

А.О.АНДРЕЕВ, Ю.А.НЕФЕДЬЕВ, К.О.ЧУРКИН, А.А.КОЛОСОВ

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ СЕЛЕНОДЕЗИИ



Казанский Федеральный Университет
2024

Коллектив авторов:

Андреев А.О., в.н.с., доцент КФУ

Нефедьев Ю.А., д-р физ.-мат. наук, профессор КФУ

Чуркин К.О., м.н.с., КФУ

Колосов А.А., аспирант, КФУ

Современные методы селенодезии - Казань: Казан. фед. ун-т, 2024.-
107 с.

Данная книга посвящена вопросам анализа селенографических данных современных космических лунных миссий, на основе которых получены разнообразные селенофизические параметры благодаря выполненным орбитальным, топографическим и гравиметрическим наблюдениям. Книга будет способствовать повышению интеллектуального потенциала студентов астрономических и астрономо-геодезических специальностей высших учебных заведений, а также привлечет внимание широкой аудитории читателей к осознанию проблем современной селенографии. Предназначена для всех, кто интересуется проблемами космической астрометрии и современным развитием естественных наук.

Данная работа была выполнена в соответствии с Программой Правительства РФ конкурентоспособности Казанского федерального университета и поддержана грантом РНФ 24-22-00260.

Публикуется по решению Совета Астрономической обсерватории
им.В.П.Энгельгардта

© Группа авторов, 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

1	ВВЕДЕНИЕ	5
2	ГЛАВА 1	8
3	§ 1.1 Задачи лунной астрометрии	8
4	§ 1.2 Анализ динамической и геометрической фигуры Луны	10
5	§ 1.3 Описание моделей, методов и программного обеспечения гармонического анализа лунного рельефа	14
6	§ 1.4 Построение модели лунного рельефа	17
7	§ 1.5 Алгоритм оценивания амплитуд гармоник	18
8	§ 1.6 Программные и информационные подходы для обработки селенографических данных	20
9	§ 1.7 Результаты определения вектора смещения центра фигуры Луны относительно ее центра масс	23
10	ГЛАВА 2	27
11	§ 2.1 Краевая зона Луны и опорная селеноцентрическая сеть	27
12	§ 2.2 Краевая зоны Луны: селенографические модели	28
13	§ 2.3 Система координат Гайна	36
14	§ 2.4 Либрационная зона Луны: каталог объектов	38
15	ГЛАВА 3	46
16	§ 3.1 Опорный каталог объектов на поверхности Луны в небесной системе координат. Селенографические каталоги лунных объектов	46

17	§ 3.2 Селенографические системы координат	56
18	§ 3.3 Фундаментальный каталог положений точек на поверхности Луны	64
19	§ 3.4 Исследование фундаментального каталога опорных точек на поверхности Луны	74
20	ГЛАВА 4	77
21	§ 4.1 Модель макрофигуры лунного диска. Методы построения моделей макрофигуры Луны	77
22	§ 4.2 Современные модели макрофигуры Луны	81
23	§ 4.3 Данные каталога селеноцентрических опорных точек для построения модели макрофигуры Луны	87
24	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	97
25	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	105

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что результаты координатно-временного обеспечения зависят от развития космических технологий. Важными остаются вопросы уточнения и конкретизации взаимной ориентации инерциальной и динамической систем координат, реализации динамических систем отсчета, отнесенных к центру масс Луны, исследования динамики и кинематики небесных объектов. Кроме того, необходимо решить вопрос и по разработке точной теории вращения Луны для выполнения задач эффективной навигации, чтобы использовать эти данные для прилунения посадочных модулей на поверхность Луны. В настоящее время все перечисленные проблемы являются актуальными задачами, которые непосредственно связаны с вопросами координатно-временного обеспечения.

Несмотря на тот факт, что в настоящее время имеется достаточное количество современных каталогов лунных объектов, тем не менее, проблема создания селеноцентрической опорной сети, которая охватывала всю лунную поверхность, не решена с достаточной точностью. Данные космических миссий «Апполон» позволили получить опорную сеть, которая построена в системе центра масс Луны, но входящие в нее объекты покрывают ограниченную часть лунной поверхности, в поясе от -20 до $+40$ градусов по широте. А при расширении данной сети возникают ошибки в плановых координатах, которые достигают величин более 1 км. Кроме того, система координат данной сети представляет собой квазидинамическую сеть. Это означает, что ее оси не совпадают с

осями инерции Луны. Это касается и других аналогичных каталогов систем лунных координат.

Под словосочетанием «селеноцентрическая навигационная опорная сеть» понимается следующее: создание сети опорных объектов на лунной поверхности, к которым можно осуществить привязку с борта космического аппарата, и, как следствие, определить заданную поверхность отсчета наблюдаемых данных. Под «фундаментальной системой координат» считается система координат, привязанная к центру масс Луны и осям ее инерции.

Основные вопросы, связанными с исследованием взаимного положения геометрического центра масс Луны относительно ее центра масс, в настоящее время являются:

- анализ динамической системы координат;
- создание абсолютной опорной системы объектов в краевой лунной зоне;
- расширение селеноцентрической динамической системы координат для большей части лунной поверхности;
- построение модели макрорельефа Луны.

Более конкретно можно обозначить решаемые задачи следующим образом:

1. Реализация метода определения параметров положения центра масс Луны относительно ее центра фигуры. Основой данного метода является прямое использование динамической опорной системы объектов. (Динамическая опорная система построена в системе центра масс и главных осей инерции небесного тела.) Данный метод

позволяет определять наземные параметры совместно с данными космических миссий. В результате, можно выполнить анализ этих сетей с точки зрения существующих квазидинамических характеристик.

