Известия вузов. Математика *http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/*
2014, №5, с. 53–58 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

М.Х. ФАЙЗРАХМАНОВ

ОБ АРИФМЕТИЧЕСКОМ УРОВНЕ КЛАССА СУПЕРВЫСОКИХ МНОЖЕСТВ

Аннотация. В работе определен точный арифметический уровень класса супервысоких множеств.

Ключевые слова: супервысокое множество, арифметическая иерархия, арифметический класс.

УДК: 510.53

Множество A называется *супервысоким*, если $\varnothing'' \leqslant_{tt} A'$. Супервыскоие множества были введены и впервые изучены в работе Дж. Морхерр [1] (см. также [2], [3]). Интерес к вопросам об определении точных арифметических уровней подклассов высоких множеств возник после результата Миллера и Д. Хиршфелда ([3], с. 190) о существовании для каждого Σ^0_3-класса нулевой меры невычислимого в. п. (вычислимо перечислимого) множества, вычислимого относительно каждой случайной по Мартин-Лёфу последовательности, принадлежащей этому классу. Рассмотрим оператор, который каждому классу $\mathcal{H} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ ставит в соответствие совокупность в. п. множеств

$$\mathcal{H}^{\diamond} = \{A : A \text{ в. п.} \quad \text{и } \forall X \in \mathcal{H}\,[X \text{ случайно } \Rightarrow \ A \leqslant_T X]\}.$$

Введенный оператор принято называть оператором ромба. В работе ([3], § 8.5) рассмотрен случай применения этого оператора к классам Shigh — супервысоких и AED — почти всюду доминирующих множеств [4]. Отметим, что AED является Σ^0_3-классом, а Shigh содержится в Σ^0_3-классе нулевой меры ([3], § 8.5). Было показано, что $\mathrm{SJT}_{\mathrm{c.\,e.}} \subseteq \mathrm{Shigh}^{\diamond} \subset \mathrm{AED}^{\diamond}$, где $\mathrm{SJT}_{\mathrm{c.\,e.}}$ — класс всех в. п. множеств с сильно трассируемым скачком [3], [5]. (Подробнее о трассируемости см. в [6].) Позже в работе Н. Гринберга, А. Нииса и Д. Хиршфелда [7] было установлено, что $\mathrm{Shigh}^{\diamond} = \mathrm{SJT}_{\mathrm{c.\,e.}}$. Однако, вопрос о принадлежности Shigh Σ^0_3-уровню остался открытым и был поставлен в работах [2] и ([3], § 8.5). В данной статье показано, что $\mathrm{Shigh} \notin \Sigma^0_3$.

В обозначениях и терминологии придерживаемся в основном работ [3] и [8]. Для алфавита C обозначаем через C^* множество всех строк с символами из C. Пустую строку будем обозначать как $\varnothing$. Для строк σ и ρ пишем $\sigma \preceq \rho$, если σ является префиксом строки ρ; пишем $\sigma \prec \rho$, если $\sigma \preceq \rho$ и $\sigma \neq \rho$. Через $|\sigma|$ обозначаем длину строки σ. Для множества X и чисел $m < n$ через $X \upharpoonright [m, n)$ обозначим строку σ длины $n - m$, в которой i-й символ $(i < n-m)$ есть $X(m+i)$. Вместо $X \upharpoonright [0, n)$ пишем просто $X \upharpoonright n$. Если σ — строка из $\{0,1\}^*$, то запись $\sigma \prec X$ означает, что существует такое число n, что $\sigma \preceq X \upharpoonright n$. Если даны строка

Поступила 27.11.2012

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-31158 мол_а).

$\sigma \in \{0,1\}^*$ и число n, то записав σ n раз подряд получим строку, которую будем обозначать как σ^n. При $n=0$ считаем $\sigma^n = \varnothing$.

