbol{a}(u^k, v) - l(v)), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где
$$\boldsymbol{b}(u,v) = \int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall\, u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Таким образом, отыскание $u^{k+1}$ по известному $u^k$ сводится к построению обобщенного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона:
$$-\Delta u^{k+1} = F_k, \quad x \in \Omega,$$
$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma,$$

где
$$F_k = -\Delta u^k - \tau \left( -\operatorname{div} a(x,u,\nabla u^k) + a_0(x,u,\nabla u^k) - f \right),$$
$$\Delta u = \partial^2 u/\partial x_1^2 + \cdots + \partial^2 u/\partial x_n^2.$$

**3. Уравнения с монотонным оператором. Метод регуляризации.** Ослабим теперь условия на вектор-функцию $\bar{a}$, а именно, условие сильной монотонности заменим *условиями монотонности*:
$$\left(\bar{a}(x,\bar{\xi}) - \bar{a}(x,\bar{\zeta})\right) \cdot (\bar{\xi} - \bar{\zeta}) \geqslant 0 \quad \forall\, \bar{\xi}, \bar{\zeta} \in \mathbb{R}^{n+1}, x \in \Omega, \tag{3.1}$$

и *коэрцитивности*:
$$\bar{a}(x,\bar{\xi}) \cdot \bar{\xi} \geqslant c_0 |\xi|^2 - c_1 \quad \forall\, \bar{\xi} \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega, \ c_0, c_1 = \mathrm{const} > 0. \tag{3.2}$$

**Теорема 3.1.** *Пусть выполнены условия* (2.3), (3.1), (3.2). *Тогда задача* (2.1), (2.2) *имеет хотя бы одно обобщенное решение при любой правой части* $f \in L_2(\Omega)$.

Доказательство. Как и выше, сведем задачу к операторному уравнению вида (2.7). В этом случае, однако, оператор $\mathbf{A}$ будет вместо условия сильной монотоннности удовлетворять лишь условию монотонности:
$$(\mathbf{A}u - \mathbf{A}v, u - v)_{H^1(\Omega)} \geqslant 0 \quad \forall\, u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.3}$$

С использованием условия (3.2) элементарно доказывается неравенство коэрцитивности,
$$(\mathbf{A}u, u)_{H^1(\Omega)} \geqslant c_0 \|u\|^2_{H^1(\Omega)} - \widetilde{c}_1 \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega), \tag{3.4}$$

для оператора $\mathbf{A}$. Здесь $\widetilde{c}_1 = c_1 \operatorname{mes}(\Omega)$. В этом случае для исследования разрешимости уравнения (2.7) будем использовать метод регуляризации, т. е. наряду с уравнением (2.7) будем рассматривать уравнение

$$\mathbf{A}_\varepsilon u \equiv \mathbf{A}u + \varepsilon u = \mathbf{f}, \tag{3.5}$$

где $\varepsilon > 0$. Нетрудно видеть, что

$$(\mathbf{A}_\varepsilon u - \mathbf{A}_\varepsilon v, u - v)_{H^1(\Omega)} \geqslant \varepsilon \|u - v\|^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, u, v \in H^1_0(\Omega), \tag{3.6}$$

$$\|\mathbf{A}_\varepsilon u - \mathbf{A}_\varepsilon v\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_1 \|u - v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, u, v \in H^1_0(\Omega), \tag{3.7}$$

следовательно, при любом $\varepsilon > 0$ уравнение (3.5) имеет единственное решение $u_\varepsilon$. Умножая обе части уравнения (3.5) скалярно на $u_\varepsilon$, получим, что $(\mathbf{A}u_\varepsilon, u_\varepsilon)_{H^1(\Omega)} + \varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon)_{H^1(\Omega)} = (\mathbf{f}, u_\varepsilon)_{H^1(\Omega)}$, откуда вследствие (3.4) вытекает оценка

$$c_0 \|u_\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega)} + \varepsilon \|u_\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant \|\mathbf{f}\|_{H^1(\Omega)} \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} + \widetilde{c}_1.$$

Применяя теперь неравенство (2.1), с. 22, получим

$$c_0 \|u_\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega)} + \varepsilon \|u_\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant \frac{1}{2\delta} \|\mathbf{f}\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{\delta}{2} \|u_\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega)} + \widetilde{c}_1$$

для любого $\delta > 0$. Полагая $\delta = c_0$, приходим к равномерной по $\varepsilon$ оценке:

$$\|u_\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant |\mathbf{f}\|^2_{H^1(\Omega)}/c_0^2 + 2\widetilde{c}_1/c_0. \tag{3.8}$$

Вследствие слабой компактности множества, ограниченного в пространстве $H^1_0(\Omega)$, отсюда вытекает существование последовательности $\varepsilon_k \to 0$ и функции $u \in H^1_0(\Omega)$ таких, что $u_{\varepsilon_k} \rightharpoonup u$.

Покажем, что $u$ — решение уравнения (2.7). Используя условие (2.5), условие (2.3) при $\zeta = 0$, а также оценку (3.8), получим

$$\int\limits_\Omega |\bar{a}(x, u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k})|^2 dx \leqslant c \int\limits_\Omega (u^2_{\varepsilon_k} + |\nabla u_{\varepsilon_k}|^2) dx \leqslant c,$$

откуда вследствие слабой компактности ограниченного множества в пространстве $L_2(\Omega)$ вытекает существование подпоследовательности $\varepsilon_{k_n}$ последовательности $\varepsilon_k$ и функций $b_0$, $b_1, \ldots, b_n$ из $L_2(\Omega)$ таких, что

$$a_i(x, u_{\varepsilon_{k_n}}, \nabla u_{\varepsilon_{k_n}}) \rightharpoonup b_i, \ i = 0, 1, \ldots, n. \tag{3.9}$$

Для упрощения записей в дальнейшем подпоследовательность $\varepsilon_{k_n}$ будем обозначать через $\varepsilon_k$. Запишем интегральное тождество, соответствующее уравнению (3.5), при $\varepsilon = \varepsilon_k$:

$$\int\limits_\Omega \big(a(x, u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}) \cdot \nabla v + a_0(x, u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}) v\big)\, dx + \varepsilon_k \int\limits_\Omega \nabla u_{\varepsilon_k} \cdot \nabla v\, dx = \\ = \int\limits_\Omega f v\, dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.10)$$

Устремляя здесь $\varepsilon_k$ к нулю, получим вследствие (3.9) и априорной оценки (3.8), что

$$\int\limits_\Omega (b \cdot \nabla v + b_0 v)\, dx = \int\limits_\Omega f v\, dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \quad (3.11)$$

где $b = (b_1, \ldots, b_n)$.

Доказательство теоремы, очевидно, будет завершено, если мы установим, что

$$\int\limits_\Omega (b \cdot \nabla v + b_0 v)\, dx = \\ = \int\limits_\Omega \big(a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla v + a_0(x, u, \nabla u) v\big)\, dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Используя условие монотонности (3.1), можем написать, что для любого $w$ из $H_0^1(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega (a(x, u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}) - a(x, w, \nabla w)) \cdot \nabla (u_{\varepsilon_k} - w) dx + \\ + \varepsilon_k \int\limits_\Omega \nabla (u_{\varepsilon_k} - w) \cdot \nabla (u_{\varepsilon_k} - w) dx + \\ + \int\limits_\Omega ((a_0(x, u_{\varepsilon_k}, \nabla u_{\varepsilon_k}) - a_0(x, w, \nabla w))(u_{\varepsilon_k} - w)) dx \geqslant 0. \quad (3.12)$$

Учтем теперь, что вследствие (3.10) справедливо равенство

$$\int\limits_\Omega \big(a(x,u_{\varepsilon_k},\nabla u_{\varepsilon_k})\cdot\nabla u_{\varepsilon_k}+a_0(x,u_{\varepsilon_k},\nabla u_{\varepsilon_k})u_{\varepsilon_k}\big)dx+$$
$$+\,\varepsilon_k\int\limits_\Omega \nabla u_{\varepsilon_k}\cdot\nabla u_{\varepsilon_k}dx=\int\limits_\Omega f u_{\varepsilon_k}dx. \quad (3.13)$$

Поэтому из (3.12) вытекает, что

$$\int\limits_\Omega (fu_{\varepsilon_k}-a(x,u_{\varepsilon_k},\nabla u_{\varepsilon_k})\cdot\nabla w-\varepsilon_k\nabla u_{\varepsilon_k}\cdot\nabla w-$$
$$-\,a_0(x,u_{\varepsilon_k},\nabla u_{\varepsilon_k})w)dx-$$
$$-\int\limits_\Omega \big(a(x,w,\nabla w)\cdot\nabla(u_{\varepsilon_k}-w)+a_0(x,w,\nabla w)(u_{\varepsilon_k}-w)\big)\,dx-$$
$$-\,\varepsilon_k\int\limits_\Omega \nabla w\cdot\nabla(u_{\varepsilon_k}-w)dx\geqslant 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon_k\to 0$, получим

$$\int\limits_\Omega (fu-b\cdot\nabla w-b_0w)dx-$$
$$-\int\limits_\Omega \big(a(x,w,\nabla w)\cdot\nabla(u-w)+a_0(x,w,\nabla w)(u-w)\big)\,dx\geqslant 0. \quad (3.14)$$

Вследствие (3.11)

$$\int\limits_\Omega fu dx=\int\limits_\Omega (b\cdot\nabla u+b_0u)\,dx,$$

поэтому неравенство (3.14) принимает вид

$$\int\limits_\Omega (b-a(x,w,\nabla w))\cdot\nabla(u-w)\,dx+$$
$$+\int\limits_\Omega (b_0-a_0(x,w,\nabla w))(u-w))\,dx\geqslant 0.$$

Фиксируем произвольно функцию $v \in H_0^1(\Omega)$ и пусть $w = u - \alpha v$, где $\alpha > 0$. Тогда

$$\int_\Omega (b - a(x, u - \alpha v, \nabla(u - \alpha v))) \cdot \nabla v \, dx + \\ + \int_\Omega (b_0 - a_0(x, u - \alpha v, \nabla(u - \alpha v)))v \, dx \geqslant 0.$$

Устремляя здесь $\alpha$ к нулю, получим

$$\int_\Omega \big((b - a(x, u, \nabla u)) \cdot \nabla v + (b_0 - a(x, u, \nabla u))v\big) \, dx \geqslant 0.$$

Заменяя функцию $v$ на $-v$, очевидно, получим то же самое неравенство, следовательно,

$$\int_\Omega \big((b - a(x, u, \nabla u)) \cdot \nabla v + (b_0 - a_0(x, u, \nabla u))v\big) dx = 0 \ \forall v \in H_0^1(\Omega). \ \square$$

**4. Уравнения с монотонной главной частью. Метод Галеркина.** В этом пункте рассматривается задача Дирихле:

$$-\operatorname{div} a(x, \nabla u) + a_0(x, u) = f, \quad x \in \Omega, \tag{4.1}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{4.2}$$

Здесь $a = (a_1(x, \xi), a_2(x, \xi), \ldots, a_n(x, \xi))$, $a_i(x, \xi)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, есть заданные функции переменных $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $a_0$ — функция переменных $x \in \Omega$, $\xi_0 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие следующим условиям: функции $a_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, измеримы по $x$ при любом $\xi \in \mathbb{R}^n$ и непрерывны по $\xi$ для почти всех $x \in \Omega$; функция $a_0$ измерима по $x$ при любом $\xi_0 \in \mathbb{R}$ и непрерывна по $\xi_0$ для почти всех $x \in \Omega$;

$$|a(x, \xi)| \leqslant c_1(1 + |\xi|) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ x \in \Omega, \tag{4.3}$$

$$|a_0(x, \xi_0)| \leqslant c_2(1 + |\xi_0|) \quad \forall \xi_0 \in \mathbb{R}, \ x \in \Omega, \tag{4.4}$$

$$(a(x, \xi) - a(x, \zeta)) \cdot (\xi - \zeta) \geqslant 0 \quad \forall \xi, \zeta \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega, \tag{4.5}$$

$$a(x, \xi) \cdot \xi + a_0(x, \xi_0)\xi_0 \geqslant c_3|\xi|^2 - c_4 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \xi_0 \in \mathbb{R}, \ x \in \Omega, \tag{4.6}$$

$c_1, \ldots, c_4 = \mathrm{const} > 0$.

Как обычно, обобщенным решением задачи (4.1), (4.2) назовем функцию $u$ из $H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega} (a(x, \nabla u) \cdot \nabla v + a_0(x, u)v)\, dx = \int\limits_{\Omega} fv\, dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.7)$$

**Теорема 4.1.** *Пусть выполнены сформулированные выше условия. Тогда задача* (4.1), (4.2) *имеет хотя бы одно обобщенное решение при любой правой части* $f \in L_2(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — полная система функций в пространстве $H_0^1(\Omega)$. Будем считать, что любые первые $m$ функций этой системы линейно независимы. Приближенное решение задачи (4.1), (4.2) по *методу Галеркина* строится как функция вида

$$u_m(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i(x),$$

где вектор постоянных $c = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ определятся путем решения системы уравнений

$$g_k(c) \equiv \int\limits_{\Omega} (a(x, \nabla u_m) \cdot \nabla \varphi_k + a_0(x, u_m)\varphi_k - f\varphi_k)\, dx = 0, \quad (4.8)$$

$k = 1, 2, \ldots, m$.

Покажем, что система (4.8) имеет хотя бы одно решение. При этом будем использовать лемму 1.4, с. 93. Пусть $g(c) = (g_1(c), \ldots, g_m(c))$. Тогда, как нетрудно подсчитать,

$$g(c) \cdot c = \int\limits_{\Omega} (a(x, \nabla u_m) \cdot \nabla u_m + a_0(x, u_m)u_m - fu_m)\, dx, \quad (4.9)$$

откуда на основании (4.6) получаем, что

$$g(c) \cdot c \geqslant c_3 \int\limits_{\Omega} |\nabla u_m|^2 dx - c_4 \operatorname{mes}(\Omega) - \int\limits_{\Omega} fu_m dx.$$

Применяя неравенства Коши — Буняковского и Фридрихса, можем написать

$$g(c) \cdot c \geqslant c_3 \|\nabla u_m\|^2_{L_2(\Omega)} - c_\Omega^{1/2} \|f\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla u_m\|_{L_2(\Omega)} - \\ - c_4 \,\mathrm{mes}\,(\Omega). \quad (4.10)$$

Вследствие линейной независимости функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ выражение $\|\nabla u_m\|_{L_2(\Omega)}$ определяет норму на $m$-мерном пространстве векторов $(c_1, \ldots, c_m)$. Поэтому оценка (4.10) обеспечивает существование $r > 0$ такого, что $g(c) \cdot c > 0$ при $|c| \geqslant r$. Функции $a_i(x, \xi)$, $a_0(x, \xi_0)$ вследствие (4.3), (4.4) порождают непрерывные операторы, действующие из $[L_2(\Omega)]^n$ и $L_2(\Omega)$, соответственно, в $L_2(\Omega)$. Значит, как нетрудно убедиться, функции $g_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, непрерывны. Таким образом, все условия леммы 1.4, с. 93, выполнены, и система уравнений (4.8) имеет хотя бы одно решение.

Если $u_m$ — приближенное решение по методу Галеркина, то вследствие неравенства (4.10) с учетом того, что $g(c) = 0$, имеем

$$c_3 \|u_m\|_1^2 \leqslant c_\Omega^{1/2} \|f\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla u_m\|_{L_2(\Omega)} + c_4 \,\mathrm{mes}\,(\Omega),$$

откуда, применяя неравенство Коши с $\varepsilon$ (ср. с получением оценки (3.8)), выводим, что $\|\nabla u_m\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C$, где $C$ — не зависящая от $m$ постоянная. Последовательность приближений по методу Галеркина $u_m$, $m = 1, 2, \ldots$, содержит, таким образом, слабо сходящуюся в пространстве $H_0^1(\Omega)$ подпоследовательность, которая по теореме Реллиха сильно сходится в пространстве $L_2(\Omega)$.

Как обычно, чтобы не вводить новых обозначений, будем считать, что существует функция $u \in H_0^1(\Omega)$ такая, что

$$u_m \rightharpoonup u \text{ в } H_0^1(\Omega), \; u_m \to u \text{ в } L_2(\Omega). \quad (4.11)$$

Покажем, что $u$ — обобщенное решение задачи (4.1), (4.2).

Точно так же, как и в предыдущем пункте, можно установить, что существуют функции $b_1, \ldots, b_n \in L_2(\Omega)$ такие, что

$$a_i(x, \nabla u_m(x)) \rightharpoonup b_i, \; i = 1, \ldots, n, \text{ в } L_2(\Omega). \quad (4.12)$$

Функция $a_0(x, \xi_0)$ порождает оператор Немыцкого, действующий из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Поэтому

$$a_0(x, u_m(x)) \to a_0(x, u(x)) \text{ в } L_2(\Omega). \quad (4.13)$$

Фиксируем теперь некоторое целое положительное $k$ и перейдем к пределу в равенстве (4.8), устремляя $m \to \infty$. С учетом предельных соотношений (4.12), (4.13) получим, что

$$\int\limits_\Omega (b \cdot \nabla \varphi_k + a_0(x,u)\varphi_k - f\varphi_k)\, dx = 0$$

для любого $k = 1, 2, \ldots$, откуда вследствие полноты системы функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ вытекает, что

$$\int\limits_\Omega (b \cdot \nabla v + a_0(x,u)v - fv)\, dx = 0 \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \tag{4.14}$$

или

$$\int\limits_\Omega b \cdot \nabla v\, dx = \int\limits_\Omega hv\, dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \tag{4.15}$$

где $h = f - a_0(x,u)$. Осталось показать, что

$$\int\limits_\Omega b \cdot \nabla v\, dx = \int\limits_\Omega a(x, \nabla u) \cdot \nabla v\, dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.16}$$

Вследствие условия монотонности (4.5)

$$\int\limits_\Omega (a(x,\nabla u_m) - a(x,\nabla w)) \cdot \nabla(u_m - w)\, dx \geqslant 0 \quad \forall\, w \in H_0^1(\Omega). \tag{4.17}$$

Используя равенство (4.9), с учетом того, что $g(c) = 0$, получим, что для любого $m = 1, 2, \ldots$

$$\int\limits_\Omega a(x, \nabla u_m) \cdot \nabla u_m\, dx = \int\limits_\Omega h_m u_m\, dx, \tag{4.18}$$

где $h_m = f - a_0(x, u_m)$. С помощью (4.18) преобразуем (4.17) к виду

$$\int\limits_\Omega \big(h_m u_m - a(x,\nabla u_m) \cdot \nabla w - a(x, \nabla w) \cdot \nabla(u_m - w)\big)\, dx \geqslant 0.$$

Переходя здесь к пределу при $m \to \infty$ с учетом (4.11)–(4.13), получаем

$$\int\limits_\Omega (hu - b \cdot \nabla w - a(x,\nabla w) \cdot \nabla(u - w))\, dx \geqslant 0,$$

и, наконец, используя (4.15), приходим к неравенству

$$\int_\Omega (b - a(x, \nabla w)) \cdot \nabla(u - w)\, dx \geqslant 0 \quad \forall\, w \in H_0^1(\Omega). \tag{4.19}$$

Положим $w = u - \lambda v$, где $v \in H_0^1$, $\lambda > 0$. Тогда

$$\int_\Omega (b - a(x, \nabla(u - \lambda v))) \cdot \nabla v\, dx \geqslant 0.$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим

$$\int_\Omega (b - a(x, \nabla(u))) \cdot \nabla v\, dx \geqslant 0.$$

Заменяя здесь $v$ на $-v$, будем иметь:

$$\int_\Omega (b - a(x, \nabla u)) \cdot \nabla v\, dx = 0 \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$

т. е. (4.16) установлено. □

**5. Слабо нелинейные уравнения. Метод неподвижной точки.** В этом пункте рассматривается задача Дирихле для слабо нелинейного эллиптического уравнения:

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) + a_0(x, u, \nabla u) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{5.1}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{5.2}$$

Предполагается, что выполнены условия эллиптичности (2.3), с. 104,

$$a_{ij} \in C^1(\bar\Omega),\ i, j = 1, \ldots, n,\ \Gamma \in C^2,\ f \in L_2(\Omega).$$

Функция $a_0(x, \xi_0, \xi)$, $x \in \Omega$, $\xi_0 \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ предполагается измеримой по $x$ и непрерывной по $\xi_0$, $\xi$, причем

$$|a_0(x, \xi_0, \xi)| \leqslant \alpha_0(1 + |\xi_0| + |\xi|),\ \alpha_0 = \mathrm{const} > 0. \tag{5.3}$$

Обобщенным решением задачи (5.1), (5.2) назовем функцию $u$ из пространства $H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_\Omega (A\nabla u \cdot \nabla v + a_0(x, u, \nabla u)v)\, dx = \int_\Omega fv\, dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{5.4}$$

**Теорема 5.1.** *Пусть выполнены перечисленные выше условия. Тогда при достаточно малой постоянной* $\alpha_0$ *задача* (5.1), (5.2) *имеет хотя бы одно обобщенное решение* $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Доказательство. Сведем задачу (5.1), (5.2) к операторному уравнению с нелинейным вполне непрерывным оператором, действующим в пространстве $H_0^1(\Omega)$.

Вследствие условия (5.3) функция $a_0(x, \xi_0, \xi)$ порождает оператор Немыцкого, непрерывный из $(L_2(\Omega))^{n+1}$ в $L_2(\Omega)$ (см. с. 144). Поэтому оператор

$$\mathbf{A}_0 u = f(x) - a_0(x, u, \nabla u)$$

можно трактовать как нелинейный непрерывный оператор, действующий из $H_0^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Далее, как установлено в п. 3, 1, для любой функции $g \in L_2(\Omega)$ существует единственная функция $u \in H_0^1(\Omega)$ такая, что

$$\int\limits_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int\limits_{\Omega} gv \, dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \tag{5.5}$$

причем

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c\|g\|_{L_2(\Omega)},$$

где постоянная $c$ не зависит от выбора $g$.

Указанное соответствие определяет, таким образом, непрерывный линейный оператор $\mathbf{B} : L_2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$, и задача (5.4) может быть переписана в эквивалентном виде:

$$u = \mathbf{A}u, \tag{5.6}$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{A}_0$ — непрерывный нелинейный оператор, действующий из $H_0^1(\Omega)$ в $H_0^1(\Omega)$.

Покажем, что оператор $\mathbf{A}$ вполне непрерывен. Оператор $\mathbf{A}_0$ вследствие условия (5.3) переводит всякое ограниченное множество пространства $H_0^1(\Omega)$ в ограниченное множество пространства $L_2(\Omega)$. Поэтому достаточно убедиться в полной непрерывности оператора $\mathbf{B}$. Как показано в п. 3, §1, с. 129, для решения задачи (5.5) справедлива оценка

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant C\|g\|_{L^2(\Omega)},$$

где $C$ — постоянная, зависящая только от $\Omega$ и матрицы $A$. Таким образом, оператор $\mathbf{B}$ переводит всякое ограниченное множество пространства $L^2(\Omega)$ в ограниченное множество пространства $H^2(\Omega)$, но всякое ограниченное множество пространства $H^2(\Omega)$ в силу теоремы Реллиха компактно в пространстве $H^1(\Omega)$, т. е. оператор $\mathbf{B}$ вполне непрерывен.

Покажем, далее, что для любого решения уравнения

$$u = \lambda \mathbf{A} u, \quad \lambda \in [0,1], \tag{5.7}$$

при достаточно малых $\alpha_0 > 0$ справедлива оценка $\|u\|_1 \leqslant c$, где постоянная $c$ не зависит от $\lambda$. По определению оператора $\mathbf{A}$ для любого решения уравнения (5.7) справедливо интегральное тождество

$$\int\limits_\Omega (A\nabla u \cdot \nabla v + \lambda a_0(x,u,\nabla u)v)\,dx = \lambda \int\limits_\Omega fv\,dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{5.8}$$

Полагая здесь $v = u$, получим

$$\int\limits_\Omega A\nabla u \cdot \nabla u\,dx = -\lambda \int\limits_\Omega (-a_0(x,u,\nabla u)u - fu)\,dx.$$

Используя теперь положительную определенность матрицы $A$, условие (5.3), а также неравенства Коши — Буняковского и Фридрхса, будем иметь

$$c_0\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \lambda(\alpha_0 c_1\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} + c_2\|f\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}) \leqslant \\ \leqslant \alpha_0 c_1\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} + c_2\|f\|_{L_2(\Omega)}\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)},$$

где постоянные $c_1, c_2$ зависят лишь от области $\Omega$, и, следовательно, если $c_0 - \alpha_0 c_1 > 0$, то

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_3\|f\|_{L_2(\Omega)},$$

где $c_3$ — постоянная, не зависящая от $\lambda$. Таким образом, для оператора $\mathbf{A}$ выполнены все условия теоремы Шефера, с. 95, следовательно, уравнение (5.6) имеет хотя бы одно решение. Заметим, наконец, что для решения уравнения (5.6) выполнено интегральное тождество (5.4), и, поскольку $f - a_0(x,u,\nabla u) \in L_2(\Omega)$, то в силу теоремы 3.1, с. 129, $u \in H^2(\Omega)$. $\square$

Глава 3
# ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

## § 1. Задача на собственные значения для оператора Лапласа в прямоугольной области

**1. Постановка задачи.** Изучается простейшая задача на собственные значения:

$$-\Delta u = \lambda u, \quad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{1.2}$$

Здесь $\Omega = \{0 < x_1 < l_1,\ 0 < x_2 < l_2\}$ — прямоугольник, $\Gamma$ — его граница, $\Delta u = \partial^2 u/\partial x_1^2 + \partial^2 u/\partial x_2^2$ — двумерный оператор Лапласа.

**2. Решение задачи.** Задача легко решается методом разделения переменных (см., например, [40, с. 422]). Собственные функции задачи:

$$u_{k_1k_2}(x_1, x_2) = \frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}} \sin\frac{\pi k_1 x_1}{l_1} \sin\frac{\pi k_2 x_2}{l_2}, \quad k_1, k_2 = 1, 2, \ldots$$

Им соответствуют собственные числа

$$\lambda_{k_1k_2} = \left(\frac{\pi k_1}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi k_2}{l_2}\right)^2, \quad k_1, k_2 = 1, 2, \ldots \tag{2.1}$$

Нетрудно подсчитать, что

$$\int\limits_{\Omega} u_{j_1j_2} u_{k_1k_2} dx = \begin{cases} 0, & (j_1 - k_1)^2 + (j_2 - k_2)^2 \neq 0, \\ 1, & (j_1 - k_1)^2 + (j_2 - k_2)^2 = 0, \end{cases}$$

т. е. собственные функции задачи (1.1), (1.2) образуют ортонормированную в пространстве $L_2(\Omega)$ систему. Как известно, эта система полна в пространстве $L_2(\Omega)$.

Равным собственным числам могут соответствовать различные собственные функции. Так, при $l_1 = l_2 = l$ собственным числам

$$\lambda_{12} = (\pi^2 + (2\pi)^2)/l^2 = \lambda_{21}$$

соответствуют различные собственные функции:

$$u_{12}(x_1, x_2) = \frac{2}{l} \sin \frac{\pi x_1}{l} \sin \frac{2\pi x_2}{l}, \; u_{21}(x_1, x_2) = \frac{2}{l} \sin \frac{2\pi x_1}{l} \sin \frac{\pi x_2}{l}.$$

Отметим, что минимальному собственному числу $\lambda_{11}$ соответствует лишь одна собственная функция $u_{11}$, и она не меняет знака в области $\Omega$.

**3. Асимптотика собственных чисел.** Занумеруем числа (2.1) в порядке неубывания:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots$$

Понятно, что $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Более того, справедливо асимптотическое представление

$$\lambda_k = \frac{4\pi}{l_1 l_2} k + o(k), \tag{3.1}$$

где $o(k)/k \to 0$ при $k \to \infty$.

Докажем оценку (3.1). Пусть $\mu > 0$ — заданное число. Обозначим через $M(\mu)$ количество чисел (2.1), не превосходящих $\mu$. Очевидно, что $M(\mu)$ равно количеству положительных целочисленных решений неравенства

$$\left(\frac{k_1}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{k_2}{l_2}\right)^2 \leqslant \frac{\mu}{\pi^2}. \tag{3.2}$$

Построим на плоскости переменных $x_1$, $x_2$ эллипс $B$, граница которого определяется уравнением

$$\frac{x_1^2}{l_1^2} + \frac{x_2^2}{l_2^2} = \frac{\mu}{\pi^2}\,.$$

Понятно, что $M(\mu)$ — это количество точек с положительными целочисленными координатами, принадлежащих первому квадранту эллипса $\bar{B}$ (см. рис. 1). Поставим в соответствие каждой такой точке ячейку сетки (единичный квадрат), лежащую левее и

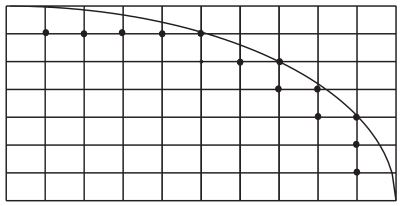

Рис. 1. К асимптотике собственных чисел

ниже указанной точки. Тогда $M(\mu)$ совпадет с площадью объединения всех этих ячеек, и, следовательно, $M(\mu) < \mathrm{mes}\,(B)/4$. Как известно, $\mathrm{mes}\,(B) = \pi ab$, где $a, b$ — полуоси эллипса $B$. Поэтому

$$M(\mu) < \frac{\mu l_1 l_2}{4\pi}. \tag{3.3}$$

Пусть теперь $S(\mu)$ — количество ячеек сетки, имеющих непустое пересечение с границей $B$, и вершины которых принадлежат первому квадранту $B$ (на рис. 1 эти вершины помечены). Ясно, что

$$M(\mu) + S(\mu) > \frac{\mu l_1 l_2}{4\pi}, \tag{3.4}$$

причем $S(\mu)$ не превосходит площади пограничной полоски конечной (не зависящей от $\mu$) ширины, т. е. $S(\mu) \leqslant cL(\mu)$, где $c = \mathrm{const} > 0$, $L(\mu)$ — длина границы эллипса. Как известно (см., например, [43, с. 176]), $L(\mu) = 4a\mathrm{E}(\varepsilon)$, где $\varepsilon = \sqrt{1-(b/a)^2}$ — эксцентриситет эллипса, $\mathrm{E}(\varepsilon)$ — полный эллиптический интеграл, следовательно,

$$S(\mu) \leqslant c_1\sqrt{\mu},\ c_1 = \mathrm{const} > 0. \tag{3.5}$$

Из неравенств (3.3)–(3.5) вытекает, что

$$M(\mu) = \frac{\mu l_1 l_2}{4\pi} - \theta c_1\sqrt{\mu}, \quad \theta \in [0,1], \tag{3.6}$$

или

$$\mu = \frac{4\pi}{l_1 l_2} M(\mu) + \theta c_2\sqrt{\mu},\ c_2 = \mathrm{const} > 0. \tag{3.7}$$

Вследствие (3.6) имеем

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{M(\mu)}{\mu} = \frac{l_1 l_2}{4\pi},$$

и тогда из (3.7) следует, что

$$\mu = \frac{4\pi}{l_1 l_2} M(\mu) + \theta c_2 \sqrt{\frac{\mu}{M(\mu)}} \sqrt{M(\mu)} = \frac{4\pi}{l_1 l_2} M(\mu) + o(M(\mu)). \quad (3.8)$$

Соотношение (3.8) есть просто другая форма записи (3.1).

Все вышеизложенное практически без изменений переносится на случай задачи на собственные значения для оператора Лапласа в $n$-мерном параллелепипеде $\Omega$. Оценка роста собственных значений при этом приобретает вид

$$\lambda_k = \frac{c}{\operatorname{mes}(\Omega)} k^{2/n} + o(k^{2/n}), \quad (3.9)$$

где $c$ — положительная постоянная, зависящая от $n$.

В следующем параграфе будет показано, что основные свойства собственных функций и собственных значений оператора Лапласа в прямоугольной области сохраняются и для более общих эллиптических операторов в областях произвольной формы.

## § 2. Собственные значения эллиптических операторов

**1. Постановка задачи.** В этом параграфе рассматриваются задачи на собственные значения для дифференциального оператора второго порядка

$$\mathcal{L}u = -\operatorname{div}(A\nabla u) + a_0 u, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Здесь $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, причем

$$A = A^T. \quad (1.2)$$

Предполагаются также выполненными условия эллиптичности

$$A(x)\xi \cdot \xi \geqslant c_0 \, |\xi|^2 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \ x \in \Omega, \quad c_0 = \text{const} > 0. \quad (1.3)$$

В дальнейшем будем предполагать, что

$$a_{ij}, \ a_0 \in L_\infty(\Omega). \quad (1.4)$$

При этих условиях на коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ естественно пользоваться понятием *обобщенной собственной функции.*

**Определение 1.1.** *Функция $u \in H_0^1(\Omega)$ называется обобщенной собственной функцией оператора $\mathcal{L}$ при граничном условии Дирихле, если $u \neq 0$ и существует $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что*

$$\int\limits_\Omega (A\,\nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv)\,dx = \lambda \int\limits_\Omega uv\,dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.5}$$

*Число $\lambda$ называется собственным числом оператора $\mathcal{L}$.*

Без ограничения общности можно считать, что

$$a_0 \geqslant 0 \text{ п. в. в } \Omega. \tag{1.6}$$

В самом деле, поскольку $a_0 \in L_\infty(\Omega)$, существует $m > 0$ такое, что $a_0 \geqslant -m$ п. в. в $\Omega$. Преобразуем тождество (1.5) к виду

$$\int\limits_\Omega (A\,\nabla u \cdot \nabla v + \widetilde{a}_0 uv)\,dx = \lambda' \int\limits_\Omega uv\,dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \tag{1.7}$$

где $\widetilde{a}_0 = a_0 + m \geqslant 0$,

$$\lambda' = \lambda + m. \tag{1.8}$$

Ясно, что если $u$ — собственная функция задачи (1.5), то $u$ — собственная функция задачи (1.7), и наоборот. Собственные числа этих задач связаны соотношением (1.8).

При выполнении условий (1.4)–(1.3), (1.6) билинейная форма

$$\boldsymbol{a}(u,v) = \int\limits_\Omega (A\,\nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv)\,dx$$

порождает скалярное произведение на пространстве $H_0^1(\Omega)$, эквивалентное исходному (доказать самостоятельно!). Это скалярное произведение будем называть энергетическим скалярным произведением и обозначать через $(\cdot,\cdot)_a$. Соответствующую норму $\|\cdot\|_a = (\cdot,\cdot)_a^{1/2}$ будем называть энергетической.

Если $u$ — собственная функция задачи (1.5), то соответствующее собственное значение можно вычислить по формуле

$$\lambda = \frac{(u,u)_a}{\|u\|^2}, \tag{1.9}$$

где $\|u\|^2 = (u,u)$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$. Функционал $R(v) = (v,v)_a/(v,v)$, $v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ принято называть *отношением Рэлея*.

Отметим некоторые простейшие свойства собственных чисел и собственных функций задачи (1.5).

1. Все собственные числа задачи (1.5) положительны. Справедливость этого утверждения сразу же следует из формулы (1.9).

2. Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — собственные числа задачи (1.5), то соответствующие им собственные функции $u_1, u_2$ ортогональны как в пространстве $L_2(\Omega)$, так и в смысле энергетического скалярного произведения, т. е. $(u_1, u_2) = 0$, $(u_1, u_2)_a = 0$. Действительно, из определения 1.1 вытекает, что

$$(u_1, u_2)_a = \lambda_1 (u_1, u_2), \tag{1.10}$$

$$(u_2, u_1)_a = \lambda_2 (u_2, u_1). \tag{1.11}$$

Вычитая почленно из равенства (1.10) равенство (1.11), получим, что

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(u_1, u_2) = 0;$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$, поэтому $(u_1, u_2) = 0$, откуда вследствие (1.10) вытекает, что $(u_1, u_2)_a = 0$.

Формула (1.9) показывает, что все собственные числа задачи (1.5) есть значения отношения Рэлея на соответствующих собственных функциях. Далее будет показано, что минимальное из собственных чисел можно найти, минимизируя отношение Рэлея на множестве $H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$.