2. Определение параметров положения центра масс Луны относительно центра ее фигуры и оценка полученных величин. Было получено, что при совместном использовании наземного селеноцентрического каталога «Казань-1162» и данных миссии «Клементина», положения центра масс Луны относительно ее центра фигуры имеют следующие значения: $\Delta\xi = -1,49$; $\Delta\eta = -0,69$; $\Delta\zeta = 0,16$. Эти результаты достаточно хорошо согласуются с данными других космических миссий. Полученные значения показывают, что каталог «Казань-1162» является динамической системой координат.

3. Создание метода построения абсолютного каталога в краевой зоне Луны и построение в либрационной зоне Луны опорной селеноцентрической динамической сети. Хорошо известно, что опорные селенодезические сети используются для привязки к ним исследуемых координатных систем. Однако, до сих пор не было создано такой сети в лунной либрационной зоне. Данная сеть сочетает в себе динамические параметры и возможность трансформации координат между обратной и видимой сторонами Луны.

4. Развитие метода построения опорного селеноцентрического каталога с целью сгущения и расширения опорных объектов в

динамической системе координат. Метод позволил организовать трансформацию селенографических современных координатных систем в динамическую систему координат. Причем, до настоящего времени такого рода трансформация осуществлялась только в виде квазидинамической системы отсчета данных.

5. Создание сводного опорного селеноцентрического каталога лунных объектов в небесной системе координат, построение координатной динамической сети на Луне.
6. Получение параметров модели макрофигуры Луны на основе анализа сводного опорного селеноцентрического каталога лунных объектов. Модель макрофигуры Луны позволяет оценить вариации лунной макрофигуры для анализа высотных данных принятой поверхности отсчета. Полученная модель показала хорошее согласие с данными современных космических миссий.

ГЛАВА 1

1.1 Задачи лунной астрометрии

Основная цель космических агентств по освоению Луны на ближайшие годы является подготовка и создание долговременных научно-технических и экспериментально-промышленных баз, как на видимой стороне Луны, так и в районе лунных полюсов.

Ключевые проекты, посвященные исследованиям Луны: ЛЛЛ (лазерная локация Луны), Selene, ILOM (JAXA, Япония), LRO (NASA, USA), Chang'e (Китай), Chandrayaan (Индия), Луна - Глоб (РКА, Россия). Отметим, что российские проекты фокусируются на вопросах

по изучению параметров гравитационного поля Луны, определению точного лунного положения в фундаментальной системе координат, ее внутреннего строения, геометрической и динамической фигуре Луны. Важнейшими задачами современной селенодезии являются: построение селеноцентрических динамических опорных сетей, создание лунных топоцентрических и гравиметрических моделей, установление взаимного положения центра фигуры и центра масс Луны, задание систем отсчета селенографических координат для навигационного ориентирования и определения поверхностей отсчета для картографирования лунной поверхности. Решение последней задачи представляется особенно значимой, ведь все современные топографические модели, построенные по космическим наблюдениям, в целом имеют неопределенные поверхности отсчета координат, что в свою очередь, приводит к неточности координат объектов. Кроме того, отсутствие опорного каталога лунных объектов не позволяет решить вопрос расширения и сгущения опорных космических навигационных сетей. Это подтверждается неудачным опытом привязки топографических данных миссии «Кагуя». В данном случае проблема заключалась в следующем: данные спутника привязывались к станциям ALSEP, и затем от этих опорных точек с высокой точностью осуществлялось сканирование лунной поверхности с небольшим шагом в плановых координатах. В итоге анализ полученных топоцентрических данных показал, что при удалении от опорных станций вся привязываемая топоцентрическая опорная сеть начинала давать существенные отклонения от реальных значений. Таким

образом, не смотря на высокую точность спутникового сканирования, сама поверхность отсчета и координатная система спутниковых данных не имеет точной привязки к динамической системе координат. Следовательно, в настоящее время, использование только космических методов исследования рельефа лунной поверхности не позволяет полностью заменить наземные наблюдения. В будущем решить данный вопрос с достаточной точностью возможно, если на лунной поверхности будут выполнены работы, аналогичные работам координатно-временного обеспечения (КВО) на земной поверхности. Таким образом, в настоящее время селенографические исследования Луны желательно осуществлять при разумном сочетании наземных и космических методов наблюдений.

1.2 Анализ динамической и геометрической фигуры Луны

В настоящее время известны два типа данных лунной селенографии. Одни данные, которые получены благодаря альтиметрическому сканированию поверхности Луны с бортов космических спутников, хорошо описывают рельеф, но не дают точных значений плановых координат опорных объектов. Другим типом данных являются точные координаты опорных объектов, полученных на основе наблюдений по прямой привязки их к звездам, но при этом не описывающих с достаточной точностью лунный рельеф. Таким образом, все существующие селенографические модели построены в различных системах отсчета координат и имеют различную ориентацию координатных осей.

Данные космических миссий относятся к квазидинамической системе координат, где центром отсчета координат является центр масс Луны, а оси координат не совпадают с осями инерции Луны. Большинство современных каталогов лунных объектов так же реализуют квазидинамическую систему координат.

На данный момент отсутствует опорная динамическая селеноцентрическая система координат, которая покрывает достаточную площадь на поверхности Луны и построена на основе космических наблюдениях. Несомненно, космические миссии дают высокую точность для описания физического рельефа Луны, но, тем не менее, поверхность отсчета высот точек этого рельефа представляет абсолютно неопределенную фигуру.

