7 класс

Задача 7.1. Скорость велосипеда.
Семиклассник Петя, катаясь на велосипеде, заметил, что при езде по прямой горизонтальной дороге он может делать не больше 5 оборотов педалей за 2 с. Петя знает, что диаметр большой «звёздочки» его велосипеда равен 15 см, маленькой — 5 см, а диаметр колес — 50 см. Используя эти данные, помогите Пете вычислить, с какой максимальной скоростью он может ехать по прямой горизонтальной дороге, если колеса велосипеда не пробуксовывают.

Примечание. Диаметр D и длина окружности L связаны соотношением $L = \pi D$, где $\pi \approx 3{,}14$.

(Т. М. Шакиров)

Ответ: $\upsilon \approx 11{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 42{,}4\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.
Решение: Чтобы ехать на велосипеде, нужно крутить педали. Вращение педалей велосипеда поворачивает большую «звёздочку», которая двигает цепь. Звенья цепи, попадающие на зубцы «звёздочки», движутся вместе с ней и проходят то же самое расстояние, что и зубцы «звёздочки», которые их цепляют. Из этого следует, что при одном повороте большой «звёздочки» цепь смещается на расстояние, равное длине её окружности, то есть, $L = \pi D_{Б}$ (L — смещение сегментов цепи, а $D_{Б}$ — диаметр большой «звёздочки»). Движущаяся цепь вращает маленькую «звёздочку», но она поворачивается на один полный оборот при меньшем смещении цепи, чем большая. Пусть l — смещение цепи, дающее один полный оборот маленькой «звёздочки», а $D_{М}$ — диаметр маленькой «звёздочки» ($l = \pi D_{М}$). Тогда за один оборот большой «звёздочки» маленькая делает

$$n = \frac{L}{l} = \frac{\pi D_{Б}}{\pi D_{М}} = \frac{D_{Б}}{D_{М}} = \frac{15\ \text{см}}{5\ \text{см}} = 3\ \text{оборота}.$$

Маленькая «звёздочка» жёстко соединена с колесом, поэтому за один оборот маленькой «звёздочки» колесо тоже делает один оборот. Велосипед проезжает за это время путь $s = \pi D_{К}$, где

$D_К$ — диаметр колеса велосипеда. Так как за время $t = 2$ с Петя может сделать 5 оборотов педалей, то за это же самое время маленькая «звёздочка» сделает $5 \times 3 = 15$ оборотов. Такое же число оборотов сделают и колеса велосипеда. В этом случае, путь велосипеда составит $S = 15s = 15\pi D_К$, и, следовательно, его скорость будет равна

$$\upsilon = \frac{S}{t} = \frac{15\pi D_К}{t} = \frac{15 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5 \text{ м}}{2 \text{ с}} \approx 11{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 42{,}4\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Задача 7.2. «Вкусный» эксперимент.
К эластичному мешку с $m_к = 1$ кг сушёной кукурузы привязали чугунную гирю массой $m_г = 1$ кг и кинули в чан с очень горячим маслом (температура около 200 °C). При этой температуре кукуруза превращается в попкорн, в результате чего её плотность уменьшается с $\rho_1 = 760$ кг/м^3 до $\rho_2 = 30$ кг/м^3. Через какое время мешок начнёт всплывать на поверхность, если попкорн получается со скоростью $\upsilon = 1{,}5$ г/с? Плотность чугуна $\rho_Ч = 7800$ кг/м^3, плотность масла $\rho_М = 900$ кг/м^3.

(П. А. Гусихин, А. Е. Заяц)

Ответ: $t \approx 16$ с.