**2. Вариационный метод исследования разрешимости задачи на собственные значения.**

**Теорема 2.1.** *Существует функция $u \in H_0^1(\Omega)$ такая, что*

$$\lambda = R(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega),\ v \neq 0} R(v). \tag{2.1}$$

*При этом $\lambda$ — собственное число задачи* (1.5)*, $u$ — соответствующая $\lambda$ собственная функция.*

Доказательство. Поскольку $R(v) \geqslant 0\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega),\ v \neq 0$, то существует число $\lambda \geqslant 0$ такое, что

$$\lambda = \inf_{v \in H_0^1(\Omega),\ v \neq 0} R(v), \tag{2.2}$$

и последовательность $\{\varphi_k\}$ функций из $H_0^1(\Omega)$ такая, что

$$\lim_{k \to \infty} R(\varphi_k) = \lambda. \tag{2.3}$$

Поскольку $R(\alpha v) = R(v)\ \forall\,\alpha \neq 0$, можно считать выполненными условия

$$\|\varphi_k\| = 1,\ \ k = 1, 2, \ldots \tag{2.4}$$

Покажем, что из последовательности $\{\varphi_k\}$ можно выбрать сходящуюся в пространстве $H_0^1(\Omega)$ подпоследовательность. Из соотношений (2.3), (2.4) вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty} \|\varphi_k\|_a^2 = \lambda, \tag{2.5}$$

поэтому последовательность $\|\varphi_k\|_a$ ограничена:

$$\|\varphi_k\|_a \leqslant c = \text{const},\ \ k = 1, 2, \ldots \tag{2.6}$$

По теореме Реллиха она компактна в $L_2(\Omega)$, т. е. из нее можно выбрать фундаментальную в пространстве $L_2(\Omega)$ подпоследовательность. Для упрощения записей для этой подпоследовательности сохраним прежнее обозначение, т. е. будем считать, что

$$\lim_{k,l\to\infty} \|\varphi_k - \varphi_l\| = 0. \tag{2.7}$$

Покажем, что последовательность $\{\varphi_k\}$ фундаментальна и в пространстве $H_0^1(\Omega)$. Нетрудно убедиться, что

$$\left\|\frac{\varphi_k - \varphi_l}{2}\right\|_a^2 + \left\|\frac{\varphi_k + \varphi_l}{2}\right\|_a^2 = \frac{1}{2}\|\varphi_k\|_a^2 + \frac{1}{2}\|\varphi_l\|_a^2.$$

Вследствие (2.2) имеем

$$\left\|\frac{\varphi_k + \varphi_l}{2}\right\|_a^2 \geqslant \lambda \left\|\frac{\varphi_k + \varphi_l}{2}\right\|^2,$$

причем, очевидно, что

$$\left\|\frac{\varphi_k + \varphi_l}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\Big(1 + (\varphi_k, \varphi_l)\Big),$$

поэтому

$$\left\|\frac{\varphi_k - \varphi_l}{2}\right\|_a^2 \leqslant \frac{1}{2}\|\varphi_k\|_a^2 + \frac{1}{2}\|\varphi_l\|_a^2 - \frac{\lambda}{2}\Big(1 + (\varphi_k, \varphi_l)\Big).$$

Используя (2.4), (2.7), нетрудно убедиться, что

$$(\varphi_k, \varphi_l) = 1 + (\varphi_k, \varphi_l - \varphi_k) \to 1 \text{ при } k, l \to \infty,$$

поэтому на основании (2.5) заключаем, что

$$\lim_{k,l\to\infty}\left(\frac{1}{2}\|\varphi_k\|_a^2+\frac{1}{2}\|\varphi_l\|_a^2-\frac{\lambda}{2}\left(1+(\varphi_k,\varphi_l)\right)\right)=0,$$

т. е. последовательность $\{\varphi_k\}$ фундаментальна в пространстве $H_0^1(\Omega)$.

Вследствие полноты пространства $H_0^1(\Omega)$ отсюда вытекает существование функции $u\in H_0^1(\Omega)$ такой, что $\lim\limits_{k\to\infty}\|\varphi_k-u\|_a=0$. Ясно, что и $\lim\limits_{k\to\infty}\|\varphi_k-u\|=0$. Вновь используя (2.4), (2.5), получим

$$\|u\|=1,\ \|u\|_a^2=\lambda, \tag{2.8}$$

т. е. $R(u)=\lambda$. Осталось доказать, что $\lambda$ — собственное число задачи (1.5), а $u$ — соответствующая ему собственная функция. Вследствие (2.2) для произвольного элемента $v\in H_0^1(\Omega)$ и любого вещественного числа $t$ справедливо неравенство

$$\|u+tv\|_a^2\geqslant\lambda\|u+tv\|^2.$$

Выполняя элементарные выкладки и учитывая (2.8), получим, что

$$t^2(\|v\|_a^2-\lambda\|v\|^2)+2t((u,v)_a-\lambda(u,v))\geqslant 0\quad\forall\, t.$$

Последнее возможно, лишь при условии, что $(u,v)_a=\lambda(u,v)$. Функция $v\in H_0^1(\Omega)$ здесь произвольна, поэтому $\lambda$ — собственное число задачи (1.5), а $u$ — соответствующая ему собственная функция. □

Таким образом, доказано существование решение задачи (1.5). Найденное собственное число, очевидно, есть минимальное собственное число. В дальнейшем оно будет обозначаться через $\lambda_1$, а соответствующая ему собственная функция — через $u_1$.

Имея в виду свойство 2 собственных чисел и собственных функций задачи (1.5) (см. с. 163), нетрудно понять, что следующее по величине собственное число нужно искать, минимизируя отношение Рэлея на подпространстве функций, ортогональных $u_1$.

**Теорема 2.2.** *Пусть*

$$H_{0,1}^1(\Omega)=\{u\in H_0^1(\Omega):(u,u_1)=0\}.$$

*Тогда существует функция $u_2\in H_{0,1}^1(\Omega)$ такая, что*

$$\lambda_2=R(u_2)=\min_{v\in H_{0,1}^1(\Omega),\ v\neq 0}R(v),$$

*причем* $\lambda_2$ *— собственное число задачи* (1.5), $u_2$ *— соответствующая ему собственная функция,* $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$.

Замечание 2.1. Поскольку $(u_1, v)_a = \lambda_1(u_1, v)\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$ и $\lambda_1 > 0$, то можно дать эквивалентное определение $H_{0,1}^1(\Omega)$, а именно, положить $H_{0,1}^1(\Omega) = \{u \in H_0^1(\Omega),\ (u, u_1)_a = 0\}$.

Доказательство теоремы 2.2. Нетрудно проверить, что множество $H_{0,1}^1(\Omega)$ есть замкнутое подпространство пространства $H_0^1(\Omega)$. Поэтому существование функции $u_2$, доставляющей минимальное значение отношению Рэлея на $H_{0,1}^1(\Omega)$, а также тождество

$$(u_2, v)_a = \lambda_2(u_2, v) \quad \forall\, v \in H_{0,1}^1(\Omega)$$

обосновываются точно так же, как и при доказательстве теоремы 2.1. Покажем, что $(u_2, v)_a = \lambda_2(u_2, v)\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$. По теореме об ортогональном разложении гильбертова пространства любую функцию $v \in H_0^1(\Omega)$ можно представить в виде $v = \alpha u_1 + w$, $w \in H_{0,1}^1(\Omega)$. Таким образом,

$$(u_2, v)_a = (u_2, w)_a = \lambda_2(u_2, w) = \lambda_2(u_2, \alpha u_1 + w) = \lambda_2(u_2, v). \ \square$$

Процесс построения собственных чисел и собственных функций может быть продолжен.

**Теорема 2.3.** *Пусть* $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k$ *— собственные числа задачи* (1.5), *построенные на первых* $k$ *шагах описанного выше процесса,* $u_1, u_2, \ldots, u_k$ *— соответствующие им собственные функции. Пусть, далее,*

$$H_{0,k}^1(\Omega) = \{u \in H_0^1(\Omega), (u, u_i) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k\}. \tag{2.9}$$

*Тогда существует функция* $u_{k+1} \in H_{0,k}^1$ *такая, что*

$$\lambda_{k+1} = R(u_{k+1}) = \min_{v \in H_{0,k}^1(\Omega),\ v \neq 0} R(v),$$

*причем* $\lambda_{k+1}$ *— собственное число задачи* (1.5), $u_{k+1}$ *— соответствующая ему собственная функция,* $\lambda_k \leqslant \lambda_{k+1}$.

Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 2.2.

В результате применения процесса, описанного в теореме 2.3, мы получаем упорядоченное множество собственных чисел

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots \tag{2.10}$$

и соответствующих им собственных функций

$$u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots \tag{2.11}$$

По построению собственные функции ортогональны, т. е.

$$(u_i, u_j) = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя. В дальнейшем будем считать их нормированными: $\|u_i\| = 1$, $i = 1, 2, \ldots$ Тогда, очевидно,

$$\|u_i\|_a^2 = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{2.12}$$

**Теорема 2.4.** *Множество* (2.10) *собственных чисел задачи* (1.5) *бесконечно.*

Доказательство. Множество собственных чисел (2.10) задачи (1.5) будет конечным, если при некотором $k$ процесс их построения прерывается, а это возможно лишь в том случае, когда подпространство $H^1_{0,k}(\Omega)$ оказывается тривиальным, т. е. состоящим лишь из нулевого элемента. Последнее означает, что множество функций $u_1, u_2, \ldots, u_k$ образует базис в пространстве $H^1_0(\Omega)$, чего быть не может, так как пространство $H^1_0(\Omega)$ бесконечномерно. □

**Теорема 2.5.** *Последовательность* (2.10) *собственных чисел задачи* (1.5) *неограниченно возрастает.*

Доказательство. Предполагая противное, получим что существует положительная постоянная $c$, для которой $\lambda_k \leqslant c$, $k = 1, 2, \ldots$ Отсюда вследствие (2.12) вытекает, что последовательность собственных функций равномерно ограничена в пространстве $H^1_0(\Omega)$. По теореме Реллиха из нее можно выбрать фундаментальную в пространстве $L_2(\Omega)$ подпоследовательность $\{u_{k_n}\}$, но это противоречит тому, что собственные функции задачи (1.5) ортонормированы в пространстве $L_2(\Omega)$ и, значит,

$$\|u_{k_n} - u_{k_m}\|^2 = \|u_{k_n}\|^2 + \|u_{k_m}\|^2 = 2 \text{ при } n \neq m. \ \square$$

**Теорема 2.6.** *Каждое собственное число может повторяться в последовательности* (2.10) *лишь конечное число раз,* *иными словами, каждому собственному числу задачи* (1.5) *может соответствовать лишь конечное число ортонормированных собственных функций.*

Доказательство. Предполагая противное, получим, что множество собственных функций, соответствующих одному и тому же собственному числу $\lambda$, образует бесконечную ортонормированную в пространстве $L_2(\Omega)$ последовательность, все члены которой имеют одну и ту же норму в пространстве $H_0^1(\Omega)$. Но это, как установлено при доказательстве теоремы 2.5, невозможно. $\square$

**3. Полнота системы собственных функций.**

**Теорема 3.1.** *Последовательность* (2.11) *собственных функций задачи* (1.5) *полна в пространстве* $H_0^1(\Omega)$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда, очевидно, найдется ненулевой элемент $u \in H_0^1(\Omega)$ такой, что $(u, u_k)_a = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Понятно, что множество всех элементов $u \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющих указанным условиям (после присоединения нулевого элемента), образует замкнутое линейное подпространство пространства $H_0^1(\Omega)$. Обозначим его через $H_{0,\infty}^1(\Omega)$ и рассмотрим задачу

$$\min_{v \in H_{0,\infty}^1(\Omega),\ v \neq 0} R(v). \tag{3.1}$$

Повторяя дословно рассуждения из доказательства теоремы 2.1, получим, что задача (3.1) имеет решение, т. е. существуют функция $u_\infty \in H_{0,\infty}^1(\Omega)$, $u_\infty \neq 0$, и число $\lambda_\infty$ такие, что

$$\lambda_\infty = R(u_\infty) = \min_{v \in H_{0,\infty}^1(\Omega),\ v \neq 0} R(v),$$

причем по построению $\lambda_\infty \geqslant \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$, что противоречит утверждению теоремы 2.5. $\square$

**Следствие 3.1.** *Последовательность* (2.10) *исчерпывает все множество собственных чисел задачи* (1.5).

Доказательство. Предположим противное, и пусть $\lambda$ — собственное число задачи (1.5), а $u$ — соответствующая ему собственная функция, причем $\lambda \neq \lambda_j$, $j = 1, 2, \ldots$ Тогда по свойству 2 собственных функций $(u, u_j)_a = 0$ при $j = 1, 2, \ldots$ Отсюда вследствие полноты системы функций (2.11) в пространстве $H_0^1(\Omega)$ должно вытекать, что $u = 0$, а это невозможно, так как $u$ — собственная функция задачи (1.5). $\square$

**Теорема 3.2.** *Последовательность* (2.11) *собственных функций задачи* (1.5) *полна в пространстве* $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Пространство $H_0^1(\Omega)$ всюду плотно в пространстве $L_2(\Omega)$, т. е. для любой функции $u \in L_2(\Omega)$ и любого $\varepsilon > 0$ можно указать функцию $\widetilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ такую, что $\|u - \widetilde{u}\| \leqslant \varepsilon/2$. Вследствие теоремы 3.1 можно указать числа $c_1, c_2, \dots c_{n(\varepsilon)}$ такие, что

$$\Big\|\widetilde{u} - \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} c_i u_i\Big\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \varepsilon/2,$$

но тогда

$$\Big\|\widetilde{u} - \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} c_i u_i\Big\| \leqslant \Big\|\widetilde{u} - \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} c_i u_i\Big\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \varepsilon/2.$$

Используя теперь неравенство треугольника, получаем

$$\Big\|u - \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} c_i u_i\Big\| \leqslant \|u - \widetilde{u}\| + \Big\|\widetilde{u} - \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} c_i u_i\Big\| \leqslant \varepsilon. \ \square$$

Теоремы 3.1, 3.2 показывают, что любая функция из пространства $H_0^1(\Omega)$, или даже из $L_2(\Omega)$, может быть сколь угодно точно аппроксимирована линейной комбинацией собственных функций задачи (1.5). Используя ортогональность системы собственных функций, можно указать способ построения такого приближения.

**4. Ряды Фурье по собственным функциям.** Пусть $u$ — произвольная функция из пространства $H_0^1(\Omega)$. Построим для этой функции элемент наилучшего приближения в смысле энергетической нормы, используя собственные функции $u_1$, $u_2, \dots, u_n$, т. е. найдем числа $c_1, c_2, \dots, c_n$, решая задачу

$$F(c_1, c_2, \dots, c_n) = \min_{d_1, d_2, \dots, d_n} F(d_1, d_2, \dots, d_n),$$

где $F(d_1, d_2, \dots, d_n) = \|u - \sum\limits_{i=1}^{n} d_i u_i\|_a^2$. Проводя элементарные выкладки, будем иметь

$$\|u - \sum_{i=1}^{n} d_i u_i\|_a^2 = (u, u)_a - 2\sum_{i=1}^{n} d_i (u_i, u)_a + \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \lambda_i,$$

следовательно, необходимые условия минимума функции $F$ записываются в виде

$$\frac{\partial F(d_1, d_2, \ldots, d_n)}{\partial d_k} = -2(u, u_k)_a + 2d_k\lambda_k = 0.$$

Поэтому искомые коэффициенты в разложении элемента наилучшего приближения есть $c_k = (u, u_k)_a/\lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, но вследствие (1.5) $(u_k, u)_a = \lambda_k(u_k, u)$, т. е. $c_k = (u, u_k)$. Таким образом,

$$u^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} (u_i, u)u_i$$

является элементом наилучшего приближения к функции $u$ в смысле энергетической нормы.

Используя ортонормированность системы собственных функций в пространстве $L_2(\Omega)$ и, фактически, повторяя только что проведенные выкладки, получим, что элемент $u^{(n)}$ — элемент наилучшего приближения к функции $u$ и в смысле нормы пространства $L_2(\Omega)$.

Функция $u^{(n)}$ называется отрезком ряда Фурье для функции $u$. Числа $(u, u_i)$, $i = 1, 2, \ldots,$ — коэффициентами Фурье по системе собственных функций задачи (1.5).

Полезно отметить, что для любой функции $u \in L_2(\Omega)$ и любого $n \geqslant 1$

$$\|u^{(n)}\|^2 + \|u - u^{(n)}\|^2 = \|u\|^2, \tag{4.1}$$

а если $u \in H_0^1$, то

$$\|u^{(n)}\|_a^2 + \|u - u^{(n)}\|_a^2 = \|u\|_a^2. \tag{4.2}$$

**Теорема 4.1.** *Пусть $u \in L_2(\Omega)$. Тогда $\|u - u^{(n)}\| \to 0$ при $n \to \infty$. Если $u \in H_0^1(\Omega)$, то $\|u - u^{(n)}\|_{H^1(\Omega)} \to 0$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Обоснуем второе утверждение теоремы. Первое доказывается точно так же. Вследствие полноты системы функций (2.11) в пространстве $H_0^1(\Omega)$ и эквивалентности энергетической нормы норме пространства $H_0^1(\Omega)$ для любого положительного $\varepsilon$ можно указать числа $d_1, d_2, \ldots, d_{n(\varepsilon)}$ такие, что

$$\Big\| u - \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} d_i u_i \Big\|_a \leqslant \varepsilon,$$

но коэффициенты Фурье функции $u$ определены так, что

$$\Big\|u - \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} (u_i, u) u_i\Big\|_a \leqslant \Big\|u - \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} d_i u_i\Big\|_a \leqslant \varepsilon. \ \square$$

Таким образом, любая функция $u \in L_2(\Omega)$ разлагается в ряд Фурье по собственным функциям задачи (1.5): $u = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (u_i, u) u_i$, сходящийся в пространстве $L_2(\Omega)$, причем, если $u \in H_0^1(\Omega)$, то ряд Фурье сходится в норме этого пространства.

**5. Минимаксимальный принцип.** Способ вычисления собственных чисел задачи (1.5), описанный в теореме 2.3, предполагает, что при построении собственного числа с номером $k$ известны собственные функции, отвечающие собственным числам, с меньшими номерами.

В следующей теореме формулируется так называемый *минимаксимальный принцип*, позволяющий дать независимое описание собственного числа с заданным номером $k$.

**Теорема 5.1.** *Пусть $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ — элементы последовательности* (2.10), *$k \geqslant 1$ — заданное целое число. Тогда*

$$\lambda_k = \min_{S_k} \max_{v \in S_k, v \neq 0} R(v). \tag{5.1}$$

*Здесь $S_k$ — конечномерное подпространство, принадлежащее пространству $H_0^1(\Omega)$ и имеющее размерность $k$. Минимум берется по всем таким подпространствам.*

Доказательство. Выберем в качестве $S_k$ подпространство, натянутое на собственные функции $u_1, u_2, \ldots, u_k$ задачи (1.5), и пусть $v = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i u_i$ — элемент этого подпространства. Нетрудно подсчитать, что

$$R(v) = \Big(\sum_{i=1}^{k} c_i^2 \lambda_i\Big) \Big/ \Big(\sum_{i=1}^{k} c_i^2\Big) \leqslant \lambda_k$$

при любых, не равных одновременно нулю $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Полагая $v = u_k$, очевидно, получим, что $R(v) = \lambda_k$, т. е.

$$\max_{v \in S_k, v \neq 0} R(v) = \lambda_k.$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно установить, что при любом другом выборе подпространства $S_k$

$$\max_{v\in S_k, v\neq 0} R(v) \geqslant \lambda_k.$$

Ясно, что для этого достаточно убедиться в том, что любое подпространство $S_k$ содержит элемент $v \neq 0$, принадлежащий подпространству $H^1_{0,k-1}$ (см. (2.9)), поскольку для такого элемента вследствие теоремы 2.3 справедливо неравенство $R(v) \geqslant \lambda_k$. Пусть $v_1, v_2, \ldots v_k$ — базис пространства $S_k$. Элемент $v = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i v_i$ принадлежит $H^1_{0,k-1}$, если

$$\sum_{i=1}^{k} c_i(v_i, u_j) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{5.2}$$

Условия (5.2) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений, содержащую $k$ неизвестных и $k-1$ уравнений. Такая система всегда имеет нетривиальное решение. □

**6. Теоремы сравнения.** Минимаксимальный принцип позволяет сравнивать собственные числа различных эллиптических операторов, например, собственные числа оператора (1.1), с. 161, можно оценить через собственные числа оператора Лапласа. В дальнейшем мы всегда будем считать, что собственные числа упорядочены в соответствии с процессом, описанным в теореме 2.3.

При выполнении условий (1.3), (1.4) можно указать такие положительные постоянные $c_0, c_1$, что

$$c_0 \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leqslant (u,u)_a \leqslant c_1 \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad \forall\, u \in H^1_0(\Omega). \tag{6.1}$$

**Теорема 6.1.** *Пусть $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ — последовательность собственных чисел задачи (1.5), $\lambda^0_1 \leqslant \lambda^0_2 \leqslant \ldots$ — последовательность собственных чисел задачи: $u \in H^1_0(\Omega)$, $u \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \lambda \int\limits_{\Omega} uv\, dx \quad \forall\, v \in H^1_0(\Omega), \tag{6.2}$$

*т. е. собственных чисел оператора Лапласа в области $\Omega$ при граничных условиях Дирихле. Тогда*

$$c_0\lambda_k^0 \leqslant \lambda_k \leqslant c_1\lambda_k^0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{6.3}$$

Доказательство. Пусть $R^0(u) = \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx / \|u\|^2$ — отношение Рэлея, соответствующее оператору Лапласа. Вследствие (6.1)

$$c_0 R^0(u) \leqslant R(u) \leqslant c_1 R^0(u) \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega),\ u \neq 0,$$

поэтому для любого конечномерного подпространства $S_k$, принадлежащего $H_0^1(\Omega)$, справедливы неравенства

$$c_0 \max_{v\in S_k, v\neq 0} R^0(v) \leqslant \max_{v\in S_k, v\neq 0} R(v) \leqslant c_1 \max_{v\in S_k, v\neq 0} R^0(v),$$

но тогда

$$c_0 \min_{S_k} \max_{v\in S_k, v\neq 0} R^0(v) \leqslant \min_{S_k} \max_{v\in S_k, v\neq 0} R(v) \leqslant c_1 \min_{S_k} \max_{v\in S_k, v\neq 0} R^0(v),$$

что в силу теоремы 5.1 эквивалентно (6.3). $\square$

Упражнение 6.1. Пусть наряду с оператором $\mathcal{L}$ рассматривается оператор

$$\mathcal{L}_b u = -\operatorname{div}(B\nabla u) + b_0 u,$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям вида (1.3), (1.4). Пусть, далее,

$$|a_{ij}(x) - b_{ij}(x)| \leqslant \varepsilon,\ i, j = 1, 2, \ldots, n,\ |a_0(x) - b_0(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{п. в. в } \Omega,$$

$\lambda_k(A)$, $\lambda_k(B)$, $\lambda_k^0$, $k = 1, 2, \ldots$ — собственные числа операторов $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_b$ и оператора Лапласа, соответственно, при граничных условиях Дирихле в области $\Omega$. Показать, что $|\lambda_k(A) - \lambda_k(B)| \leqslant c\varepsilon\lambda_k^0$, $k = 1, 2, \ldots$, где $c > 0$ — постоянная, не зависящая от $k$, $\varepsilon$.

**Теорема 6.2.** *Пусть $\Omega_1 \subset \Omega_2$ — ограниченные области пространства $\mathbb{R}^n$, $\lambda_1^{0,k} \leqslant \lambda_2^{0,k} \leqslant \lambda_3^{0,k} \leqslant \ldots$ — собственные числа задачи (6.2) в области $\Omega_k$, $k = 1, 2$. Тогда $\lambda_i^{0,1} \geqslant \lambda_i^{0,2}$, $i = 1, 2, \ldots$, т. е. с уменьшением области собственные числа* *оператора Лапласа при граничных условиях Дирихле возрастают.*

Доказательство. Пусть $S_k(\Omega_i)$ — подпространство размерности $k$ пространства $H_0^1(\Omega_i)$, $i=1,2$, $R^0_{\Omega_i}(u)=\int\limits_{\Omega_i}|\nabla u|^2dx/\|u\|^2$.

Всякая функция из пространства $H_0^1(\Omega_1)$, будучи продолженной нулем на $\Omega_2\setminus\Omega_1$, принадлежит $H_0^1(\Omega_2)$. Поэтому множество всех подпространств $S_k(\Omega_1)$ фиксированной размерности $k$ уже множества всех подпространств $S_k(\Omega_2)$, а, следовательно, числовое множество $\max\limits_{v\in S_k(\Omega_1),v\neq 0} R^0_{\Omega_1}(v)$ уже числового множества

$$\max_{v\in S_k(\Omega_2),v\neq 0} R^0_{\Omega_2}(v),$$

откуда вытекает, что

$$\min_{S_k(\Omega_1)}\max_{v\in S_k(\Omega_1),v\neq 0} R^0_{\Omega_1}(v)\geqslant \min_{S_k(\Omega_2)}\max_{v\in S_k(\Omega_2),v\neq 0} R^0_{\Omega_2}(v).\ \square$$

Из теорем 6.1, 6.2 непосредственно следует

**Теорема 6.3.** *Пусть* $\Omega_1\subset\Omega\subset\Omega_2$ *— ограниченные области пространства* $\mathbb{R}^n$, $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots$ *— собственные числа задачи* (1.5), $\lambda_1^{0,k}\leqslant\lambda_2^{0,k}\leqslant\ldots$ *— собственные числа оператора Лапласа при граничных условиях Дирихле в области* $\Omega_k$, $k=1,2,\ldots$ *Тогда*

$$c_0\lambda_i^{0,1}\geqslant\lambda_i\geqslant c_1\lambda_i^{0,2},\quad i=1,2,\ldots,$$

*где* $c_0, c_1$ *— постоянные из неравенства* (6.1).

Теорема 6.3 позволяет получать двусторонние оценки собственных чисел задачи (1.5). Для этого в качестве областей $\Omega_1,\Omega_2$ следует выбирать области простейшей формы, для которых задача на собственные значения для оператора Лапласа допускает решение в явном виде.

Выбирая в качестве $\Omega_1,\Omega_2$ параллелепипеды и используя асимптотическое представление (3.9) для собственных чисел оператора Лапласа, получаем асимптотическое представление для собственных чисел задачи (1.5):

$$\lambda_k=\frac{c}{\operatorname{mes}(\Omega)}k^{2/n}+o(k^{2/n}).$$

Здесь $c$ — постоянная, зависящая от $c_0, c_1$ и $n$.

**7. Гладкость собственных функций.**

**Теорема 7.1.** *Пусть выполнены следующие условия гладкости:*

$$a_{ij} \in C^{m+1}(\bar{\Omega}),\ i,j = 1, \ldots, n,\ a_0 \in C^m(\bar{\Omega}),\ \Gamma \in C^{m+2},$$

*где $m$ — неотрицательное целое число. Тогда любая собственная функция задачи* (1.5) *принадлежит пространству* $H^{m+2}(\Omega)$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $m = 0$. Пусть $u$ — собственная функция задачи (1.5), $\lambda$ — соответствующее ей собственное число. Тогда

$$a(u, v) = \lambda(u, v) \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Поскольку $u \in L_2(\Omega)$, то, используя теорему 3.2, с. 134, получим, что $u \in H^2(\Omega)$. Принимая $m = 1$, учитывая, что $u \in H^1(\Omega)$ и вновь используя теорему 3.2, с. 134, получим, что $u \in H^3(\Omega)$. Продолжая этот процесс, установим справедливость утверждения теоремы при любом $m$. $\square$

Очевидным следствием теоремы 7.1 является

**Теорема 7.2.** *Пусть*

$$a_{ij}, a_0 \in C^{\infty}(\bar{\Omega}),\ i,j = 1, \ldots, n,\ \Gamma \in C^{\infty}. \tag{7.1}$$

*Тогда любая собственная функция задачи* (1.5) *принадлежит пространству* $C^{\infty}(\bar{\Omega})$.

**8. Теорема о минимальном собственном числе.**

В этом пункте ради простоты изложения будем считать выполненными условия (7.1).

**Теорема 8.1.** *Пусть $\lambda$ — минимальное собственное число задачи* (1.5), *$u$ — соответствующая ему собственная функция. Тогда $u$ сохраняет знак в области $\Omega$.*

Доказательство. Будем считать, что $\|u\| = 1$. Поскольку $u \in H_0^1(\Omega)$, то $u^+, u^- \in H_0^1(\Omega)$ (см. лемму 9.2, с. 45), причем

$$u^+(x)u^-(x) = 0, D_i u^+(x) D_j u^-(x) = 0,\ i,j = 1, 2, \ldots, n,$$

почти всюду на области $\Omega$. Поэтому выполняются равенства:

$$\lambda = \lambda\|u\|^2 = \lambda\|u^+\|^2 + \lambda\|u^-\|^2, \tag{8.1}$$

$$\lambda = \|u\|_a^2 = \|u^+\|_a^2 + \|u^-\|_a^2. \tag{8.2}$$

Учтем теперь тот факт, что $\lambda$ — минимум отношения Релея на $H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ и потому

$$\|u^+\|_a^2 \geqslant \lambda \|u^+\|^2, \quad \|u^-\|_a^2 \geqslant \lambda \|u^-\|^2. \tag{8.3}$$

Понятно, что соотношения (8.1)–(8.3) могут выполняться лишь в том случае, когда

$$\|u^+\|_a^2 = \lambda \|u^+\|^2, \quad \|u^-\|_a^2 = \lambda \|u^-\|^2.$$

Отсюда вытекает, что либо $u^+ \equiv 0$, либо $u^+$ — собственная функция задачи (1.5). Если $u^+$ — собственная функция задачи (1.5), то вследствие условий (7.1) получаем, что $u^+ \in C^\infty(\Omega)$ и

$$\mathcal{L}u^+ = \lambda u^+ \geqslant 0 \quad \text{в } \Omega.$$

Вследствие теоремы 2.2, с. 142, получаем, что $u^+$ не может обращаться в нуль во внутренних точках области $\Omega$. Аналогичное справедливо и для $u^-$. Таким образом, собственная функция задачи (1.5), соответствующая $\lambda$, не меняет знака в области $\Omega$. $\square$

**Следствие 8.1.** *Если $\lambda$ — минимальное собственное число задачи* (1.5), *то все соответствующие ему собственные функции пропорциональны.*

Доказательство. Пусть теперь $u, v$ — собственные функции задачи (1.5), соответствующие собственному числу $\lambda$. Тогда функция $u - \alpha v$ при любом значении постоянной $\alpha$ — также собственная функция, соответствующая $\lambda$. Поскольку $v$ не меняет знака в области $\Omega$, то $\int\limits_\Omega v\,dx \neq 0$, следовательно, $\alpha$ можно выбрать так, чтобы $\int\limits_\Omega (u - \alpha v)\,dx = 0$, но $u - \alpha v$ также не меняет знака в области $\Omega$, поэтому $u = \alpha v$ почти всюду в $\Omega$. $\square$

Замечание 8.1. Из следствия 8.1 вытекает, что $\lambda_1 < \lambda_2$.

Глава 4

# ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

В этой главе изучаются краевые задачи для эллиптических систем уравнений второго порядка. Излагаемые здесь результаты естественно трактовать как обобщение результатов, описанных в §1, гл.2. Способы их получения во многом аналогичны случаю одного эллиптического уравнения и зачастую мы не проводим подробных рассуждений, а ограничиваемся соответствующими ссылками. Следует, однако, отметить, что переход к системам уравнений приводит к существенному увеличению количества возможных вариантов уравнений и корректных постановок краевых условий. При этом в наиболее интересных с точки зрения приложений случаях, например, в случае уравнений линейной теории упругости, значительно усложняется доказательство положительной определенности главной части билинейной формы, порождаемой интегральным тождеством, возникающим при определении обобщенного решения. Существенную роль здесь играют так называемые неравенства Корна для вектор-функций из соболевских пространств.

## § 1. Постановка задачи.

**1. Обозначения** В настоящей главе рассматриваются системы уравнений вида

$$-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\Bigg(\sum_{k,l=1}^{m,n}a_{ijkl}(x)\frac{\partial u_k(x)}{\partial x_l}+\sum_{k=1}^{m}b_{ijk}(x)u_k(x)\Bigg)+$$
$$+\sum_{j,k=1}^{n,m}c_{ijk}(x)\frac{\partial u_k(x)}{\partial x_j}+\sum_{k=1}^{m}d_{ik}(x)(x)u_k(x)=f_i(x)-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_{ij}(x)}{\partial x_j},$$
$$x\in\Omega,\ i=1,2,\ldots,m, \quad (1.1)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $u=(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x))$, $m \geqslant 1$, — искомая вектор-функция; все остальные функции, входящие в (1.1), считаются заданными.

Систему уравнений (1.1) будем записывать более компактно. С этой целью введем в рассмотрение следующие дифференциальные операции. Вектор-функции $u$ поставим в соответствие ее градиент (матрицу Якоби) $\nabla u = \{\partial u_i/\partial x_j\}_{i=1,j=1}^{m,n}$. Всякой матричной функции $\Phi(x) = \{\varphi_{ij}(x)\}_{i=1,j=1}^{m,n}$ отнесем ее дивергенцию, т. е. вектор-функцию $\operatorname{div}\Phi$ с координатами

$$(\operatorname{div}\Phi(x))_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_{ij}(x)}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Пусть, далее, $\mathbb{M}_{m,n}$ — линейное пространство прямоугольных вещественных матриц ($m$ — количество строк, $n$ — количество столбцов); $A: \mathbb{M}_{m,n} \to \mathbb{M}_{m,n}$, $B: \mathbb{R}^n \to \mathbb{M}_{m,n}$, $C: \mathbb{M}_{m,n} \to \mathbb{R}^n$, $D: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейные операторы, определяемые соответствующими коэффициентами системы уравнений (1.1). С использованием указанных обозначений систему (1.1) можно записать в виде

$$-\operatorname{div}(A\nabla u + Bu) + C\nabla u + Du = f - \operatorname{div} F, \quad x \in \Omega. \tag{1.2}$$

Отметим, что такая форма записи естественным образом обобщает одномерный случай (см. (2.2), с. 104).

**2. Интегральное тождество** По аналогии с одним уравнением системе (1.2), поставим в соответствие интегральное тождество

$$\boldsymbol{a}(u,\eta) \equiv \int\limits_{\Omega} ((A\nabla u + Bu)\cdot\nabla\eta + C\nabla u\cdot\eta + Du\cdot\eta)\,dx + \int\limits_{\Gamma} Gu\cdot\eta\,dx =$$
$$= \boldsymbol{l}(\eta) \equiv \int\limits_{\Omega} (f\cdot\eta + F\cdot\nabla\eta)\,dx + \int\limits_{\Gamma} g\cdot\eta\,dx. \tag{2.1}$$

Здесь $G = G(x)$, $g = g(x)$ — заданные оператор, действующий в пространстве $\mathbb{R}^m$, и вектор из $\mathbb{R}^m$, $\Gamma$ — граница области $\Omega$; символ «$\cdot$» обозначает стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{M}_{m,n}$, т. е. $L \cdot M = \operatorname{tr}(LM^T) = \sum\limits_{i=1,j=1}^{m,n} l_{ij}m_{ij}$ для $L, M \in \mathbb{M}_{m,n}$. По определению $|M| = (M\cdot M)^{1/2}$.

Как и в случае одного уравнения, тождество (2.1) может быть использовано для определения обобщенных решений различных краевых задач для системы (1.2). При этом полезно иметь в виду следующую легко проверяемую формулу:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \Phi \cdot \eta \, dx = -\int_{\Omega} \Phi \cdot \nabla \eta \, dx + \int_{\Gamma} \Phi \nu \cdot \eta \, dx. \tag{2.2}$$

Здесь $\Phi, \eta$ — матричная и векторная дифференцируемые функции соответствующих размерностей, $\nu$ — единичная внешняя нормаль к $\Gamma$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что

$$A,\ B,\ C,\ D \in L_\infty(\Omega),\ G \in L_\infty(\Gamma),\ f, F \in L_2(\Omega),\ g \in L_2(\Gamma).$$

Это означает, что каждая компонента соответствующего вектора или матрицы принадлежит указанному функциональному пространству. На протяжении настоящей главы область $\Omega$ считается, как минимум, липшицевой. Будем использовать следующие обозначения:

$$\mathbb{H}_1 = [W_2^1(\Omega)]^m, \quad \mathbb{H}_{1,0} = [\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)]^m.$$

Нормы в пространствах $\mathbb{H}_1$, $\mathbb{H}_{1,0}$ введем соотношениями

$$\|u\|_1^2 = \int_{\Omega} \big(|\nabla u|^2 + |u|^2\big)\, dx, \quad \|u\|_{1,0}^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx.$$

Положим также

$$\|u\|_0^2 = \int_{\Omega} |u|^2 \, dx, \quad (u, v)_1 = \int_{\Omega} \big(\nabla u \cdot \nabla v + u \cdot v\big)\, dx.$$

**3. Условия на оператор.** Определяющую роль при исследовании граничных задач для системы (1.2) играют те или иные условия на оператор $A$. Сформулируем условия, которые будут использованы в настоящей главе.