Отметим, что во многих статьях по описанию спутниковых топографических данных, много внимания отводится вопросам высокой точности при получении лунного физического рельефа, и практически отсутствует информация непосредственно о поверхности отсчета селеноцентрических высот.

В настоящее время не существует фотограмметрического метода построения лунной спутниковой селенографической карты, который позволял бы использование разнородных спутниковых снимков поверхности Луны для преобразования их в единую систему отсчета данных абсолютным образом. Следовательно, спутниковые топографические карты не являются полноценными моделями физической поверхности Луны.

Для исследования достоверности моделей, полученных на основе наземных и спутниковых наблюдений, на основе селенографического подхода, необходимо:

- выполнить сравнение поверхностей макрорельефа Луны прямым методом, который основан на спутниковых топографических картах и макрорельефах различных источников;

- провести сравнительный анализ положения центра масс относительно центра фигуры Луны для разнородных источников топографической информации.

Каталоги селенографических объектов имеют высокую точность представленных координат на поверхности Луны, но при этом невысокую точность подробного описания рельефа. С другой стороны, хорошая точность отображения рельефа получается при лазерном сканировании с бортов спутников, но при этом имеется достаточно низкая точность привязки рассматриваемого рельефа к какой-либо селенографической системе координат (точнее, неопределена система отсчета топографических данных). В связи с этим можно сделать вывод: различные источники гипсометрической информации являются равноточными. При этом точное решение лунных навигационных задач, исследование строения и эволюции естественного спутника Земли невозможно без определения взаимного положения центра фигуры Луны и ее центра масс. Для навигационного сопровождения космических лунных миссий решение данной задачи является важным и значимым.

Положение центра масс Луны можно определить относительно центра аппроксимирующей Луну сферы, если центр фигуры Луны определять по геометрическим данным (высотам объектов), а центр масс – по внешнему гравитационному полю (движение ИСЛ и др.). Сначала на основе разнородных источников центр масс Луны фиксируется центром координатной системы каталога координат объектов на ее поверхности, а гипсометрическая информация используется для представления высот (как функции сферических координат) в виде разложения по сферическим гармоникам. Далее, положение центра фигуры относительно центра масс определяется по амплитудам гармоник первого порядка. В последнее время решить вопрос определения взаимного положения центров фигуры и масс Луны позволили последние космические миссии. В свою очередь, мы предлагаем решить эту проблему прямым использованием селеноцентрического каталога координат лунных объектов. Причем, объекты должны быть расположены достаточно однородно на лунной поверхности. При этом каталог «Казань-1162» является базисной сетью, на основе которого и осуществляется привязка. Расширение данного опорного каталога на обратную сторону Луны позволит создать Глобальную селеноцентрическую сеть.

1.3 Описание моделей, методов и программного обеспечения гармонического анализа лунного рельефа

Учитывая, что опорные объекты распределены неравномерно по видимой и обратной стороне Луны, необходимо вычислить средние радиусы полусфер Луны, и затем вычислить их среднее арифметическое:

$$R = R_0 + \frac{1}{2}(\Delta R_{\text{вид}} + \Delta R_{\text{обр}}) = 1737,7 \text{ км, где } R_0 = 1738 \text{ км,}$$

$$\Delta R = \frac{\sum_{i=1}^{316} H_i p_i \cos \phi_i}{\sum_{i=1}^{316} p_i \cos \phi_i}$$

Здесь, H_i - высоты точек относительно средней сферы с центром в центре масс, $p_i \cos \phi_i$ - веса точек ($p_i = 1$ или $0,1$). Метод наименьших квадратов дает возможность определить коэффициенты разложения по сферическим функциям $\overline{C_{nm}}$, $\overline{S_{nm}}$. Предварительно необходимо решить систему некоторых условных уравнений вида:

$$\sqrt{p_i \cos \phi_i} \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n S_{nm} i = \sqrt{p_i \cos \phi_i} (H_i - \Delta R), \text{ где}$$

$$S_{nm} i = (\overline{C_{nm}} \cos m \lambda_i + \overline{S_{nm}} \sin m \lambda_i) \overline{P_{nm}}(\sin \phi_i)$$

Здесь $\overline{P_{nm}}(\sin \phi_i)$ - нормированные присоединенные полиномы Лежандра.

$$\overline{P_{nm}}(\sin \phi) = \sqrt{\frac{\varepsilon_m (2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}} P_{nm}(\sin \phi) \quad \left. \vphantom{\overline{P_{nm}}(\sin \phi)} \right\} \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_m = 2, \quad m = 1, 2, \dots$$

Так как система сферических функций является ортогональной, то коэффициенты каждого порядка $N = 1 - N_k$ определяются последовательным решением N_k систем уравнений типа:

$$\sqrt{p_i \cos \phi_i} \sum_{m=0}^N S_{nm} i = \sqrt{p_i \cos \phi_i} \left(H_i - \Delta R - \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=0}^n S_{nm} i \right)$$

Смещение центра фигуры Луны относительно центра масс (СЦФ) определяется коэффициентами первого порядка:

$$\begin{aligned} \Delta \xi &= \sqrt{3 \bar{C}_{11}} = -2.0 \text{ км} & (\phi = 0^0, \lambda = 0^0) \\ \Delta \eta &= \sqrt{3 \bar{S}_{11}} = -0.1 \text{ км} & (\phi = 0^0, \lambda = 90^0) \\ \Delta \zeta &= \sqrt{3 \bar{C}_{10}} = -2.0 \text{ км} & (\phi = 90^0) \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

где $\Delta \xi$ – СЦФ вдоль координаты по направлению к Земле, $\Delta \eta$ – СЦФ вдоль координаты, которая направлена перпендикулярно к ξ и лежащей в плоскости лунного экватора, $\Delta \zeta$ – СЦФ вдоль координаты, которая совпадает с осью вращения Луны; $\bar{C}_{11}, \bar{S}_{11}, \bar{C}_{10}$ - амплитуды гармоник первого порядка в разложении функции рельефа.