Решение: При превращении кукурузы в попкорн, меняется объём мешка, а масса остаётся равной $m_к = 1$ кг. Масса кукурузы, превратившейся за время t в попкорн, равна $m_П = \upsilon t$. Следовательно, объём попкорна будет равен $V_П = \dfrac{\upsilon t}{\rho_2}$, а объём оставшейся кукурузы — $V_К = \dfrac{m_к - \upsilon t}{\rho_1}$. Мешок начнёт всплывать, когда выталкивающая сила, действующая на систему «мешок-гиря», сравняется с силой тяжести:

$$\rho_М \left(V_П + V_К + \frac{m_г}{\rho_Ч} \right) g = (m_к + m_г) g.$$

Подставим выражения для $V_П$, $V_К$ и, сократив g, получим

$$\rho_М \left(\frac{\upsilon t}{\rho_2} + \frac{m_к - \upsilon t}{\rho_1} + \frac{m_г}{\rho_Ч} \right) = m_к + m_г.$$

Отсюда

$$\upsilon t\left(\frac{\rho_М}{\rho_2}-\frac{\rho_М}{\rho_1}\right)=m_к+m_г-\frac{m_г\rho_М}{\rho_Ч}-\frac{m_к\rho_М}{\rho_1}$$

или, используя данные из условия,

$$1{,}5\ \frac{г}{с}\cdot t\cdot 28{,}8=700\ г\quad\Rightarrow\quad t=\frac{700\ г}{1{,}5\ \frac{г}{с}\cdot 28{,}8}\approx 16\ с.$$

Задача 7.3. Дорога к дому.

Половину всего пути к своему загородному дому велосипедист Б. Айкер ехал по шоссе с постоянной скоростью $\upsilon_1 = 40$ км/ч, затем он свернул на просёлочную дорогу и ехал по ней половину **всего** времени со скоростью $\upsilon_2 = 15$ км/ч. При подъезде к дому дорога оказалась совсем разбитой, и велосипедисту пришлось снизить скорость до $\upsilon_3 = 10$ км/ч. Найдите среднюю скорость Б. Айкера на всём пути.

(Т. М. Шакиров)

Ответ: $\upsilon_{ср} = 20$ км/ч.

Решение: Пусть s — длина пути, проделанного Б. Айкером, t — общее время, проведённое им в дороге. Так как длина первого участка равна половине всего пути, то сумма длина второго и третьего также даёт половину всего пути:

$$s_2+s_3=\frac{s}{2}\quad\Rightarrow\quad \upsilon_2t_2+\upsilon_3t_3=\frac{s}{2}.$$

Отсюда, учитывая, что $t_2=\frac{t}{2}$ (по условию) и $s=\upsilon_{ср}t$, получаем

$$\frac{\upsilon_2t}{2}+\upsilon_3t_3=\frac{\upsilon_{ср}t}{2}.$$

Так как время, затраченное на втором участке, равно половине всего времени движения, то $t_1+t_3=\frac{t}{2}$. Используя тот факт, что $t_1=\frac{s_1}{\upsilon_1}=\frac{s}{2\upsilon_1}=\frac{\upsilon_{ср}t}{2\upsilon_1}$, получаем ещё одно соотношение:

$$\frac{\upsilon_{ср}t}{2\upsilon_1}+t_3=\frac{t}{2}\quad\Rightarrow\quad \frac{\upsilon_{ср}t}{2}+\upsilon_1t_3=\frac{\upsilon_1t}{2}.$$

Подставляем вместо первого слагаемого полученное ранее выражение:

$$\frac{\upsilon_{\text{ср}} t}{2} + \upsilon_1 t_3 = \frac{\upsilon_1 t}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\upsilon_2 t}{2} + \upsilon_3 t_3\right) + \upsilon_1 t_3 = \frac{\upsilon_1 t}{2}$$

и находим связь между t_3 и t:

$$t_3 = \frac{(\upsilon_1 - \upsilon_2)\, t}{2(\upsilon_1 + \upsilon_3)} = \frac{(40\ \text{км/ч} - 15\ \text{км/ч})\, t}{2(40\ \text{км/ч} + 10\ \text{км/ч})} = \frac{t}{4}.$$

Зная её, определяем величину средней скорости:

$$\frac{\upsilon_{\text{ср}} t}{2} + \frac{\upsilon_1 t}{4} = \frac{\upsilon_1 t}{2} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{\text{ср}} = \frac{\upsilon_1}{2} = 20\ \text{км/ч}.$$

Задача 7.4. Сосуд с перегородкой.