1) Будем говорить, что оператор $A$ удовлетворяет условию строгой эллиптичности (*условию Лежандра*), если

$$A(x)M \cdot M \geqslant c_0 M \cdot M \quad \forall\, M \in M_{m,n},\ x \in \Omega,\ c_0 = \text{const} > 0. \tag{3.1}$$

2) Будем говорить, что для оператора $A$ выполнено *условие Лежандра — Адамара*, если[1)]

$$A(x)M\cdot M \geqslant c_0 M\cdot M \quad \forall\, M\in\mathbb{M}_{m,n},\ \operatorname{rank}(M)=1,$$
$$x\in\Omega,\ c_0=\mathrm{const}>0. \quad (3.2)$$

Условие (3.1), очевидно, является более сильным, чем условие (3.2). Приведем пример оператора $A$, для которого условие (3.2) выполнено, а условие (3.1) не выполняется. Именно, пусть

$$AM\cdot L = m_{11}l_{11}+m_{22}l_{22}+m_{12}l_{12}+m_{21}l_{21}+$$
$$+\varepsilon(m_{11}l_{22}+m_{22}l_{11}-m_{12}l_{21}-m_{21}l_{12}) \quad \forall\, M,L\in\mathbb{M}_{2,2}.$$

Тогда $AM\cdot M=|M|^2+2\varepsilon\det M$. Если $\operatorname{rank} M=1$, то $\det M=0$, и условие (3.2) выполнено с постоянной $c_0=1$. Полагая

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

получим, что $AM\cdot M=2(1-\varepsilon)$. Следовательно, при $\varepsilon>1$ оператор $A$ не удовлетворяет условию (3.1). Нетрудно убедиться, что условие Лежандра выполняется при $0<\varepsilon<\ 1$ .

Отметим, что при $m=1$ условия (3.1) и (3.2) совпадают и превращаются в условие положительной определенности матрицы $A$.

3) Будем использовать следующие обозначения: $\mathbb{M}_n=\mathbb{M}_{n,n}$, $n\geqslant 2$, — пространство квадратных матриц, $\mathbb{M}_n^s$ — пространство симметричных квадратных матриц порядка $n$. Оператор $A$, действующий в пространстве $\mathbb{M}_n$, $n\geqslant 2$, и определенный условиями

$$AB=\frac{1}{2}L(B+B^T) \quad \forall\, B\in\mathbb{M}_n, \quad (3.3)$$

где

$$L:\mathbb{M}_n^s\to\mathbb{M}_n^s \quad (3.4)$$

суть линейный равномерно положительно определенный оператор, т. е.

$$LS\cdot S\geqslant c_0 S\cdot S \quad \forall\, S\in\mathbb{M}_n^s,\ x\in\Omega, \quad (3.5)$$

[1)] $\operatorname{rank}(M)$ — ранг матрицы $M$.

$c_0 = \mathrm{const} > 0$, будем называть оператором линейной теории упругости, поскольку условия (3.3)–(3.5) типичны для систем уравнений линейной теории упругости (см., например, [27], [31], [38]). В частности, если упругое тело однородно и изотропно, то

$$LS = \lambda\,\mathrm{tr}(S)E + 2\mu S,$$

где $\lambda$, $\mu$ — положительные постоянные (параметры Ламе). В этом случае, очевидно,

$$LS = (LS)^T,\ LS \cdot S = \lambda(\mathrm{tr}(S))^2 + 2\mu S \cdot S \geqslant 2\mu S \cdot S \quad \forall\, S \in \mathbb{M}_n^s.$$

В теории упругости приняты следующие обозначения ($m = n$):

$$\mathcal{E}(u) = (1/2)(\nabla u + (\nabla u)^T), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

$i, j = 1, 2, \ldots, n$. При выполнении условий (3.3), (3.4)

$$A\nabla u \cdot \nabla \eta = L\mathcal{E}(u) \cdot (\mathcal{E}(\eta) + (1/2)(\nabla\eta - (\nabla\eta)^T) = L\mathcal{E}(u) \cdot \mathcal{E}(\eta). \quad (3.6)$$

Мы учли здесь, что матрица $(1/2)(\nabla\eta - (\nabla\eta)^T)$ кососимметрична, а скалярное произведение симметричной и кососимметричной матриц равно нулю.

## § 2. Основные неравенства

**1. Условия Адамара — Лежандра и неравенства положительной определенности.** Пусть оператор $A$ удовлетворяет условию Лежандра. Тогда, очевидно,

$$\int\limits_{\Omega} A(x)\nabla u \cdot \nabla u\,dx \geqslant c_0\|u\|_{1,0}^2 \quad \forall\, u \in \mathbb{H}_{1,0}. \quad (1.1)$$

**Теорема 1.1.** *Пусть оператор $A$ не зависит от $x$ и удовлетворяет условию Лежандра — Адамара. Тогда*

$$\int\limits_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla u\,dx \geqslant c_0\|u\|_{1,0}^2 \quad \forall\, u \in \mathbb{H}_{1,0}. \quad (1.2)$$

Доказательство. Достаточно, очевидно, установить справедливость неравенства (1.2) для любой функции $u$ из $[C_0^\infty(\Omega)]^m$. Продолжая функцию $u$ нулем за пределы $\Omega$, можно считать, что $u$ принадлежит $[C_0^\infty(\mathbb{R}^n)]^m$. Используем преобразование Фурье функции $u$:

$$\hat{u}(y) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{iy\cdot x} u(x)\,dx, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

(см., например, [17]). Напомним, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x)\cdot v(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(y)\cdot \overline{\hat{v}(y)}\,dy, \quad u, v \in [C_0^\infty(\mathbb{R}^n)]^m, \tag{1.3}$$

$$\widehat{D_\alpha w}(y) = iy_\alpha \hat{w}(y), \quad w \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{1.4}$$

Из (1.4) непосредственно вытекает, что

$$\widehat{\nabla u}(y) = i\hat{u}(y)\otimes y. \tag{1.5}$$

Мы используем обозначение $a\otimes b = \{a_i b_j\}_{i=1,j=1}^{m,n}$. Матрицу $a\otimes b$ называют тензорным (кронекеровым) произведением векторов $a \in \mathbb{R}^m$, $b\in\mathbb{R}^n$. Применяя (1.3), (1.5), получим, что

$$\int\limits_\Omega A\nabla u\cdot\nabla u\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} A\widehat{\nabla u}\cdot\overline{\widehat{\nabla u}}\,dy = \operatorname{Re}\int\limits_{\mathbb{R}^n} A\hat{u}\otimes y\cdot\overline{\hat{u}}\otimes y\,dy. \tag{1.6}$$

Непосредственные вычисления дают

$$\operatorname{Re} A\hat{u}\otimes y\cdot\overline{\hat{u}}\otimes y = A\operatorname{Re}\hat{u}\otimes y\cdot\operatorname{Re}\hat{u}\otimes y + A\operatorname{Im}\hat{u}\otimes y\cdot\operatorname{Im}\hat{u}\otimes y.$$

Матрица вида $a\otimes b$ имеет ранг равный единице[1)], поэтому

$$\operatorname{Re} A\hat{u}\otimes y\cdot\overline{\hat{u}}\otimes y \geqslant c_0((\operatorname{Re}\hat{u})^2 + (\operatorname{Im}\hat{u})^2)|y|^2 = c_0|\hat{u}|^2|y|^2. \tag{1.7}$$

Заметим теперь, что $|\hat{u}|^2|y|^2 = |i\hat{u}\otimes y|^2 = |\widehat{\nabla u}|^2$, откуда, используя (1.3), получаем (1.2). □

Условие Лежандра — Адамара, в некотором смысле, необходимо для выполнения неравенства (1.1), а именно справедлива

[1)] Нетрудно убедиться, что и, наоборот, любая матрица ранга единица может быть представлена в виде тензорного произведения двух векторов.

**Теорема 1.2.** *Пусть* $A \in L_\infty(\Omega)$*, справедлива оценка* (1.1). *Тогда*

$$A(x)M \cdot M \geqslant c_0 M \cdot M \quad \forall\, M \in \mathbb{M}_{m,n},\ \operatorname{rank}(M) = 1, \tag{1.8}$$

*почти всюду на* $\Omega$.

Доказательство. Введем в рассмотрение 2-периодическую функцию $\rho$ вещественной переменной $t$ такую, что

$$\rho(t) = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t < 1, \\ 2 - t, & 1 \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$$

Для $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon > 0$ положим

$$u_\varepsilon(x) = \varepsilon\varphi(x)\rho(a \cdot x/\varepsilon)b, \quad x \in \Omega.$$

Нетрудно убедиться, что $u_\varepsilon \in \mathbb{H}_{1,0}$, и

$$D_\alpha u_{\varepsilon,\beta} = \varepsilon D_\alpha\varphi(x)\rho(a \cdot x/\varepsilon)b_\beta + \varphi(x)\rho'(a \cdot x/\varepsilon)a_\alpha b_\beta,$$

$\alpha = 1, 2, \ldots, n$, $\beta = 1, 2, \ldots, m$. Запишем неравенство (1.1) применительно к функции $u_\varepsilon$, затем устремим $\varepsilon$ к нулю. В результате, получим

$$\int\limits_\Omega \varphi^2(x)A(x)a \otimes b \cdot a \otimes b\, dx \geqslant c_0 \int\limits_\Omega \varphi^2(x)|a \otimes b|^2\, dx. \tag{1.9}$$

Поскольку $\varphi$, $a$, $b$ здесь могут выбраны произвольно, то условие (1.8) выполнено. □

**Теорема 1.3.** *Пусть* $A \in C(\overline{\Omega})$*, выполнено условие Лежандра — Адамара. Тогда существует положительные постоянные* $c_1$*,* $c_2$ *такие, что*[1)]

$$\int\limits_\Omega A(x)\nabla u \cdot \nabla u\, dx \geqslant c_1 \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, dx - c_2 \int\limits_\Omega |u|^2\, dx \quad \forall\, u \in \mathbb{H}_{1,0}. \tag{1.10}$$

Доказательство. Установим сначала, что существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$\int\limits_\Omega A(x)\nabla u \cdot \nabla u\, dx \geqslant \frac{c_0}{2} \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, dx \tag{1.11}$$

[1)] Неравенство (1.10) называют неравенством Гординга.

для любой функции $u \in [C_0^\infty(\Omega)]^m$ такой, что диаметр ее носителя не превосходит $\varepsilon$. В самом деле, вследствие непрерывности функции $A(x)$ на $\overline{\Omega}$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что $|A(x)-A(y)| \leqslant c_0/2$, если $|x-y| \leqslant \varepsilon$. Пусть теперь функция $u \in C_0^\infty(\Omega)$ такова, что диаметр ее носителя не превосходит $\varepsilon$ и пусть $x_0 \in \operatorname{supp} u$. Тогда

$$\int\limits_\Omega A(x)\nabla u \cdot \nabla u\, dx = \int\limits_\Omega A(x_0)\nabla u \cdot \nabla u\, dx +$$
$$+ \int\limits_{\operatorname{supp} u} (A(x)-A(x_0))\nabla u \cdot \nabla u\, dx \geqslant c_0 \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \frac{c_0}{2}\int\limits_\Omega |\nabla u|^2\, dx,$$

что и доказывает (1.11). Построим теперь покрытие $\overline{\Omega}$ открытыми шарами $B(x_k, \varepsilon/4)$, $x_k \in \Omega$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Определим для каждого $k$ функцию $\zeta_k \in C_0^\infty(B(x_k, \varepsilon/2))$ такую, что $\zeta_k(x) = 1$ для $x \in B(x_k, \varepsilon/4)$, и положим

$$\varphi_k(x) = \frac{\zeta_k(x)}{\sum\limits_{j=1}^N \zeta_j^2(x)}, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \ x \in \overline{\Omega}. \tag{1.12}$$

Это определение корректно, так как по крайне мере одно из слагаемых в знаменателе равно единице, причем

$$\sum_{k=1}^N \varphi_k^2(x) = 1. \tag{1.13}$$

Поэтому

$$\int\limits_\Omega A(x)\nabla u \cdot \nabla u\, dx = \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^N A(x)\varphi_k(x)\nabla u \cdot \varphi_k(x)\nabla u\, dx. \tag{1.14}$$

Для преобразования выражения, стоящего под знаком суммы, используем следующую легко проверяемую формулу вычисления градиента произведения скалярной и векторной функций:

$$\nabla(\varphi u) = \varphi \nabla u + u \otimes \nabla\varphi, \tag{1.15}$$

в соответствии с которой выражение под знаком суммы в правой части (1.14) можно представить в виде

$$A(x)\varphi_k(x)\nabla u\cdot\varphi_k(x)\nabla u = A(x)\nabla(\varphi_k(x)u)\cdot\nabla(\varphi_k(x)u)-\\ - A(x)\nabla(\varphi_k(x)u)\cdot u\otimes\nabla\varphi_k(x) - A(x)u\otimes\nabla\varphi_k(x)\cdot\nabla(\varphi_k(x)u)+\\ + A(x)u\otimes\nabla\varphi_k(x)\cdot u\otimes\nabla\varphi_k(x). \quad (1.16)$$

Диаметр носителя функции $\varphi_k u$, очевидно, не превышает $\varepsilon$, поэтому, используя (1.11), (1.17) и выполняя элементарные оценки, основанные на применении неравенства Коши — Буняковского, получим

$$\int\limits_\Omega A(x)\varphi_k(x)\nabla u\cdot\varphi_k(x)\nabla u\,dx \geqslant \frac{c_0}{2}\int\limits_\Omega \nabla(\varphi_k(x)u)\cdot\nabla(\varphi_k(x)u)\,dx-\\ - c_2\|u\|_{1,0}\|u\|_0 - c_3\|u\|_0^2, \quad (1.17)$$

где $c_2$, $c_3$ — положительные не зависящие от $u$ постоянные. Вновь используя формулу (1.15), будем иметь

$$\nabla(\varphi_k(x)u)\cdot\nabla(\varphi_k(x)u) = \varphi_k^2(x)\nabla u\cdot\nabla u + \varphi_k(x)\nabla u\cdot u\otimes\nabla\varphi_k(x)+\\ + u\otimes\nabla\varphi_k(x)\cdot\varphi_k(x)\nabla u + u\otimes\nabla\varphi_k(x)\cdot u\otimes\nabla\varphi_k(x). \quad (1.18)$$

Подставим это выражение в первое слагаемое правой части неравенства (1.17), а затем учтем полученное неравенство для оценки снизу суммы в (1.14). При этом используем (1.13), а также неравенство Коши — Буняковского. В результате, получим

$$\int\limits_\Omega A(x)\nabla u\cdot\nabla u\,dx \geqslant \frac{c_0}{2}\|u\|_{1,0}^2 - c_4\|u\|_{1,0}\|u\|_0 - c_5\|u\|_0^2, \quad (1.19)$$

где $c_4$, $c_5$ — положительные не зависящие от $u$ постоянные. Используя теперь неравенство Коши с $\varepsilon$, придем к (1.10). □

Замечание 1.1. Используя для оценки вычитаемого в правой части (1.10) неравенство Фридрихса, нетрудно получить, что если выполнены условия теоремы 1.3 и $\mathrm{mes}(\Omega)$ достаточно мала, то существует положительная постоянная $c$ такая, что

$$\int\limits_\Omega A(x)\nabla u\cdot\nabla u\,dx \geqslant c\int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dx \quad \forall\, u\in\mathbb{H}_{1,0}. \quad (1.20)$$

**2. Неравенства Корна.** Всюду в этом пункте мы полагаем, что $m = n$.

**2.1. Первое неравенства Корна.**

**Теорема 2.1.** *Для любой функции* $u \in \mathbb{H}_{1,0}$ *справедливо неравенство*

$$|||\nabla u|||_{L_2(\Omega)} \leqslant \sqrt{2}|||\mathcal{E}(u)|||_{L_2(\Omega)}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Неравенство (2.1) достаточно проверить для функций $u \in [C_0^\infty(\Omega)]^n$. Непосредственно из определения получаем, что $2|\mathcal{E}(u)|^2 = |\nabla u|^2 + \nabla u \cdot ((\nabla u)^T))$. Ясно, что

$$\nabla u \cdot ((\nabla u)^T)) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\,.$$

Дважды интегрируя по частям, будем иметь

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\,dx = \int\limits_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\,dx,$$

поэтому

$$\int\limits_\Omega \nabla u \cdot ((\nabla u)^T))\,dx = \int\limits_\Omega (\operatorname{div} u)^2\,dx \geqslant 0,$$

откуда, очевидно, следует, (2.1). □

Отметим, что первое неравенство Корна справедливо для любой ограниченной области пространства $\mathbb{R}^n$.

**2.2. Второе неравенства Корна.**

**Теорема 2.2.** *Пусть* $\Omega$ *— ограниченная липшицева область. Тогда существует постоянная* $c > 0$ *такая, что*

$$\|u\|_1 \leqslant c(\|u\|_0 + |||\mathcal{E}(u)|||_{L_2(\Omega)}) \quad \forall\, u \in \mathbb{H}_1. \tag{2.2}$$

Неравенство (2.2) обычно называют вторым (основным) неравенством Корна. Доказательству теоремы 2.2 предпошлем ряд вспомогательных утверждений.

**Лемма 2.1.** *Пусть* $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, \Gamma) = \min\limits_{z\in\Gamma} |x - z|$. *Тогда*

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leqslant |x - y| \quad \forall\, x, y \in \Omega, \tag{2.3}$$

$$\rho \in W_\infty^1(\Omega). \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть точки $x, y$ принадлежат области $\Omega$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\rho(x) \geqslant \rho(y)$, и пусть $\rho(y) = |y - z_y|$. Тогда

$$\rho(x) - \rho(y) \leqslant |x - z_y| - |y - z_y| \leqslant |x - z_y - (y - z_y)| = |x - y|.$$

Очевидно, что $\rho(x) = 0$, $x \in \Gamma$. Положим

$$v(x) = \begin{cases} \rho(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

Используя формулу (15.4), с. 80, для любых $h > 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$ можем написать, что

$$\int\limits_{\Omega} v D_i^h \varphi \, dx = -\int\limits_{\Omega} \varphi D_i^{-h} v \, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.5}$$

Понятно, что $\|D_i^{-h} v\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant 1$ для любого $h > 0$, и по теореме о $*$-слабой компактности любого ограниченного множества пространства $L_\infty(\Omega)$ (см. [25, теорема 5, с. 254]) можно указать такую функцию $w_i \in L_\infty(\Omega)$ и такую последовательность $h_k \to 0$ при $k \to \infty$, что

$$\int\limits_{\Omega} \eta D_i^{-h} v \, dx \to \int\limits_{\Omega} w_i \eta \, dx \text{ при } k \to \infty \quad \forall\, \eta \in L_1(\Omega).$$

Рассуждая далее точно так же, как при доказательстве теоремы 15.2, с. 79, можно показать, что функция $w_i$ — обобщенная производная функции $v$. $\square$

**Лемма 2.2.** *Пусть $v \in C^\infty(\Omega) \cap L_2(\Omega)$, $\rho^2 \Delta v \in L_2(\Omega)$. Тогда $\rho \nabla v \in L_2(\Omega)$ и существует не зависящая от $v$ постоянная $c > 0$ такая, что*

$$\|\rho |\nabla v|\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c \left( \|v\|_{L_2(\Omega)} + \|\rho^2 \Delta v\|_{L_2(\Omega)} \right). \tag{2.6}$$

Доказательство. Для достаточно малых положительных $\delta$ положим $\Omega_{(\delta)} = \Omega \cap \{x : \rho(x) > \delta\}$. Очевидно, что $\rho(x) = \delta$ на $\partial\Omega_{(\delta)}$. Поэтому, применяя формулу интегрирования по частям, а затем неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\int\limits_{\Omega_{(\delta)}} (\rho(x)-\delta)^2|\nabla v|^2\,dx =$$
$$= -\int\limits_{\Omega_{(\delta)}} 2(\rho(x)-\delta)\nabla\rho\cdot\nabla v\,dx - \int\limits_{\Omega_{(\delta)}} (\rho(x)-\delta)^2 v\Delta v dx \leqslant$$
$$\leqslant c_1\Big(\|(\rho-\delta)|\nabla v|\|_{L_2(\Omega_{(\delta)})}\|v\|_{L_2(\Omega_{(\delta)})}+$$
$$+\|v\|_{L_2(\Omega_{(\delta)})}\|(\rho-\delta)^2\Delta v\|_{L_2(\Omega_{(\delta)})}\Big).$$

Применяя для оценки первого слагаемого в правой части последнего неравенства неравенство Коши с $\varepsilon$, получим

$$\|(\rho-\delta)|\nabla v|\|_{L_2(\Omega_{(\delta)})} \leqslant$$
$$\leqslant c_2\Big(\|v\|_{L_2(\Omega_{(\delta)})} + \|(\rho-\delta)^2\Delta v\|_{L_2(\Omega_{(\delta)})}\Big), \quad (2.7)$$

где $c_2>0$ — постоянная, не зависящая от $\delta$. Устремляя $\delta$ в неравенстве (2.7) к нулю, получим, что

$$\|\rho|\nabla v|\|_{L_2(G)} \leqslant c_2\left(\|v\|_{L_2(\Omega)} + \|\rho^2\Delta v\|_{L_2(\Omega)}\right)$$

для любой области $G\subset\subset\Omega$. Отсюда следует, что $\rho|\nabla v|\in L_2(\Omega)$ и выполнена оценка (2.6). $\square$

**Лемма 2.3.** *Пусть $f\in C^1[0,b]$, где $b$ — произвольное положительное число. Тогда существует положительная не зависящая от $f$ постоянная $c$ такая, что*

$$\int\limits_0^b f^2(t)\,dt \leqslant c\Bigg(\int\limits_{b/2}^b f^2(t)\,dt + \int\limits_0^b t^2(f')^2(t)\,dt\Bigg). \quad (2.8)$$

Доказательство. Для любого $\tau\in(0,b)$, очевидно, выполняется равенство

$$\int\limits_0^\tau f^2\,dt = f^2(\tau)\tau - 2\int\limits_0^\tau ff't\,dt.$$

По теореме о среднем существует $\tau \in (b/2, b)$ такое, что

$$f^2(\tau) = \frac{2}{b} \int\limits_{b/2}^{b} f^2\, dt.$$

При указанном выборе $\tau$ после применения неравенства Коши с $\varepsilon$ получим

$$\int\limits_0^\tau f^2\, dt = \frac{2\tau}{b} \int\limits_{b/2}^{b} f^2\, dt - 2\int\limits_0^\tau f f' t dt \leqslant 2\int\limits_{b/2}^{b} f^2\, dt + \\ + \varepsilon \int\limits_0^\tau f^2\, dt + \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^\tau (f't)^2\, dt.$$

Полагая здесь $\varepsilon = 1/2$, будем иметь

$$\int\limits_0^\tau f^2\, dt \leqslant 4\biggl(\int\limits_{b/2}^{b} f^2\, dt + \int\limits_0^\tau (f't)^2\, dt\biggr).$$

Отсюда очевидным образом следует (2.8). $\square$

**Лемма 2.4.** *Предположим, что*

$$v \in C^\infty(\Omega) \cap L_2(\Omega), \quad \rho^2 \partial^2 v / \partial x_i \partial x_j \in L_2(\Omega),$$

$i, j = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда существует не зависящая от* $v$ *постоянная* $c > 0$ *такая, что*

$$\|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c \left( \|v\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \rho \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L_2(\Omega)} \right). \tag{2.9}$$

Доказательство. Поскольку область $\Omega$ липшицева, ее можно покрыть областями $\Omega_0$, $\Omega_1$, $\ldots$, $\Omega_N$ такими, что

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega \colon \rho(x) > \delta\},$$

$\delta > 0$ и достаточно мало,

$$\Omega_i = \{x \in \Omega : \psi_i(y') < y_n < \psi_i(y') + b_i\},\ b_i > 0,$$

$$y' = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}),\ y' \in \Omega_i',\ \Gamma \cap \partial\Omega_i = \{x \in \Gamma,\ y_n = \psi_i(y')\},$$

где $y_1$, $y_2$, ..., $y_n$ — координаты точки $x \in \overline{\Omega}$ в местной декартовой системе координат, функция $\psi_i$ удовлетворяет условию Липшица на $\Omega_i'$, $i = 1, 2, \ldots, N$ (см. определение 8.1, с. 41). Через $\Omega_0^{\delta/2}$ будем обозначать $\delta/2$ окрестность области $\Omega_0$. По лемме 2.2 имеем

$$\int\limits_{\Omega_0^{\delta/2}} \rho_{\delta/2}(x)|\nabla v|^2\,dx \leqslant c \int\limits_{\Omega_0^{\delta/2}} \left(v^2 + \rho_{\delta/2}(x)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\right)^2\right) dx, \quad (2.10)$$

где $\rho_{\delta/2}(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega_0^{\delta/2})$. Из неравенства (2.10), очевидно, вытекает, что

$$\int\limits_{\Omega_0} |\nabla v|^2\,dx \leqslant c_\delta \int\limits_{\Omega_0^{\delta/2}} \left(v^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\right)^2\right) dx, \quad (2.11)$$

где $c_\delta > 0$ — постоянная, зависящая только от $\delta$. Фиксируем теперь некоторое $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, а затем некоторую точку $y' \in \Omega_i'$. Для функции $\partial v(y', y_n)/\partial y_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$, используем на отрезке $[\psi_i(y') + \varepsilon,\ \psi_i(y') + \varepsilon + b_i]$, где $\varepsilon > 0$ и достаточно мало, лемму 2.3. Получим

$$\int\limits_{\psi_i(y')+\varepsilon}^{\psi_i(y')+\varepsilon+b_i} \left|\frac{\partial v(y', y_n)}{\partial y_j}\right|^2 dy_n \leqslant c\Biggl(\int\limits_{\psi_i(y')+\varepsilon+b_i/2}^{\psi_i(y')+\varepsilon+b_i} \left|\frac{\partial v(y', y_n)}{\partial y_j}\right|^2 dy_n +$$
$$+ \int\limits_{\psi_i(y')+\varepsilon}^{\psi_i(y')+\varepsilon+b_i} \left(\frac{\partial^2 v(y', y_n)}{\partial y_j \partial y_n}\right)^2 (\psi_i(y') + \varepsilon - y_n)^2 dy_n\Biggr). \quad (2.12)$$

Функция $\psi_i$ липшицева, поэтому

$$|\psi_i(y') + \varepsilon - y_n| \leqslant \rho_i^\varepsilon(y) + |\psi_i(y') - \psi_i(\tilde{y}')| \leqslant$$
$$\leqslant \rho(y) + L|y' - \tilde{y}'| \leqslant (1 + L)\rho(y).$$

Здесь $\rho_i^\varepsilon(y)$ — расстояние от $y$ до $\partial\Omega_i+\varepsilon$, $\rho(y)$ — расстояние от $y$ до Г. Интегрируя неравенство (2.12) по $y'$, а затем устремляя $\varepsilon$ к нулю, получим

$$\int\limits_{\Omega_i}\left|\frac{\partial v}{\partial y_j}\right|^2 dy \leqslant c\biggl(\int\limits_{\Omega_0}\left|\frac{\partial v}{\partial y_j}\right|^2 dy+\int\limits_{\Omega_i}\left|\frac{\partial^2 v}{\partial y_j\partial y_n}\right|^2\rho^2(y)\,dy\biggr).$$

Переходя к первоначальной декартовой системе координат $x_1$, $x_2$, …, $x_n$, будем иметь

$$\int\limits_{\Omega_i}|\nabla v|^2\,dx\leqslant c\biggl(\int\limits_{\Omega_i}\rho^2(x)\sum_{j,k=1}^n\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x_j\partial x_k}\right|^2 dx+\int\limits_{\Omega_0}|\nabla v|^2\,dx\biggr). \quad (2.13)$$

Суммируя неравенства (2.13) по $i$ от 1 до $N$ и используя (2.11), получим

$$\int\limits_{\Omega}\nabla v|^2\,dx\leqslant c\left(\int\limits_{\Omega}\rho^2(x)\sum_{j,k=1}^n\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x_j\partial x_k}\right|^2 dx+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{\Omega_0^{\delta/2}}\sum_{j,k=1}^n\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x_j\partial x_k}\right|^2 dx+\int\limits_{\Omega_0^{\delta/2}}v^2\,dx\right). \quad (2.14)$$

Из (2.14) вытекает оценка (2.9), поскольку $\rho(x)>\delta>0$ в $\Omega_0$. $\square$

Доказательство теоремы 2.2. Понятно, что (2.2) достаточно установить для $u\in C^\infty(\overline{\Omega})$. Заметим, прежде всего, что

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}=2\frac{\partial}{\partial x_j}\varepsilon_{ij}(u)-\frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon_{jj}(u),\quad i,j=1,2,\ldots,n.$$

Пусть $\Omega_0$ — ограниченная область такая, что $\Omega\subset\subset\Omega_0$. Положим

$$g_{ij}(x)=\begin{cases}\varepsilon_{ij}(u), & x\in\Omega,\\ 0, & x\in\Omega_0\setminus\overline{\Omega},\end{cases}$$

$i,j=1,2,\ldots,n$, и определим функцию $v_i\in H_0^1(\Omega)$ как решение задачи Дирихле

$$\int\limits_{\Omega_0}\nabla v_i\cdot\nabla\eta\,dx=\int\limits_{\Omega_0}\sum_{j=1}^n\left(2g_{ij}\frac{\partial\eta}{\partial x_j}-g_{jj}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\right)dx\quad\forall\,\eta\in H_0^1(\Omega_0).$$

Как нам уже известно (см. §1, гл. 2), эта задача имеет решение, и справедлива априорная оценка

$$\|\nabla v_i\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|\nabla v_i\|_{L_2(\Omega_0)} \leqslant c\||\mathcal{E}(u)|\|_{L_2(\Omega)}. \qquad (2.15)$$

При этом $v_i \in C^\infty(\Omega)$,

$$\Delta v_i = \sum_{j=1}^{n} \left( 2\frac{\partial}{\partial x_j}\varepsilon_{ij}(u) - \frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon_{jj}(u) \right),$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, так как $g_{ij} \in C^\infty(\Omega)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, (см. следствие 1.1, с. 126). Пусть далее $v = (v_1, v_2, \ldots, n)$, $w = v - u$. Тогда, очевидно, $w \in C^\infty(\Omega)$, $\Delta w = 0$ в $\Omega$,

$$\Delta(e_{ij}(w)) = 0, \quad x \in \Omega, \qquad (2.16)$$

$i, j = 1, 2, \ldots, n$. Вследствие (2.15) получаем

$$\|\mathcal{E}(w)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|\mathcal{E}(u)\|_{L_2(\Omega)} + \|\mathcal{E}(v)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant \|\mathcal{E}(u)\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\|\mathcal{E}(u)\|_{L_2(\Omega)}.$$

Применяя теперь лемму 2.2 и равенства (2.16), будем иметь

$$\|\rho \nabla e_{ij}(w)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\|e_{ij}(w)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|\mathcal{E}(u)\|_{L_2(\Omega)}, \qquad (2.17)$$

$i, j = 1, 2, \ldots, n$. Заметим, далее, что

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_p \partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_l} + \frac{\partial w_l}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_p} + \frac{\partial w_p}{\partial x_i}\right) - \\ - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial w_l}{\partial x_p} + \frac{\partial w_p}{\partial x_l}\right).$$

Поэтому из (2.17) вытекает, что

$$\left\| \rho \sum_{i,j=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right| \right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\||\mathcal{E}(u)|\|_{L_2(\Omega)}.$$

На основании леммы 2.4 отсюда получаем, что

$$\|\nabla w\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\left(\left\|\rho\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}\right|\right\|_{L_2(\Omega)} + \|w\|_{L_2(\Omega)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant c\left(\|\mathcal{E}(u)\|_{L_2(\Omega)} + \|w\|_{L_2(\Omega)}\right), \quad (2.18)$$

поэтому

$$\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|\nabla w\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant c(\|\mathcal{E}(u)\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla w\|_{L_2(\Omega)} +$$
$$+ \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}) \leqslant c(\|\mathcal{E}(u)\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)} + \|v\|_{H^1(\Omega)}), \quad (2.19)$$

но в силу (2.15) справедлива оценка $\|v\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c\|\mathcal{E}(u)\|_{L_2(\Omega)}$ и, таким образом, неравенство (2.2) установлено. $\square$

Обозначим через $\mathcal{R}$ множество функций $u$ из пространства $\mathbb{H}_1$, имеющих вид $u(x) = c + Wx$, $x \in \Omega$, где $c \in \mathbb{R}^n$, $W = -W^T$ есть кососимметричная матрица. Нетрудно убедиться, что $\mathcal{R}$ — подпространство пространства $\mathbb{H}_1$.

**Лемма 2.5.** *Пусть $u \in \mathbb{H}_1$, $\mathcal{E}(u) = 0$ на $\Omega$. Тогда $u \in \mathcal{R}$* [1]*.*

Доказательство. Для функции $u \in \mathbb{H}_1$ такой, что $\mathcal{E}(u) = 0$ на $\Omega$, построим ее усреднение по Соболеву

$$u^h(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_h(x-y)u(y)\,dy,$$

см. с. 25. Как установлено в ходе доказательства теоремы 8.1, с. 39,

$$\frac{\partial u_i^h(x)}{\partial x_j} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_h(x-y)\frac{\partial u_i(y)}{\partial y_j}\,dy \quad x \in \Omega',$$

где $\Omega'$ — любая строго внутренняя подобласть области $\Omega$. Отсюда, очевидно, вытекает, что

$$\frac{\partial u_i^h(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^h(x)}{\partial x_i} = 0. \quad (2.20)$$

[1] Очевидно, справедливо и обратное, если $u \in \mathcal{R}$, то $\mathcal{E}(u) = 0$ на $\Omega$.

Элементарные вычисления показывают, что

$$\frac{\partial^2 u_i^h(x)}{\partial x_k \partial x_p} = -\frac{\partial^2 u_k^h(x)}{\partial x_i \partial x_p} = \frac{\partial^2 u_p^h(x)}{\partial x_i \partial x_k} = -\frac{\partial^2 u_i^h(x)}{\partial x_p \partial x_k},$$

следовательно, $\partial^2 u_i^h(x)/\partial x_k \partial x_p = 0$ для любых $i, k, p = 1, 2, \ldots, n$, $x \in \Omega'$. Отсюда получаем, что

$$u_i^h(x) = c_i^h + \sum_{j=1}^{n} w_{ij}^h x_j, \quad i = 1, 2 \ldots, n, \tag{2.21}$$

где $c_i^h$, $w_{ij}^h$ — вещественные числа, причем вследствие (2.20) имеем $w_{ij}^h = -w_{ji}^h$, $i, j = 1, 2 \ldots, n$. Равенства (2.21) можно представить в матричной форме $u^h = c^h + W^h x$, $x \in \Omega'$, $W^h = -(W^h)^T$. Вследствие произвольности $\Omega' \subset\subset \Omega$, очевидно, можно считать, что $u^h \in \mathcal{R}$, причем $u^h \to u$ при $h \to 0$ в пространстве $H_1(\Omega')$ (см. теорему 8.1, с. 39). Поскольку $\mathcal{R}$ замкнуто, то $u \in \mathcal{R}$. $\Box$

**3. Неравенства типа Фридрихса.** Оператор $A$, будем называть коэрцитивным на $\mathbb{H}_1$ если существует положительная постоянная $c_0$ такая

$$\int_{\Omega} (A(x)\nabla u \cdot \nabla u + c_0 u \cdot u)\, dx \geqslant \|u\|_1^2 \quad \forall\, u \in \mathbb{H}_1. \tag{3.1}$$

Если оператор $A$ неотрицателен т. е. $AM \cdot M \geqslant 0\ \forall\, M \in \mathbb{M}_{m,n}$, то $|u|_A = \left( \int\limits_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla u\, dx \right)^{1/2}$ есть полунорма на пространстве $\mathbb{H}_1$. Ядро этой полунормы будем обозначать через $\mathcal{R}_a$.

**Лемма 3.1.** *Пусть оператор $A$ неотрицателен и коэрцитивен на $\mathbb{H}_1$, $V$ — подпространство пространства $\mathbb{H}_1$ такое, что*

$$\mathcal{R}_a \cap V = \{0\}.$$

*Тогда существует положительная постоянная $c$ такая, что*

$$\|u\|_0 \leqslant c|u|_A \quad \forall\, u \in V. \tag{3.2}$$

В некоторых случая более удобным оказывается результат, аналогичный лемме 3.1, для формулировки которого нам потребуются следующие определения.