При обработке наблюдений этап определения (оценивания) параметров математических моделей является одним из наиболее значимых вычислительных процедур. Необходимо учитывать вопросы надежности результатов, корректности математической обработки при совмещении требований к точности и возможности описания процесса (явления) с проблемой выбора формальной (аппроксимирующей) или геометрической (причинно-следственной) модели.

Традиционный подход оценивания параметров не соответствует существующим и возрастающим требованиям практики, так как позволяет определять фиксированную модель, а использование метода наименьших квадратов (МНК) не соответствует возрастающим требованиям практики и возможностям методологии.

С помощью классического МНК можно решить частные вопросы без учета системного подхода к задаче. Наличие незначимых, мало информационных и дублирующих (зависимых друг от друга) членов разложения являются ограничительными условиями при обработке наземных и космических данных. Необходимо изучать шумовые эффекты, которые выявляют потерю точности определения значимых параметров и прогноза, нарушение основных свойств оценок МНК (состоятельности, несмещенности, эффективности). Кроме того, отсутствует возможность проверки на степень адекватности модели имеющимися наблюдениями; тем более что применяемый набор мер качества очень узок, а сами меры страдают заметными недостатками. Исследователи чаще всего не подозревают о действительном положении дел и не прибегают к адаптивным вычислительным схемам, также не проверяется соблюдение условий МНК.

В нашем случае предлагается альтернатива традиционному подходу - методология регрессионного моделирования, которая позволяет использовать в задачах оценивания регрессионный анализ, проверку начальных условий, адаптацию в случае их нарушений и предполагающая наличие специального программного обеспечения - системы обработки информации, автоматизирующей процесс вычисления и анализа. Регрессионное моделирование является системным подходом, причем корректность применения любого элемента системы (выборка, модель, метод оценивания параметров, метод оценивания структур, мера качества, набор предположений)

может быть подвергнута сомнению и проверке с соответствующей адаптацией при нарушении заданных условий.

Для построения моделей использовались следующие источники топографической информации: миссии «Clementine», «Kaguya», каталоги «Казань-1162», «Киев», «ГАИШ» (Чуйкова), «Bills, Ferrari», «ULCN» (The Unified Lunar Control Network 2005).

1.4 Построение модели лунного рельефа

Метод разложения в ряд по сферическим гармоникам применяется для создания математической модели рельефа поверхности Луны. Функция высоты $h = h(\varphi, \lambda)$ в виде модели регрессии выглядит следующим образом:

$$h(\varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n (\overline{C}_{nm} \cos m\lambda + \overline{S}_{nm} \sin m\lambda) \cdot \overline{P}_{nm}(\cos \varphi) + \varepsilon \quad (1.4.1)$$

где φ, λ - широта и долгота для известных координат лунных объектов; \overline{C}_{nm} , \overline{S}_{nm} - нормированные амплитуды гармоник; \overline{P}_{nm} - нормированные присоединённые функции Лежандра; ε - случайная ошибка регрессии.

Ряд (1.4.1) является медленно сходящимся. Например, для характеристики различных деталей рельефа, которые изменяются на протяжении 1° , необходим порядок разложения $n=180$, что в свою очередь приводит к вынужденному оцениванию $(180+1)^2$ коэффициентов (амплитуд) разложения.

На практике необходимо учитывать количество объектов при рассмотрении размерности модели (1.4.1) порядка n . Количество

объектов должно в $5 \div 15$ раз быть больше количества оцениваемых амплитуд.

1.5 Алгоритм оценивания амплитуд гармоник

Регрессионное моделирование было использовано для редукция переопределенной системы (1.4.1) при наличии разнообразных источников гипсометрической информации при редукции переопределенной системы. Преимуществом регрессионного моделирования является то, что помимо обязательных этапов по построению модели (1.4.1) и вычисления амплитуд C_{nm} , S_{nm}) также предусматривается:

- использование ряда статистик качества, в том числе внешних мер;
- диагностика соблюдения штатных условий метода наименьших квадратов (МНК);
- адаптация при их нарушении. При этом алгоритмические программные модули Гаусса-Жордана и Хаусхолдера применяются для метода наименьших квадратов.

Отметим основные нарушения условий МНК при редукции модели (1.4.1):

- наличие избыточных шумовых гармоник, приводящих к снижению точности построения определенного количества изогипс и высот;
- существование амплитуд гармоник, коррелирующих друг с другом при использовании (1.4.1) в момент описания рельефа на участке сферы, или если мы имеем неравномерное распределение объектов; в таком случае математическая модель считается некорректной, так как включает параметры оценки амплитуд.

Пошаговая регрессия (процедура регрессионного анализа), часто реализуется благодаря согласованию с этими двумя указанными выше нарушениями. Пошаговая регрессия эффективна для оценивания параметров модели (1.4.1), если выполняются условия:

а) Объекты распределены по всей поверхности сферы, даже если это распределение неоднородное;

б) Порядок разложения должен быть меньше 15. Это связано со временем расчетов, так как порядок разложения определяется количеством используемых в анализе точек.

В случае однородного распределения объектов по сфере можно исключить стохастически малозначимые гармоники и произвести все расчеты заново.