Пусть даны строки $\sigma, \rho, \tau \in \{0,1\}^*$. Будем говорить, что σ и ρ расщепляют τ, если $\tau \prec \sigma, \rho$, σ и ρ несравнимы относительно порядка $\preceq$. Скажем, что частичная функция

$$T : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$$

является f-деревом, если из того, что хотя бы одно из значений $T(\sigma 0)$, $T(\sigma 1)$ определено, следует, что каждое из значений $T(\sigma)$, $T(\sigma 0)$, $T(\sigma 1)$ определено и $T(\sigma 0)$, $T(\sigma 1)$ расщепляют $T(\sigma)$. Пишем $\sigma \in T$, если строка σ принадлежит области значений дерева T. Будем говорить, что множество X лежит на f-дереве T или X является путем в T, если $X \upharpoonright n$ принадлежит T для бесконечно многих n. Обозначим через $\mathrm{Paths}\,(T)$ совокупность всех множеств, лежащих на T. Для произвольной частичной функции ψ через $\mathrm{dom}\,\psi$ обозначим ее область определения. Пишем $\psi(x)\downarrow$, если $x \in \mathrm{dom}\,\psi$, и $\psi(x)\uparrow$, в противном случае. Через $\langle x, y\rangle$ обозначаем стандартную вычислимую биекцию из $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$.

Приведем характеризацию множеств, таблично-сводящихся к скачку фиксированного множества, которая будет использоваться при доказательстве основного результата.

Предложение. *$B \leqslant_{tt} A'$ тогда и только тогда, когда существуют такие тьюринговый функционал Ψ и вычислимая функция f, что*

1) $\forall x \quad \exists t \leqslant f(x)\ [\Psi(A; t, x)\downarrow]$,
2) $\forall x \quad [B(x) = \Psi(A; \mu t\, \Psi(A; t, x)\downarrow, x)]$.

Доказательство. Фиксируем вычислимую функцию h и эффективную нумерацию всех пар $\omega_n = (F_n, \alpha_n)$ таких, что $F_n = (x_0, \ldots, x_{h(n)})$ — конечная последовательность натуральных чисел и α_n — $h(n)$-местная булева функция. Такие пары будем называть табличными условиями. Для множества X скажем, что табличное условие ω_n истинно в X (пишем $X \models \omega_n$), если $\alpha(X(x_0), \ldots, X(x_{h(n)})) = 1$. В таких обозначениях $Y \leqslant_{tt} X$ посредством вычислимой функции g тогда и только тогда, когда для всех x выполнено $x \in Y \Leftrightarrow X \models \omega_{g(x)}$. Пусть $B \leqslant_{tt} A'$ посредством вычислимой функции g. Фиксируем A-вычислимое перечисление $\{A'_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ скачка A. Обозначим $f = h \circ g$. Для всех x определим $\Psi(A; f(x), x) = \alpha(A'_0(x_0), \ldots, A'_0(x_{f(x)}))$. Если значение $\Psi(A; f(x)-i, x)$ определено равным $\alpha(A'_s(x_0), \ldots, A'_s(x_{f(x)}))$ и существует такое $v > s$, что для некоторого $j \leqslant f(x)$ имеем $A'_s(x_j) \neq A'_v(x_j)$, то положим

$$\Psi(A; f(x)-i-1, x) = \alpha(A'_v(x_0), \ldots, A'_v(x_{f(x)}))$$

для первого подходящего v. Легко видеть, что определенные таким образом функционал Ψ и функция f удовлетворяют условиям 1), 2) предложения.

Обратно, пусть даны функционал Ψ и функция f, удовлетворяющие условиям 1), 2). Для каждого i определим A-вычислимо перечислимые множества

$$L_i = \{x : \Psi(A; i, x)\downarrow\}, \quad M_i = \{x : \Psi(A; i, x)\downarrow = 1\}.$$

Тогда для всех x верно

$$x \in B \Leftrightarrow x \in M_{f(x)}\ \&\ x \notin L_{f(x)-1}\ \vee \cdots \vee\ x \in M_1\ \&\ x \notin L_0\ \vee\ x \in M_0. \qquad (1)$$

Легко видеть, что по условию (1) можно эффективно получить табличное условие, истинное для произвольного x в A' тогда и только тогда, когда $x \in B$. $\square$

Фиксируем гёделевскую нумерацию $\{\Psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ всех тьюринговых функционалов, действующих из $2^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$. Для каждого n определим частично вычислимую функцию $\Delta_n : \{0,1\}^* \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, полагая

$$\Delta_n(\sigma, x) = \begin{cases} \Psi_n(\sigma; \mu t\, \Psi_{n,|\sigma|}(\sigma; t, x)\downarrow, x), & \text{если } \exists t \leqslant |\sigma|\, \Psi_{n,|\sigma|}(\sigma; t, x)\downarrow; \\ \text{не определено} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема. *Пусть* $\mathcal{C}$ — Σ^0_3*-класс и* $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{Shigh}$. *Тогда существует супервысокое множество* A*, не принадлежащее* $\mathcal{C}$.