Функционал $F$ называется положительно однородным на пространстве $\mathbb{H}_1$, если

$$F(tu) = tF(u)$$

для любой функции $u \in \mathbb{H}_1$ и для любого неотрицательного $t$.

Функционал $F$ называется слабо полунепрерывным снизу на $\mathbb{H}_1$, если для любой слабо сходящейся последовательности $\{u_n\} \subset \mathbb{H}_1$, $u_n \rightharpoonup u_0$,

$$F(u_0) \leqslant \varliminf_{n \to \infty} F(u_n).$$

**Лемма 3.2.** *Пусть оператор $A$ неотрицателен и коэрцитивен на $\mathbb{H}_1$, $F$ — неотрицательный положительно однородный слабо полунепрерывный снизу функционал на $\mathbb{H}_1$. Пусть, далее, из равенства $|u|_A^2 + F^2(u) = 0$ следует, что $u = 0$. Тогда существует положительная постоянная $c$ такая, что*

$$\|u\|_0^2 \leqslant c(|u|_A^2 + F^2(u)) \quad \forall\, u \in \mathbb{H}_1. \tag{3.3}$$

Доказательства этих лемм практически дословно совпадают с доказательством теоремы Соболева об эквивалентных нормировках (см. с. 73).

Применение лемм 3.1, 3.2 связано с вычислением ядра $\mathcal{R}_a$.

Приведем соответствующие примеры.

1. Если оператор $A$ удовлетворяет условию Лежандра, то $\mathcal{R}_a$ состоит из вектор-функций, тождественно постоянных на $\Omega$.

2. Если $A$ — оператор теории упругости, то, как следует из леммы 2.5, множество $\mathcal{R}_a$ состоит из функций $u$, вычисляемых по формуле $u(x) = c + Wx$, $x \in \Omega$, где $c = \text{const}$, $W$ — постоянная кососимметричная матрица. Заметим, что множество решений уравнения

$$Wx + c = 0 \tag{3.4}$$

есть гиперплоскость вида

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{l} d_k \varphi_k, \tag{3.5}$$

где $x_0$ — частное решение уравнения (3.4), а $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\ldots$, $\varphi_l$ — фундаментальная система решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (3.4), $l$ — размерность ядра матрицы $W$.

Нетрудно убедиться, что ранг всякой ненулевой кососимметричной матрицы $W$ не меньше двух. Действительно, в противном случае все строки матрицы $W$ получались бы умножением одной строки этой матрицы на некоторые числа, но это невозможно, так как все диагональные элементы кососимметричной матрицы равны нулю.

Поэтому размерность гиперплоскости (3.5) не превышает $n-2$, значит, множество решений уравнения вида (3.4) с кососимметричной матрицей $W$ не может заполнять никакого куска поверхности $\Gamma$ положительной меры.

Таким образом, в обоих случаях, если функция $u \in \mathcal{R}_a$ обращается в нуль на некоторой части $\Gamma$ положительной меры, то она есть тождественный нуль на области $\Omega$.

## § 3. Исследование разрешимости краевых задач

### 1. Основная теорема о разрешимости.

**Теорема 1.1.** *Пусть оператор $A$ коэрцитивен на пространстве $\mathbb{H}_1$. Тогда задача, найти функцию $u \in \mathbb{H}_1$, удовлетворяющую интегральному тождеству*

$$\boldsymbol{a}(u,\eta) = \boldsymbol{l}(\eta) \quad \forall\,\eta \in \mathbb{H}_1 \tag{1.1}$$

(*см.* (2.1), *с.* 178) *эквивалентна уравнению*

$$u + \mathbf{T}u = \varphi, \tag{1.2}$$

*где $\varphi$ — заданный элемент из $\mathbb{H}_1$, $\mathbf{T} : \mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_1$ — линейный вполне непрерывный оператор.*

Доказательство. Задача (1.1) эквивалентна уравнению

$$\mathbf{A}u = \mathbf{A}_0 u + \mathbf{T}_0 u = \varphi_0, \tag{1.3}$$

где операторы $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{T}_0 : \mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_1$ и $\varphi_0 \in \mathbb{H}_1$ определены тождествами

$$(\mathbf{A}_0 u, \eta)_1 = \int\limits_{\Omega} (A\nabla\eta \cdot \nabla\eta + c_0 u \cdot \eta)\, dx \quad \forall\, u, \eta \in \mathbb{H}_1,$$

$$(\mathbf{T}_0 u, \eta)_1 = \int\limits_{\Omega} (Bu \cdot \nabla \eta + C\nabla u \cdot \eta + Du \cdot \eta - c_0 u \cdot \eta)\, dx +$$
$$+ \int\limits_{\Gamma} Gu \cdot \eta\, dx \quad \forall\, u, \eta \in \mathbb{H}_1,$$

$$(\varphi_0, \eta)_1 = l(\eta) \quad \forall \eta \in \mathbb{H}_1.$$

Теперь достаточно заметить, что оператор $\mathbf{A}_0$, ограничен, вследствие (3.1) положительно определен, и, значит, по лемме Лакса — Мильграма имеет ограниченный обратный, а оператор $\mathbf{T}_0$, линеен и вполне непрерывен. Последний факт обосновывается аналогично случаю одного уравнения, см. лемму 5.2, с. 118, и упражнение 5.1, с. 118.

**Следствие 1.1.** *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1. *Тогда задача* (1.1) *имеет единственное решение при любых* $f \in L_2(\Omega)$, $F \in L_2(\Omega)$, $g \in L_2(\Gamma)$, *если соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение.*

**Следствие 1.2.** *Пусть* $\mathbb{V}$ — *подпространство пространства* $\mathbb{H}_1$. *Задача* (1.3) *имеет единственное решение* $u \in \mathbb{V}$ *при любом* $\varphi_0 \in \mathbb{V}$, *если выполнено неравенство* (3.1) *для всех* $u \in \mathbb{V}$, $\mathbf{A}_0 + \mathbf{T}_0 : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ *и соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение из* $\mathbb{V}$.

Выбирая соответствующим образом подпространство $\mathbb{V} \subset \mathbb{H}_1$, приходим к обобщенной постановке той или иной краевой задачи для уравнения (1.2). Каждый раз при этом будем предполагать выполненными условия, обеспечивающие коэрцитивность оператора $A$, так что для доказательства существования и единственности решения соответствующей задачи будет достаточно установить, что она имеет не более одного решения.

## 2. Примеры однозначно разрешимых краевых задач.

**2.1. Задача Дирихле.** В этом случае $\mathbb{V}$ полагается равным $\mathbb{H}_{1,0}$. Понятно, что здесь речь идет о решении системы уравнений (1.2) при граничном условии $u(x) = 0,\ x \in \Gamma$.

В простейших ситуациях для доказательства единственности обобщенного решения задачи удается использовать принцип максимума. Так, если $m = 1$ и оператор $A$ удовлетворяет условию Лежандра, то задача Дирихле для уравнения (1.2) может иметь не более одного решения, если

$$\int\limits_{\Omega} (Dv + B \cdot \nabla v)\, dx \geqslant 0 \tag{2.1}$$

для любой неотрицательной функции $v$ из $C_0^1(\Omega)$ (см., теорему 4.2, с. 116). Класс эллиптических систем уравнений, для гладких решений которых справедлив принцип максимума описан в § 4, с. 205.

Укажем достаточные условия, при которых оператор $\mathbf{A}$ положительно определен на $\mathbb{H}_{1,0}$. Эти условия, очевидно, будут гарантировать существование и единственность обобщенного решения задачи Дирихле.

Пусть оператор $A$ удовлетворяет условию

$$c_0 \|u\|_{1,0}^2 \leqslant \int\limits_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla u\, dx \quad \forall u \in \mathbb{H}_{1,0}, \tag{2.2}$$

где $c_0$ — положительная постоянная, не зависящая от $\Omega$ (например, оператор $A$ удовлетворяет условию Лежандра, является оператором теории упругости, не зависит от $x$ и удовлетворяет условию Лежандра — Адамара, или $A \in C(\overline{\Omega})$ удовлетворяет условию Лежандра — Адамара, а $\operatorname{mes}(\Omega)$ достаточно мала). Тогда

$$(\mathbf{A}u, u)_1 \geqslant \int\limits_{\Omega} (c_0 |\nabla u|^2 - 2c_1 |u| |\nabla u| + Du \cdot u)\, dx, \tag{2.3}$$

где $c_1 = \max(\||B|\|_{L_\infty(\Omega)}, \||C|\|_{L_\infty(\Omega)})$. Воспользуемся очевидным равенством $D = D_0 + D_1$, где

$$D_0 = (1/2)(D + D^T), \quad D_1 = (1/2)(D - D^T).$$

Понятно, что $D_1 u \cdot u = 0$, следовательно, $Du \cdot u = D_0 u \cdot u$. Матрица $D_0$ симметрична, поэтому существует полная ортонормированная система ее собственных векторов $\{e_k\}_{k=1}^n$, $D_0 e_k = \lambda_k e_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Собственные числа матрицы $D_0$ занумеруем в порядке неубывания. Будем считать при этом, что числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ положительны, числа $\lambda_t, \lambda_{t+1}, \ldots, \lambda_n$ отрицательны. Как известно, $|\lambda_k| \leqslant |D_0|$, $k = 1, 2, \ldots, n$, поэтому $\lambda_k \in L_\infty(\Omega)$. Разлагая $u$ по базису $\{e_k\}_{k=1}^n$, получим

$$Du \cdot u = D_0 u \cdot u = \sum_{k=1}^{r} d_k^2 \lambda_k + \sum_{k=t}^{n} d_k^2 \lambda_k,$$

где $d_k = u \cdot e_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом,

$$Du \cdot u \geqslant \lambda_r \sum_{k=1}^{r} d_k^2 - |\lambda_n||u|^2.$$

Будем различать два случая:

1) $r = n$ для почти всех $x \in \Omega$, $c_2^+ = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} \lambda_n(x) > 0$; в этом случае $Du \cdot u \geqslant c_2^+|u|^2$ на $\Omega$.

2) $Du \cdot u \geqslant -c_2^-|u|^2$ на $\Omega$, где $c_2^- = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |\lambda_n(x)|$; по неравенству Фридрихса получаем, что

$$\int\limits_{\Omega} Du \cdot u dx \geqslant -c_\Omega c_2^- \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx.$$

В первом случае имеем

$$(\mathbf{A}u, u)_1 \geqslant \int\limits_{\Omega} ((c_0 - c_1\varepsilon)|\nabla u|^2 + (c_2^+ - c_1/\varepsilon)|u|^2) \, dx \tag{2.4}$$

для любого положительного $\varepsilon$. Во втором случае

$$(\mathbf{A}u, u)_1 \geqslant (c_0 - 2c_1 c_\Omega^{1/2} - c_2^- c_\Omega) \int\limits_{\Omega} (|\nabla u|^2 \, dx. \tag{2.5}$$

Из оценок (2.4), (2.5) следует, что оператор $\mathbf{A}$ положительно определен либо, когда $c_2^+$ достаточно велико, либо, когда $c_1, c_2^-$ достаточно малы, либо, когда постоянная Фридрихса $c_\Omega$ достаточно мала. Последнее, как нам известно, выполнено, если $\operatorname{mes}\Omega$ достаточно мала.

Таким образом, картина разрешимости задачи Дирихле для системы (1.2) вполне аналогична случаю одного уравнения (см., теорему 3.1, с. 110).

**2.2. Третья краевая задача.** В этом случае $\mathbb{V}$ совпадает с пространством $\mathbb{H}_1$. Это означает, что решается система уравнений (1.2) при граничном условии

$$(A\nabla u + Bu)\nu + Gu = g, \quad x \in \Gamma.$$

Пусть оператор $A$ удовлетворяет условию Лежандра или является оператором теории упругости. Нетрудно убедиться (см. примеры 1, 2, на с. 195), что в обоих этих случаях выполнены условия леммы 3.2 при $F^2(u) = \int\limits_\Gamma |u(x)|^2\,dx$, и, следовательно, норма $\|u\|_1$ эквивалентна норме

$$\|u\|_{1,*} = \left(\int\limits_\Omega A\nabla u\cdot\nabla u\,dx + \int\limits_\Gamma |u|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Поэтому, если предположить, что матица $G$ равномерно по $x\in\Gamma$ положительно определена, то рассуждая точно так же, как в случае первой граничной задачи, нетрудно показать, что оператор $\mathbf{A}$ положительно определен на $\mathbb{H}_1$, если постоянные $c_1$, $c_2^-$ достаточно малы.

**2.3. Задача Неймана.** Под задачей Неймана понимается задача отыскания функции $u\in\mathbb{H}_1$ такой, что

$$\int\limits_\Omega A\nabla u\cdot\nabla\eta\,dx = \int\limits_\Omega (f\cdot\eta + F\cdot\nabla\eta)\,dx + \int\limits_\Gamma g\cdot\eta\,dx \quad \forall\,\eta\in\mathbb{H}_1. \quad (2.6)$$

В этом пункте будем предполагать, что $A$ — симметричный неотрицательный коэрцитивный оператор. Из симметрии оператора следует, что если $\eta\in\mathcal{R}_a$, то $(u,\eta)_a = 0$ для любого $u\in\mathbb{H}_1$. Поэтому для существования решения задачи (2.6) необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\int\limits_\Omega (f\cdot\eta + F\cdot\nabla\eta)\,dx + \int\limits_\Gamma g\cdot\eta\,dx = 0 \quad \forall\,\eta\in\mathcal{R}_a. \qquad (2.7)$$

Пусть $\mathbb{H}_\perp = \{u\in\mathbb{H}_1 : (u,r)_1 = 0\ \forall\,r\in\mathcal{R}_a\}$. Если условие (2.7) выполнено, то существует и при том только один элемент $\tilde f\in\mathbb{H}_\perp$ такой, что

$$(\tilde f,\eta)_1 = \int\limits_\Omega (f\cdot\eta + F\cdot\nabla\eta)\,dx + \int\limits_\Gamma g\cdot\eta\,dx \quad \forall\,\eta\in\mathbb{H}_1.$$

Пусть, далее, оператор $\mathbf{A}:\mathbb{H}_1\to\mathbb{H}_1$ определен равенством

$$(\mathbf{A}u,\eta)_1 = \int\limits_\Omega A\nabla u\cdot\nabla\eta\,dx \quad \forall u,\eta\in\mathbb{H}_1.$$

Из симметрии оператора $A$ вытекает, что $\mathbf{A}u \in \mathbb{H}_\perp$ для любого $u \in \mathbb{H}_1$. По лемме 3.1 имеем, что $|u|_a \geqslant c|u|_0$ для любого $u \in \mathbb{H}_\perp$, следовательно, уравнение $\mathbf{A}u = \tilde{f}$ имеет единственное решение $u \in \mathbb{H}_\perp$.

**2.4. Задача о жестком контакте. Задача о нормальной нагрузке**[1]**.** В этом пункте будем предполагать, что $\Gamma \in C^1$. Будем полагать также, что $2 \leqslant m \leqslant n$. Всякому вектору $a \in \mathbb{R}^n$ поставим в соответствие вектор $\tilde{a} \in \mathbb{R}^m$, считая, что $\tilde{a}_i = a_i$ для $i = 1, 2, \ldots, m$. Пусть далее

$$\mathbb{V}_\tau = \{u \in \mathbb{H}_1 : u(x) \cdot \tilde{\nu}(x) = 0, \quad x \in \Gamma\}, \tag{2.8}$$

$$\mathbb{V}_\nu = \{u \in \mathbb{H}_1 : u(x) \wedge \tilde{\nu}(x) = 0, \quad x \in \Gamma\}. \tag{2.9}$$

Напомним, что для векторов $a, b \in \mathcal{R}^m$ матрица $a \wedge b$ (внешнее произведение) определяется равенством $a \wedge b = \{a_i b_j - a_j b_i\}_{i,j=1}^m$. Нетрудно убедиться, что соотношение $a \wedge b = 0$ эквивалентно коллинеарности векторов $a, b$.

Будем говорить, что функция $u \in \mathbb{V}_\tau$ есть решение задачи о жестком контакте, если для любой функции $\eta \in \mathbb{V}_\tau$

$$\int\limits_\Omega ((A\nabla u + Bu) \cdot \nabla\eta + C\nabla u \cdot \eta + Du \cdot \eta)\, dx = \\ = \int\limits_\Omega (f \cdot \eta + F \cdot \nabla\eta)\, dx. \tag{2.10}$$

Будем говорить, что функция $u \in \mathbb{V}_\nu$ есть решение задачи о нормальной нагрузке, если для нее выполнено равенство (2.10) при любой функции $\eta \in \mathbb{V}_\nu$.

Нетрудно убедиться, что для задачи о жестком контакте граничное условие $(A\nabla u + Bu)\nu \wedge \tilde{\nu} = 0,\ x \in \Gamma$ является естественным. Для задачи о нормальной нагрузке естественным граничным условием является условие $(A\nabla u + Bu)\nu \cdot \tilde{\nu} = 0,\ x \in \Gamma$.

Исследуем сначала разрешимость этих задач, предполагая, что для оператора $A$ выполнено условие Лежандра (3.1), с. 179. Очевидно, что в этом случае пространство $\mathcal{R}_a$ состоит из векторов, тождественно постоянных на $\Omega$. Множество всех нормалей

[1]Эти названия связаны с соответствующими граничными задачами для системы уравнений теории упругости [45], [27, гл. 4], аналогичные задачи рассматривались также в [11], [48], [15].

к поверхности Γ содержит при принятых условиях все векторы естественного базиса пространства $\mathbb{R}^n$. Поэтому $\mathcal{R}_a \cap \mathbb{V} = \{0\}$, если $\mathbb{V} = \mathbb{V}_\tau$ или $\mathbb{V} = \mathbb{V}_\nu$. Таким образом, условия леммы 3.1 выполнены и, следовательно, для рассматриваемых задач справедливы те же утверждения об однозначной разрешимости, что и для задачи Дирихле.

Предположим теперь, что оператор $A$ есть оператор теории упругости. Структура пространства $\mathcal{R}_a \cap \mathbb{V}_\tau$ в этом случае зависит от области $\Omega$.

**Лемма 2.1.** *Пусть $c \in \mathbb{R}^n$, $W$ — произвольная кососимметричная матрица порядка $n$. Тогда существует $(n-1)$-мерная поверхность $S$ класса $C^1$ такая, что*

$$(c + Wx) \cdot \nu(x) = 0 \quad \forall\, x \in S. \tag{2.11}$$

Доказательство. Хорошо известно, что всякая кососимметричная матрица ортогонально подобна блочно-диагональной матрице, максимальный размер каждого диагонального блока которой не больше двух. Поэтому, выполняя при необходимости поворот и сдвиг декартовой системы координат, можно считать, что

$$\begin{multline} c + Wx = (c_1, c_2, \ldots, c_p, -\delta_{p+1}x_{p+2}, \delta_{p+1}x_{p+1}, \ldots, \\ -\delta_{n-1}x_n, \delta_{n-1}x_{n-1})\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.12} \end{multline}$$

где числа $\delta_{p+1}, \delta_{p+2}, \ldots, \delta_{n-1}$ положительны. Зададим поверхность $S$ параметрически:

$$x_k = \varphi_k(t),\ k = 1, 2, \ldots, n,\ t \in B \subset\ \mathbb{R}^{n-1}.$$

Подчиним при этом функции $\varphi_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, условиям

$$\begin{multline} \frac{\partial \varphi_k(t)}{\partial t_{n-1}} = c_k, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \\ \frac{\partial \varphi_{p+1}(t)}{\partial t_{n-1}} = -\delta_{p+1}\varphi_{p+2}(t),\ \frac{\partial \varphi_{p+2}(t)}{\partial t_{n-1}} = \delta_{p+1}\varphi_{p+1}(t),\ \ldots, \\ \frac{\partial \varphi_{n-1}(t)}{\partial t_{n-1}} = -\delta_{n-1}\varphi_n(t), \frac{\partial \varphi_n(t)}{\partial t_{n-1}} = \delta_{n-1}\varphi_{n-1}(t). \tag{2.13} \end{multline}$$

Тогда вектор $c + Wx$ при любом $x \in S$ будет лежать в плоскости, касательной к $S$, и условие (2.11) будет выполнено. Система уравнений (2.13) имеет решение

$$\varphi_k = c_k t_{n-1} + g_k(\tau),\ k = 1, 2, \ldots, p,$$
$$\varphi_{p+1} = g_{p+1}(\tau)\cos\delta_{p+1}t_{n-1},\ \varphi_{p+2} = g_{p+1}(\tau)\sin\delta_{p+1}t_{n-1},\ \ldots,$$
$$\varphi_{n-1} = g_{n-1}(\tau)\cos\delta_{n-1}t_{n-1},\ \varphi_n = g_{n-1}(\tau)\sin\delta_{n-1}t_{n-1}, \quad (2.14)$$

где $g_k$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, — произвольные дифференцируемые функции $\tau \in \mathbb{R}^{n-2}$. Для поверхности, описываемой соотношениями (2.14), утверждение теоремы выполнено. □

Поверхность, описываемую при помощи соотношений (2.14), называют $(n-1)$-мерной винтовой поверхностью. При $c_1, c_2, \ldots, c_p = 0$, $\delta_{p+1}, \delta_{p+2}, \ldots, \delta_{n-1} = 1$, $t_{n-1} \in [0, 2\pi]$ получаем поверхность вращения. Таким образом, если область $\Omega$ ограничена поверхностью вращения, то пространство $\mathcal{R}_a \cap \mathbb{V}_\tau$ не тривиально.

Полное описание этого пространства при произвольном $n$ удается выполнить лишь в случае сферы. Именно, нетрудно убедиться, что в этом случае

$$\mathcal{R}_a \cap \mathbb{V}_\tau = \{u(x) = Wx,\ x \in \Omega\}, \quad (2.15)$$

где $W$ — произвольная кососимметричная матрица. Действительно, в рассматриваемом случае $\nu(x) = (1/R)x$, $x \in \Gamma$. Пусть $u \in \mathcal{R}_\tau$, т. е.

$$u(x) = c + Wx \quad \forall x \in \overline{\Omega},\ \text{где } c \in \mathbb{R}^n,\ W = -W^T,$$
$$u(x) \cdot x = 0 \quad \forall\, x \in \Gamma.$$

Поскольку $Wx \cdot x = 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$, получаем, что $c \cdot x = 0$ для всех $x$ из $\Gamma$ поэтому $c = 0$. Обратно, если $u(x) = Wx$, $W = -W^T$, то $u(x) \cdot x = 0\ \forall\, x \in \Gamma$, и равенство (2.15) доказано.

Замечание 2.1. Равенство (2.15), очевидно, справедливо и в том случае, когда область $\Omega$ ограничена двумя концентрическими сферами.

В практически наиболее важном случае, когда $n = 3$, поверхность вращения либо имеет только одну ось и описывается уравнениями

$$x_1 = g_1(\tau),\ x_2 = g_2(\tau)\cos t,\ x_3 = g_2(\tau)\sin t,$$
$$\tau \in \mathcal{R},\ t \in [0, 2\pi], \quad (2.16)$$

либо является сферой. В первом случае пространство $\mathcal{R}_a \cap \mathbb{V}_\tau$ одномерно и состоит из векторов вида $u_1(x) = 0$, $u_2(x) = \delta x_3$,

$u_3(x) = -\delta x_2$, $\delta \in \mathcal{R}$. Во втором случае оно состоит из векторов вида $u(x) = Wx$, где $W$ — произвольная кососимметричная матрица третьего порядка. Если $\Gamma$ не является поверхностью вращения, то $\mathcal{R}_a \cap \mathbb{V}_\tau = \{0\}$. Отметим, что пространство $\mathcal{R}_a \cap \mathbb{V}_\tau \neq \{0\}$ и для области, ограниченной соосными поверхностями вращения.

Для задачи о жестком контакте, очевидно, имеют место утверждения о разрешимости, аналогичные случаю задачи Неймана с заменой пространства $\mathcal{R}_a$ на пространство $\mathcal{R}_a \cap \mathbb{V}_\tau$.

При анализе задачи о нормальной нагрузке в случае, когда оператор $A$ есть оператор теории упругости полезной оказывается

**Лемма 2.2.** *Пусть* $\Gamma \in C^1$. *Тогда* $\mathcal{R}_a \cap \mathbb{V}_\nu = \{0\}$.

Доказательство. Если $u \in \mathcal{R}_a \cap \mathbb{V}_\nu$, то для некоторого $c$ из $\mathcal{R}^n$ и кососимметричной матрицы $W$ порядка $n$ имеем

$$c + Wx = \alpha(x)\nu(x),\ \alpha(x) \in \mathcal{R},\ \forall\, x \in \Gamma.$$

Выберем декартову систему координат так, чтобы выполнялись соотношения (2.12). Тогда вследствие того, что на $\Gamma$ существуют нормали параллельные любому координатному направлению, получим, что $c = 0$. Поэтому $Wx = \alpha(x)\nu(x)$, $x \in \Gamma$. Причем $\alpha(x) = 0$ лишь на множестве меры нуль. Отсюда, очевидно, следует, что $\nu(x) \cdot x = 0$ для всех $x \in \Gamma$. Пусть $\Gamma$ описывается уравнением $\varphi(x) = 0$. Тогда $\nabla\varphi(x) \cdot x = 0$ для всех $x \in \Gamma$. Трактуя последнее соотношение как линейное уравнение с частными производными первого порядка относительно функции $\varphi$, нетрудно получить, что $\varphi(x) = \varphi(x_2/x_1, x_3/x_1, \ldots, x_n/x_1)$ [1]. Понятно, что при этом вектор $\nu(x)$ параллелен вектору с координатами

$$-\frac{1}{x_1^2}\sum_{j=2}^{n} x_j \frac{\partial\varphi(p)}{\partial p_j},\ \frac{1}{x_1}\frac{\partial\varphi(p)}{\partial p_2}, \ldots, \frac{1}{x_1}\frac{\partial\varphi(p)}{\partial p_n},$$

где $p_k = x_k/x_1$, $k = 2, 3, \ldots, n$. Положив $\nu(x) = (1, 0, \ldots, 0)$, получим отсюда противоречивые равенства. $\square$

Из неравенства (2.2), с. 186, лемм 3.1 и 2.2 вытекает, что, если $A$ — оператор теории упругости, то существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$\int\limits_\Omega A\nabla u \cdot \nabla u\, dx \geqslant c\|u\|_1^2 \quad \forall\, u \in \mathbb{V}_\nu,$$

[1] Заметим, что уравнение $\varphi(x) = 0$ есть в данном случае уравнение поверхности конуса с вершиной в начале координат.

поэтому исследование разрешимости задачи о нормальной нагрузке проводится в рассматриваемом случае точно так же, как и для задачи Дирихле.

## § 4. Принцип максимума

В этом параграфе будет описан класс эллиптических систем уравнений для которых справедлив принцип максимума, аналогичный случаю одного эллиптического уравнения (см. п. 1, §3, гл. 2).

Мы будем рассматривать задачу Дирихле для так называемых слабо связанных систем уравнений

$$L_i u_i(x) + \sum_{j=1}^{m} d_{ij}(x) u_j(x) = f_i(x), \quad x \in \Omega, \ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{2}$$

Здесь $\Omega$ — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $\Gamma$ — граница $\Omega$, $m \geqslant 1$,

$$L_i u_i(x) = -\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}^i D_k D_l u_i(x) + \sum_{k,l=1}^{n} a_k^i D_k u_i(x), \tag{3}$$

$i = 1, 2, \ldots, m$.

Система уравнений (1) есть частный случай системы (1.1), с. 177 (при условии, что соответствующие коэффициенты дифференцируемы).

Все коэффициенты и правую часть системы (1) будем считать в дальнейшем непрерывными на $\overline{\Omega}$. Кроме того, будем предполагать выполненными следующие условия.

Матрицы $\{a_{kl}^i(x)\}_{k,l=1}^n$ симметричны для всех $i = 1, 2, \ldots, m$, $x \in \Omega$. Существует положительная постоянная $c_0$ такая, что

$$\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}^i(x) t_k t_l \geqslant c_0 \sum_{k=1}^{n} t_k^2 \quad \forall\, x \in \Omega, \ t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

$i = 1, 2, \ldots, m$.

Элементы матриц $\{d_{ij}(x)\}_{i,j=1}^m$ таковы, что

$$d_{ij}(x) \leqslant 0 \quad \forall\, i \neq j, \ x \in \Omega, \tag{5}$$

$$d_i(x) = \sum_{j=1}^{m} d_{ij}(x) \geqslant 0 \quad \forall\ x \in \Omega,\ i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (6)$$

**Теорема 1.** *Пусть выполнены перечисленные выше условия на коэффициенты системы уравнений* (1), $f_i(x) \geqslant 0$ *для всех* $x \in \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ — *решение задачи* (1), (2). *Тогда* $u_i(x) \geqslant 0$ *для всех* $x \in \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, установим, что условие (6) можно заменить на более сильное условие

$$d_i(x) = \sum_{j=1}^{m} d_{ij}(x) > 0 \quad \forall\ x \in \Omega,\ i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (7)$$

Представим функцию $u$, являющуюся решением задачи (1), (2), в виде $u(x) = \alpha(x_1)v(x)$, где $\alpha(x_1) = K - e^{\beta x_1}$, где $K, \beta$ — положительные постоянные, значения которых ниже будут указаны. В результате элементарных выкладок получим, что

$$-\sum_{k,l=1}^{n} \tilde{a}^i_{kl} D_k D_l v_i(x) + \sum_{k,}^{n} \tilde{a}^i_k D_k v_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \tilde{d}_{ij}(x) v_j(x) = f_i(x), \quad (8)$$

$$v(x) = 0, \quad x \in \Gamma \qquad (9)$$

$i = 1, 2, \ldots, m$. Здесь $\tilde{a}^i_{kl}(x) = \alpha(x) a^i_{kl}(x)$. Коэффициенты $\tilde{a}^i_k$ также выражаются через коэффициенты исходного уравнения и функцию $\alpha$. Конкретный вид этих выражений для дальнейшего не существенен. Кроме того, $\tilde{d}_{ij} = d_{ij}$ при $i \neq j$, $\tilde{d}_{ii}(x) = d_{ii}(x) + \beta(\beta a^i_{11}(x) - a^i_1(x))e^{\beta x}$ при $i = 1, 2, \ldots, m$. Вследствие условия (4) имеем $a^i_{11}(x) \geqslant c_0$ $\forall x \in \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, m$, функции $a^i_1$ непрерывны на $\overline{\Omega}$. Поэтому можно указать такое положительное $\beta$, что $\beta a^i_{11}(x) - a^i_1(x) > 0$ для всех $x \in \overline{\Omega}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. При указанном выборе $\beta$, очевидно, будем иметь, что

$$\tilde{d}_i(x) = \sum_{j=1}^{m} \tilde{d}_{ij}(x) > 0$$

для всех $x \in \overline{\Omega}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Выберем, наконец, $K$ настолько большим, чтобы выполнялось условие $\alpha(x_1) > 0$ для все $x \in \overline{\Omega}$.

Осталось заметить, что из неотрицательности функции $v$ на $\Omega$ следует неотрицательность $u$.

Доказательство теоремы 1. Запишем систему (1) в виде

$$L_i u_i(x) + d_i(x) u_i(x) + \sum_{j \neq i} d_{ij}(x)(u_j(x) - u_i(x)) = f_i(x),\ x \in \Omega, \quad (10)$$

$i = 1, 2, \ldots, m$. Пусть вопреки доказываемому утверждению одна из функций $u_i$ принимает в области $\Omega$ отрицательные значения. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что эта функция есть $u_1$. Тогда существует точка $x^1 \in \Omega$ такая, что

$$u_1(x^1) = \min_{x \in \overline{\Omega}} u_1(x) < 0.$$

Запишем уравнение (10) при $i = 1$ в точке $x^1$:

$$L_1 u_i(x^1) + d_1(x^1) u_1(x^1) + \sum_{j \neq 1} d_{ij}(x)(u_j(x^1) - u_1(x^1)) = f_i(x^1). \quad (11)$$

Для того, чтобы при сделанных нами предположениях уравнение (11) выполнялось, необходимо, чтобы хотя бы одно из слагаемых под знаком суммы в левой его части было положительным. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что это слагаемое соответствует j=2. Тогда, очевидно, $u_2(x^1) < u_1(x^1)$. Отсюда следует, что существует точка $x_2 \in \Omega$ такая, что

$$u_2(x^2) = \min_{x \in \overline{\Omega}} u_2(x) < u_1(x^1).$$

Поэтому $u_2(x^2) < u_1(x^2)$. Аналогично, рассматривая второе уравнение системы (10) в точке $x^2$, можем заключить, что существует точка $x^3 \in \Omega$ такая, что $u_3(x^3) = \min_{x \in \overline{\Omega}} u_3(x)$, причем $u_3(x^3) < u_1(x^3)$, $u_3(x^3) < u_2(x^3)$. Продолжая этот процесс, из $(m-1)$-го уравнения системы (10) получим, что существует точка $x^m \in \Omega$ такая, что $u_m(x^m) = \min_{x \in \overline{\Omega}} u_m(x)$, и $u_m(x^m) < u_i(x^m)$ для всех $i \neq m$. Нетрудно убедиться, что при выполнении последних неравенств уравнение с номером $m$ системы (10) не может быть выполнено. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

Из теоремы 1 очевидным образом вытекает, что если выполнены все причисленные выше условия на коэффициенты системы (1), то задача (1), (2) может иметь не более одного решения.

# Глава 5
# ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

В этой главе рассматриваются линейные и нелинейные параболические уравнения. Исследуются вопросы существования и единственности обобщенного решения. В линейном случае изучается также гладкость обобщенного решения.

## § 1. Пространства векторнозначных функций

При исследовании уравнений, описывающих нестационарные процессы, возникают пространства функций, зависящих как от точки области $\Omega$, в которой этот процесс протекает, так и от времени (его, обычно, обозначают буквой $t$). Ясно, что любую функцию $u(x,t)$, где $x \in \Omega \subset R^n$, $t \in (0,T)$ можно рассматривать как функцию, заданную в $Q_T = \Omega \times (0,T) \subset R^{n+1}$. Однако часто удобнее и естественнее воспринимать функцию $u$ как отображение, при котором каждому $t \in (0,T)$ ставится в соответствие элемент пространства обобщенных функций, зависящих от пространственной переменной (в данном случае — это $u(\cdot,t)$). Такие отображения называют *векторнозначными.*

Пусть $X$ — линейное нормированное пространство. Будем обозначать через $L_p(0,T;X)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, пространство векторнозначных функций $u\colon(0,T) \to X$, для которых

$$\|u\|_{L_p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p\,dt\right)^{1/p} < \infty \quad \text{при} \quad 1 \leqslant p < \infty\,,$$

$$\|u\|_{L_\infty(0,T;X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{0 \leq t \leqslant T} \|u(t)\|_X < \infty;$$

через $C([0,T];X)$ будем обозначать пространство непрерывных векторнозначных функций $u : [0,T] \to X$, для которых

$$\|u\|_{C([0,T];X)} = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(t)\|_X < \infty\,.$$

Если $X$ — банахово пространство, тогда пространства $L_p(0,T;X)$, $C([0,T];X)$ также банаховы.

Упражнение 1. Доказать, что:

1) если $X_0$ – подпространство пространства $X$, то $L_p(0,T;X_0)$ есть подпространство $L_p(0,T;X)$;

2) $L_{p'}(0,T;X)$ содержится в $L_p(0,T;X)$, если $p' > p$.

Отметим также, что в случае, когда $X$ — гильбертово пространство, $L_2(0,T;X)$ будет тоже гильбертовым, если ввести в нем скалярное произведение следующим образом:

$$(u,v)_{L_2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X \, dt.$$

**Определение 1.** *Пусть $u \in L_1(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Элемент $v$ из пространства $L_1(0,T;H^{-1}(\Omega))$ будем называть обобщенной производной функции $u$ по $t$ и обозначать через $u'$ или $\partial u/\partial t$, если для любых функций $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$, $z \in H_0^1(\Omega)$ справедливо равенство*

$$\int_0^T \varphi'(t)\,\langle u(t),z\rangle\,dt = -\int_0^T \varphi(t)\,\langle v(t),z\rangle\,dt\,, \tag{1}$$

*где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — отношение двойственности, введенное на с.* 84.

В дальнейшем при исследовании дифференциальных уравнений будут полезными следующие результаты.