Использование модели (1.4.1) для небольших участков сферы (полусфера и др.) вызывает трудности в связи с взаимозависимостью (мультиколлинеарности - эффекта МК) коэффициентов разложения. Отметим, что в более ранних работах для характеристики рельефа на обратной стороне Луны применялось «зеркальное» отображение объектов видимой стороны. Такой подход, безусловно, не может быть использован для описания рельефа отдельных участков, размеры которых меньше полусферы. В настоящей работе предлагается способ оценивания амплитуд модели (1.4.1) согласно заранее проделанной процедуре - расширения исследуемой области до полной сферы. Данный способ оценивания позволяет окончательно устранить эффект мультиколлинеарности. Далее, используя пошаговую регрессию возможно устранить шумовые гармоники.

1.6 Программные и информационные подходы для обработки селенографических данных

Следующим этапом анализа модели (1.4.1) по сферическим гармоникам является создание цифровой системы и определение значений положения центра фигуры относительно центра масс с помощью компьютерной программы АСНИ+.

АСНИ+ представляет собой автоматизированную систему научных исследований, первоначально разработанную в УлГТУ, и затем модернизированную при совместных исследованиях в направлении селенографического моделирования. Система АСНИ+ используется для анализа распределения различных параметров селенографических моделей, полей (гравитационного, магнитного, и т.д.) по всей лунной сфере и отдельных ее сегментах, основываясь на измерениях в точках с известными координатами. Представленный программный комплекс позволяет осуществить построение моделей аналогичных (1.4.1), и кроме того, вычислить сечения и изогипсы для лунного макрорельефа. Причем, все рабочие варианты выполнены в трехмерном представлении. Имеется возможность для оценивания качества и достоверности соблюдения вычислительных процедур метода наименьших квадратов и выполнения необходимых условий (1.4.1). Если данные условия нарушаются, автоматически применяется вынужденный алгоритм адаптации полученных результатов.

В настоящее время существуют специализированные пакеты программных продуктов (ППП), ориентированные на обработку данных методами математической статистики. Но, к сожалению,

большинство ППП не реализуют решение целевых задач астрономии (планетодезии и небесной механики) как в программном смысле (по количеству неиспользованных модулей и по объему машинной памяти), так и в математическом подходе (скудное "меню" по модулям, обеспечивающим разнообразие восстанавливающих функций, методов поиска и т.д.). Иначе говоря, ценность таких ППП в планетологии невелика, ведь они не позволяют решать широкий круг задач в данной предметной области. Хотя пакеты программных продуктов имеют достаточные сервисные удобства для пользователя.

АСНИ+ позволяет решать нормальные и избыточные (переопределенные) системы линейных алгебраических уравнений. Решение последних - есть решение МНК. Результаты представляют собой - оценку неизвестных параметров, их стандартные ошибки, элементы корреляционной матрицы, внутренние меры качества, с помощью которых анализируется модель в целом, внешние меры, выявляющие степень адекватности модели при использовании ее для прогноза. Кроме того, программа содержит процедуру поиска оптимальной структуры модели. Вводятся модули для осуществления подхода регрессионного моделирования (РМ), обеспечивающие проверку основных предположений регрессионного анализа (РА) (модули построения различных графиков, вычисления авторегрессии, проверка нормальности распределения, и т.д.). Применяется набор модулей для альтернативных МНК методов оценивания (гребневое оценивание, робастные методы), можно осуществить адаптацию к нарушению условий.

Возможности АСНИ+ при работе в штатном режиме модели следующие:

- построение моделей в виде разложения по сферическим функциям n - го порядка и i - ой степени;
- использование методов структурной идентификации;
- автоматизация процесса обработки при разнообразных порядках разложения;
- проверка выполнения регрессионного анализа, построение и анализ графиков "остаток-регрессор", «остаток-отклик»;
- проверка выполнения предположения о нормальном распределении нормированных остатков;
- определение автокорреляции остатков по критерию Дарбина-Уотсона;
- защита от непредусмотренных попыток ее применения;
- поддержка дружественного предметно - ориентированного интерфейса для пользователя.

АСНИ+ позволяет описывать потенциальные поля (аномалий силы тяжести, характеристик почвы, магнитного поля и т.д.) на различных поверхностных сегментах. Разложения по сферическим функциям с расширением до полной сферы и различными свойствами позволяет активно использовать АСНИ+ для сегментов земной поверхности. Практическая точность описания и прогнозирования АСНИ+ составляет от 40% и выше.

1.7 Результаты определения вектора смещения центра фигуры Луны относительно ее центра масс

По данным космических миссий «Clementine», «Kaguya», «LRO» и каталогов координатных положений лунных кратеров (данные представлены в двух видах: координаты объектов видимой стороны Луны и в виде списка координат объектов всей сферы) на основе гармонических разложений получены модели физической поверхности Луны. В таблице 1.7.1 указаны величины нормированных коэффициентов разложения первого порядка для пяти источников гипсометрической информации, а также стандартные среднеквадратичные ошибки (СКО).

В первом столбце приводятся значения степени n и порядка m разложения (1.4.1). В столбцах 2, 3 приведены оценки амплитуд C_{nm} , S_{nm} для проекта «Clementine» (первой версии данных) для порядка разложения $N=40$ и их соответствующие среднеквадратичные ошибки; в столбцах 4, 5 - для казанского каталога (последняя версия) при $N=5$; в столбцах 6, 7 – для расширенного варианта киевского каталога при $N=5$; в столбцах 8, 9 и 10, 11 – для казанского и киевского каталога при $N=5$ с включением недостающей характеристики по остальной части сферы из списка «Clementine». Поправки к принятому среднему радиусу Луны (\bar{c}_{00}) содержатся в строке «0,0».