Доказательство. Выберем равномерно вычислимую последовательность множеств $S_n \subseteq \{0,1\}^*$ такую, что $\mathcal{C} = \bigcup\limits_n \mathcal{P}_n$, где $\mathcal{P}_n$ — Π^0_2-класс, порожденный множеством S_n:

$$\mathcal{P}_n = \{X : \exists^\infty y\, S_n(X \upharpoonright y) = 1\}.$$

Нашей целью будет построить возрастающую последовательность строк

$$\sigma_0 \prec \sigma_1 \prec \sigma_2 \prec \cdots$$

такую, что множество A, определенное условием $\forall n \quad \sigma_n \prec A$, является супервысоким и не принадлежит $\mathcal{C}$. Каждая строка σ_n является концевой строкой f-дерева T_n, определение которого будет приведено ниже. Сначала приведем конструкцию f-дерева $R\langle S, \sigma\rangle$ и множества $V\langle S, \sigma\rangle \in \Sigma^0_2$, зависящих от вычислимого множества $S \subseteq \{0,1\}^*$ и строки σ, и удовлетворяющих условиям

- $\forall \tau \in R\,\langle S, \sigma\rangle \sigma \preceq \tau$,
- $\mathrm{Paths}(R\langle S, \sigma\rangle) \subseteq \mathcal{P}$, где $\mathcal{P} = \{X : \exists^\infty y\, S(X \upharpoonright y) = 1\}$,
- $V\langle S, \sigma\rangle \nleqslant_{tt} X'$ для всех $X \in \mathrm{Paths}(R\langle S, \sigma\rangle)$.

Построение. Шаг $s = 0$. Полагаем $R_0\langle S, \sigma\rangle(\alpha) = \sigma\alpha$ для $\alpha \in \{\varnothing, 0, 1\}$, $V_0\langle S, \sigma\rangle = \varnothing$ и $c(i, 0) = \langle i, 0\rangle$ для всех i.

Шаг $s+1$. Обозначим через F_s множество всех максимальных относительно префиксов строк, принадлежащих $\operatorname{dom} R_s\langle S, \sigma\rangle$. Если не существует строк $\rho \in F_s$ и $\tau \in S$, для которых $R_s\langle S, \sigma\rangle(\rho) \prec \tau$, то завершаем построение. В противном случае для каждой строки $\rho \in F_s$ начинаем перечислять строки $\tau \in S$, для которых выполнены условия

$$R_s\langle S, \sigma\rangle(\rho) \prec \tau,$$
$$c(i, s) \notin V_s\langle S, \sigma\rangle \Rightarrow \Delta_i(\tau, c(i, s)) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad i < |\rho|, \tag{2}$$

до тех пор, пока не будет найдена первая такая пара ρ, τ. Определяем $R_{s+1}\langle S, \sigma\rangle(\rho k) = \tau k$, где $k = 0, 1$, и переходим к следующему шагу. Если такой пары не существует, то выберем наибольшее $i_{0,s}$, для которого существуют строки $\rho \in F_s$, $\tau \in S$, удовлетворяющие условию

$$i_{0,s} < |\rho| \ \&\ R_s\langle S, \sigma\rangle(\rho) \prec \tau \ \&\ \forall i < i_{0,s}\ [c(i, s) \notin V_s\langle S, \sigma\rangle \Rightarrow \Delta_i(\tau, c(i, s)) \neq 0].$$

Перечислим $c(i_{0,s}, s)$ в $V_{s+1}\langle S, \sigma\rangle$, определим

$$c(j, s+1) = \left\langle j, \sum_{k<i_0} V_s\langle S, \sigma\rangle(c(k, s)) 2^{j-k} + 2^{j-i_0-1} \right\rangle \quad \text{для} \quad j > i_{0,s}, \tag{3}$$
$$c(l, s+1) = c(l, s) \quad \text{для} \quad l \leqslant i_{0,s},$$

и перейдем к следующему шагу.