**Лемма 1.** *Множество всех линейных комбинаций функций вида $w(x)z(t)$, где $w \in H_0^1(\Omega)$, $z \in L_2(0,T)$, всюду плотно в пространстве $L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$.*

Доказательство. Заметим, что в пространстве $H_0^1(\Omega)$ существует ортонормированный базис $\{\varphi_k\}$ (например, состоящий из собственных функций оператора Лапласа). Если $y$ принадлежит $L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$, то для почти всех $t \in (0,T)$ функция $y(t)$ может быть представлена сходящимся в $H_0^1(\Omega)$ рядом $\sum\limits_{k=1}^\infty c_k(t)\varphi_k(x)$, при этом[1] $c_k(t) = (y(t),\varphi_k)_1$, $|y(t)|_1^2 = \sum\limits_{k=1}^\infty |c_k(t)|^2$.

---

[1] В дальнейшем используются обозначения: $(u,v)_1 = \int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx$, $(u,v)_0 = \int\limits_\Omega uv\,dx$, $|u|_1 = (u,u)_1^{1/2}$, $|u|_0 = (u,u)_0^{1/2}$.

Из очевидного неравенства $c_k(t)^2 \leqslant \|y(t)\|_1^2$ следует, что $c_k(t)$ принадлежит $L_2(0,T)$. Рассмотрим функции

$$\psi_m(t) = \Big| y(t) - \sum_{k=1}^{m} c_k(t)\varphi_k \Big|_1^2, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Из вышесказанного следует, что $\psi_m(t) \to 0$ при $m \to \infty$, причем $\psi_m(t) \leqslant |y(t)|_1^2$ для почти всех $t \in (0,T)$. Правая часть последнего неравенства — интегрируемая на $(0,T)$ функция. Поэтому по теореме Лебега о предельном переходе

$$\int_0^T \Big| y(t) - \sum_{k=1}^{m} c_k(t)\varphi_k \Big|_1^2 dt \to 0 \text{ при } m \to \infty. \ \square$$

**Теорема 1.** *Пусть функция* $u \in L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$ *такова, что* $u' \in L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. *Тогда:*

1) $u \in C([0,T];L_2(\Omega))$ *(может быть, после изменения на множестве меры нуль);*

2) *функция* $t \to \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}$ *абсолютно непрерывна, причем*

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} = 2\,\langle u'(t), u(t)\rangle \quad \text{почти всюду на } (0,T); \qquad (2)$$

3) *имеет место оценка*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(t)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\big(\|u(t)\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|u'(t)\|_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\big), \qquad (3)$$

*где* $C$ *— постоянная, зависящая только от* $T$.

Доказательство. Продолжим функцию $u$ на $[-T,0]$ и $[T,2T]$ четно относительно $0$ и $T$ соответственно и нулем вне отрезка $[-T,2T]$, сохранив за продолжением то же обозначение. Определим усреднение функции $u$ следующим образом:

$$u^\varepsilon(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_\varepsilon(t-\tau)\, u(x,\tau)\, d\tau, \qquad t \in (-\infty,+\infty),$$

где $\eta_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}\eta(t/\varepsilon)$,

$$\eta(t) = \begin{cases} c\,\exp\bigl((|t|^2-1)^{-1}\bigr), & |t|<1,\\ 0, & |t|\geqslant 1, \end{cases}$$

постоянная $c$ выбрана из условия: $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta(t)\,dt = 1$.

По аналогии с теоремой 3.2, с. 27, нетрудно доказать, что для любой функции $v \in L_2(0,T;L_2(\Omega))$ ее усреднение $v^\varepsilon$ и производная $v^\varepsilon$ по $t$ любого порядка принадлежат $L_2(0,T;L_2(\Omega))$. Кроме того,

$$\|v^\varepsilon - v\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \to 0 \qquad \text{при } \varepsilon\to 0. \tag{4}$$

Поскольку $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)^\varepsilon = \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}$, $i = 1,2,\ldots,n$, то для функции $u$, удовлетворяющей условиям теоремы, из (4), очевидно, будем иметь:

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} \to 0 \qquad \text{при } \varepsilon\to 0. \tag{5}$$

Докажем также, что

$$\|(u^\varepsilon)'\|_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leqslant C\,\|u'\|_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \quad \forall\,\varepsilon>0 \tag{6}$$

и

$$(u^\varepsilon)' \rightharpoonup u' \quad \text{в } L_2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \quad \text{при } \varepsilon\to 0. \tag{7}$$

Пусть $w$ — произвольная функция из $H_0^1(\Omega)$, $\psi(t) = \langle u(t), w\rangle$. Ясно, что $\psi \in L_2(-T,2T)$. Кроме того, из определения 1 вытекает, что $\psi$ имеет на $(0,T)$ обобщенную производную из $L_2(0,T)$, равную $\langle u'(t), w\rangle$, следовательно, $\psi$ имеет производную из $L_2$ и на множествах $(-T,0)$, $(T,2T)$. По построению продолжения $\psi$ непрерывна в точках $0$ и $T$, поэтому $\psi \in H^1(-T,2T)$. Отсюда, учитывая свойства оператора усреднения, нетрудно получить, что

$$\begin{aligned}\|(\psi^\varepsilon)'\|_{L_2(0,T)} \leqslant \|\psi'\|_{L_2(-\varepsilon,T+\varepsilon)} \leqslant{}& \\ \leqslant \|\psi'\|_{L_2(-T,2T)} \leqslant 3\|\psi'\|_{L_2(0,T)}&\end{aligned} \tag{8}$$

и для любого $\delta>0$

$$\|\psi^\varepsilon - \psi\|_{H^1(-T+\delta\,,\,2T-\delta)} \to 0 \qquad \text{при } \varepsilon\to 0. \tag{9}$$

Докажем, далее, что

$$\big(\psi^{\varepsilon}\big)'(t) \;=\; \langle (u^{\varepsilon})'(t), w\rangle \text{ для } t \in (-T+\delta, 2T-\delta). \qquad (10)$$

Действительно, используя гладкость по $t$ функции $u^{\varepsilon}$, нетрудно получить

$$\langle (u^{\varepsilon})'(t), w\rangle = \int\limits_{\Omega}\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\eta_{\varepsilon}}{\partial t}(t-\tau)\,u(x,\tau)d\tau\Bigg)w(x)\,dx =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\eta_{\varepsilon}}{\partial\tau}(t-\tau)\Bigg(\int\limits_{\Omega}u(x,\tau)\,w(x)\,dx\Bigg)d\tau =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\eta_{\varepsilon}}{\partial\tau}(t-\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau \;=\; \big(\psi^{\varepsilon}\big)'(t), \quad t \in (-T+\delta, 2T-\delta).$$

Из соотношений (8), (10) следует оценка

$$\|\langle (u^{\varepsilon})'(t), w\rangle\|_{L_2(0,T)} \;\leqslant\; 3\;\|\langle u'(t), w\rangle\|_{L_2(0,T)}\,, \qquad (11)$$

справедливая для любой функции $w \in H_0^1(\Omega)$. Используя (11), нетрудно получить (6).

Кроме того, из (9), (10) имеем

$$\int\limits_{0}^{T}\Big(\big\langle (u^{\varepsilon})'(t) - u'(t), w\big\rangle\Big)\,\varphi(t)\,dt \;\to 0 \qquad \text{при } \varepsilon \to 0$$

$\forall\,\varphi \in L_2(0,T)$ и $\forall\, w \in H_0^1(\Omega)$. Поэтому утверждение (7) вытекает из леммы 1.

Далее, в силу гладкости функции $u^{\varepsilon}$ по $t$ для любых $\varepsilon$, $\delta > 0$ справедливо равенство

$$\frac{d}{d\,t}\|u^{\varepsilon}(t) - u^{\delta}(t)\|^2_{L_2(\Omega)} = 2\;\big((u^{\varepsilon})'(t) \;-\; (u^{\delta})'(t), u^{\varepsilon}(t) - u^{\delta}(t)\big)_{L_2(\Omega)}\,,$$

из которого получаем, что

$$\|u^{\varepsilon}(t) - u^{\delta}(t)\|^2_{L_2(\Omega)} = \|u^{\varepsilon}(s) - u^{\delta}(s)\|^2_{L_2(\Omega)} +$$

$$+2\int\limits_s^t \big\langle (u^\varepsilon)'(\tau) - (u^\delta)'(\tau), u^\varepsilon(\tau) - u^\delta(\tau)\big\rangle\, d\tau \ \forall\, s,t \in [0,T]. \quad (12)$$

Пусть $\mu_\varepsilon(t) = \|u^\varepsilon(t) - u(t)\|_{L_2(\Omega)}$. Из (5) вытекает, что $\mu_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ в $L_2(0,T)$, а потому найдется подпоследовательность последовательности $\{\mu_\varepsilon\}$, сходящаяся к 0 почти всюду в $[0,T]$ (см., например, [13, с. 58]). Подразумевая в дальнейшем под $\{u^\varepsilon\}$ подпоследовательность со свойством

$$\|u^\varepsilon(t) - u(t)\|_{L_2(\Omega)} \to 0 \qquad \text{при } \varepsilon \to 0 \quad (13)$$

для почти всех $t \in [0,T]$, выберем в (12) в качестве $s$ одну из точек, удовлетворяющую условию (13). Тогда из (12) будем иметь, что

$$\varlimsup_{\varepsilon,\delta\to 0} \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|u^\varepsilon(t) - u^\delta(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \quad (14)$$

$$\leqslant 2 \lim_{\varepsilon,\delta\to 0} \|(u^\varepsilon)' - (u^\delta)'\|_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \|u^\varepsilon - u^\delta\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} .$$

Поскольку для функции $u$ выполняются соотношения (5), (6), то из неравенства (14) следует фундаментальность $\{u^\varepsilon\}$ в пространстве $C([0,T];L_2(\Omega))$. Используя полноту этого пространства нетрудно убедиться в справедливости утверждения 1.

Докажем, далее, равенство (2). Пусть $s,t$ — произвольные точки отрезка $[0,T]$, $\chi_{[s,t]}(t)$ — характеристическая функция отрезка $[s,t]$. Ясно, что (см. (5))

$$\|u^\varepsilon \chi_{[s,t]} - u\,\chi_{[s,t]}\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} \to 0 \qquad \text{при } \varepsilon \to 0. \quad (15)$$

Запишем очевидное равенство

$$\|u^\varepsilon(t)\|^2_{L_2(\Omega)} = \|u^\varepsilon(s)\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\int\limits_0^T \big\langle (u^\varepsilon)'(\tau), u^\varepsilon(\tau)\chi_{[s,t]}(\tau)\big\rangle\, d\tau. \quad (16)$$

Учитывая (15), (7) и сходимость $\|u^\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)}$ к $\|u\|^2_{L_2(\Omega)}$ в $C([0,T])$, перейдем в (16) к пределу при $\varepsilon \to 0$. В результате получим равенство

$$\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} = \|u(s)\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\int\limits_s^t \langle u'(\tau), u(\tau)\rangle\, d\tau\,,$$

из которого в силу произвольности $s, t \in (0,T)$, очевидно, следует (2) и абсолютная непрерывность функции $\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}$.

Для доказательства утверждения 3 заметим, что $\|u\|^2_{L_2(\Omega)}$ как функция переменной $t$ принадлежит $W_1^1(0,T) \subset C\,([0,T])$ (см. упражнение 13.1, с. 67), а потому

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\|u\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} + \left\|\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\right\|_{L_1(0,T)}\right), \tag{17}$$

при этом постоянная $C$ зависит только от $T$. Из неравенства (17) легко получить (3), если воспользоваться уже доказанным равенством (2). $\square$

**Теорема 2.** *Пусть $\Omega$ — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ класса $C^m$ , $m$ — целое неотрицательное число, функция $u$, принадлежащая $L_2(0,T;H^{m+2}(\Omega))$, имеет обобщенную производную по переменной $t$ из $L_2(0,T;H^m(\Omega))$. Тогда:*

1) $u \in C([0,T];H^{m+1}(\Omega))$ *(может быть после изменения на множестве меры нуль);*

2) *имеет место оценка:*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(t)\|_{H^{m+1}(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant C\left(\|u(t)\|_{L_2(0,T;H^{m+2}(\Omega))} + \|u'(t)\|_{L_2(0,T;H^m(\Omega))}\right), \tag{18}$$

*где $C$ — постоянная, зависящая только от $\Omega$, $T$ и $m$.*

Доказательство. Сначала убедимся в справедливости теоремы при $m=0$. Выберем область $\Omega_1$ так, чтобы $\Omega \subset\subset \Omega_1$. Воспользовавшись теоремой 11.1, с. 48, построим функцию $\tilde{u}$, которая является продолжением функции $u$ на $\Omega_1$ с сохранением класса. Ясно, что $\widetilde{(u')} = \tilde{u}'$, поэтому для $\tilde{u}$ по теореме 11.1, с. 48, имеем

$$\|\tilde{u}\|_{L_2(0,T;H^2(\Omega_1))} \leqslant C\|u\|_{L_2(0,T;H^2(\Omega))}\,, \tag{19}$$

$$\|\tilde{u}'\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega_1))} \leqslant C\|u'\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}\,. \tag{20}$$

Отметим, что постоянная $C$ в этих неравенствах зависит только от областей $\Omega$ и $\Omega_1$.

Фиксируем целое число $i\in[1,n]$, элемент $w\in L_2(0,T;H^{-1}(\Omega_1))$ определим с помощью равенства

$$\langle w(t),v\rangle = \int\limits_{\Omega_1} \tilde u'(t)\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx\,^{1)} \quad \forall\, v\in H_0^1(\Omega_1),\ t\in(0,T)\,.$$

Заметим, что для любых $\eta$ из $C_0^\infty(0,T)$ и $v\in H_0^1(\Omega_1)$ имеем

$$\int\limits_0^T \langle w,v\rangle\,\eta(t)\,dt = \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_1} \tilde u'\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\eta(t)\,dx\,dt =$$

$$= -\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_1} \tilde u\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\eta'(t)\,dx\,dt = \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_1} \frac{\partial \tilde u}{\partial x_i}\,v\,\eta'(t)\,dx\,dt\,.$$

Отсюда, очевидно, следует, что $\dfrac{\partial \tilde u}{\partial x_i}$ имеет обобщенную производную по $t$, принадлежащую пространству $L_2(0,T;H^{-1}(\Omega_1))$ и равную $w$. По теореме 1 имеем, что $\partial\tilde u/\partial x_i\in C([0,T];L_2(\Omega_1))$ (может быть, после изменения на множестве меры нуль) и

$$\frac12\,\frac{d}{d\,t}\int\limits_{\Omega_1}\left(\frac{\partial \tilde u}{\partial x_i}\right)^2 dx = \left\langle w\,,\,\frac{\partial \tilde u}{\partial x_i}\right\rangle = \int\limits_{\Omega_1}\tilde u'\,\frac{\partial^2 \tilde u}{\partial x_i^2}\,dx\,. \tag{21}$$

Из равенств (21), используя оценки (19), (20), нетрудно получить, что

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C\left(\|u(t)\|_{L_2(0,T;H^2(\Omega))} + \|u'(t)\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}\right)$$

для любого целого $i\in[1,n]$. Утверждение теоремы при $m=0$ доказано.

Пусть $m\geqslant 1$. Рассмотрим функцию $v=D^\alpha u$, где $|\alpha|\leqslant m$. Из условий теоремы вытекает, что

$$v\in L_2(0,T;H^2(\Omega))\,,\qquad v'\in L_2(0,T;L_2(\Omega))\,.$$

[1] Здесь для компактности записи у функции $u_m$ не указан аргумент $x$. Это сокращение будет использовано и в дальнейшем.

Поэтому для оценки $v$ воспользуемся доказанным при $m = 0$ неравенством (18). В результате получим

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|D^\alpha u(t)\|_{H^1(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \widetilde{C}\left(\|D^\alpha u(t)\|_{L_2(0,T;H^2(\Omega))} + \|(D^\alpha u)'(t)\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \widetilde{C}\left(\|u(t)\|_{L_2(0,T;H^{m+2}(\Omega))} + \|u'(t)\|_{L_2(0,T;H^m(\Omega))}\right).$$

Из этого соотношения и произвольности $\alpha$ следует справедливость теоремы при любом $m$. $\square$

## § 2. Линейные параболические уравнения

**1. Постановка задачи.** Пусть $Q_T = \Omega \times (0,T)$, где $\Omega$ — ограниченная область $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$, $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0,T]$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u = f, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1.1}$$

$$u(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{1.3}$$

где

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i u) + a_0 u. \tag{1.4}$$

Предполагается, что коэффициенты $a_{i,j}$, $a_i$, $b_i$, $a_0$ и правая часть $f$ могут зависеть от переменных $x$ и $t$.

Используя принятые в главе 2 обозначения и полагая

$$f = f_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i},$$

уравнение (1.1) можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(A\nabla u) + a\cdot\nabla u - \operatorname{div}(ub) + a_0 u = f_0 + \operatorname{div}\mathbf{f}, \tag{1.5}$$

где $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$. Если матрица $A(x,t)$ положительно определена, равномерно по переменным $x \in \bar{\Omega}$ и $t \in [0,T]$, т. е. существует постоянная $c_0 > 0$ такая, что

$$A(x,t)\xi \cdot \xi \geqslant c_0\,|\xi|^2 \quad \forall\,\xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in \bar{\Omega},\ t \in [0,T], \tag{1.6}$$

то уравнение (1.1) называют параболическим.

Определим обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3). С этой целью умножим уравнение (1.1) на функцию $\eta(x,t)$ из пространства $C^1(0,T;C_0^1(\Omega))$[1], удовлетворяющую условию $\eta(x,T) = 0$, проинтегрируем по $Q_T$ и преобразуем некоторые слагаемые с помощью формулы интегрирования по частям. В результате получим

$$\int\limits_{Q_T} \left\{ -u\,\frac{\partial\eta}{\partial t} + A\nabla u \cdot \nabla\eta + a \cdot \nabla u\,\eta + ub \cdot \nabla\eta + a_0 u\,\eta \right\} dxdt - \\ - \int\limits_{\Omega} u_0(x)\,\eta(x,0)\,dx = \int\limits_{Q_T} (f_0\,\eta - \mathbf{f} \cdot \nabla\eta)\,dx\,dt. \tag{1.7}$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условий

$$a_{ij},\ a_i,\ b_j \in L_\infty(Q_T), \qquad i = 0,1,\ldots,n,\ \ j = 1,2,\ldots,n, \tag{1.8}$$
$$f_i \in L_2(Q_T), \quad i = 0,1,\ldots,n,$$

с помощью равенства (1.7) можно определить обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) из пространства $L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Такое решение (от которого не требуется существования производной $\partial u/\partial t$) часто называют слабым обобщенным решением. Однако отметим, что в равенстве (1.7) неявно информация о производной решения по переменной $t$ содержится. Действительно, выбирая в (1.7) $\eta(x,t) = v(x)z(t)$, где $v \in C_0^1(\Omega)$, $z \in C_0^\infty(0,T)$, нетрудно получить

$$-\int\limits_0^T \left( \int\limits_{\Omega} u(x,t)\,v(x)\,dx \right) \frac{\partial z}{\partial t}\,dt = \int\limits_0^T z(t) \Biggl\{ \int\limits_{\Omega} \Bigl( f_0\,v - \mathbf{f} \cdot \nabla v -$$

[1] $C^m(0,T;C_0^1(\Omega)) =$
$= \bigl\{\eta(x,t) \in C(0,T;C_0^1(\Omega)) : \frac{\partial^k \eta}{\partial t^k} \in C(0,T;C_0^1(\Omega)),\ k = 1,2,\ldots,m\bigr\}.$

$$- A\nabla u \cdot \nabla v \,-\, a \cdot \nabla u\, v \,-\, u\, b \cdot \nabla v \,-\, a_0 u\, v \Big) \, dx \Big\} \, dt\,. \tag{1.9}$$

Используя плотность $C_0^1(\Omega)$ в $H_0^1(\Omega)$, можно показать, что равенство (1.9) остается справедливым и при любой функции $v \in H_0^1(\Omega)$. При выполнении условий (1.8) это означает (см. определение 1, с. 209), что функция $u$ имеет обобщенную производную $\partial u/\partial t \in L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Поэтому в дальнейшем мы будем использовать следующее определение обобщенного решения.

**Определение 1.1.** *Функция $u \in L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$ называется обобщенным решением задачи* (1.1)–(1.3)*, если*

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(0,T;H^{-1}(\Omega)), \tag{1.10}$$

$$u(x,0) \,=\, u_0(x) \qquad \text{п. в. в } \ \Omega^{1)}, \tag{1.11}$$

*и для любой функции $\eta \in L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$ выполнено интегральное тождество*

$$\int\limits_0^T \Big\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \eta \Big\rangle \, dt + \\ + \int\limits_{Q_T} (A\nabla u \cdot \nabla \eta + a \cdot \nabla u\, \eta \,+\, ub \cdot \nabla \eta + a_0 u \eta) \, dx\, dt \,= \\ = \int\limits_{Q_T} (f_0\, \eta \,-\, \mathbf{f} \cdot \nabla \eta) \, dx\, dt. \tag{1.12}$$

Поскольку при фиксированном $z$ из $H_0^1(\Omega)$

$$\int\limits_{\Omega} (A\nabla z \cdot \nabla v \,+\, a \cdot \nabla z\, v \,+\, zb \cdot \nabla v \,+\, a_0 z\, v) \, dx$$

является ограниченным функционалом на $H_0^1(\Omega)$, то (см. замечание 3.1, с. 111) можно определить линейный ограниченный опе-

---

[1)] Заметим, что равенство (1.11) имеет смысл, поскольку (см. теорему 1, с. 210) функция $u$ из пространства $L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$, удовлетворяющая (1.10), принадлежит $C(0,T;L_2(\Omega))$.

ратор $L$, действующий из $H_0^1(\Omega)$ в $H^{-1}(\Omega)$ с помощью тождества

$$\langle Lz, v\rangle = \int\limits_\Omega (A\nabla z\cdot\nabla v + a\cdot\nabla z v + z b\cdot\nabla v + a_0 z v)\,dx,$$

справедливого для любых $z, v$ из $H_0^1(\Omega)$. Таким образом, тождество (1.12) можно записать в более компактном виде

$$\int\limits_0^T \left\{\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \eta\right\rangle + \langle Lu, \eta\rangle\right\} dt = \int\limits_0^T \langle f, \eta\rangle\, dt \quad \forall\, \eta \in L_2(0,T; H_0^1(\Omega)), \tag{1.13}$$

где

$$\langle f(t), \eta\rangle \;=\; \int\limits_\Omega (f_0(t)\,\eta \;-\; \mathbf{f}(t)\cdot\nabla\eta)\,dx \quad \forall\, \eta\in H_0^1(\Omega).$$

**2. Существование обобщенного решения.**

**Теорема 2.1.** *Пусть коэффициенты уравнения* (1.1) *удовлетворяют условиям* (1.6), (1.8). *Тогда задача* (1.1)–(1.3) *имеет хотя бы одно обобщенное решение при любых* $u_0$ *из* $L_2(\Omega)$ *и* $f$ *из* $L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))$.

Доказательство. Воспользуемся так называемым *методом Фаэдо — Галеркина*. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ — полная в $H_0^1(\Omega)$ система базисных функций, ортонормированная в $L_2(\Omega)$ (например, система собственных функций оператора Лапласа с краевым условием Дирихле). Приближенное решение задачи (1.1)–(1.3) будем искать в виде

$$u_m(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^m c_k^m(t)\,\varphi_k(x)\,.$$

Здесь $c_k^m$ — коэффициенты, определяемые следующей системой уравнений:

$$(u_m', \varphi_k)_0 + \langle Lu_m, \varphi_k\rangle = \langle f, \varphi_k\rangle,\ k = 1, 2, \ldots, m,\ 0 < t \leqslant T, \tag{2.1}$$

$$c_k^m(0) = (u_0, \varphi_k)_0\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.2}$$

где $u'_m = \partial u_m/\partial t$.

Используя ортонормированность системы $\{\varphi_k\}$ в пространстве $L_2(\Omega)$ и линейность оператора $L$, нетрудно убедиться в том, что (2.1) представляет собой систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\,c_k^m}{d\,t} + \sum_{l=1}^{m} d^{kl}(t)\,c_k^m(t) = f_k(t)\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.3}$$

где $d^{kl}(t) = \langle L\varphi_l, \varphi_k\rangle$, $f_k(t) = \langle f(t), \varphi_k\rangle$. По условиям доказываемой теоремы

$$f_k \in L_2(0,T), \quad d^{kl}(t) \in L_\infty(0,T),$$

поэтому из теоремы 2.3, с. 99, следует существование и единственность решения задачи (2.2), (2.3) из класса $H^1(0,T)$. Таким образом, задача (2.1), (2.2) имеет единственное решение $u_m \in H^1(0,T; H_0^1(\Omega))$.

Следующий этап доказательства — получение для $u_m$ равномерных по $m$ априорных оценок вида

$$\|u_m\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} \leqslant c\left(|u_0|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=0}^{n}\|f_i\|^2_{L_2(Q_T)}\right)^{1/2}, \tag{2.4}$$

$$\|u_m\|_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leqslant c\left(|u_0|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=0}^{n}\|f_i\|^2_{L_2(Q_T)}\right)^{1/2}, \tag{2.5}$$

где $c$ — постоянная, зависящая лишь от $\Omega$, $T$ и коэффициентов оператора $L$. С этой целью каждое из уравнений системы (2.1) умножим на $c_k^m(t)$ и просуммируем по $k$ от 1 до $m$. В результате получим

$$(u'_m\,, u_m)_0 + \langle Lu_m, u_m\rangle = \langle f, u_m\rangle \quad \text{п. вс. в } (0,T). \tag{2.6}$$

Из теоремы 1, с. 210, следует, что

$$(u'_m(t)\,, u_m(t))_0 = \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,|u_m(t)\,|_0^2\,. \tag{2.7}$$

При оценке $\langle Lu_m(t), u_m(t)\rangle$ учтем, что

$$\int\limits_\Omega A\nabla u_m(t)\cdot\nabla u_m(t)\,dx \geqslant c_0\,|\,u_m(t)\,|_1^2, \tag{2.8}$$

$$\left| \int\limits_\Omega a \cdot \nabla u_m(t)\, u_m(t)\, dx \right| \leqslant \varepsilon \,|\, u_m(t) \,|_1^2 + \frac{c_\infty^2\, n}{4\varepsilon} |\, u_m(t) \,|_0^2 \,,$$

$$\left| \int\limits_\Omega u_m(t)\, b \cdot \nabla u_m(t)\, dx \right| \leqslant \varepsilon \,|\, u_m(t) \,|_1^2 + \frac{c_\infty^2\, n}{4\varepsilon} |\, u_m(t) \,|_0^2 \,,$$

$$\left| \int\limits_\Omega a_0 (u_m(t))^2\, dx \right| \leqslant c_\infty \,|\, u_m(t) \,|_0^2,$$

где

$$c_\infty = \max\Bigl\{ \max_{0\leqslant i\leqslant n} \|a_i\|_{L_\infty(Q_T)} \,,\, \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|b_i\|_{L_\infty(Q_T)} \Bigr\}.$$

При получении этих неравенств использовались условия (1.6), (1.8) и неравенство Коши с $\varepsilon$.

Таким образом,

$$\langle L\, u_m(t), u_m(t) \rangle \geqslant (c_0 - 2\varepsilon) \,|\, u_m(t) \,|_1^2 - \Bigl( c_\infty + \frac{c_\infty^2\, n}{2\varepsilon} \Bigr) |\, u_m(t) \,|_0^2. \quad (2.9)$$

Правую часть равенства (2.6) также оценим с помощью неравенства Коши с $\varepsilon$:

$$\bigl|\langle\, f(t)\,,\, u_m(t)\,\rangle\bigr| = \left| \int\limits_\Omega \Bigl( f_0(t)\, u_m(t) - \mathbf{f}(t) \cdot \nabla u_m(t) \Bigr)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \Bigl( |\, f_0(t) \,|_0^2 + |\, u_m(t) \,|_0^2 + \varepsilon \,|\, u_m(t) \,|_1^2 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^n |\, f_i(t) \,|_0^2 \Bigr). \quad (2.10)$$

Используя (2.7)–(2.10), из равенства (2.6) нетрудно получить, что

$$\frac{d}{dt} |u_m(t)|_0^2 + 2\,(c_0 - 3\varepsilon)\, |u_m(t)|_1^2 \leqslant 2\, \Bigl( c_\infty + \frac{c_\infty^2\, n}{2\varepsilon} + 1 \Bigr) |u_m(t)|_0^2 + \\ + 2 \Bigl\{ |f_0(t)|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^n |f_i(t)|_0^2 \Bigr\} \quad \text{п. вс. в } (0,T). \quad (2.11)$$

Из леммы 1.1, с. 96, и неравенства (2.11) при $\varepsilon < c_0/3$ следует (2.4). При этом надо учесть, что $|u_m(0)|_0 \leqslant |u_0|_0$, поскольку $u_m(0)$ — отрезок ряда Фурье для функции $u_0$ (см. (4.1), с. 170). Оценку (2.5) нетрудно получить, используя (2.4) и неравенство (2.11), в котором параметр $\varepsilon$ выбран так, что $c_0 - 3\varepsilon \geqslant \alpha > 0$.

Из оценки (2.5) следует равномерная ограниченность последовательности $\{u_m\}$ в пространстве $L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$, а потому найдутся подпоследовательность (за которой сохраним то же обозначение) и функция $u \in L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$ такие, что при $m \to \infty$

$$u_m \rightharpoonup u \qquad \text{в} \quad L_2(0,T;H_0^1(\Omega))\,^{1)}. \tag{2.12}$$

Докажем теперь, что функция $u$, определенная соотношением (2.12), является обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3). Пусть $z$ — произвольная функция из $C^\infty(0,T)$ такая, что $z(T)=0$. Равенство (2.1) умножим на $z(t)$, проинтегрируем от 0 до $T$ и первое слагаемое в левой части преобразуем с помощью формулы интегрирования по частям. В результате получим

$$\begin{gathered}
-\int\limits_{Q_T} u_m\,\varphi_k\,\frac{\partial z}{\partial t}\,dx\,dt - \int\limits_{\Omega} u_{0m}(x)\,\varphi_k(x)\,z(0)\,dx + \\
+\int\limits_{Q_T} \langle Lu_m, \varphi_k\rangle\, z(t)\,dxdt = \\
= \int\limits_{Q_T} (f_0\,\varphi_k - \mathbf{f}\cdot\nabla\varphi_k)\,z(t)\,dx\,dt \quad \forall\, k \leqslant m,
\end{gathered} \tag{2.13}$$

где $u_{0m}(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} (u_0,\varphi_i)_0\ \varphi_i(x)$.

Учитывая соотношение (2.12) и очевидные равенства

$$\int\limits_{\Omega} u_{0m}(x)\,\varphi_k(x)\,dx = \int\limits_{\Omega} u_0(x)\,\varphi_k(x)\,dx \quad \forall\, k \leqslant m,$$

при фиксированном $k \in [1,m]$ перейдем к пределу в равенстве (2.13) при $m \to \infty$. Результат запишем в виде

$$\begin{gathered}
-\int\limits_0^T \langle u,\varphi_k\rangle\,\frac{\partial z}{\partial t}\,dt + \int\limits_0^T \langle Lu,\varphi_k\rangle z(t)\,dt - \\
-\int\limits_{\Omega} u_0(x)\,\varphi_k(x)\,z(0)\,dx = \int\limits_0^T \langle f,\varphi_k\rangle\,z(t)\,dt.
\end{gathered} \tag{2.14}$$

---

[1)] Напомним, что символом "$\rightharpoonup$"обозначается слабая сходимость.

Равенство (2.14), очевидно, имеет место для любого $k = 1, 2 \ldots$ и потому в силу полноты системы функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $H_0^1(\Omega)$ оно остается справедливым, если $\varphi_k$ заменить на произвольную функцию $w$ из $H_0^1(\Omega)$. Поэтому из (2.14) при $z \in C_0^\infty(0,T)$ будем иметь

$$-\int_0^T \langle u, w\rangle \frac{\partial z}{\partial t}\, dt = \int_0^T \langle f - Lu, w\rangle\, z(t)\, dt \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Заметим, что $f - Lu \in L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, поэтому из последнего равенства вытекает, что функция $u$ удовлетворяет условию (1.10), причем $\dfrac{\partial u}{\partial t} = f - Lu$, и выполнено очевидное тождество

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, w\right\rangle z(t)\, dt + \int_0^T \langle Lu, w\rangle\, z(t)\, dt =$$
$$= \int_0^T \langle f, w\rangle\, z(t)\, dt \qquad \forall\, w \in H_0^1(\Omega),\ z \in C_0^\infty(0,T). \quad (2.15)$$

Поскольку множество $C_0^\infty(0,T)$ плотно в $L_2(0,T)$, то (2.15) остается справедливым и при любом $z \in L_2(0,T)$. Выбирая $z$ в (2.15) таким же, как в (2.13), и сравнивая это соотношение с (2.14), нетрудно показать, что

$$-\int_0^T \langle u, w\rangle \frac{\partial z}{\partial t}\, dt + \int_\Omega u_0(x)\, w(x)\, z(0)\, dx = \int_0^T \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, w\right\rangle z(t)\, dt\,.$$

Заметим также, что воспользовавшись определением обобщенной производной по $t$ и формулой интегрирования по частям, нетрудно получить следующую цепочку равенств

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, w\right\rangle z(t)\, dt = \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\langle u, w\rangle\, z(t)\, dt =$$
$$= -\int_0^T \langle u, w\rangle \frac{\partial z}{\partial t}\, dt + \int_\Omega u(x,0)\, w(x)\, z(0)\, dx\,,$$

поэтому

$$\int\limits_{\Omega} u(x,0)\, w(x)\, dx \;-\; \int\limits_{\Omega} u_0(x)\, w(x)\, dx \;=\; 0 \qquad \forall\, w \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Таким образом, (1.11) доказано. Справедливость (1.12) вытекает из (2.15) и плотности множества всех линейных комбинаций функций вида $w(x)z(t)$, где $w{\in}H_0^1(\Omega)$, $z{\in}L_2(0,T)$, в пространстве $L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$ (см. лемму 1, с. 209). □

**3. Единственность обобщенного решения.**

**Теорема 3.1.** *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Тогда обобщенное решение задачи* (1.1)–(1.3) *единственно.*

Доказательство. Пусть $u_1$, $u_2$ — два обобщенных решения задачи (1.1)–(1.3). Тогда для функции $w = u_1 - u_2$ справедливо тождество

$$\int\limits_0^T \left\{ \left\langle \frac{\partial w}{\partial t}, \eta \right\rangle + \langle Lw, \eta\rangle \right\} dt \;=\; 0 \quad \forall\, \eta \in L_2(0,T;H_0^1(\Omega))\,. \tag{3.1}$$

Произвольным образом выберем точку $t' \in (0,T)$. Полагая в (3.1) $\eta(t) = w(t)$ при $t \leqslant t'$ и $\eta(t) = 0$ при $t' < t \leqslant T$, а также учитывая, (см. теорему 1, с. 210) что

$$\left\langle \frac{\partial w}{\partial t}(t), w(t) \right\rangle \;=\; \frac{1}{2}\, \frac{\partial}{\partial t}\, |w(t)\,|_0^2\,,$$

будем иметь

$$\frac{1}{2}\, |w(t')\,|_0^2 \;=-\int\limits_0^{t'} \langle Lw(t), w(t)\rangle\, dt, \tag{3.2}$$

поскольку $w(0) = 0$.

Для оценки $\langle Lw, w\rangle$ воспользуемся (2.9) при $\varepsilon = c_0/2$. В результате из (3.2) получим, что

$$\frac{1}{2}|w(t')|_0^2 \leqslant \Big( c_\infty + \frac{c_\infty^2\, n}{c_0} \Big) \int\limits_0^{t'} |w(t)|_0^2\, dt \quad \text{для п. вс. } t' \in (0,T)\,.$$

Отсюда и из второго неравенства Гронуолла (лемма 1.2, с. 96) следует, что $w = 0$. □

**4. Гладкость обобщенного решения.** В этом пункте будет получен ряд результатов о гладкости обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3) при условии, что коэффициенты $a_{ij}$, $a_i$, $a_0$ оператора $L$ не зависят от $t$, а $b_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Кроме того, будем считать, что $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Заметим, что это условие при формулируемых ниже предположениях о гладкости коэффициентов оператора $L$ не является ограничительным (см. с. 104).