Таблица 1.7.2 имеет подобную структуру, что и таблица 1.7.1. Авторские источники позволили использовать значения амплитуд

гармоник. Скорректированные радиусы расположены в строке «0,0»; в остальном – все значения однотипного назначения, как в таблице 1.7.1.

Можно проанализировать вычисленные амплитуды гармоник с имеющимися и новыми данными, которые были получены благодаря уточнению первой версии данных проекта «Clementine» в виде каталога «ULCN-2005» и по данным проекта «Kaguya».

Таблица 1.7.1 Нормированные коэффициенты первого порядка разложения функции рельефа Луны для пяти источников гипсометрической информации, км.

n, m	Clementine				Казань				Киев			
	\bar{C}	\bar{S}	σ_C	σ_S	\bar{C}	\bar{S}	σ_C	σ_S	\bar{C}	\bar{S}	σ_C	σ_S
1	2		3		4		5		6		7	
0,0	-0,83				-1,77				-0,68			
1,0	-0,37		$\pm 0,01$		0,23		$\pm 0,03$		0,10		$\pm 0,02$	
1,1	-1,04	-0,43	$\pm 0,01$	$\pm 0,01$	-0,16	0,48	$\pm 0,04$	$\pm 0,03$	0,08	0,27	$\pm 0,02$	$\pm 0,01$

n, m	Казань + Clementine				Киев + Clementine			
	\bar{C}	\bar{S}	σ_C	σ_S	\bar{C}	\bar{S}	σ_C	σ_S
1	8		9		10		11	
0,0	-0,87				-0,59			
1,0	0,09		$\pm 0,01$		0,20		$\pm 0,01$	
1,1	-0,86	-0,40	$\pm 0,02$	$\pm 0,01$	-0,54	-0,42	$\pm 0,01$	$\pm 0,01$

Таблица 1.7.2 Коэффициенты разложения для четырех источников, км.

n, m	ГАИШ		Bills, Ferrari		ULCN		KAGUYA	
	\bar{C}	\bar{S}	\bar{C}	\bar{S}	\bar{C}	\bar{S}	\bar{C}	\bar{S}
1	2		3		4		5	
0,0	1737,7		1737,53		1737,03		1737,16	
1,0	-1,18		-0,37		0,15		0,14	
1,1	-1,17	-0,04	-1,05	-0,26	-0,99	-0,42	-1,02	-0,45

В столбце 2 имеются значения амплитуд гармоник для показателя $N=8$; в столбце 3 для показателя $N=12$; в столбце 4 для показателя $N=359$; в столбце 5 для показателя $N=180$. Величины средних квадратических ошибок в таблице не приводятся.

Впоследствии, вычислены координаты центра фигуры относительно центра масс (таблицы 1.7.3, 1.7.4) по соотношениям (1.4.1) и данным таблиц 1.7.1, 1.7.2,.

Ошибки амплитуд в таблице 1 необходимо умножить на $\sqrt{3}$ для получения ошибок СКО.

Таблица 1.7.3 Координаты центра фигуры Луны относительно центра масс для пяти источников гипсометрической информации, км.

	Clementine	Казань	Киев	Казань + Clementine	Киев + Clementine
$\Delta\xi$	-1,80	-0,28	0,14	-1,49	-0,94
$\Delta\eta$	-0,74	0,83	0,47	-0,69	-0,73

$\Delta\xi$	-0,64	0,40	0,17	0,16	0,35
-------------	-------	------	------	------	------

Таблица 1.7.4 Координаты центра фигуры Луны относительно ее центра масс по четырем источникам, км.

	ГАИШ	Bills, Ferrari	ULCN 2005	KAGUYA
$\Delta\xi$	-2,03	-1,82	-1,71	-1,77
$\Delta\eta$	0,07	-0,45	-0,73	-0,78
$\Delta\zeta$	-2,04	-0,64	0,26	0,24

Из анализа результатов таблиц 1.7.3, 1.7.4 можно сделать вывод, что каталог «Казань-1162» при совместном использовании его с данными объектов миссии «Clementine», которые находятся вне зоны покрытия данного каталога, показывает хорошее согласие с результатами космических миссий «Clementine» и «Kaguya». Напомним, что каталог Казань-1162 построен для видимой стороны Луны и имеет координатные оси, лежащие в системе центра масс и главных осей инерции Луны.

Далее, амплитуды и смещения для каталога «ULCN-2005» (таблицы 1.7.2, 1.7.4) сравнительно близки к величинам совместного использования (Казань + Clementine; таблицы 1.7.1, 1.7.3), а не полученным непосредственно из данных миссии «Clementine». Следовательно, можно предположить, что, приведение первых измерений миссии «Clementine» к системе каталога «ULCN» имело отношение только к видимой стороне Луны.

Таким образом, каталог «Казань-1162» имеет систему отсчета координат, которая лежит в центре масс Луны, а принимая во внимание метод его построения, оси координат данного каталога априори совпадают с осями инерции Луны. Таким образом, каталог «Казань-1162» может с успехом использоваться для выполнения задач, решаемых в следующих разделах данного труда.

ГЛАВА 2

2.1 Краевая зона Луны и опорная селеноцентрическая сеть

Либрационная зона Луны до сих пор представляет собой недостаточно изученный в селеноцентрическом смысле район. В настоящее время имеются большие ряды измерений профилей краевой зоны Луны как гелиометрическими, так и фотографическими методами, а также по данным покрытий звезд Луной. При этом, в связи с тем, что соответствующие высоты были отсчитаны от совершенно произвольных нулевых поверхностей, они не используются в полной мере в селенодезических исследованиях. Конечно, достаточно информативными представляются карты Уоттса. Но система координат данных карт Уоттса не совпадает с фундаментальной небесной системой. Ключевая отличительная особенность карт краевой зоны «Казань», построенных на основе привязки лунных объектов к звездам абсолютным методом, заключается в следующем: поверхность отсчета неровностей лунного края отнесена к фундаментальной небесной системе координат, динамическому центру масс Луны и ее главным осям инерции.