Непосредственно из построения следует

(a) $V\langle S,\sigma\rangle \in \Sigma^0_2$,
(b) $\mathrm{Paths}(R\langle S,\sigma\rangle) \subseteq \mathcal{P}$,
(c) для каждого i существует конечный предел $c(i) = \lim\limits_s c(i,s)$,
(d) если $R\langle S,\sigma\rangle$ конечно, то никакая концевая вершина $\tau \in R\langle S,\sigma\rangle$ не имеет собственных расширений в S.

Лемма 1. $V\langle S,\sigma\rangle \not\leqslant_{tt} X'$ *для всех* $X \in \mathrm{Paths}(R\langle S,\sigma\rangle)$.

Доказательство. Предположим, что $R\langle S,\sigma\rangle$ бесконечно. Покажем, что для всех i и всех $X \in \mathrm{Paths}(R\langle S,\sigma\rangle)$ выполнено неравенство

$$V\langle S,\sigma\rangle(c(i)) \neq \Psi_i(X; \mu t\, \Psi_i(X; t, c(i))\downarrow, c(i)). \tag{4}$$

Фиксируем произвольное k и предположим по индукции, что для всех $i < k$ и всех $X \in \mathrm{Paths}(R\langle S,\sigma\rangle)$ неравенство (4) верно. Докажем, что оно верно для $i = k$. Обозначим через s_0 первый шаг s, на котором выполнено

1) $c(k) = c(k,s)$,
2) для каждой строки ρ, $|\rho| \leqslant k+1$, если $\rho \in \mathrm{dom}\, R\langle S,\sigma\rangle$, то $\rho \in \mathrm{dom}\, R_s\langle S,\sigma\rangle$.

Отметим, что при таком выборе s_0 для каждого $i < k$ имеем $c(i) = c(i,s_0)$ и $V_{s_0}\langle S,\sigma\rangle(c(i)) = V\langle S,\sigma\rangle(c(i))$.

1) Существует шаг $t \geqslant s_0$ такой, что для всех строк $\rho \in F_t$ и $\tau \succ R_t\langle S,\sigma\rangle(\rho)$, $\tau \in S$, верна импликация

$$k < |\rho| \;\&\; \forall i < k\; [c(i) \in V_t\langle S,\sigma\rangle \vee \Delta_i(\tau, c(i)) \neq 0] \Rightarrow \Delta_k(\tau, c(k)) = 0.$$

Выберем наименьший шаг t, удовлетворяющий этому условию. В этом случае $i_{0,t} = k$. Следовательно, $c(k)$ перечисляется в $V\langle S,\sigma\rangle$, но $\Psi_k(X; \mu t\, \Psi_k(X; t, c(k))\downarrow, c(k)) = 0$ для каждого $X \in \mathrm{Paths}\, R\langle S,\sigma\rangle$.

2) Условие случая 1) не выполняется. В этом случае согласно построению $c(k) \notin V\langle S,\sigma\rangle$. Выберем произвольно множество $X \in \mathrm{Paths}(R\langle S,\sigma\rangle)$ и шаг $t \geqslant s_0$ такие, что $R\langle S,\sigma\rangle(\rho) \prec X$ для некоторого $\rho \in F_t$. Так как $X \in \mathrm{Paths}(R\langle S,\sigma\rangle)$, то существует такая строка $\tau \succ R_t\langle S,\sigma\rangle(\rho)$, что $\tau \prec X$ и $\Delta_k(\tau, c(k)) \neq 0$. Следовательно, для бесконечно многих n верно неравенство $\Psi_k(X\restriction n; \mu t\, \Psi_k(X\restriction n; t, c(k))\downarrow, c(k)) \neq 0$. Отсюда

$$V\langle S,\sigma\rangle(c(k)) = 0 \neq \Psi_k(X; \mu t\, \Psi_k(X; t, c(k))\downarrow, c(k)). \qquad \square$$