**Теорема 4.1.** *Пусть $u$ — обобщенное решение задачи* (1.1)–(1.3),

$$\partial\Omega \in C^2, \ a_i \in L_\infty(\Omega), \ i = 0, 1, \ldots, n, \ a_{ij} \in C^1(\Omega), \tag{4.1}$$

$i, j = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда:*

1) *если* $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $f \in L_2(Q_T)$, *то*

$$u \in L_2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L_\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad u' \in L_2(Q_T),$$

*и справедлива оценка*

$$\|u\|^2_{L_2(0,T;H^2(\Omega))\cap L_\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|u'\|^2_{L_2(Q_T)} \leqslant \\ \leqslant c\big(|u_0|_1^2 + \|f\|^2_{L_2(Q_T)}\big); \tag{4.2}$$

2) *если* $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $f \in H^1(0, T; L_2(\Omega))$, *то*

$$u \in L_\infty(0, T; H^2(\Omega)), \ u' \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

$$u'' \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

*и справедлива оценка:*

$$\|u\|^2_{L_\infty(0,T;H^2(\Omega))} + \|u'\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))\cap L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \\ + \|u''\|^2_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leqslant \\ \leqslant c\big(\|u_0\|^2_{H^2(\Omega)} + \|f\|^2_{H^1(0,T;L_2(\Omega))}\big). \tag{4.3}$$

Доказательство основано на получении дополнительных оценок для последовательности $\{u_m\}$ приближенных решений задачи (1.1)–(1.3), построенной при обосновании теоремы 2.1.

При этом, как и прежде, будем полагать, что в качестве базисных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ в методе Фаэдо — Галеркина выбраны ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции оператора Лапласа при граничном условии Дирихле. Поскольку $\partial\Omega \in C^2$, то, как следует из теоремы 7.1, с. 175, каждая из функций $\varphi_k$ принадлежит пространству $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ и, следовательно,

$$-\Delta\varphi_k = \lambda_k\varphi_k \quad \text{п. вс. на } \Omega, \tag{4.4}$$

где $\lambda_k$ — соответствующее собственное число оператора Лапласа. Посредством тождества

$$\langle L_0 u, \eta\rangle \;=\; \int\limits_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla\eta \, dx \qquad \forall\, u, \eta \in H_0^1(\Omega)$$

определим оператор $L_0$. Нетрудно видеть, что из условий теоремы следует линейность, ограниченность и положительная определенность оператора $L_0$, а также справедливость равенства

$$\langle L_0 u, \eta\rangle \;=\; \langle L_0\eta, u\rangle \quad \forall\, u, \eta \in H_0^1(\Omega), \tag{4.5}$$

т. е. симметрия оператора $L_0$.

Для доказательства первой части теоремы при фиксированном $m$ равенство (2.1) умножим на $(c_k^m)'$ и просуммируем по $k$ от $1$ до $m$, в результате получим

$$(u_m', u_m')_0 \;+\; \langle Lu_m, u_m'\rangle \;=\; \langle f, u_m'\rangle \;\; \text{для п. вс. } t \in (0,T). \tag{4.6}$$

Положим $L_1 = L - L_0$. Из (4.5) вытекает, что

$$\langle L_0 u_m, u_m'\rangle \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\langle L_0 u_m, u_m\rangle \;\; \text{для п. вс. } t \in (0,T). \tag{4.7}$$

Правую часть равенства (4.6) и слагаемое $\langle L_1 u_m, u_m'\rangle$ оценим, используя (1.8), с. 217, и неравенство Коши с $\varepsilon$, следующим образом:

$$|\langle L_1 u_m(t), u_m'(t)\rangle| \;\leqslant\; \frac{c}{\varepsilon}\,|u_m(t)|_1^2 \;+\; \varepsilon\,|u_m'(t)|_0^2\,,$$

$$|\langle f(t), u_m'(t)\rangle| \;\leqslant\; \frac{c}{\varepsilon}\,|f(t)|_0^2 \;+\; \varepsilon\,|u_m'(t)|_0^2\,.$$

Учитывая эти оценки и равенство (4.7), из (4.6) нетрудно получить, что

$$|u'_m(t)|_0^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle L_0 u_m(t), u_m(t)\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c}{\varepsilon}\left(|u_m(t)|_1^2 + |f(t)|_0^2\right) + 2\varepsilon\, |u'_m(t)|_0^2 \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Последнее неравенство преобразуем с помощью (1.6), с. 217. Результат при $\varepsilon = 1/4$ запишем в виде

$$|u'_m(t)|_0^2 + \frac{d}{dt}\langle L_0 u_m(t), u_m(t)\rangle \leqslant$$
$$\leqslant (8c/c_0)\left(\langle L_0 u_m(t), u_m(t)\rangle + |f(t)|_0^2\right) \text{ для п. вс. } t \in (0, T). \quad (4.8)$$

Из (4.8), леммы Гронуолла 1.1, с. 96, ограниченности и положительной определенности оператора $L_0$ нетрудно получить, что

$$\|u'_m\|^2_{L_2(Q_T)} + |u_m(t)|_1^2 \leqslant C\left(|u_0|_1^2 + \|f\|^2_{L_2(Q_T)}\right) \qquad (4.9)$$

для почти всех $t \in (0, T)$. При этом мы учли, что вследствие (2.2) функция $u_m(0)$ есть отрезок ряда Фурье для функции $u_0$ (см. (4.2), с. 170).

Воспользовавшись оценкой (4.9) и слабой компактностью ограниченных множеств в гильбертовом пространстве, выберем подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$ (за которой сохраним то же обозначение) так, чтобы

$$u'_m \rightharpoonup \xi \quad \text{при } m \to \infty \quad \text{в } L_2(Q_T)\,,$$

где $\xi$ — некоторый элемент из $L_2(Q_T)$. Устремляя $m \to \infty$ в очевидном равенстве

$$\int\limits_{Q_T} u'_m\, z\, dx\, dt = -\int\limits_{Q_T} u_m \frac{\partial z}{\partial t}\, dx\, dt \qquad \forall\, z \in C_0^\infty(Q_T) \qquad (4.10)$$

и учитывая (2.12), нетрудно убедиться в том, что $\xi = u'$. Поэтому из оценки (4.9) и слабой полунепрерывности снизу нормы (см., например, [3], с. 108) будем иметь

$$\|u'\|^2_{L_2(Q_T)} \leqslant C\left(|u_0|_1^2 + \|f\|^2_{L_2(Q_T)}\right) \qquad (4.11)$$

Справедливость оценки

$$\|u\|^2_{L_\infty(0,T;H_1^0(\Omega))} \leqslant C\left(|u_0|_1^2 + \|f\|^2_{L_2(Q_T)}\right) \qquad (4.12)$$

вытекает из (2.12), (4.9) и леммы 1, § 4 настоящей главы при $H_1 = H_2 = H_0^1(\Omega)$[1)].

Докажем ограниченность $u$ в $L_2(0,T;H^2(\Omega))$. Для этого заметим, что решение задачи (1.1)–(1.3) для почти всех $t \in (0,T)$ можно рассматривать как решение задачи Дирихле для эллиптического уравнения вида

$$Lu(t) \,=\, h(t), \quad \text{где } h(t) = f(t) - u'(t) \,\in L_2(\Omega)\,.$$

Условия (4.1) позволяют воспользоваться следствием 3.1, с. 133, и получить оценку

$$\|u(t)\|^2_{H^2(\Omega)} \,\leqslant\, c\left(|f(t)|_0^2 \,+\, |u'(t)|_0^2 \,+\, |u(t)|_0^2\right). \tag{4.13}$$

Интегрирование этого неравенства по $t$ завершает доказательство первой части теоремы.

При доказательстве второй части теоремы заметим, что из условий теоремы следует, что правая часть системы (2.3) имеет производную по $t$ из $L_2(0,T)$, коэффициенты $d^{kl}$ не зависят от $t$, $c_k^m \in H^1(0,T)$, поэтому существуют $\dfrac{d^2c_k^m}{dt^2} \in L_2(0,T)$ и справедливы равенства

$$\frac{d^2\,c_k^m}{dt^2}(t) \,+\, \sum_{k=1}^m d^{kl}\,\frac{d\,c_k^m}{dt}(t) \,=\, {f'}_k(t)\,, \qquad k = 1,2,\ldots,m\,. \tag{4.14}$$

Положим

$$\tilde{u}_m(x,t) \,=\, \sum_{k=1}^m \frac{d\,c_k^m}{dt}\,\varphi_k(x)\,.$$

Умножая (4.14) на $\dfrac{dc_k^m}{dt}$ и суммируя по $k$ от 1 до $m$, будем иметь

$$(\tilde{u}'_m\,, \tilde{u}_m)_0 \,+\, \langle L\tilde{u}_m, \tilde{u}_m\rangle \,=\, \langle f', \tilde{u}_m\rangle \;\text{ для п. вс. } t \in (0,T). \tag{4.15}$$

Рассуждая теперь точно так же, как при доказательстве неравенств (2.4), (2.5), и учитывая, что $\tilde{u}_m = u'_m$, нетрудно получить оценку

$$\|u'_m\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} \,+\, \|u'_m\|^2_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leqslant$$

[1)] Вспомогательные результаты представлены в конце этой главы в § 4.

$$\leqslant c\left(|u'_m(0)|_0^2 + \|f'\|^2_{L_2(Q_T)}\right). \quad (4.16)$$

Покажем, что

$$|u'_m(0)|_0^2 \leqslant c\left(\|u_0\|^2_{H^2(\Omega)} + \|f\|^2_{H^1(0,T;L_2(\Omega))}\right). \quad (4.17)$$

Поскольку $c_k^m \in H^2(0,T)$ (т. е. коэффициенты $c_k^m$ и их производные являются непрерывными на отрезке [0,T] функциями, см. упражнение 13.1, с. 67), то равенства (2.1) будут справедливыми и при $t = 0$. Умножая каждое из уравнений системы (2.1) при $t = 0$ на $(c_k^m)'(0)$ и суммируя по $k$ от 1 до $m$, будем иметь

$$(u'_m(0)\,, u'_m(0))_0 + \langle Lu_m(0), u'_m(0)\rangle = \langle f(0), u'_m(0)\rangle\,,$$

поэтому, как нетрудно убедиться,

$$|u'_m(0)|_0^2 \leqslant c\left(\|u_m(0)\|^2_{H^2(\Omega)} + |f(0)|_0^2\right). \quad (4.18)$$

Покажем теперь, что

$$\|u_m(0)\|_{H^2(\Omega)} \leqslant c\|u_0\|_{H_2(\Omega)}. \quad (4.19)$$

Прежде всего заметим, что поскольку $\partial\Omega \in C^2$, то по теореме 3.1, с. 129, справедливо неравенство

$$\|u_m(0)\|_{H^2(\Omega)} \leqslant c|\Delta u_m(0)|_0. \quad (4.20)$$

Очевидно, что

$$(\Delta u_m(0), \Delta u_m(0))_0 = (\Delta u_m(0), \Delta u_0)_0 + \\ + (\Delta u_m(0), \Delta u_m(0) - \Delta u_0)_0. \quad (4.21)$$

Покажем, что второе слагаемое в правой части равенства (4.21) есть нуль. Достаточно проверить, что

$$I_k \equiv (\Delta\varphi_k, \Delta u_m(0) - \Delta u_0)_0 = 0$$

для $k = 1, 2, \ldots, m$. Вследствие (4.4) имеем

$$I_k = -\lambda_k(\varphi_k, \Delta u_m(0) - \Delta u_0)_0.$$

Применяя теперь формулу интегрирования по частям, получим

$$I_k = -\lambda_k(\Delta\varphi_k, (u_m(0) - u_0))_0 = \lambda_k^2(\varphi_k, (u_m(0) - u_0))_0 = 0.$$

Последнее равенство вытекает из того, что $u_m(0)$ — отрезок ряда Фурье функции $u_0$ по системе функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Таким образом, $|\Delta u_m(0)|_0^2 = (\Delta u_m(0), \Delta u_0)_0$. Отсюда и из (4.20), очевидно, следует (4.19). Из (4.19), оценки (4.18) и очевидного соотношения

$$|f(0)|_0^2 \leqslant c\,\|f\|^2_{H^1(0,T;L_2(\Omega))}$$

следует справедливость (4.17), а с учетом (4.16) и справедливость оценки

$$\|u_m'\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} + \|u_m'\|^2_{L_2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leqslant \leqslant c\left(\|u_0\|^2_{H^2(\Omega)} + \|f\|^2_{H^1(0,T;L_2(\Omega))}\right). \quad (4.22)$$

Доказательство того, что аналогичная (4.22) оценка имеет место и для предельной функции $u$, проводится по той же схеме, что и переход от оценки (4.9) к (4.11) и (4.12).

Для того, чтобы оценить $u$ в норме $L_\infty(0.T; H^2(\Omega))$, повторим рассуждения первой части доказательства, выполненные при получении оценки (4.13), и заметим, что по условию второй части теоремы правая часть неравенства (4.13) принадлежит пространству $L_\infty(0,T)$.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы осталось показать, что

$$\|u''\|^2_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leqslant c\left(\|u_0\|^2_{H^2(\Omega)} + \|f\|^2_{H^1(0,T;L_2(\Omega))}\right). \quad (4.23)$$

Пусть $v$ — произвольный элемент из $H_0^1(\Omega)$. Каждое из равенств (4.14) умножим на $(v,\varphi_k)_0$, просуммируем почленно по $k$ от 1 до $m$. В результате, учитывая, что $(u_m'', \varphi_j)_0 = 0$ для любого $j > m$, получим, что

$$\langle u_m'', v\rangle = \left\langle f' - Lu_m', \sum_{k=1}^{m} (v,\varphi_k)\,\varphi_k \right\rangle,$$

откуда вытекает оценка

$$|\langle u_m'', v\rangle| \leqslant c\left(|f'|_0 + |u_m'|_1\right)|v|_1 \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Поэтому для почти всех $t \in (0,T)$

$$\|u_m''(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant c\left(|f'(t)|_0 + |u_m'(t)|_1\right)$$

Из этого неравенства и (4.22) следует оценка

$$\|u_m''\|^2_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leqslant c\left(\|u_0\|^2_{H^2(\Omega)} + \|f\|^2_{H^1(0,T;L_2(\Omega))}\right),$$

из которой с помощью предельного перехода получаем (4.23). Обоснование этого этапа проводится с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые были использованы для доказательства того, что из (4.9) вытекает (4.11). При этом вместо предельного перехода в равенстве (4.10) нужно перейти к пределу в равенстве

$$\int_0^T \langle u_m', w\rangle z'\,dt = -\int_0^T \langle u_m'', w\rangle z(t)\,dt,$$

справедливом при любых $w \in H_0^1(\Omega)$, $z \in C_0^\infty(0,T)$. $\square$

**Теорема 4.2.** *Пусть $u$ — обобщенное решение задачи* (1.1)–(1.3),

$$\partial\Omega \in C^{m+2},\ a_{ij} \in C^{2m+1}(\bar\Omega),\ i,j = 1,2,\ldots,n,\\ a_i \in C^{2m}(\bar\Omega),\ i = 0,1,\ldots,n,\ m \geqslant 0. \quad (4.24)$$

*Пусть, кроме того,*

$$u_0 \in H^{2m+1}(\Omega), \quad \frac{\partial^k f}{\partial t^k} \in L_2(0,T;H^{2m-2k}(\Omega)),\\ k = 0,1,\ldots,m, \quad (4.25)$$

*и выполнены следующие условия совместности начальных и граничных условий задачи* (1.1)–(1.3)[1]:

$$g_0 = u_0 \in H_0^1(\Omega),\ g_{k+1} = \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(0) - Lg_k \in H_0^1(\Omega),\ k = 0,1,\ldots,m-1.$$

*Тогда*

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} \in L_2(0,T;H^{2m+2-2k}(\Omega)), \qquad k = 0,1,\ldots,m+1,$$

*и справедлива оценка*

[1] Эти условия называют *условиями совместности $m$-го порядка.*

$$\sum_{k=0}^{m+1} \left\| \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right\|^2_{L_2(0,T;H^{2m+2-2k}(\Omega))} \leqslant$$
$$\leqslant c \left( \sum_{k=0}^{m} \left\| \frac{\partial^k f}{\partial t^k} \right\|^2_{L_2(0,T;H^{2m-2k}(\Omega))} + \|u_0\|^2_{H^{2m+1}(\Omega)} \right). \quad (4.26)$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. При $m = 0$ справедливость теоремы вытекает из первой части теоремы 4.1. Предположим, что утверждение теоремы справедливо при $m = p \geqslant 0$, и докажем, что при $m = p + 1$ оно также справедливо. Заметим, прежде всего, что из (4.25) и теоремы 2, с. 214, следует, что

$$f(0) \in H^{2p+1}(\Omega), \quad f'(0) \in H^{2p-1}(\Omega), \ \ldots, \ f^p(0) \in H^1(\Omega),$$

и потому

$$g_0 \in H^{2p+3}(\Omega), \quad g_1 \in H^{2p-1}(\Omega), \ \ldots, \ g_{p+1} \in H^1(\Omega).$$

Пусть $\tilde{u} = u'$. Фактически, при доказательстве второй части теоремы 4.1 было установлено, что $\tilde{u}$ является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + L\tilde{u} = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (x,t) \in Q_T,$$
$$\tilde{u}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T],$$
$$\tilde{u}(x,0) = g_1(x), \quad x \in \Omega.$$

Поэтому

$$\tilde{u} \in L_2(0,T;H_0^1(\Omega)), \quad \tilde{u}' \in L_2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Кроме того, функции $\partial f/\partial t$ и $g_1$ удовлетворяют условиям (4.25) при $m = p$ и условиям совместности $p$-го порядка. Поэтому, воспользовавшись предположением индукции, можем утверждать, что

$$\frac{\partial^k \tilde{u}}{\partial t^k} \in L_2(0,T;H^{2p+2-2k}(\Omega)), \qquad k = 0,1,\ldots,p+1\,,$$

и справедлива оценка

$$\sum_{k=0}^{p+1} \left\| \frac{\partial^k \tilde{u}}{\partial t^k} \right\|^2_{L_2(0,T;H^{2p+2-2k}(\Omega))} \leqslant$$
$$\leqslant c \left( \sum_{k=0}^{p} \left\| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial t^{k+1}} \right\|^2_{L_2(0,T;H^{2p-2k}(\Omega))} + \|g_1\|^2_{H^{2p+1}(\Omega)} \right).$$

Отсюда, учитывая равенство $\tilde{u} = u'$ и вытекающую из теоремы 2, с. 214, оценку

$$\|f(0)\|^2_{H^{2p+1}(\Omega)} \leqslant c \left( \|f\|^2_{L_2(0,T;H^{2p+2}(\Omega))} + \|f'\|^2_{L_2(0,T;H^{2p}(\Omega))} \right),$$

нетрудно получить, что

$$\sum_{k=1}^{p+2} \left\| \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right\|^2_{L_2(0,T;H^{2p+4-2k}(\Omega))} \leqslant$$
$$\leqslant c \left( \sum_{k=1}^{p+1} \left\| \frac{\partial^k f}{\partial t^k} \right\|^2_{L_2(0,T;H^{2p+2-2k}(\Omega))} + \right.$$
$$\left. + \|f(0)\|^2_{H^{2p+1}(\Omega)} + \|Lu_0\|^2_{H^{2p+1}(\Omega)} \right) \leqslant$$
$$\leqslant c \left( \sum_{k=0}^{p+1} \left\| \frac{\partial^k f}{\partial t^k} \right\|^2_{L_2(0,T;H^{2p+2-2k}(\Omega))} + \|u_0\|^2_{H^{2p+3}(\Omega)} \right). \quad (4.27)$$

Осталось доказать, что

$$u \in L_2(0,T;H^{2p+4}(\Omega)).$$

С этой целью решение уравнения $Lu = f - u'$, справедливого для почти всех $0 \leqslant t \leqslant T$, оценим, учитывая условия (4.24), при помощи теоремы 3.2, с. 134. В результате получим

$$\|u\|^2_{H^{2p+4}(\Omega)} \leqslant c \left( \|f - u'\|^2_{H^{2p+2}(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \right) \leqslant$$
$$\leqslant c \left( \|f\|^2_{H^{2p+2}(\Omega)} + \|u'\|^2_{H^{2p+2}(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \right).$$

Интегрируя последнее неравенство по $t$ от $0$ до $T$ и учитывая (4.27), будем иметь

$$\sum_{k=0}^{p+2}\left\|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right\|^2_{L_2(0,T;H^{2p+4-2k}(\Omega))} \leqslant$$
$$\leqslant c\Big(\sum_{k=0}^{p+1}\left\|\frac{\partial^k f}{\partial t^k}\right\|^2_{L_2(0,T;H^{2p+2-2k}(\Omega))} +$$
$$+ \|u_0\|^2_{H^{2p+3}(\Omega)} + \|u\|^2_{L_2(Q_T)}\Big). \quad (4.28)$$

Поскольку, как показано ранее,

$$\|u\|^2_{L_2(Q_T)} \leqslant c\left(\|f\|^2_{L_2(Q_T)} + \|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}\right),$$

из (4.28) следует справедливость (4.26) при $m = p+1$. □

**Теорема 4.3.** *Пусть*

$$a_{ij} \in C^\infty(\bar\Omega),\ i,j = 1,2,\ldots,n,\ a_i \in C^\infty(\bar\Omega),\ i = 0,1,\ldots,n,$$

$$u_0 \in C^\infty(\bar\Omega),\ f \in C^\infty(\bar Q_T),\ \partial\Omega \in C^\infty,$$

*и выполнены условия совместности $m$-го порядка для любого целого неотрицательного $m$. Тогда решение задачи* (1.1)–(1.3) *принадлежит* $C^\infty(\bar Q_T)$.

Доказательство состоит в последовательном применении теоремы 4.2 при $m = 0,1,\ldots$

## § 3. Нелинейные параболические уравнения

**1. Уравнения с монотонным оператором.** В этом параграфе рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u = f, \quad (x,t) \in Q_T, \quad (1.1)$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \quad (1.2)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.3)$$

в случае, когда

$$\mathcal{L}\,u = -\operatorname{div} a(x,u,\nabla u) + a_0(x,u,\nabla u), \quad (1.4)$$

где $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $a_i(x, \xi_0, \xi), i = 0, 1, \ldots, n,$ — заданные функции, измеримые по $x$ при любых $\xi_0 \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, непрерывные по $\xi_0$ и $\xi$ при любом $x \in \Omega$, удовлетворяющие условиям монотонности

$$\sum_{i=0}^{n} \left(a_i(x, \bar{\xi}_0, \bar{\xi}) - a_i(x, \xi_0, \xi)\right)(\bar{\xi}_i - \xi_i) \geqslant 0$$
$$\forall\, \xi_0, \bar{\xi}_0 \in \mathbb{R},\ \xi, \bar{\xi} \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega\,, \quad (1.5)$$

коэрцитивности

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x, \xi_0, \xi)\xi_i \geqslant c_0 \sum_{i=0}^{n} |\xi_i|^2 - \mu$$
$$\forall\, \xi_0 \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega, \quad (1.6)$$

и ограниченности

$$|a_i(x, \xi_0, \xi)| \leqslant c_1 \left(\sum_{k=0}^{n} |\xi_k| + 1\right) \quad \forall\, \xi_0 \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega. \quad (1.7)$$

Здесь $c_0 > 0$, $c_1 > 0$, $\mu \geqslant 0$ — постоянные.

По аналогии с линейным случаем назовем функцию $u$, принадлежащую $L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$, обобщенным решением задачи (1.1)–(1.4), если

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad (1.8)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \qquad \text{п. в. в } \Omega, \quad (1.9)$$

и для любой функции $\eta \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_0^T \left\{ \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \eta \right\rangle + \langle Lu, \eta \rangle \right\} dt = \int\limits_0^T \langle f, \eta \rangle\, dt, \quad (1.10)$$

где оператор $L$, действующий из $H_0^1(\Omega)$ в $H^{-1}(\Omega)$ , определим с помощью соотношения

$$\langle Lu, v \rangle = \int\limits_\Omega (a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla v + a_0(x, u, \nabla u)v)\, dx \quad \forall\, u, v \in H_0^1(\Omega).$$

**Теорема 1.1.** *Если функции* $a_i(x, \xi_0, \xi)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, *удовлетворяют перечисленным выше условиям, то задача* (1.1)–(1.4) *имеет единственное обобщенное решение при любых*

$$u_0 \in L_2(\Omega), \quad f \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

Доказательство. Сначала убедимся в единственности обобщенного решения. Если $u_1$, $u_2$ — два решения задачи (1.1)–(1.4), то для функции $w = u_1 - u_2$ легко по аналогии с линейным случаем получить для почти всех $t' \in (0, T)$ равенство

$$\frac{1}{2}|w(t')|_0^2 + \int\limits_0^{t'} \langle Lu_1 - Lu_2, u_1 - u_2\rangle \, dt = 0, \tag{1.11}$$

откуда с учетом условия монотонности (1.5) будем иметь, что $|w(t')| \leqslant 0$ для почти всех $t' \in (0, T)$, т. е. решение задачи (1.1)–(1.4) единственно.

При доказательстве существования решения будем использовать *метод полудискретизации* по переменной $t$ в сочетании с методом монотонности. Для этого построим на отрезке $[0, T]$ равномерную сетку с шагом $\tau$. Положим

$$\bar{\omega}_\tau = \{t = k\tau, \ k = 0, 1, \ldots, N, \ N\tau = T\}, \ \omega_\tau = \bar{\omega}_\tau \setminus \{0\}.$$

Функцию $y$, определенную на $\Omega \times \bar{\omega}_\tau$, будем называть полудискретным решением задачи (1.1)–(1.4), если для любого $t \in \omega_\tau$ функция $y(t) \in H_0^1(\Omega)$, $y(x, 0) = u_0(x)$ почти всюду в $\Omega$ и для любой функции $\eta \in H_0^1(\Omega)$ выполнено равенство

$$\left\langle \frac{\widehat{y}(t) - y(t)}{\tau}, \eta \right\rangle + \langle L\,\widehat{y}(t), \eta\rangle = \langle f_\tau(t), \eta\rangle \quad \forall\, t \in \bar{\omega}_\tau \setminus \{T\}, \tag{1.12}$$

где $\widehat{y}(t) = y(t + \tau)$,

$$\langle f_\tau(t), v\rangle = (f_{0\tau}, v)_0 - \sum_{i=1}^n (f_{i\tau}, \frac{\partial v}{\partial x_i})_0, \quad f_{i\tau}(t) = 1/\tau \int\limits_t^{t+\tau} f_i(\xi) d\xi.$$

Здесь, как и в § 2, полагаем, что $f = f_0 + \sum\limits_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Записав уравнение (1.12) в виде

$$\langle\, (E + \tau L)\,\widehat{y}(t)\,,\,\eta\,\rangle = \langle y(t) + \tau f_\tau(t)\,,\,\eta\,\rangle \quad \forall\, t \in \bar{\omega}_\tau \setminus \{T\}, \quad (1.13)$$

заметим, что (1.13) при известном $y(t)$ является относительно $\widehat{y}(t)$ эллиптическим уравнением с монотонным оператором. Поэтому существование полудискретного решения следует из результатов главы 2 (см. теорему 4.1, с. 152). В единственности решения уравнения (1.13) легко убедиться, используя очевидное неравенство

$$\langle\, v - z\,,\, v - z\,\rangle + \tau\,\langle\, Lv - Lz\,,\, v - z\,\rangle \geqslant |v - z|_0^2 \quad \forall\, v, z \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Докажем, далее, что для решения полудискретной задачи справедливы следующие априорные оценки:

$$|\, y(t)\,|_0^2 \leqslant c_1 \Big(|\,\, u_0\,|_0^2 + 1 + \sum_{i=0}^{n} \|\, f_i\,\|_{L_2(Q_T)}^2\Big) \quad \forall\, t \in \bar{\omega}_\tau, \qquad (1.14)$$

$$\sum_{t\in\omega_\tau} \tau |\, y(t)\,|_1^2 \leqslant c_2 \Big(|\,\, u_0\,|_0^2 + 1 + \sum_{i=0}^{n} \|\, f_i\,\|_{L_2(Q_T)}^2\Big), \qquad (1.15)$$

$$\sum_{t\in\omega_\tau} \tau \big|a_j(x, y(t), \nabla y(t))\big|_0^2 \leqslant c_3 \Big(|u_0|_0^2 + 1 + \sum_{i=0}^{n} \|f_i\|_{L_2(Q_T)}^2\Big), \quad (1.16)$$

$j = 0, 1, \ldots, n$. Здесь $c_1, c_2, c_3$ — постоянные, не зависящие от $\tau$.

Для получения этих оценок положим в (1.12) $\eta = \widehat{y}(t)$. В результате, получим

$$\langle\, y_t(t)\,,\, \widehat{y}(t)\,\rangle + \langle\, L\,\widehat{y}(t)\,,\, \widehat{y}(t)\,\rangle = \langle\, f_\tau(t)\,,\, \widehat{y}(t)\,\rangle\,, \qquad (1.17)$$

где $y_t(t) = (\widehat{y}(t) - y(t))/\tau$. Элементарные выкладки показывают, что

$$\langle\, y_t(t)\,,\, \widehat{y}(t)\,\rangle = \frac{1}{2\tau}|\,\widehat{y}(t)\,|_0^2 - \frac{1}{2\tau}|\, y(t)\,|_0^2 + \frac{\tau}{2}\,|\, y_t(t)\,|_0^2\,. \qquad (1.18)$$

При оценке $\langle\, L\,\widehat{y}(t)\,,\, \widehat{y}(t)\,\rangle$ воспользуемся условием коэрцитивности (1.6). Правую часть (1.17) оценим с помощью неравенства Коши с $\varepsilon$. В результате будем иметь

$$(1 - \tau)|\,\widehat{y}(t)\,|_0^2 + \tau\,(2c_0 - \varepsilon n)\,|\,\widehat{y}(t)\,|_1^2 \leqslant |y(t)|_0^2 + 2\tau\mu +$$

$$+\,\tau\Big\{|\,f_{0\tau}(t)\,|_0^2\,+\,\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}|\,f_{i\tau}(t)\,|_0^2\Big\}. \quad (1.19)$$

Пусть $\varepsilon < c_0/n$. Тогда для $\tau < 1/\widetilde{c}$, $\widetilde{c} = \mathrm{const} > 1$, оценка (1.19) позволяет воспользоваться леммой 2, с. 259, при $\xi(t) = y(t)$,

$$\eta(t) = 2\tau/(1-\tau\,\widetilde{c})\Big\{|\,f_{0\tau}(t)\,|_0^2\,+\,2\tau\mu\,+\,1/\varepsilon\sum_{i=1}^{n}|\,f_{i\tau}(t)\,|_0^2\Big\},$$

$\rho = 1/(1-\tau\,\widetilde{c})$. В результате, учитывая легко проверяемую оценку

$$\tau\sum_{i=0}^{k}|\,f_{j\tau}(t_i)\,|_0^2\,\leqslant\,\int\limits_0^T|\,f_j(t)\,|_0^2\,dt \qquad \forall k=0,1,\ldots,N-1, \quad (1.20)$$

и тот факт, что при достаточно малом $\tau$ для всех $k = 0,\,1,\,\ldots,\,N$ выполнено неравенство $(1-\tau\,\widetilde{c})^{-k}\leqslant\exp(2\,\widetilde{c}\,T)$, получим (1.14).

Суммируя неравенства (1.19) $t$ от $0$ до $T-\tau$, при $\varepsilon < c_0/n$ будем иметь

$$\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\,c_0\,|\,\widehat{y}(t)\,|_1^2\,\leqslant\,|\;u_0\,|_0^2\,+\,\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau|\,\widehat{y}(t)\,|_0^2\,+$$
$$+\,\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\Big\{\,2\mu\,+\,|\,f_{0\tau}(t)\,|_0^2\,+\,\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}|\,f_{i\tau}(t)\,|_0^2\Big\}\,.$$

Из этого неравенства, уже доказанной оценки (1.14) и (1.20) нетрудно получить (1.15), а из (1.15) и условия (1.7) вытекает оценка (1.16). Подчеркнем, что (1.14)–(1.16) имеют место для всех $\tau < 1/\widetilde{c}$. При этом постоянные $c_1$, $c_2$, $c_3$ от параметра $\tau$ не зависят.

Далее, для функции $z(t)$, заданной на множестве $\bar{\omega}_\tau$, определим операторы продолжения на весь отрезок $[0,T]$:

$$\Pi_\tau^- z(t') = z(t) \;\text{ при } (t-\tau) < t' \leqslant t,\; t\in\omega_\tau,$$

$$\Pi_\tau^+ z(t') = z(t) \;\text{ при } t \leqslant t' < (t+\tau),\; t\in\bar{\omega}_\tau\setminus\{T\}.$$

Из оценок (1.14)–(1.16) и леммы 4, с. 260, вытекает существование последовательности шагов $\tau$ и функций $u$ из

$L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$ и $\chi_i$ из $L_2(Q_T)$, $i = 0,1,\ldots,n$, таких, что при $\tau \to 0$

$$\Pi_\tau^- y \rightharpoonup u \text{ в } L_2(0,T;H_0^1(\Omega)), \quad \Pi_\tau^+ y \rightharpoonup u \quad \text{в } L_2(Q_T)\,, \tag{1.21}$$

$$a_i(x,\Pi_\tau^- y,\nabla\Pi_\tau^- y) \rightharpoonup \chi_i \quad \text{в } L_2(Q_T)\,. \tag{1.22}$$

Докажем, что функция $u$, определенная предельными соотношениями (1.21), является обобщенным решением задачи (1.1)–(1.4). Для этого в равенстве (1.12) положим $\eta = \tau\,\widehat{w}^\tau(t)$, где $w^\tau$ — сеточная функция, совпадающая на множестве $\bar\Omega\times\bar\omega_\tau$ с функцией $w\in C^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ такой, что $w(x,0)=0$. Результат, суммируя по $t$ от 0 до $T-\tau$ и преобразуя первое слагаемое с помощью легко проверяемой формулы

$$\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\langle y_t(t),\widehat{w}^\tau(t),\rangle = -\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\langle y(t),(w^\tau)_t(t)\rangle - \langle u_0,w^\tau(0)\rangle, \tag{1.23}$$

запишем, воспользовавшись операторами $\Pi_\tau^\pm$, в виде

$$\begin{gathered}
-\int\limits_{Q_T}\Pi_\tau^+ y\,\Pi_\tau^+(w^\tau)_t\,dx\,dt - \int\limits_\Omega u_0(x)\,w(x,0)\,dx + \\
+\int\limits_{Q_T}\Bigg\{\sum_{i=1}^n a_i(x,\Pi_\tau^-(y),\nabla\Pi_\tau^-(y))\,\frac{\partial\Pi_\tau^-(w)}{\partial x_i} + \\
+\;a_0(x,\Pi_\tau^-(y),\nabla\Pi_\tau^-(y))\,\Pi_\tau^-(w^\tau)\Bigg\}\,dx\,dt = \\
=\int\limits_{Q_T}(f_0\,\Pi_\tau^-(w^\tau) - \mathbf{f}\cdot\nabla\Pi_\tau^-(w^\tau))\,dx\,dt.
\end{gathered}\tag{1.24}$$

Напомним, что $\mathbf{f}=(f_1,f_2,\ldots,f_n)$.

В равенстве (1.24), используя (1.21), (1.22) и лемму 3, с. 260, перейдем к пределу при $\tau\to 0$. В результате получим

$$\begin{gathered}
-\int\limits_{Q_T}u\,\frac{\partial w}{\partial t}\,dx\,dt - \int\limits_\Omega u_0(x)\,w(x,0)\,dx + \\
+\int\limits_{Q_T}\left\{\sum_{i=1}^n\chi_i\frac{\partial w}{\partial x_i}+\chi_0 w\right\}dxdt = \int\limits_{Q_T}(f_0\,w - \mathbf{f}\cdot\nabla w)\,dx\,dt.
\end{gathered}\tag{1.25}$$

Доказательство того, что функция $u$ удовлетворяет тождеству

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}\,,\, w \right\rangle dt \;+ \int_{Q_T} \left\{ \sum_{i=1}^n \chi_i \,\frac{\partial w}{\partial x_i} \;+\; \chi_0 \, w \right\} dx\, dt \;=$$

$$= \int_{Q_T} (f_0 \, w \;-\; \mathbf{f} \cdot \nabla w)\, dx\, dt \quad \forall\, w \in L_2(0,T; H_0^1(\Omega))\,, \qquad (1.26)$$

а также условиям (1.8), (1.9), проводится аналогично доказательству соответствующей части теоремы 2.1, с. 219.