В сосуде (см. рис. 1а) имеется вертикальная деревянная перегородка высотой $h = 20$ см, делящая его на две равные части и способная свободно перемещаться вверх-вниз по сделанным на боковых стенках специальным направляющим. Сначала в сосуд налили воду так, чтобы перегородка лишь слегка касалась дна. Затем в правую часть сосуда медленно наливают керосин.

а) Найти максимальную высоту слоя керосина в правой части сосуда, при которой он ещё не попадает в левую половину.

б) На какую высоту относительно дна поднимется перегородка в этом случае? Плотности дерева, керосина и воды равны $\rho_{\text{Д}} = 600$ кг/м^3, $\rho_{\text{К}} = 800$ кг/м^3 и $\rho_{\text{В}} = 1000$ кг/м^3 соответственно. Площадь основания перегородки пренебрежимо мала.

(А. Е. Заяц)

Ответ: а) 15 см; б) 6 см.

Решение: Сначала найдём максимальную высоту воды в сосуде, при которой перегородка ещё касается дна. Это возможно, когда величина выталкивающей силы, действующей со стороны воды не превышает величины силы тяжести, действующей на

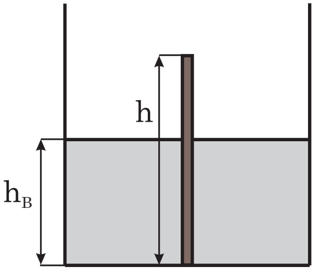

Рис. 1а

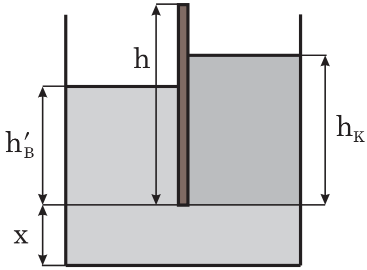

Рис. 1б

перегородку. В рассматриваемом нами случае $F_Т = F_А$, откуда следует, что

$$m_Пg = \rho_ВgV_{погр} \quad \Rightarrow \quad \rho_ДS_Пh = \rho_ВS_Пh_В,$$

где $m_П$ и $S_П$ — масса и площадь основания перегородки (они хотя и малы, но, всё-таки, не равны нулю), $h_В$ — высота первоначального слоя воды. Выражая $h_В$, получим, что

$$h_В = \frac{\rho_Дh}{\rho_В} = 12 \text{ см}.$$

Если в правую часть сосуда начать лить керосин, то перегородка начнёт двигаться вверх, при этом оставаясь на плаву.

С другой стороны, две половины, разделённые перегородкой, представляют собой сообщающиеся сосуды, поэтому давления жидкостей на уровне нижнего края перегородки слева и справа будут одинаковыми и совпадать с давлением, производимым перегородкой на воду (система находится в равновесии). Исходя из этого, найдём максимальную высоту слоя керосина. Пусть керосин полностью заполнил пространство до нижнего края перегородки (см. рис. 1б), тогда

$$\frac{m_Пg}{S_П} = \rho_Кgh_К \quad \Rightarrow \quad \rho_Дgh = \rho_Кgh_К \quad \Rightarrow \quad h_К = \frac{\rho_Дh}{\rho_К} = 15 \text{ см}.$$

Записывая аналогичное равенство для давлений перегородки и воды, получаем

$$\frac{m_Пg}{S_П} = \rho_Вgh'_В \quad \Rightarrow \quad \rho_Дgh = \rho_Вgh'_В \quad \Rightarrow \quad h'_В = \frac{\rho_Дh}{\rho_В} = h_В,$$

то есть расстояние между поверхностью воды в левой половине и нижним краем в процессе перемещений перегородки не изменяется.