Теперь определим последовательность f-деревьев $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ и строк $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Полагаем $T_0 = R\langle S_0, \varnothing\rangle$. Отметим, что T_0 конечно, поскольку каким бы ни было множество $X \in \mathrm{Paths}(T_0)$, Σ^0_2-множество $V\langle S_0,\varnothing\rangle$ не является таблично-сводимым к X' и $\mathrm{Paths}(T_0) \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathrm{Shigh}$. Обозначим через m_0 такое наибольшее m, что значение $T_0(\varnothing''\restriction m)$ определено и положим σ_0 равной этому значению. Предположим, что конечное f-дерево T_n и строка σ_n уже определены. Полагаем $T_{n+1} = R\langle S_{n+1}, \sigma_n\rangle$. Обозначим через m_{n+1} такое наибольшее m, что значение $T_{n+1}(\varnothing''\restriction [m_n, m))$ определено. Пусть $\sigma_{n+1} = T_{n+1}(\varnothing''\restriction [m_n, m_{n+1}))$. Согласно нулевому шагу построения, строки $\sigma_n 0$ и $\sigma_n 1$ принадлежат T_{n+1}, поэтому $\sigma_n \prec \sigma_{n+1}$ для всех n. По свойству (d) построения $\sigma_n \not\prec X$ для каждого $X \in \mathcal{P}_n$. Следовательно, множество A, определенное условием $\forall n \quad \sigma_n \prec A$, не принадлежит $\mathcal{C}$.

Лемма 2. *A является супервысоким.*

Доказательство. Достаточно определить тьюринговый функционал Ψ и вычислимую функцию f, удовлетворяющие условию предложения при $B = \varnothing''$. Для этого определим равномерную последовательность двухместных частично A-вычислимых функций $\{\theta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, области значений которых содержатся в $\{0,1\}^*$, удовлетворяющих условиям

1) $\forall x \quad \exists i, \exists t\ \theta_i(t,x)\downarrow$,
2) $\forall i \quad \{x : \exists t\ \theta_i(t,x)\downarrow\}$ конечно,
3) для всех i, если $y = \max\{x : \exists t\ \theta_i(t,x)\downarrow\}$, то $\theta_i(\mu t\, \theta_i(t,y)\downarrow, y) = \sigma_i$.

Полагаем $\theta_0(0,0) = A(0)$. Фиксируем вычислимую биекцию $\mathrm{num} : \{0,1,2\}^* \to \mathbb{N}$, удовлетворяющую условию

$$\mathrm{num}(\rho) < \mathrm{num}(\tau) \Leftrightarrow |\rho| < |\tau| \ \vee\ |\rho| = |\tau|\ \&\rho \text{ расположена лексикографически левее } \tau. \quad (5)$$

Отметим, что из (5) следует $\mathrm{num}(\varnothing) = 0$. Предположим по индукции, что определено значение $\theta_i(t,x) = \tau$ и $i \leqslant x$. Обозначим $\beta = \mathrm{num}^{-1}(t)$, $s = \mathrm{num}(\beta 2 0^x)$ и определим

$$\theta_{i+1}(s, x+1) = \begin{cases} \tau 0, & \text{если } \tau 0 \prec A; \\ \tau 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

С целью определить значения $\theta_i(u, x+1)$, введем в рассмотрение функцию $c : \{0,1\}^* \to \mathbb{N}$, полагая

$$c(0,\delta) = c(|\delta| + k, \delta) = 0 \ \text{ для всех } \ k,$$
$$c(j,\delta) = \Big\langle i, \sum_{k<j} \delta(k) 2^{j-k-1} \Big\rangle \ \text{ для } \ i < |\delta|.$$