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить, что для любой функции $w \in L_2(0,T; H_0^1(\Omega))$

$$\int_{Q_T} \left\{ \sum_{i=1}^n \chi_i \,\frac{\partial w}{\partial x_i} \;+\; \chi_0 \, w \right\} dx\, dt \;=$$

$$= \int_{Q_T} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,u,\nabla u)\,\frac{\partial w}{\partial x_i} \;+\; a_0(x,u,\nabla u)\, w \right\} dx\, dt. \qquad (1.27)$$

Заметим, что из монотонности оператора $L$ и очевидного неравенства (ср. с (1.18))

$$\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \Big\langle\, (y - v^\tau)_t(t)\,,\, (\widehat{y} \;-\; \widehat{v}^{\,\tau})(t) \Big\rangle \;\geqslant\; \frac{1}{2}\, |y(T) \;-\; v^\tau(T)|_0^2 \;-$$

$$-\; \frac{1}{2}\, |u_0 \;-\; v^\tau(0)|_0^2$$

следует, что

$$\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \Big\langle\, (y - v^\tau)_t(t) \;+\; (L\,\widehat{y} \;-\; L\,\widehat{v}^{\,\tau})(t),\, (\widehat{y} \;-\; \widehat{v}^{\,\tau})(t) \Big\rangle \;\geqslant$$

$$\geqslant\; -\frac{1}{2}\, |u_0 \;-\; v^\tau(0)|_0^2\,, \qquad (1.28)$$

где $v^\tau$ — определенная на $\bar{\Omega} \times \bar{\omega}_\tau$ функция, равная функции $v$ из $C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$ на этом множестве, $y$ — решение полудискретной задачи (1.12). Неравенство (1.28), используя (1.12) и операторы восполнения $\Pi_\tau^\pm$, запишем в виде

$$\int\limits_{Q_T} (f_0\,\Pi_\tau^-(v^\tau) - \mathbf{f}\cdot\nabla\Pi_\tau^-(v^\tau))\,dx\,dt - \int\limits_{Q_T} \Pi_\tau^+(v^\tau)_t\,\Pi_\tau^-(y - v^\tau)\,dx\,dt -$$

$$- \int\limits_{Q_T} \Bigg\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, \Pi_\tau^- v^\tau, \nabla\Pi_\tau^- v^\tau)\,\frac{\partial\Pi_\tau^-(y - v^\tau)}{\partial x_i} +$$

$$+\ a_0(x, \Pi_\tau^- v^\tau, \nabla\Pi_\tau^- v^\tau)\,\Pi_\tau^-(y - v^\tau) \Bigg\}\,dx\,dt\ \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{1}{2}\,|u_0\ -\ v^\tau(0)|_0^2\,. \qquad (1.29)$$

Опираясь на соотношения (1.21), (1.22), лемму 3, с. 260, и используя непрерывность оператора Немыцкого (см с. 142), перейдем в (1.29) к пределу при $\tau \to 0$. Получим

$$\int\limits_{Q_T} (f_0\,(u - v) - \mathbf{f}\cdot\nabla(u - v))\,dx\,dt\ - \int\limits_{Q_T} \frac{\partial v}{\partial t}\,(u - v)\,dx\,dt -$$

$$- \int\limits_{Q_T} \Bigg\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, v, \nabla v)\,\frac{\partial(u - v)}{\partial x_i} +$$

$$+\ a_0(x, v, \nabla v)\,(u - v) \Bigg\}\,dx\,dt\ \geqslant -\frac{1}{2}\,|u_0\ -\ v(0)|_0^2\,. \qquad (1.30)$$

Преобразуем неравенство (1.30), используя (1.26) при $w = u - v$:

$$\int\limits_0^T \Big\langle \frac{\partial(u - v)}{\partial t}\,,\ u - v \Big\rangle\,dt + \int\limits_{Q_T} \Bigg\{ \sum_{i=1}^n (\chi_i - a_i(x, v, \nabla v))\,\frac{\partial(u - v)}{\partial x_i} +$$

$$+\ (\chi_0 - a_0(x, v, \nabla v))\,(u - v) \Bigg\}\,dx\,dt\ \geqslant -\frac{1}{2}\,|u_0\ -\ v(0)|_0^2\,. \qquad (1.31)$$

Нетрудно видеть, что (1.31) остается справедливым и для любой функции $v \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ такой, что $\partial v/\partial t$ принадлежит $L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Следовательно, в (1.31) можно положить функцию $v$ равной $u + \lambda w$, где $\lambda$ — произвольная положительная постоянная, а $w$ — произвольная функция из $L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ такая, что $\partial w/\partial t$ принадлежит $L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ и $w(x, 0) = 0$ почти всюду в $\Omega$. В результате, получим

$$\lambda \int\limits_0^T \left\langle \frac{\partial w}{\partial t}, w \right\rangle dt + \int\limits_{Q_T} \left\{ \sum_{i=1}^n \Big( \chi_i - a_i(x, u+\lambda w, \nabla(u+\lambda w)) \Big) \frac{\partial w}{\partial x_i} + \right.$$

$$\left. + \Big( \chi_0 - a_0(x, u+\lambda w, \nabla(u+\lambda w)) \Big) w \right\} dx\,dt \geqslant 0.$$

В последнем неравенстве, используя сильную сходимость $u+\lambda w$ к $u$ в $L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$ и непрерывность оператора Немыцкого, перейдем к пределу при $\lambda \to 0$. В итоге будем иметь, что

$$\int\limits_{Q_T} \left\{ \sum_{i=1}^n \big(\chi_i - a_i(x,u,\nabla u)\big) \frac{\partial w}{\partial x_i} + \big(\chi_0 - a_0(x,u,\nabla u)\big) w \right\} dx\,dt \geqslant 0.$$

В силу произвольности $w$ из этого неравенства следует справедливость тождества (1.27). □

При более сильных предположениях об исходных данных задачи (1.1)–(1.4) можно получить результат о некоторой регулярности обобщенного решения, а именно, справедлива

**Теорема 1.2.** *Пусть функции $a_i(x,\xi_0,\xi)$ $i = 0,1,\ldots,n$ удовлетворяют всем перечисленным в начале этого параграфа* (*см. с. 235*) *условиям, за исключением* (1.6), *кроме того, для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi_0 \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$*

$$\sum_{i=0}^n a_i(x,\xi_0,\xi)\xi_i \geqslant \tilde{c}_0 \sum_{i=0}^n |\xi_i|^2 - \tilde{\mu} \sum_{i=0}^n, |\xi_i|, \quad \tilde{c}_0 > 0, \tilde{\mu} \geqslant 0^{1)}, \quad (1.32)$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial \xi_j}(x,\xi_0,\xi) = \frac{\partial a_j}{\partial \xi_i}(x,\xi_0,\xi) \qquad i,j = 0,1,\ldots,n\,. \qquad (1.33)$$

*Пусть также $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $f \in L_2(Q_T)$. Тогда для обобщенного решения задачи* (1.1)–(1.4) *справедлива оценка*

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_2(Q_T)} + \| u \|_{L_\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \leqslant$$

---

[1)] Заметим, что условие (1.32) сильнее условия (1.6), поскольку, очевидно,

$$\sum_{i=0}^n |\xi_i| \leqslant \varepsilon/2 \sum_{i=0}^n |\xi_i|^2 + n^{1/2}/(2\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

$$\leqslant c\Big(\|\, u_0\,\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\, f\,\|_{L_2(Q_T)} + 1\Big). \quad (1.34)$$

Доказательство. Полагая $\eta = \tau y_t(t)$, просуммируем равенство (1.12) по $t$ от 0 до $t'-\tau$, $t' \in \omega_\tau$. В результате получим

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau\,\|\, y_t(t)\,\|_0^2 + \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau\,\langle\, L\,\widehat{y}(t)\,,\, y_t(t)\,\rangle = \\ = \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau\,\langle\, f_\tau(t)\,,\, y_t(t)\,\rangle\,. \quad (1.35)$$

Определим оператор $A(x,\bar\xi)$, действующий при каждом $x \in \Omega$ из $\mathbb{R}^{n+1}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, следующим образом:

$$\big(A(x,\bar\xi)\big)_i = a_i(x,\xi_0,\xi)\,\xi_i, \qquad i = 0,1,\ldots,n\,,$$

где $\bar\xi = (\xi_0,\xi)$, $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$. Условия (1.33) обеспечивают потенциальность оператора $A$, иными словами, существует функция $\Phi(x,\bar\xi)$ такая, что

$$A(x,\bar\xi) = \left(\frac{\partial\,\Phi(x,\bar\xi)}{\partial\,\xi_0}\,,\ldots,\,\frac{\partial\,\Phi(x,\bar\xi)}{\partial\,\xi_n}\right),$$

и потому

$$\int_0^1 A(x\,,\,\bar\xi + \theta(\bar\zeta - \bar\xi\,))\cdot\big(\bar\zeta - \bar\xi\big)\,d\theta = \int_0^1 \frac{\partial\,\Phi(x,\bar\xi + \theta(\bar\zeta - \bar\xi))}{\partial\,\theta}\,d\theta = \\ = \Phi(x,\bar\zeta) - \Phi(x,\bar\xi) \quad \forall\,\bar\xi,\ \bar\zeta \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (1.36)$$

Потенциал оператора определяется с точностью до постоянного слагаемого. Полагая $\Phi(x,0) = 0$, из (1.36) будем иметь

$$\Phi(x,\bar\xi) = \int_0^1 \big(A(x,\theta\,\bar\xi)),\bar\xi\big)_{\mathbb{R}^{n+1}}\,d\theta\,. \quad (1.37)$$

Используя (1.37), (1.33) и (1.7), нетрудно получить следующие оценки:

$$\tilde c_0 \sum_{i=0}^{n} |\xi_i|^2 - \tilde\mu \leqslant \Phi(x,\bar\xi) \leqslant \tilde c_1 \sum_{i=0}^{n} |\xi_i|^2\,, \quad (1.38)$$

где $\tilde{c}_0$, $\tilde{c}_1$ — положительные постоянные.

Далее, положим

$$F(v) = \int_\Omega \Phi(x, \bar{\xi}(v))\, dx\,,$$

где $\bar{\xi}(v) = (v, \nabla v)$, $v \in H_0^1(\Omega)$. Для функционала $F$, воспользовавшись (1.36), (1.38), при любых $v, w \in H_0^1(\Omega)$ будем иметь:

$$F(v) - F(w) = \int_0^1 \langle\, L(w + \zeta(v - w))\,,\, v - w\rangle\, d\zeta\,, \tag{1.39}$$

$$\tilde{c}_0\, \|v\|_1^2 - \tilde{\mu} \leqslant F(v) \leqslant \tilde{c}_1\, \|v\|_1^2\,. \tag{1.40}$$

В силу (1.39)

$$\tau \langle\, L\,\widehat{y}\,,\, y_t\,\rangle = \langle\, L\,\widehat{y}\,,\, \widehat{y} - y\,\rangle =$$
$$= F(\widehat{y}) - F(y) + \int_0^1 \langle\, L\,\widehat{y} - L(y + \zeta(\widehat{y} - y))\,,\, \widehat{y} - y\,\rangle\, d\zeta\,.$$

Из этого равенства и оценки

$$\int_0^1 \langle\, L\,\widehat{y} - L(y + \zeta(\widehat{y} - y))\,,\, \widehat{y} - y\,\rangle\, d\zeta \geqslant 0\,,$$

справедливой в силу монотонности оператора $L$ (см. (1.5)), вытекает, что

$$\tau \langle\, L\,\widehat{y}\,,\, y_t\,\rangle \geqslant F(\widehat{y}) - F(y). \tag{1.41}$$

Используя (1.35), (1.41), неравенство Коши $\varepsilon$ для оценки правой части (1.35), нетрудно получить

$$\Bigl(1 - \frac{\varepsilon}{2}\Bigr) \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau\, \|\, y_t(t)\,\|_0^2 + F(y(t')) \leqslant F(u_0) + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{t=0}^{T-\tau} \tau\, \|\, f_\tau(t)\,\|_0^2\,,$$

откуда, учитывая (1.40), будем иметь

$$\| \Pi_\tau^+ y_t \|^2_{L_2(Q_T)} + \| \Pi_\tau^- y(t) \|^2_{H_0^1(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant c \left( \| u_0 \|^2_{H_0^1(\Omega)} + \| f \|^2_{L_2(Q_T)} + 1 \right) \quad \forall\, t \in \omega_\tau .$$

Таким образом, последовательность $\{\Pi_\tau^+ y_t\}$ равномерно ограничена в $L_2(Q_T)$, а потому найдется подпоследовательность, для которой справедливо (1.21) и следующее соотношение:

$$\Pi_\tau^+ y_t \rightharpoonup \chi \qquad \text{в} \quad L_2(Q_T)\,. \tag{1.42}$$

Убедиться в том, что $\chi = \partial u/\partial t$, нетрудно, если, используя (1.21) и (1.42), перейти к пределу при $\tau \to 0$ в следующем легко проверяемом равенстве:

$$\int\limits_{Q_T} \Pi_\tau^+ y_t \, \Pi_\tau^+ z^\tau \, dx\, dt = - \int\limits_{Q_T} \Pi_\tau^+ \widehat{y} \, \Pi_\tau^+ z_t^\tau \, dx\, dt\,,$$

где $z^\tau$ – функция, совпадающая с $z \in C_0^\infty(Q_T)$ на множестве $\bar\Omega \times \bar\omega_\tau$, $y$ — решение полудискретной задачи (1.12) (ср. с доказательством леммы 4, с. 260).

Оценка (1.34) следует из (1.21), (1.42), слабой полунепрерывности снизу нормы и леммы 1, с. 258. □

**2. Нелинейные уравнения с монотонной по градиенту главной частью пространственного оператора.** В этом пункте рассматривается задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i(x,u) k_i(x, \nabla u)) + a_0(x,u) = f, \tag{2.1}$$

$$u(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \tag{2.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{2.3}$$

Будем предполагать, что функции $a_i(x,\xi_0)$, $i = 0,1,\ldots,n$, и $k_i(x,\xi)$, $i = 1,2,\ldots,n$, непрерывны по $\xi_0$ и $\xi$, измеримы по $x$ и удовлетворяют при любых $x \in \Omega$, $\xi_0 \in R^1$, $\xi^1, \xi^2, \xi \in R^n$ условиям

$$0 < \beta_0 \leqslant a_i(x,\xi_0) \leqslant \beta_1, \quad i = 1,2,\ldots,n, \tag{2.4}$$

$$|a_0(x,\xi_0)| \leqslant \beta_2 \, |\xi_0| + \beta_3\,, \qquad \beta_2, \beta_3 = \mathrm{const} \geqslant 0\,, \tag{2.5}$$

$$|k_i(x,\xi)| \leqslant \beta_4 \sum_{j=1}^{n} |\xi_j| + \beta_5, \quad \beta_4 > 0,\ \beta_5 \geqslant 0, \tag{2.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,\xi_0) k_i(x,\xi)\xi_i \geqslant c_0 \sum_{i=1}^{n} |\ \xi_i\ |^2\ - \mu, \quad c_0 > 0,\ \mu \geqslant 0, \tag{2.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,\xi_0)(k_i(x,\xi^1) - k_i(x,\xi^2))(\xi_i^1 - \xi_i^2) \geqslant 0. \tag{2.8}$$

Определим операторы $L$, $L_0$, действующие из $H_0^1(\Omega)$ в $H^{-1}(\Omega)$, при помощи тождеств

$$\langle Lu, v\rangle = \int\limits_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^{n} a_i(x,u) k_i(x,\nabla u) \frac{\partial v}{\partial x_i} + a_0(x,u)v \right) dx \qquad \forall\, u, v \in H_0^1(\Omega),$$

$$\langle L_0 u, v\rangle = \int\limits_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^{n} a_i(x,u) k_i(x,\nabla u) \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx \quad \forall\, u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Как нетрудно убедиться, из (2.4), (2.6)–(2.8) вытекает, что оператор $L_0$ является непрерывным, коэрцитивным, ограниченным, но не монотонным. Вследствие (2.8) его естественно называть монотонными по градиенту. Отметим, что весь пространственный оператор $L$ сохраняет свойства непрерывности, коэрцитивности и ограниченности.

Как и в случае уравнения с монотонным оператором, обобщенным решением задачи (2.1)–(2.3) назовем функцию $u$ из $L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$ такую, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(0,T;H^{-1}(\Omega)), \tag{2.9}$$

$$u(x,0) \,=\, u_0(x) \quad \text{п. в. в } \Omega, \tag{2.10}$$

и для любой функции $\eta \in L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$ выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_0^T \left\{ \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \eta \right\rangle \,+\, \langle Lu, \eta\rangle \right\} dt \,=\, \int\limits_0^T \langle f, \eta\rangle \, dt. \tag{2.11}$$

**Теорема 2.1.** *Пусть функции* $a_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, *и функции* $k_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *удовлетворяют перечисленным выше условиям. Тогда задача* (2.1)–(2.3) *имеет хотя бы одно обобщенное решение при любых* $u_0 \in L_2(\Omega)$ *и* $f \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

Доказательство. Вновь воспользуемся методом полудискретизации. Функцию $y$, определенную на $\Omega \times \bar{\omega}_\tau$, назовем решением полудискретной задачи (2.1)–(2.3), если $y(t) \in H_0^1(\Omega)$ $\forall t \in \omega_\tau$, $y(x, 0) = u_0(x)$ почти всюду в $\Omega$, и для любой функции $\eta \in H_0^1(\Omega)$ и для любого $t \in \bar{\omega}_\tau \setminus \{T\}$ имеет место равенство

$$\langle\, y_t(t)\, ,\, \eta\rangle + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_\Omega a_i(x, y(t))\; k_i(x, \nabla \widehat{y}(t))\, \frac{\partial\, \eta}{\partial\, x_i}\; dx + {}$$

$$+ \int\limits_\Omega a_0(x, \widehat{y}(t))\; \eta\, dx \;=\; \langle\, f_\tau(t)\, ,\, \eta\,\rangle\,. \qquad (2.12)$$

Заметим, что для оператора $B$, порождаемого тождеством

$$\langle B\, v\, ,\, \eta\rangle \;=\; \sum_{i=1}^{n} \int\limits_\Omega a_i(x, y(t))\; k_i(x, \nabla v)\, \frac{\partial\, \eta}{\partial\, x_i}\; dx \quad \forall\, v, \eta \in H_0^1(\Omega),$$

выполнены условия монотонности, ограниченности и коэрцитивности. Поэтому разрешимость (2.12) относительно $\widehat{y}(t)$ при известном $y(t)$ следует из результатов п.3 4 главы 2.

При получении равномерных по $\tau$ априорных оценок для полудискретного решения положим в (2.12) $\eta = \widehat{y}(t)$, воспользуемся равенством (1.18), а также вытекающими из свойств (2.7) и (2.5) неравенствами

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_\Omega a_i(x, y(t))\; k_i(x, \nabla \widehat{y}(t))\, \frac{\partial\, \widehat{y}(t)}{\partial\, x_i}\; dx \;\geqslant\; c_0\, |\widehat{y}(t)|_1^2 \,-\, \mu\,,$$

$$\left| \int\limits_\Omega a_0(x, \widehat{y}(t))\; \widehat{y}(t)\, dx \right| \;\leqslant\; c_2\, |\widehat{y}(t)|_0^2 \,+\, c_3\,,$$

где $c_2$, $c_3$ — постоянные, зависящие от $\beta_2$ и $\beta_3$. В результате будем иметь

$$\{1-(1+c_2)\tau\}\,|\,\widehat{y}(t)\,|_0^2 + \tau\,(2c_0-\varepsilon n)\,|\,\widehat{y}(t)\,|_1^2 \leqslant |y(t)|_0^2 +$$
$$+ 2\tau\Big\{c_3 + |\,f_{0\tau}(t)\,|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}|\,f_{i\tau}(t)\,|_0^2\Big\}. \quad (2.13)$$

Нетрудно показать по аналогии с доказательством теоремы 1.1 (см. с. 238), что из неравенства (2.13) при $\varepsilon < c_0/n$ и $\tau < (1+c_2)^{-1}$ следуют оценки

$$|\widehat{y}(t)|_0^2 \leqslant \widetilde{c}_1\left(|\,u_0|_0^2 + 1 + \sum_{i=0}^{n}|\,f_i\,|^2_{L_2(Q_T)}\right) \qquad \forall t\in\bar{\omega}_\tau\,, \quad (2.14)$$

$$\sum_{t\in\omega_\tau}\tau\,|y(t)|_1^2 \leqslant \widetilde{c}_2\left(|u_0|_0^2 + 1 + \sum_{i=0}^{n}|\,f_i\,|^2_{L_2(Q_T)}\right). \quad (2.15)$$

Оценка (2.15) и условие (2.6) позволяют заключить, что для всех $i = 1,2,\ldots,n$

$$\sum_{t\in\omega_\tau}\tau\,|\,k_i(x,\nabla y(t))\,|_0^2 \leqslant \widetilde{c}_3\left(|u_0|_0^2 + 1 + \sum_{i=0}^{n}|f_i|^2_{L_2(Q_T)}\right). \quad (2.16)$$

Докажем, далее, что для полудискретного решения справедливо также неравенство

$$\frac{1}{k\tau}\sum_{m=0}^{N-k\tau}\tau|\,y(m\tau+k\tau)-y(m\tau)|_0^2 \leqslant c\,, \quad (2.17)$$

где $k$ — любое целое число, принадлежащее отрезку $[1,N]$. Для этого просуммируем обе части (2.12) по $t$ от $t=m\tau$ до $t=m\tau+$ $+(k-1)\tau$, полученное равенство при $\eta=\tau(y(m\tau+k\tau)-y(m\tau))$ просуммируем по $m$ от 0 до $N-k$. В результате будем иметь

$$\frac{1}{k\tau}\sum_{m=0}^{N-k}\tau|\,y(m\tau+k\tau)-y(m\tau)|_0^2 +$$
$$= -\frac{1}{k}\sum_{m=0}^{N-k}\sum_{j=m}^{m+(k-1)}\tau\int\limits_\Omega\Big\{a_0(x,y((j+1)\tau))\,\big(y(m\tau+k\tau)-y(m\tau)\big)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}a_i(x,y(j\tau))\,k_i(x,\nabla\widehat{y}((j+1)\tau))\,\frac{\partial\,(y(m\tau+k\tau)-y(m\tau))}{\partial\,x_i}\Big\}\,dx+$$

$$+\frac{1}{k}\sum_{m=0}^{N-k}\sum_{j=m}^{m+(k-1)}\tau\,\langle\, f_\tau(j\tau)\,,\,(y(m\tau+k\tau)-y(m\tau))\,\rangle\,. \quad (2.18)$$

Заметим, что

$$\left|\frac{1}{k}\sum_{m=0}^{N-k}\sum_{j=m}^{m+(k-1)}\tau\int\limits_\Omega a_0(x,y((j{+}1)\tau))\;(y(m\tau{+}k\tau){-}y(m\tau))\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{k}\sum_{m=0}^{N-k}\sum_{j=m}^{m+(k-1)}\tau\int\limits_\Omega\big(\beta_2|y((j{+}1)\tau))|{+}\beta_3\big)|y(m\tau{+}k\tau){-}y(m\tau)|dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\bar c}{k}\sum_{m=0}^{N-k}\sum_{j=m}^{m+(k-1)}\tau\,\big(|\,y((j+1)\tau))|_0^2+|y(m\tau+k\tau)-y(m\tau)|_0^2+1\big)\leqslant$$

$$\leqslant c\Big(\sum_{m=0}^{N}\tau|y(m\tau)|_0^2+1\Big)\,.$$

При получении этой оценки учтено, что в двойной сумме значение $|y(m\tau)|_0^2$ при каждом $m$ встречается не более $3k$ раз. Аналогично оценивается вся правая часть равенства (2.18). Таким образом, неравенство (2.17) доказано.

Используя (2.14)–(2.17), лемму 4, с. 260, и следствие из теоремы 5, с. 262, нетрудно обосновать существование последовательности $\tau$ и функций

$$u\in L_2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap L_\infty(0,T;L_2(\Omega)),\ \chi_i\in L_2(Q_T),\ i=1,2,\ldots,n,$$

таких, что при $\tau\to 0$

$$\Pi_\tau^- y\ \rightharpoonup\ u\quad \text{в}\ L_2(0,T;H_0^1(\Omega))\,,\quad \Pi_\tau^+ y\ \to\ u\quad \text{в}\ L_2(Q_T)\,,\quad (2.19)$$

$$k_i(x,\nabla\Pi_\tau^- y)\ \rightharpoonup\ \chi_i\qquad \text{в}\quad L_2(Q_T)\,,\quad (2.20)$$

$$a_i(x,\Pi_\tau^\pm y)\ \longrightarrow\ a_i(x,u)\quad \text{п. вс. в}\ \ Q_T\,,\ i=0,1,\ldots,n,\quad (2.21)$$

$$a_0(x,\Pi_\tau^\pm y)\ \longrightarrow\ a_0(x,u)\qquad \text{в}\quad L_2(Q_T)\,.\quad (2.22)$$

Доказательство того, что функция $u$, определенная соотношением (2.19), является обобщенным решением задачи (2.1)–(2.3), проводится по той же схеме, что и для уравнения с монотонным оператором. В равенстве (2.12) положим $\eta=\tau\,\widehat{w}^\tau(t)$, где

$w^\tau$ — функция, равная в точках множества $\bar{\Omega} \times \bar{\omega}_\tau$ функции $w \in C^2(0,T; H_0^1(\Omega))$, такой, что $w(x,0) = 0$. Результат почленно просуммируем по $t$ от 0 до $T - \tau$, первое слагаемое преобразуем с помощью формулы (1.23), воспользуемся операторами восполнения $\Pi_\tau^\pm$ и, переходя к пределу при $\tau \to 0$, получим

$$\int\limits_{Q_T} \left\{ - u \, \frac{\partial w}{\partial t} \; + \sum_{i=1}^n a_i(x,u) \, \chi_i \, \frac{\partial w}{\partial x_i} \; + \; a_0(x,u) \, w \right\} dx \, dt \, - \\ - \int\limits_\Omega u_0(x) \, w(x,0) \, dx \; = \int\limits_{Q_T} (f_0 \, w \; - \; \mathbf{f} \cdot \nabla w) \, dx \, dt \, . \qquad (2.23)$$

При этом учитывались соотношения (2.19)–(2.22), леммы 3, 4, с. 260, а также вытекающее из них предельное соотношение

$$a_i(x, \Pi_\tau^\pm y) \, \Pi_\tau^\pm w \quad \to a_i(x,u) \, w \quad \text{в } L_2(Q_T) \; \forall \, w \in L_2(Q_T).$$

Переход от равенства (2.23) к равенству

$$\int\limits_0^T \left\langle \, \frac{\partial u}{\partial t} \, , \, w \right\rangle dt \; + \int\limits_{Q_T} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x,u) \, \chi_i \, \frac{\partial w}{\partial x_i} \; + \; a_0(x,u) \, w \right\} dx \, dt \; = \\ = \int\limits_{Q_T} (f_0 \, w \; - \; \mathbf{f} \cdot \nabla w) \, dx \, dt \quad \forall \, w \in L_2(0,T; H_0^1(\Omega)), \qquad (2.24)$$

а также доказательство того, что функция $u$ удовлетворяет условиям (2.9), (2.10), проводятся так же, как в теореме 1.1.

Последний этап доказательства теоремы 2.1 состоит в обосновании справедливости для любого $w \in L_2(0,T; H_0^1(\Omega))$ равенства вида

$$\int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^n a_i(x,u) \, (\chi_i \; - \; k_i(x, \nabla u)) \, \frac{\partial w}{\partial x_i} \, dx \, dt \; = 0. \qquad (2.25)$$

Для этого рассмотрим очевидное неравенство

$$\sum_{t=0}^{T-\tau} \tau \Big\langle \, (y - v^\tau)_t(t) \, , \, (\widehat{y} \; - \; \widehat{v}^\tau)(t) \Big\rangle +$$

$$+\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}a_i(x,y(t))(k_i(x,\nabla\widehat{y}(t)) - k_i(x,\nabla\widehat{v}^{\tau}(t)))\frac{\partial(\widehat{y}-\widehat{v}^{\tau})}{\partial x_i}dx \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{1}{2}\,|u_0 - v^{\tau}(0)|_0^2, \quad (2.26)$$

где $y$ — решение полудискретной задачи, $v^{\tau}$ — функция, равная в точках множества $\bar{\Omega}\times\bar{\omega}_{\tau}$ функции $v\in C^{\infty}(0,T;C_0^{\infty}(\Omega))$. Используя (2.12) и операторы восполнения $\Pi_{\tau}^{\pm}$, неравенство (2.26) запишем в виде

$$\int_{Q_T}(f_0\,\Pi_{\tau}^{-}(v^{\tau}) - \mathbf{f}\cdot\nabla\Pi_{\tau}^{-}(v^{\tau}))\,dx\,dt - \int_{Q_T}\Pi_{\tau}^{+}(v^{\tau})_t\,\Pi_{\tau}^{-}(y-v^{\tau})\,dx\,dt -$$

$$-\int_{Q_T}\Bigg\{\sum_{i=1}^{n}a_i(x,\Pi_{\tau}^{+}y)\,k_i(x,\nabla\Pi_{\tau}^{-}v_{\tau})\,\frac{\partial\Pi_{\tau}^{-}(y-v^{\tau})}{\partial x_i} +$$

$$+\ a_0(x,\Pi_{\tau}^{-}y)\,\Pi_{\tau}^{-}(y-v^{\tau})\Bigg\}\,dx\,dt \geqslant -\frac{1}{2}\,|u_0 - v^{\tau}(0)|_0^2\,.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\tau\to 0$ и учитывая (2.24), будем иметь

$$\int_0^T\left\langle\frac{\partial(u-v)}{\partial t}\,,\,u-v\right\rangle dt +$$

$$+\int_{Q_T}\Bigg\{\sum_{i=1}^{n}a_i(x,u)\,(\chi_i - k_i(x,\nabla v))\,\frac{\partial(u-v)}{\partial x_i} +$$

$$+\ a_0(x,u)\,(u-v)\Bigg\}\,dx\,dt \geqslant -\frac{1}{2}\,|u_0 - v(0)|_0^2\,. \quad (2.27)$$

Заметим, что (2.27) выполнено и для любой функции $v$, принадлежащей $L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$, такой, что $\partial v/\partial t\in L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Поэтому, полагая в (2.27) $v=u+\lambda w$, где $\lambda>0$ — произвольная постоянная, а $w$ — произвольная функция из $L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$ такая, что $\partial w/\partial t\in L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ и $w(x,0)=0$ почти всюду в $\Omega$, получим

$$\lambda\int_0^T\left\langle\frac{\partial w}{\partial t}\,,\,w\right\rangle dt + \int_{Q_T}\sum_{i=1}^{n}a_i(x,u)\Big(\chi_i - k_i(x,\nabla(u+\lambda w))\Big)\,\frac{\partial w}{\partial x_i}\geqslant 0.$$

Из последнего неравенства легко выводится (2.25) (см. доказательство теоремы 1.1). □

**Теорема 2.2.** *Пусть функции* $a_i(x,\xi_0)\equiv 1$, $i=1,2,\ldots,n$, $k_i(x,\xi)$, $i=1,2,\ldots,n$, *и* $a_0(x,\xi_0)$ *удовлетворяют всем перечисленным в начале этого пункта условиям, за исключением условия* (2.7). *Кроме того, для почти всех* $x\in\Omega$ *и любых* $\xi\in R^n$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i(x,\xi)\xi_i \geqslant \tilde{c}_0 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 - \tilde{\mu}\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|\,, \quad \tilde{c}_0>0,\ \tilde{\mu}\geqslant 0, \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial k_i}{\partial \xi_j}(x,\xi) = \frac{\partial k_j}{\partial \xi_i}(x,\xi), \qquad i,j=1,2,\ldots,n\,. \quad (2.29)$$

*Пусть также* $u_0\in H_0^1(\Omega)$, $f\in L_2(Q_T)$.

*Тогда для обобщенного решения задачи* (2.1)–(2.3) *имеет место следующая оценка:*

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_2(Q_T)} + \|\,u\,\|_{L_\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \leqslant$$
$$\leqslant c\,\Big(\|\,u_0\,\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\,f\,\|_{L_2(Q_T)} + 1\Big)\,. \quad (2.30)$$

Доказательство. Положим в (2.12) $\eta=\tau\, y_t(t)$ и просуммируем полученное равенство по $t$ от $0$ до $t'-\tau$, $t'\in\omega_\tau$. В результате, будем иметь

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau\,\|\,y_t(t)\,\|_0^2 + \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau\,\langle\, L_0\,\widehat{y}(t)\,,\,y_t(t)\,\rangle +$$
$$+\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int\limits_{\Omega} a_0(x,\widehat{y}(t))\; y_t(t)\,dx = \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau\,\langle\, f_\tau(t)\,,\,y_t(t)\,\rangle\,. \quad (2.31)$$

Заметим, что (2.31) отличается от (1.35) лишь последним слагаемым левой части, оператор $L_0$ в предположениях доказываемой теоремы является монотонным. Поэтому по аналогии с доказательством теоремы 1.2 из (2.31), учитывая (2.14), нетрудно получить, что

$$\left\| \Pi_\tau^+ y_t \right\|^2_{L_2(Q_T)} + \| \Pi_\tau^- y(t) \|^2_{H_0^1(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant c \left( \| u_0 \|^2_{H_0^1(\Omega))} + \| f \|^2_{L_2(Q_T)} + 1 \right) \quad \forall\, t \in \omega_\tau.$$

Заключительная часть доказательства совпадает с доказательством теоремы 1.2. □

Исследование единственности решения задачи (2.1)–(2.3) представим двумя результатами. Первый из них получен в предположении монотонности оператора $L_0$, и его доказательство традиционно. Второй результат получен в более общем случае, при его доказательстве использована техника, разработанная немецким математиком Ф. Отто [50], [51], позволяющая исследовать единственность решения нелинейных параболических уравнений и вариационных неравенств с монотонным по градиенту пространственным оператором.

**Теорема 2.3.** *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1, *кроме того, оператор* $L_0$ *монотонный, и*

$$|a_0(x, \xi_1) - a_0(x, \xi_2)| \leqslant \beta\, |\xi_1 - \xi_2|, \quad \xi_1, \xi_2 \in R,\ x \in \Omega, \quad (2.32)$$

*где* $\beta = \mathrm{const} > 0$. *Тогда обобщенное решение задачи* (2.1)–(2.3) *единственно.*

Доказательство. Пусть $u_1$, $u_2$ — решения задачи (2.1)–(2.3). Тогда для функции $w = u_1 - u_2$ выполнено равенство

$$\frac{1}{2}|w(t')|_0^2 + \int\limits_0^{t'} \langle L_0 u_1 - L_0 u_2, w \rangle \, dt +$$
$$+ \int\limits_0^{t'} \int\limits_\Omega (a_0(x, u_1) - a_0(x, u_2)) w dx dt = 0$$
$$\text{для п. вс. } t' \in (0, T). \quad (2.33)$$

Используя (2.33), монотонность оператора $L_0$ и оценку (2.32), нетрудно получить, что

$$\frac{1}{2}|w(t')|_0^2 \leqslant \beta \int\limits_0^{t'} |w(t)|_0^2 \, dt \quad \text{для п. вс. } t' \in [0, T].$$

Из последнего неравенства и леммы Гронуолла 1.2, с. 96, следует, что $w = 0$, т. е. решение задачи (1.1)–(1.4) единственно. □

**Теорема 2.4.** *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1, *кроме того, функции* $a_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, *липшиц-непрерывны:*

$$|a_i(x,\xi_1) - a_i(x,\xi_2)| \leqslant \beta\,|\xi_1 - \xi_2| \quad \forall\, \xi_1, \xi_2 \in R, \quad \beta = \mathrm{const}. \tag{2.34}$$

*Тогда обобщенное решение задачи* (2.1)–(2.3) *единственно.*

Доказательство. Если $u_1$, $u_2$ — решения задачи (2.1)–(2.3), то для функции $w = u_1 - u_2$ при любой функции $\eta$ из $L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$ выполнено равенство

$$\int\limits_0^T \left\{ \left\langle \frac{\partial w}{\partial t}, \eta \right\rangle + \langle Lu_1 - Lu_2, \eta\rangle \right\} dt = 0\,. \tag{2.35}$$

Пусть

$$\mu(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ z^2/2, & 0 \leqslant z \leqslant 1, \\ z - 1/2, & z > 1, \end{cases}$$

$\mu_\delta(z) = \delta\,\mu(z/\delta)$. Отметим некоторые свойства функции $\mu_\delta$:

1) $\mu'_\delta$ — непрерывно дифференцируемая, неубывающая на $\mathbb{R}$ функция, $\mu'_\delta(\xi) = 0$, если $\xi \leqslant 0$, $\mu'_\delta(\xi) = \xi/\delta$, если $0 \leqslant \xi \leqslant \delta$, $0 \leqslant \mu'_\delta(\xi) \leqslant 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$;

2) почти всюду на $\mathbb{R}$ существует $\mu''_\delta$, при этом $\mu''_\delta(\xi) = 0$ на множестве $(\xi < 0) \cup (\xi > \delta)$, $\mu''_\delta(\xi) = 1/\delta$ для $0 < \xi < \delta$.