В данной книге была осуществлена попытка построения каталога селеноцентрических опорных кратеров либрационной зоны Луны на основе использования карт объектов лунной поверхности и динамической модели краевой зоны Луны «Казань».

2.2 Краевая зоны Луны: селенографические модели

При создании модели краевой зоны Луны имеется основная проблема: как найти положение центра масс Луны относительно центра фигуры лунного диска. Ранее положение центра масс Луны определялось благодаря сравнению меридианных наблюдений или наблюдений покрытий с гравитационной теорией движения Луны. Еще Ганзен выяснил, что центр масс Луны не совпадает с центром ее видимой фигуры. Луна представляет собой геометрически неправильное и неоднородное тело, это и является причиной такого несовпадения. Особенно сильно влияют на смещение центра фигуры Луны к югу от центра масс местные возвышения на южном крае лунного диска. Также изменяется видимая величина полярного радиуса Луны из-за наличия оптической либрации, что также оказывает соответствующее влияние. А.А.Нефедьев использовал первую модель макрофигуры Луны А.А.Яковкина при исследованиях для определения системы отсчета данных. Модель А.А.Яковкина предполагает, что фигура Луны состоит из двух полусфер: южная полусфера является частью полуэллипса, а северная является окружностью постоянного радиуса R_0 , соответственно центр масс Луны совпадает с центром ее северного полушария. Координаты ξ

и η центра фигуры Луны относительно центра масс были определены согласно данной модели.

Построенные А.А.Нефедьевым карты согласуются со всеми требованиями качества, а именно:

- радиус вероятнейшей окружности, исправленный за неровности, не зависит от оптической либрации по широте и поправки широты Луны;

- отклонения от круга либрационной линии, вычисленной по меридианным наблюдениям и покрытиям звезд Луной и отредуцированных за неровности края по картам А.А.Нефедьева, уменьшились по абсолютной величине и имеют случайный характер.

Для всех других существующих карт краевой зоны Луны, учитывая, что высоты неровностей не отнесены к общей уровенной поверхности, эти условия не выполняются. Недостаточное количество наблюденных точек, для которых находились высоты неровностей (этого невозможно было избежать при использовании визуальных гелиометрических наблюдениях) является недостатком карт А.А.Нефедьева. Но при этом важнейшим достоинством является определение общей поверхности отсчета неровностей лунного края для всех наблюдений, которые были сделаны при различных либрациях.

Использование фотографических наблюдений Луны позволяет осуществить измерения для большого количества точек края. Необходимо отметить, что все измерения необходимо привести к

поверхности отсчета неровностей лунного края, например, к селеноиду.

А.А. Яковкин в 1934 году обнаружил зависимость радиуса Луны от либрации по широте. Вскоре это было подтверждено многими исследователями Луны. Выяснилось, что измеренные высоты неровностей лунного края, которые соответствуют различным либрациям, относятся к разным поверхностям отсчета, и по форме эллиптические, нежели сферические, а также смещены друг относительно друга.

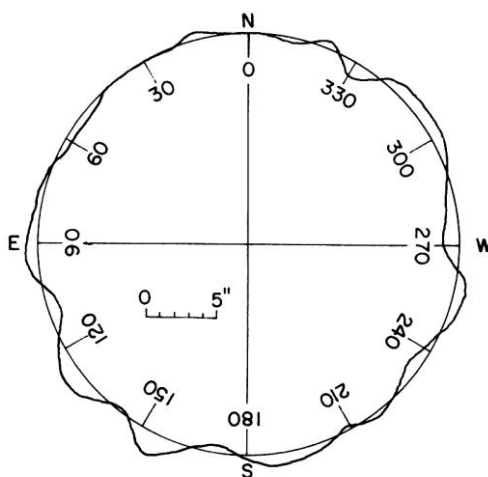


Рисунок 2.2.1 - Средний контур лунного диска.

Основная проблема при создании карт краевой зоны Луны сводится к созданию общей поверхности отсчета неровностей лунного края, причем не зависящая от оптических либраций. А.А.Нефедьевым такая задача была успешно решена.

Моррисон, анализируя результаты наблюдений касательных покрытий, установил, что применяя карты Уоттса нужно в аргумент карт - позиционный угол - внести поправку $-0^{\circ}25$ (то есть вычисленные позиционные углы увеличить на $0^{\circ}25$).

Японский астрономом Сома 1984 году выполнил анализ лунных покрытий за 1955 – 1980 годы, применяя данные новой эфемериды ELP 2000. Сома исследовал теорию движения Луны ELP 2000-82, построенной на основе лазерных наблюдений. Он определил точные значения постоянных в этой теории, оценивал точные значения приливного члена в средней долготе Луны и значения движения перигея и узла лунной орбиты.

Исследования Сома показали, что центр координат в картах Уоттса расположен впереди центра масс в направлении орбитального движения. Этот факт хорошо согласуется с результатами, полученными лазерной альтиметрией, проведенной миссиями «Аполлон», а также орбитальной и наземной фотограмметрией. Таким образом, Сома еще раз подтвердил тот факт, что на основе редукции наблюдений покрытий звезд Луной можно получать достоверные и важные результаты.