Для каждой строки $\delta \in \{0,1\}^*$ длины $x + 1 - i$ перечисляем строки $\tau' \in S_i$, $\tau \prec \tau'$, для которых выполнено условие $\delta(j) = 0 \Rightarrow \Delta_i(\tau', c(j,\delta)) \neq 0$ для всех $j < |\delta|$ до тех пор, пока не будет найдена первая такая строка τ'. Полагаем

$$\theta_i(\mathrm{num}(\beta\delta 0^i), x+1) = \begin{cases} \tau' 0, & \text{если } \ \tau' 0 \prec A; \\ \tau' 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определенная таким образом последовательность $\{\theta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям 1), 2) ввиду конечности f-деревьев T_i. Условие 3) выполнено в силу условий (2), (3) построения f-деревьев $R\langle\sigma, S\rangle$. Отметим, что по определению функций θ_i, если $\theta_i(t,x)\downarrow$, то $i \leqslant x$. Кроме того, если значение $\theta_i(t,x)$ определено, то значение $\theta_k(t,x)$ не определено ни для каких $k \neq i$. Поэтому функция

$$f(x) = \sum_{|\sigma| = 1+2+\dots+x+1} \mathrm{num}(\sigma),$$

где суммирование ведется по строкам из $\{0,1,2\}^*$, и функционал $\Psi(A; t, x)$, значение которого при заданных значениях аргументов равно последнему символу строки $\theta_i(t,x)$, если существует i такое, что $\theta_i(t,x)\downarrow$, являются искомыми. □

Рассмотрим класс множеств, дуальный к классу Shigh, а именно, класс супернизких множеств. Множество A называется супернизким, если $A' \leqslant_{tt} \varnothing'$ (см. [1], [9]). В работе А. Нииса [10] показано, что индексное множество супернизких в. п. множеств принадлежит Σ^0_3-уровню арифметической иерархии. В работе [11] показано, что индексное множество всех супернизких множеств также Σ^0_3. Таким образом, в отличии от случая низких множеств, переход от тьюринговой к табличной сводимости в определении высоких множеств не сказывается на арифметическом уровне. Отметим, что вопрос о точном уровне индексного множества в. п. супервысоких множеств остается открытым.

Литература

[1] Mohrherr J. *A refinement of low$_n$ and high$_n$ for the r. e. degrees*, Z. Math. Logik Grundlag. Math. **32** (1), 5–12 (1986).

[2] Kjos-Hanssen B., Nies A. *Superhighness*, Notre Dame J. Formal Logic **50** (4), 445–452 (2009).

[3] Nies A. *Computability and randomness* (Oxford University Press, 2009).

[4] Dobrinen N.L., Simpson S.G. *Almost everywhere domination*, J. Symbolic Logic **69** (3), 914–922 (2004).

[5] Cholak P., Downey R., Greenberg N. *Strong jump-traceabilty* I: *The computably enumerable case*, Adv. Math. **217** (5), 2045–2074 (2008).

[6] Ishmukhametov S. *Weak recursive degrees and a problem of Spector*, In: Recursion theory and complexity (Kazan, 1997), Vol. 2 of de Gruyter Ser. Log. Appl., pp. 81–87, de Gruyter, Berlin (1999).

[7] Nies A., Greenberg N., Hirschfeldt D. *Characterizing the strongly jump-traceable sets via randomness*, Adv. Math. **231** (3–4), 2252–2293 (2012).

[8] Соар Р.И. *Вычислимо перечислимые множества и степени* (Казань, Казанск. матем. о-во, 2000).

[9] Файзрахманов М. Х. *О полурешетке, порожденной супернизкими вычислимо перечислимыми степенями*, Изв. вузов. Матем., № 1, 85–90 (2011).

[10] Nies A. *Reals which compute little*, In: Logic Colloquium 2002. Lecture Notes in Logic **27**, pp. 260-274. La Jolla, CA, 2006.

[11] Файзрахманов М.Х. *Вычислимые нумерации семейств низких множеств и тьюринговы скачки в иерархии Ершова*, Сиб. матем. журн. **51** (6), 1435–1439 (2010).

М.Х. Файзрахманов

ассистент, кафедра алгебры и математической логики,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

`e-mail:` marat.faizrahmanov@gmail.com

M.Kh. Faizrahmanov

Arithmetical level of a class of superhigh sets

Abstract. We find the proper arithmetical level of the class of superhigh sets.

Keywords: superhigh set, arithmetical hierarchy, arithmetical class.

M.Kh. Faizrahmanov

Assistant, Chair of Algebra and Mathematical Logic,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` marat.faizrahmanov@gmail.com