Из 1), в частности, следует, что

$$\lim_{\delta\to 0} \mu'_\delta(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ 1, & \xi \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.36}$$

Кроме того, из определения функции $\mu_\delta$ вытекает, что

$$\lim_{\delta\to 0} \mu_\delta(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ \xi, & \xi \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.37}$$

Свойства 1), 2) обеспечивают также, что $\mu'_\delta(w) \in L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$ для любой функции $w \in L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

В равенстве (2.35) положим $\eta = \mu'_\delta(u_1 - u_2)\chi_{(0,t')}$, где $\chi_{(0,t')}$ — характеристическая функция множества $(0, t')$. В результате получим

$$\int_0^{t'} \left\langle \frac{\partial w}{\partial t}(t), \mu'_\delta(w(t)) \right\rangle dt + \\ + \int_0^{t'} \langle (Lu_1 - Lu_2)(t), \mu'_\delta(w(t)) \rangle \, dt = 0. \quad (2.38)$$

Докажем, что для почти всех $t' \in [0, T]$

$$\int_0^{t'} \left\langle \frac{\partial w}{\partial t}(t), \mu'_\delta(w(t)) \right\rangle dt = \int_\Omega \mu_\delta(w(x, t'))\, dx\,. \quad (2.39)$$

Для этого функцию $w$ продолжим на $[-T, 2T]$, полагая $w(t) = 0$ при $t < 0$, $w(T + \xi) = w(T - \xi)$ при $0 < \xi \leqslant T$.

Поскольку функция $\mu'_\delta$ неубывающая, по теореме Лагранжа о среднем значении будем иметь

$$\mu'_\delta(\eta) \leqslant \frac{\mu_\delta(\xi) - \mu_\delta(\eta)}{\xi - \eta} \leqslant \mu'_\delta(\xi) \qquad \forall\, \xi, \eta \in \mathbb{R} : \ \xi \geqslant \eta\,,$$

следовательно,

$$\mu'_\delta(\eta)\,(\xi - \eta) \leqslant \mu_\delta(\xi) - \mu_\delta(\eta) \leqslant \mu'_\delta(\xi)\,(\xi - \eta) \\ \forall\, \xi, \eta \in \mathbb{R}\,. \quad (2.40)$$

Учитывая (2.40) и тот факт, что $w(x, t) = 0$ почти всюду в $\Omega$ для любых $t \leqslant 0$, нетрудно убедиться в справедливости следующих неравенств:

$$\int_0^{t'} \left\langle \frac{w(t + \triangle t) - w(t)}{\triangle t}\,,\, \mu'_\delta(w(t)) \right\rangle dt \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\triangle t} \int_{t'}^{t' + \triangle t} \int_\Omega \mu_\delta(w(x, t))\, dx\, dt\,, \quad (2.41)$$

$$\int\limits_0^{t'} \left\langle \frac{w(t) - w(t - \triangle t)}{\triangle t}\,,\, \mu'_\delta(w(t)) \right\rangle dt \;\geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\triangle t} \int\limits_{t' - \triangle t}^{t'} \int\limits_\Omega \mu_\delta(w(x,t))\,dx\,dt\,. \quad (2.42)$$

Заметим, далее, что функция $\psi(t) = \langle w(t), z\rangle$ при фиксированном $z$ из $H_0^1(\Omega)$ принадлежит пространству $H^1[-T, 2T]$. Следовательно, как нетрудно проверить,

$$\frac{\psi(t + \triangle t) - \psi(t)}{\triangle t} \to \psi'(t),\; \frac{\psi(t) - \psi(t - \triangle t)}{\triangle t} \to \psi'(t) \quad \text{при } \Delta t \to 0$$

в $L_2(0,T)$. Из этих соотношений и равенства $\psi'(t) = \langle w'(t), z\rangle$ (см. доказательство теоремы 1, с. 210) вытекает, что

$$\frac{w(t + \triangle t) - w(t)}{\triangle t} \rightharpoonup w'(t),\; \frac{w(t) - w(t - \triangle t)}{\triangle t} \rightharpoonup w'(t) \text{ при } \Delta t \to 0$$

в $L_2(0,T; H^{-1}(\Omega))$. Используя это, нетрудно показать, что из (2.41), (2.42) после предельного перехода при $\triangle t \to 0$ вытекает (2.39).

Далее, обозначив через $I$ второе слагаемое в левой части (2.38), запишем его в виде

$$I = \int\limits_0^{t'} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n a_i(x,u_1) \Big( k_i(x, \nabla u_1) \,-\, k_i(x, \nabla u_2) \Big) \frac{\partial\, w}{\partial\, x_i}\, \mu''_\delta(w)\,dx\,dt +$$

$$+ \int\limits_0^{t'} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \Big( a_i(x,u_1) \,-\, a_i(x,u_2) \Big)\, k_i(x, \nabla u_2) \frac{\partial\, w}{\partial\, x_i}\, \mu''_\delta(w)\,dx\,dt \;+$$

$$+ \int\limits_0^{t'} \int\limits_\Omega \Big( a_0(x,u_1) \,-\, a_0(x,u_2) \Big)\, \mu'_\delta(w)\,dx\,dt \;\equiv\; I_1 \;+ I_2 \;+ I_3\,.$$

Условие (2.8) обеспечивает неотрицательность $I_1$. Для оценки $I_2$ и $I_3$ воспользуемся (2.34):

$$|I_2| \;\leqslant\; \beta \int\limits_0^{t'} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n |u_1 \,-\, u_2|\; |k_i(x, \nabla u_2)| \left| \frac{\partial\, w}{\partial\, x_i} \right| \mu''_\delta(w)\,dx\,dt\;,$$

$$|I_3| \leqslant \beta \int\limits_0^{t'} \int\limits_\Omega |u_1 - u_2| \, \mu'_\delta(w) \, dx \, dt \, .$$

Учитывая все это, из (2.38) нетрудно получить, что

$$\int\limits_\Omega \mu_\delta(w(x,t')) \, dx \leqslant \beta \int\limits_0^{t'} \int\limits_\Omega |u_1 - u_2| \, \mu'_\delta(w) \, dx \, dt + \\ + \beta \int\limits_0^{t'} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n |u_1 - u_2| \, |k_i(x, \nabla u_2)| \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right| \mu''_\delta(w) \, dx \, dt \, . \qquad (2.43)$$

В неравенстве (2.43) перейдем к пределу при $\delta \to 0$. При этом учтем, что согласно (2.37) $\mu_\delta(w) \to w^+$ при $\delta \to 0$ почти всюду в $Q_T$ и, кроме того, $\mu_\delta(w) \leqslant 1 + |w|$. Поэтому по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получаем

$$\int\limits_\Omega \mu_\delta(w(x,t')) \, dx \to \int\limits_\Omega (w(x,t'))^+ \, dx \qquad \text{при } \delta \to 0. \qquad (2.44)$$

Кроме того, из (2.36) вытекает, что $|w| \, \mu'(w/\delta) \to (w)^+$ почти всюду в $Q_T$ при $\delta \to 0$. Учитывая ограниченность функции $\mu'$, будем иметь

$$\int\limits_0^{t'} \int\limits_\Omega |u_1 - u_2| \mu'_\delta(w) dx dt \to \int\limits_0^{t'} \int\limits_\Omega (u_1 - u_2)^+ dx dt \qquad (2.45)$$

при $\delta \to 0$. Далее, заметим, что

$$|u_1 - u_2| \, \mu''_\delta(w) = \mu''_\delta(w) \, |w| = \begin{cases} 0, & (w \leqslant 0) \cup (w > \delta), \\ w/\delta, & 0 < w \leqslant \delta. \end{cases}$$

Следовательно, функция $\mu''_\delta(w) \, |w|$ ограничена в $Q_T$ и

$$\mu''_\delta(w)|w| \longrightarrow 0 \qquad \text{при } \delta \to 0$$

почти всюду в $Q_T$. Поэтому при $\delta \to 0$

$$\int\limits_0^{t'} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n |u_1 - u_2| \, |k_i(x, \nabla u_2)| \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right| \mu''_\delta(w) \, dx \, dt \to 0 \, . \qquad (2.46)$$

Таким образом, в результате предельного перехода в неравенстве (2.43) будем иметь

$$\int\limits_{\Omega} (w(x,t'))^+ \, dx \leqslant \int\limits_0^{t'} \int\limits_{\Omega} (w(t))^+ \, dx\, dt\,.$$

Из последнего неравенства и леммы Гронуолла 1.2, с. 96, следует, что

$$(w(x,t'))^+ = (u_1(x,t') - u_2(x,t'))^+ = 0 \quad \text{п. в. в } Q_T.$$

Поменяв местами $u_1$ и $u_2$, будем иметь, что $(w(x,t'))^- = 0$ почти всюду в $Q_T$, т. е. $u_1 = u_2$. □

## § 4. Приложение

**Лемма 1.** *Пусть $H_1$ и $H_2$ — гильбертовы пространства такие, что $H_2$ непрерывно вложено в $H_1$, т. е. $H_2 \subset H_1$ и существует постоянная $C$ такая, что $\|u\|_{H_1} \leqslant C\|u\|_{H_2}$ $\forall u \in H_2$. Кроме того, пусть последовательность $\{u_n\}$ слабо сходится к $u$ в $L_2(0,T;H_1)$ и*

$$\|u_n\|_{L_\infty(0,T;H_2)} \leqslant C. \tag{1}$$

*Тогда*

$$\|u\|_{L_\infty(0,T;H_2)} \leqslant C. \tag{2}$$

Доказательство. Оценка (1) обеспечивает ограниченность множества $\{u_n\}$ в $L_2(0,T;H_2)$. Вследствие слабой компактности ограниченных множеств в гильбертовом пространстве найдется последовательность $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$, слабо сходящаяся в $L_2(0,T;H_2)$ к элементу $\widetilde{u}$. Ясно, что $u_{n_k} \rightharpoonup \widetilde{u}$ и в $L_2(0,T;H_1)$. В силу единственности слабого предела $u = \widetilde{u}$.

Далее, заметим, что для любых $t', t''$, $0 \leqslant t' \leqslant t'' \leqslant T$, и $v \in H_2$ из (1) следует оценка

$$\int\limits_{t'}^{t''} (u_{n_k}(t), v)_{H_2} \, dt \leqslant C\,(t'' - t')\,\|v\|_{H_2}, \tag{3}$$

из которой, воспользовавшись слабой сходимостью $u_{n_k}$ в пространстве $L_2(0,T;H_2)$ к $u$, нетрудно получить, что

$$\int\limits_{t'}^{t''} \frac{(u(t),v)_{H_2}}{\|v\|_{H_2}}\,dt \;\leqslant\; C\,(t''-t')\,.$$

Полагая в этом неравенстве $v=u(t)$, будем иметь

$$(t''-t')^{-1}\int\limits_{t'}^{t''} \|u(t)\|_{H_2}\,dt \;\leqslant\; C\,. \tag{4}$$

Поскольку функция $\|u(t)\|_{H_2}$ суммируема на $[0,T]$, то почти все точки из $[0,T]$ являются ее точками Лебега (см., например, [30]), иными словами,

$$(t''-t')^{-1}\int\limits_{t'}^{t''} \|u(t)\|_{H_2}\,dt \;\to\; \|u(t')\|_{H_2} \quad \text{для п. в. } t'\in[0,T] \tag{5}$$

при $t''\to t'$. Из (5) и (4) следует (2). $\square$

**Лемма 2 (сеточное неравенство Гронуолла).** *Пусть $\xi(t)$, $\eta(t)$ — неотрицательные вещественные функции, определенные на $\bar\omega_\tau$ и удовлетворяющие неравенствам*

$$\xi(t_{k+1}) \;\leqslant\; \rho\,\xi(t_k) \,+\, \eta(t_k), \quad k=0,1,\,\ldots,N-1,\;\; \rho>0. \tag{6}$$

*Тогда для для любого $k=0,\ldots,N-1$ справедлива оценка*

$$\xi(t_{k+1}) \;\leqslant\; \rho^{k+1}\,\xi(0) \,+\, \sum_{i=0}^{k}\rho^{k-i}\,\eta(t_i). \tag{7}$$

Доказательство. Воспользуемся методом индукции. Заметим, что при $k=0$ неравенства (6) и (7) совпадают. Пусть (7) выполнено при $k=p$. Тогда согласно (6) имеем

$$\xi(t_{p+2}) \;\leqslant\; \rho\,\xi(t_{p+1}) + \eta(t_{p+1}) \;\leqslant\; \rho\left(\rho^{p+1}\,\xi(0) + \sum_{i=0}^{p}\rho^{p-i}\,\eta(t_i)\right) +$$

$$+\ \eta(t_{p+1})\ \leqslant\ \rho^{p+2}\,\xi(0)\ +\ \sum_{i=0}^{p+1}\rho^{p+1-i}\,\eta(t_i).\ \square$$

**Лемма 3.** *Пусть $w$ — функция из $C^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, $w^\tau$ — функция, заданная на $\Omega\times\bar\omega_\tau$ и совпадающая с $w$ в точках этого множества. Тогда при $\tau\to 0$*

$$\Pi_\tau^{\pm}w^\tau\ \longrightarrow\ w\qquad \text{в}\ \ L_2(0,T;H_0^1(\Omega))\,, \tag{8}$$

$$\Pi_\tau^{+}(w^\tau)_t\ \longrightarrow\ \frac{\partial w}{\partial t}\qquad \text{в}\ \ L_2(Q_T))\,. \tag{9}$$

Доказательство. Заметим, что

$$\int\limits_0^T|\,\Pi_\tau^- w^\tau(t)\ -\ w(t)|_1^2\,dt\ =\ \sum_{j=0}^{N-1}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}|\,w(t_{j+1})\ -\ w(t)|_1^2\,dt\ =$$

$$=\sum_{j=0}^{N-1}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\left|\int\limits_t^{t_{j+1}}\frac{\partial\,w}{\partial\,\xi}(\xi)\,d\xi\right|_1^2 dt\ \leqslant\ \tau\,T\ \mathrm{mes}(\Omega)\ \max_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\frac{\partial\,w}{\partial\,t}(t)\right|_1^2,$$

где $t_j=j\tau$. Таким образом, соотношение (8) для $\Pi_\tau^-$ выполняется. Справедливость (8) для $\Pi_\tau^+$ проверяется аналогично.

Далее, поскольку при $t\in(t_j,t_{j+1}]$

$$\left|\Pi_\tau^+(w^\tau)_t(t)\ -\ \frac{\partial\,w}{\partial\,t}(t)\right|\ =\ \left|\frac{w(t_{j+1})-w(t_j)}{\tau}\ -\ \frac{\partial\,w}{\partial\,t}(t)\right|\ =$$

$$=\ \left|\frac{1}{\tau}\int\limits_t^{t_{j+1}}\left\{\frac{\partial\,w}{\partial\,\xi}(\xi)\ -\ \frac{\partial\,w}{\partial\,t}(t)\right\}\right|d\xi\ \leqslant\ \tau\max_{t_j\leqslant t\leqslant t_{j+1}}\left|\frac{\partial^2\,w}{\partial\,t^2}(t)\right|,$$

то утверждение (9) также справедливо. $\square$

**Лемма 4.** *Пусть $z^\tau$ — семейство функций, определенных на $\Omega\times\bar\omega_\tau$. Тогда:*

1) *если*

$$\sum_{j=0}^{N}\tau|\,z^\tau(t_j)\,|_0^2\ \leqslant\ c\,, \tag{10}$$

*то найдутся последовательность* $\{\tau_k\}$, $\tau_k \to 0$ *при* $k \to \infty$, *и функция* $z \in L_2(Q_T)$ *такие, что при* $k \to \infty$

$$\Pi^{\pm}_{\tau_k} z^{\tau_k} \rightharpoonup z \qquad \text{\it в} \quad L_2(Q_T)\,; \tag{11}$$

2) *если функции* $z^\tau$ *принадлежат* $H^1_0(\Omega)$ *при всех* $t \in \omega_\tau$ *и наряду с* (11) *имеет место оценка*

$$\sum_{j=1}^{N} \tau |\, z^\tau(t_j)\,|_1^2 \leqslant c, \tag{12}$$

*то найдутся последовательность* $\{\tau_k\}$, $\tau_k \to 0$ *при* $k \to \infty$, *и функция* $z \in L_2(0,T;H^1_0(\Omega))$ *такие, что*

$$\Pi^{-}_{\tau_k} z^{\tau_k} \rightharpoonup z \qquad \text{\it в} \quad L_2(0,T;H^1_0(\Omega)) \tag{13}$$

*при* $k \to \infty$

Доказательство. 1) Из (10) вытекает, что множества $\{\Pi^-_\tau z^\tau\}$ и $\{\Pi^+_\tau z^\tau\}$ равномерно ограничены по $\tau$ в пространстве $L_2(Q_T)$. Ограниченное множество в гильбертовом пространстве слабо компактно, поэтому найдутся последовательность $\{z^{\tau_k}\}$ и функции $z^{(+)}$, $z^{(-)}$ из $L_2(Q_T)$, являющиеся слабыми пределами последовательностей $\{\Pi^+_{\tau_k} z^{\tau_k}\}$ и $\{\Pi^-_{\tau_k} z^{\tau_k}\}$ соответственно. Докажем, что $z^{(+)} = z^{(-)}$. Для этого запишем следующее равенство:

$$\int\limits_{Q_T} \Pi^+_{\tau_k} z^{\tau_k}\ \Pi^+_{\tau_k} w^{\tau_k}\, dx\, dt = \int\limits_{Q_T} \Pi^-_{\tau_k} z^{\tau_k}\ \Pi^-_{\tau_k} w^{\tau_k}\, dx\, dt\,, \tag{14}$$

справедливое для любой функции $w^{\tau_k}$, совпадающей в точках $\Omega \times \bar{\omega}_{\tau_k}$ с функцией $w \in C^\infty_0(Q_T)$. Используя лемму 3, с. 260, в равенстве (14) перейдем к пределу при $k \to \infty$, в результате получим

$$\int\limits_{Q_T} z^{(+)}\, w\, dx\, dt = \int\limits_{Q_T} z^{(-)}\, w\, dx\, dt\,, \qquad \forall w \in C^\infty_0(Q_T)\,,$$

т. е. $z^{(+)} = z^{(-)}$. Первая часть леммы доказана.

2) Воспользовавшись только что полученным результатом, нетрудно установить существование последовательности $\{z^{\tau_k}\}$ и функций $z$, $\xi_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, из $L_2(Q_T)$ таких, что имеют место (11) и

$$\Pi^-_{\tau_k} \frac{\partial z^{\tau_k}}{\partial x_i} \rightharpoonup \xi_i \qquad \text{в} \quad L_2(Q_T)\,.$$

Докажем, что $\xi_i = \dfrac{\partial z}{\partial x_i}$. Поскольку $\Pi^-_{\tau_k} \dfrac{\partial z^{\tau_k}}{\partial x_i} = \dfrac{\partial\, \Pi^-_{\tau_k} z^{\tau_k}}{\partial x_i}$, то

$$\int\limits_{Q_T} \Pi^-_{\tau_k} \frac{\partial z^{\tau_k}}{\partial x_i}\, \Pi^-_{\tau_k} w^{\tau_k}\, dx\, dt \;=\; -\int\limits_{Q_T} \Pi^-_{\tau_k} z^{\tau_k}\, \Pi^-_{\tau_k} \frac{\partial w^{\tau_k}}{\partial x_i}\, dx\, dt\,,$$

где $w$ выбрана такой же, как и в (14). В результате предельного перехода в последнем равенстве получим

$$\int\limits_{Q_T} \xi_i\, w\, dx\, dt \;=\; -\int\limits_{Q_T} z\, \frac{\partial w}{\partial x_i}\, dx\, dt\,, \qquad \forall w \in C_0^\infty(Q_T)\,.$$

Таким образом, функция $\xi_i$ является обобщенной производной функции $z$ по $x_i$, а потому $z \in L_2(0,T;H^1(\Omega))$. Для завершения доказательства осталось отметить, что последовательность $\{\Pi^-_{\tau_k} z^{\tau_k}\}$ принадлежит $L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Это пространство является гильбертовым и, следовательно, слабо полным, поэтому $z \in L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$. $\square$

**Теорема 5.** *Пусть $W$ — множество функций из пространства $L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$ таких, что*

$$\int\limits_0^T |\,y(t)|_1^2\, dt \;\leqslant\; c \qquad \forall\, y \in W, \tag{15}$$

$$\frac{1}{\delta} \int\limits_0^{T-\delta} |\,y(t+\delta) - y(t)|_0^2\, dt \;\leqslant\; c \qquad \forall\, y \in W,\ \delta > 0\,, \tag{16}$$

*здесь $c = \mathrm{const} > 0$. Тогда $W$ компактно в $L_2(Q_T)$.*

Доказательство. Пусть $M > 0$. Определим множество

$$E_M = \left\{ t \in (0, T-\delta)\colon\ |\,y(t)|_1^2 \,+\, \frac{1}{\delta} |\,y(t+\delta) - y(t)|_0^2 \;\geqslant\; M \right\}.$$

Из условий (15), (16) следует, что mes $E_M \leqslant 2c/M$.

Далее, пусть

$$v(t) = \begin{cases} y(t), & t \notin E_M, \\ 0, & t \in E_M, \end{cases}$$

$\chi^i$ — характеристическая функция отрезка $[(i-1)\delta,\ i\delta] \cap\ [0,T]$, $N_\delta$ — целая часть числа $T/\delta$.

Продолжая функции $y$ и $v$ нулем вне отрезка $[0,T]$, запишем следующие соотношения:

$$\frac{1}{\delta}\int\limits_0^\delta \int\limits_0^T \Big| y(t) - \sum_{i=1}^{N_\delta+1} v((i-1)\,\delta + s)\,\chi^i(t) \Big|_0^2\, dt\, ds =$$

$$= \frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{N_\delta+1} \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} |\,y(t) - v(s)\,|_0^2\, ds\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \int\limits_{\max(0,-h)}^{\min(T,T-h)} |\,y(s+h) - v(s)\,|_0^2\, ds\, dh \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \Bigg\{ \int\limits_{\max(0,-h)}^{\min(T,T-h)} |\,y(s+h) - y(s)\,|_0^2\, ds\, dh +$$

$$+ \int\limits_{E_M} |\,y(s+h) - y(s)\,|_0^2\, ds\, dh + 2\int\limits_{E_M} |\,y(s)|_0^2\, ds\, dh \Bigg\} \leqslant$$

$$\leqslant 4 \sup_{|h|\leqslant\delta} \int\limits_{\max(0,-h)}^{\min(T,T-h)} |\,y(s+h) - y(s)\,|_0^2\, ds \,+\, 4\int\limits_{E_M} |\,y(s)\,|_0^2\, ds\,. \qquad (17)$$

Заметим, что из условий (15), (16) вытекает, что при $|h| < \delta$

$$\int\limits_{\max(0,-h)}^{\min(T,T-h)} |\,y(s+h) - y(s)\,|_0^2\, ds \,\leqslant\, \delta\, c\,,$$

$$\int\limits_{E_M} |\,y(s)\,|_0^2\, ds \,\to\, 0 \qquad \text{при} \;\; M \to \infty\,.$$

Выберем числа $M$ и $\delta$ так, чтобы правая часть (17) была меньше заданного сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon$. В результате будем иметь

$$\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}\int_0^{T}\left| y(t) - \sum_{i=1}^{N_\delta+1} v((i-1)\,\delta + s)\chi^i(t)\right|_0^2 dt\,ds \,<\, \varepsilon. \tag{18}$$

Из (18) следует, что для каждой функции $y \in W$ найдется хотя бы одно число $s^* \in [0,\delta]$ такое, что

$$\int_0^{T}\left| y(t) - \sum_{i=1}^{N_\delta+1} v((i-1)\,\delta + s^*)\,\chi^i(t)\right|_0^2 dt \,<\, \varepsilon\,. \tag{19}$$

Существование $s^*$ легко обосновать, предполагая противное.

Неравенство (19) означает, что множество функций

$$W_\varepsilon = \left\{\ \sum_{i=1}^{N_\delta+1} v((i-1)\,\delta + s^*)\,\chi^i\ \right\}$$

образует в $L_2(Q_T)$ $\varepsilon$–сеть для множества $W$. Докажем, что $W_\varepsilon$ компактно в $L_2(Q_T)$. Поскольку $W_\varepsilon \subset V_{\delta,M}$, где

$$V_{\delta,M} \,=\, \left\{\ \sum_{i=1}^{N_\delta+1} z_i\,\chi^i : z_i \in H_0^1(\Omega),\ |z_i|_1^2 \leqslant M\right\},$$

то компактность $W_\varepsilon$ будет следовать из компактности $V_{\delta,M}$. Для того, чтобы установить последнее, рассмотрим произвольную последовательность $\{u_n\} \subset V_{\delta,M}$. Пусть $u_n = \sum\limits_{i=1}^{N_\delta+1} z_i^{(n)}\,\chi^i$. Из определения $V_{\delta,M}$ и теоремы Реллиха следует существование функций $z_i \in H_0^1(\Omega)$ и подпоследовательности $\{z_i^{(n_k)}\}$ таких, что при $k \to \infty$

$$z_i^{(n_k)} \longrightarrow z_i \qquad \text{в}\ \ L_2(\Omega), \quad i = 1, 2, \ldots, N_\delta + 1\,. \tag{20}$$

Используя (20), легко показать, что

$$u_{n_k} \,\longrightarrow\, u \,=\, \sum_{i=1}^{N_\delta+1} z_i\,\chi^i \,\subset\, V_{\delta,M} \qquad \text{в}\ \ L_2(Q_T).\ \square$$

**Следствие 1.** *Пусть множество $W$ состоит из кусочно-постоянных на $[(i-1)\tau, i\tau)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $\tau N = T$, по переменной $t$ функций. Тогда утверждение теоремы 5 останется справедливым, если* (16) *заменить следующим условием:*

$$\frac{1}{k\tau}\sum_{i=0}^{N-k\tau} \tau |\, y(i\tau + k\tau) - y(i\tau)|_0^2 \leqslant c\,, \tag{21}$$

*здесь $k$ — любое целое число, принадлежащее отрезку* $[1, N]$.

Доказательство. Установим, что из (21) следует неравенство (16) для любого положительного числа $\delta$.

Рассмотрим случай, когда $\delta > \tau$. Пусть $\bar{k}$ — целое число из отрезка $[1, N]$ такое, что $\bar{k}\tau \leqslant \delta < (\bar{k}+1)\tau$. Обозначим подынтегральную функцию в (16) через $I(t)$. Заметим, что $I(t)$ кусочно-постоянна по $t$, причем

$$I(t) \;=\; |\, y(k\tau + \bar{k}\tau) - y(k\tau)|_0^2 \qquad \forall\, t \in [k\tau, k\tau + (\bar{k}+1)\tau - \delta];$$

$$I(t) \;=\; |\, y(k\tau + (\bar{k}+1)\tau) - y(k\tau)|_0^2 \qquad \forall\, t \in [k\tau + (\bar{k}+1)\tau - \delta, (k+1)\tau].$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J \;\equiv\; \frac{1}{\delta}\int\limits_0^{T-\delta} |\, y(t+\delta) - y(t)|_0^2\, dt \;&=\; \\ = \;\frac{((\bar{k}+1)\tau - \delta)}{\delta} &\sum_{k=0}^{N-\bar{k}-1} |\, y(k\tau + \bar{k}\tau) - y(k\tau)|_0^2 + \\ + \;\frac{(\delta - \bar{k}\tau)}{\delta} &\sum_{k=0}^{N-\bar{k}-2} |\, y(k\tau + (\bar{k}+1)\tau) - y(k\tau)|_0^2. \end{aligned} \tag{22}$$

Из (22) и оценки (21) получим

$$J \leqslant \frac{((\bar{k}+1)\tau - \delta)}{\delta}\bar{k}c + \frac{(\delta - \bar{k}\tau)}{\delta}(\bar{k}+1)c = c.$$

Пусть теперь $0 < \delta < \tau$. Тогда подынтегральная функция $I(t)$ на отрезках $[k\tau, (k+1)\tau - \delta]$, $k = 0, \ldots, N-2$, обращается в нуль, а на отрезках $[(k+1)\tau - \delta, (k+1)\tau]$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, постоянна и равна $|\, y(k\tau + \tau) - y(k\tau)|_0^2$. Из оценки (21), очевидно, следует, что $J \leqslant c$. $\square$

# Обозначения

$\delta_{ij}$ — символ Кронекера.

$\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел.

$\mathbb{R}^n$ — $n$-мерное евклидово пространство.

$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$.

$\mathbb{R}^n_- = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n < 0\}$.

$a \cdot b = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$ — скалярное произведение векторов $a, b \in \mathbb{R}^n$.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ —ограниченная область.

$\Gamma$ или $\partial\Omega$ — граница области $\Omega$.

$\nu$ — внешняя единичная нормаль к $\Gamma$.

$I$ — единичный оператор в линейном пространстве.

$E$ — единичная матрица.

$\operatorname{tr} A$ — след матрицы $A$.

$\partial u/\partial x_i = D_i u$ — частная производная функции $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ по $x_i$.

$\nabla u = (D_1 u, \ldots, D_n u)$ — градиент функции $u$.

$D^{|\alpha|} u(x) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ — смешанная производная функции $u$ порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

$L_p(\Omega)$, $p \geqslant 1$, — линейное пространство функций, интегрируемых по Лебегу со степенью $p \geqslant 1$.

$\operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega} u(x)$ — существенная верхняя грань функции $u$ на области $\Omega$.

$C^k(\Omega)$ — множество функций $k$ раз непрерывно дифференцируемых на области $\Omega$.

$C_0^k(\Omega)$ — множество $k$ раз непрерывно дифференцируемых функций, финитных на области $\Omega$.

$\eta_\varepsilon(x)$ — ядро усреднения.

$f^\varepsilon(x)$ — усреднение по Соболеву функции $f$.

$B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ —открытый шар радиуса $r$ с центром в точке $x$.

$D(\Omega)$ — пространство пробных функций.

$D'(\Omega)$ — пространство распределений (обобщенных функций).

$\langle u, \varphi \rangle$ — значение $u \in D'(\Omega)$ на $\varphi \in D(\Omega)$.

$W^k(\Omega)$ — множество функций, имеющих все обобщенные производные в смысле Соболева до порядка $k \geqslant 1$ включительно.

$W_p^k(\Omega)$ — пространство Соболева.

$\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$ — подпространство пространства $W_p^1(\Omega)$, состоящее из функций, имеющих след, равный нулю на $\Gamma$.

$H^k(\Omega) = W_2^k(\Omega)$.

$H_0^1(\Omega) = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

$u^+ = \max\{u, 0\}$ — положительная часть функции $u$.

$u^- = \min\{u, 0\}$ — отрицательная часть функции $u$.

$D_i^h u(x) = \dfrac{u(x+he_i) - u(x)}{h}$ — разностное отношение функции $u$ по переменной $x_i$.

$H^{-s}(\Omega)$ — пространство Соболева с отрицательным показателем.

$R(u)$ — отношение Релея.

$L_p(0,T;X)$ — пространство векторнозначных функций, суммируемых со степенью $p$.

# Предметный указатель

# Литература


1. **Арнольд В.И.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1971.
2. **Березанский Ю.М.** Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев: Наукова думка, 1965.
3. **Вайнберг М.М.** Вариационный метод и метод монотонных операторов. — М.: Наука, 1972.
4. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971.
5. **Владимиров В.С.** Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979.
6. **Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.** Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978.
7. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. — М.: Наука, 1967.
8. **Гельфанд И.М.** Лекции по линейной алгебре. — М.: Наука, 1971.
9. **Гильбарг Д., Трудингер Н.** Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. — М.: Наука, 1989.
10. **Данфорд Н., Шварц Дж.** Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.
11. **Дубинский Ю.А.** О некоторых граничных задачах для систем уравнений Пуассона в трехмерной области//Дифференциальные уравнения. — 2013. — Т. 49, №5. — С. 610–613.
12. **Эванс Л.** Уравнения с частными производными.— Новосибирск.: Университетская серия, 2003.

13. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ — М.: Наука, 1977.

14. **Кардоне Дж., Корбо Эспозито А., Назаров С.А.** Осреднение смешанной краевой задачи для формально самосопряженной эллиптической системы в периодической перфорированной области//Алгебра и анализ . — 2009. — Т. 21, №4. — С. 126–173.

15. **Карчевский М.М., Шагидуллин Р.Р.** О краевых задачах для эллиптических систем уравнений второго порядка дивергентного вида // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2015. — Т. 157, кн. 2. — С. 93-103

16. **Кириллов А.А., Гвишиани А.Д.** Теоремы и задачи функционального анализа — М.: Наука, 1979.

17. **Колмогоров А.Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981.

18. **Кудрявцев Л.Д.** Курс математического анализа. — М.: Высшая школа, 1981.— Т. 1–2.

19. **Курант Р., Гильберт Д.** Методы математической физики, т.1. — М.–Л.: ГТТИ, 1933.

20. **Курант Р., Гильберт Д.** Методы математической физики, т.2 — М.–Л.: ГТТИ, 1945.

21. **Ладыженская О.А.** Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.

22. **Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1973.

23. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.

24. **Ландис Е.М.** Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. — М.: Наука, 1971.

25. **Люстерник Л.А., Соболев В.И.** Элементы функционального анализа. — М.: Наука, 1965.

26. **Михайлов В.П.** Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.

27. **Михлин С.Г.** Проблема минимума квадратичного функционала. — М: ГИТТЛ, 1952.

28. **Михлин С.Г.** Линейные уравнения в частных производных. — М.: Высшая школа, 1977.

29. **Морен К.** Методы гильбертова пространства. — М.: Мир, 1965.

30. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. — М.: ГИТТЛ, 1957.

31. **Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С.** Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. — М: Изд-во МГУ, 1990.

32. **Павлова М.Ф., Тимербаев М.Р.** Пространства Соболева, Казань, 2002.

33. **Самарский А.А., Андреев В.Б.** Разностные методы для эллиптических уравнений. — М.: Наука, 1976.

34. **Сансоне Дж.** Обыкновенные дифференциальные уравнения — М.: ИЛ, 1988.

35. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М.: Наука, 1988.

36. **Стейн И.** Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. — М.: Мир, 1973.

37. **Сьярле Ф.** Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М.: Мир, 1980.

38. **Сьярле Ф.** Математическая теория упругости. — М.: Мир, 1992.

39. **Темам Р.** Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ. — М.: Мир, 1981.

40. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.

41. **Трибель Х.** Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. — М: Мир, 1980.

42. **Филиппов А.Ф.** Диффернециальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985.

43. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. — М.: Наука, 1966.

44. **Хорн Р., Джонсон Ч.** Матричный анализ. — М.: Мир, 1989.

45. **Эйдус Д.М.** О смешанной задаче теории упругости//ДАН СССР. — 1951. — Т. 76. — №2. С. 181–184.

46. **Adams R.A.** Sobolev spaces. — New York, San Francisco, London: Academic press, 1975.

47. **Chipot M.** Elliptic equations. An introductory course. — Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2009

48. **Dubinskii Yu. A.** Some Coercive Problems for the System of Poisson Equations//Russsian Journal of Mathematical Physics. V. 20, No 4, 2013, pp. 402–412.

49. **Figueiredo D. G., Mitidieri E.** Maximum principles for cooperative elliptic systems//C. R. Acad. Sci. Paris (310), 1990, pp. 49– 52.

50. **Otto F.** L-contraction and uniqueness for quasilinear elliptic-parabolic equation//J. Differential Equation, 1996 vol. 131, No 1, October 10, pp. 20–38.

51. **Otto F.** L-contraction and uniqueness for unstationary saturated-unsaturated porous media flow//Adv. Math. Sci. Appl., 1997, No 7(2), pp. 537-553.

52. **Protter M. H., Weinberger H.** Maximum principles in differential equations. — Springer, 1985

53. **Yan B.** Existence and Regularity Theory for Nonlinear Elliptic Systems and Multiple Integrals in the Calculus of Variations. A Special Topics Course at Michigan State University (Math 994-01, Spring '99). — http://users.math.msu.edu/users/yan/full-notes.pdf, свободный, 18.09.2015