Чтобы ответить на второй вопрос задачи, найдём объём воды в сосуде до и после доливания керосина и приравняем их (S — общая площадь дна сосуда, x — искомая высота, на которую поднялась перегородка):

$$V_{\text{до}} = Sh_{\text{В}}, \qquad V_{\text{после}} = Sx + \frac{Sh_{\text{В}}}{2},$$

$$Sh_{\text{В}} = Sx + \frac{Sh_{\text{В}}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{h_{\text{В}}}{2} = 6 \text{ см}.$$

Задача 7.5. Весёлые буквы.
Крокодил Гена решил оформить стенд о своих научных достижениях. После того, как он выпилил буквы своего имени из листа фанеры, Гена не удержался и решил с ними поэкспериментировать. Оказалось, когда буква «Н» лежит на букве «Г», они оказывают давление на стол, равное 150 Па. Если же буква «Г» лежит на букве «Н», то давление на стол равно 100 Па. Найти массы обеих букв и давление, оказываемое одной буквой, если ширина букв равна $a = 6$ см, высота равна $b = 8$ см, а толщина линий d везде одна и та же (см. рис. 2).

(А. Е. Заяц)

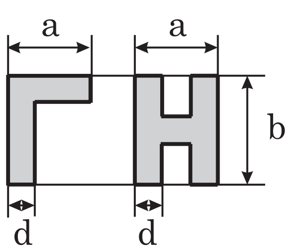

Рис. 2

Ответ: $p_{\text{Г}} = p_{\text{Н}} = 60$ Па, $m_{\text{Г}} = 14{,}4$ г, $m_{\text{Н}} = 21{,}6$ г.

Решение: Пусть $p_{ГН}$ — давление, производимое на стол, в случае, когда буква «Г» расположена снизу, а $p_{НГ}$ — давление в противоположной ситуации. Найдём площади букв, разбив «Г» на два прямоугольника, а «Н» — на три:

$$S_Г = bd + (a - d)d, \qquad S_Н = 2bd + (a - 2d)d.$$

Так как вес двух букв, лежащих друг на друге, не зависит от того, какая из них снизу, а давление букв на стол обратно пропорционально площади нижней буквы, получаем, что

$$\frac{p_{ГН}}{p_{НГ}} = \frac{S_Н}{S_Г} \quad \Rightarrow \quad \frac{S_Н}{S_Г} = \frac{150 \text{ Па}}{100 \text{ Па}} = 1{,}5.$$

Отсюда, подставляя выражения для $S_Н$ и $S_Г$, найдём величину d:

$$2bd+(a-2d)d = 1{,}5\,(bd+(a-d)d) \;\Rightarrow\; 2b+a-2d = 1{,}5\,(b+a-d)$$

$$\Rightarrow\; d = b - a = 8 \text{ см} - 6 \text{ см} = 2 \text{ см}.$$

Зная это, можно рассчитать площади букв

$$S_Г = 24 \text{ см}^2, \qquad S_Н = 36 \text{ см}^2$$

и их общую массу

$$m_Г + m_Н = \frac{p_{НГ}S_Н}{g} = \frac{100 \text{ Па} \cdot 0{,}0036 \text{ м}^2}{10 \text{ Н/кг}} = 0{,}036 \text{ кг} = 36 \text{ г}.$$

С другой стороны, поскольку буквы вырезаны из одного листа фанеры (толщина и плотность материала одинаковы), их масса пропорциональна площади:

$$\frac{m_Н}{m_Г} = \frac{S_Н}{S_Г} = 1{,}5.$$

Это позволяет найти обе массы

$$m_Г = 14{,}4 \text{ г}, \qquad m_Н = 21{,}6 \text{ г}$$

и рассчитать давление, производимое каждой буквой,

$$p_Г = \frac{m_Г g}{S_Г} = 60 \text{ Па}, \qquad p_Н = \frac{m_Н g}{S_Н} = 60 \text{ Па}.$$