Параметры рельефа лунной поверхности возможно получить при наличии селенодезических каталогов и карт краевой зоны Луны. Создание селенодезических опорных сетей как видимой, так и обратной сторон Луны, построение точных моделей рельефа Луны является важнейшей задачей в исследованиях движения центра масс Луны в пространстве. Учитывая этот факт, в АОЭ К(П)ФУ было принято решение построить карты краевой зоны Луны «Казань» принципиально новым способом. Основой способа является получение из наблюдений крупномасштабных снимков Луны со звездами. В этом случае поверхность отсчета неровностей лунного

края отнесена к фундаментальной небесной системе координат, то есть к главным осям инерции Луны и ее динамическому центру масс, что существенно отличается от карт, построенных ранее.

С использованием измерителя астронегативов «Аскорекорд» возможно измерять от 290 до 360 точек края диска Луны ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) и в настоящее время проводятся работы по оцифровке лунных астронегативов, что позволит увеличить это число на несколько порядков. В итоге для построения карт краевой зоны использовалось более 40000 измерений. Редукция измерений происходила следующим образом:

Пусть x, y - измеренные координаты фотографических изображений точек лимба Луны. Тогда их стандартные координаты будут иметь вид:

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.1)$$

Здесь a, b, c, d, e, f - постоянные пластинки. По стандартным координатам X, Y определяются полярные координаты θ, ρ измеренных точек лимба относительно эфемеридных положений центра масс Луны:

$$\tan \theta_i = \Delta X_i / \Delta Y_i, \rho = \sqrt{\Delta X_i^2 + \Delta Y_i^2}, \quad (2.2.2)$$

где $\Delta X_i = X_i - X_C$, $\Delta Y_i = Y_i - Y_C$, $X_C = (\alpha'_C - \alpha_0)$, $Y_C = (\delta'_C - \delta_0)$, α_0, δ_0 - координаты оптического центра снимков, α'_C, δ'_C - топоцентрические эфемеридные координаты Луны согласно теории ее движения DE200/LE200.

Радиус – вектор ρ можно представить в виде суммы $\rho_i = R'_C + H'_i$, где R'_C - топоцентрический эфемеридный радиус Луны, и H'_i - превышение точек краевой зоны над сферой с радиусом R'_C . Значения H'_i необходимо привести к среднему расстоянию от Земли до Луны с использованием следующего выражения: $H_i = (932.58'' / R'_C) \times H'_i$.

Затем вычисляются гайновские координаты P, D для каждой измеренной точки на снимках, с учетом влияния физической либрации Луны по таблицам Мигус. В итоге по координатам P, D для более 40000 точек были построены карты краевой зоны Луны в графическом виде и в дальнейшем переведенные в цифровую форму.

Современные карты поверхности Луны охватывают как либрационную зону, так и всю лунную сферу. В 1967 г. под руководством Ю.Н. Липского была издана «Полная карта Луны» (ГАИШ МГУ), представляющая первую карту, которая покрывала 95% поверхности Луны. На основе фотографий и снимков космических миссий «Луна-3» и «Зонд-3» была построена карта в масштабе 1:5000000. Приполярные области данной карты имеют азимутальную проекцию в масштабе 1:10000000, а область между параллелями $\pm 60^\circ$ произвольную цилиндрическую проекцию. Вследствие того, что раньше отсутствовало достаточное количество

данных по широтам выше $\pm 60^\circ$, возникло определенное ограничение по широте. Расчеты показали, что в произвольной цилиндрической проекции для широт заключенных в диапазоне $\pm 50^\circ$ искажения углов проекции составляет не более $\pm 5^\circ$, на широтах $\pm 60^\circ$ угловые искажения меньше чем 14° , причем непосредственно области типа лунных морей имеют искажения гораздо меньшей величины. В 1969 году была издана следующая версия карты на основе данных космической миссии «Lunar Reconnaissance Orbiter». Предпринята попытка трансформации системы координат снимков обратной стороны Луны в единую, как и у видимой полусферы Луны, систему селенографических координат.

В 1979 г. Была построена карта на основе данных космических миссий «Apollo». Это была третья улучшенная версия «Полной карты Луны». Отображение рельефа с кратерами с прорисованной структуры дна, цепочки кратеров, лунные моря, лучевые образования, физические особенностей кратеров на лунной поверхности (малая глубина дна кратера по сравнению с его диаметром, малая крутизна внешнего склона по сравнению с внутренним, небольшая глубина кратерного вала в сравнении с его глубиной) заняли ключевые положения при разработке лунных карт третьего поколения.

В 2008 году на основе данных космического спутника «Kaguya» была сформирована «Топографическая карта Луны» (ТКЛ). Абсолютные высоты объектов и точек лунной поверхности определены значительно точнее, чем в предыдущих исследованиях,

что является значительным преимуществом. Тем не менее, как и у всех «космических» карт, в «Топографической карте Луны» отсутствует определенная система отсчета координат и соответствующая координатная сетка, а также отсутствуют данные отождествления большинства объектов лунных образований.

В 2012 году появилась «космическая» карта, построенная по данным китайской космической программы Chinese Lunar Exploration Program. Китайская космическая программа (Китайское национальное космическое агентство (CNSA)) ориентирована на роботическое освоение Луны, реализацию на ней обитаемых баз. Карта представлена в форме глобальной цифровой модели рельефа Луны и имеет те же недостатки, как и японский вариант карты.

Германский аэрокосмический центр представил трёхмерную модель Луны «Карта GLD 100» (Global Lunar Digital Terrain Model). Данная карта была построена по данным космической миссии LRO и охватывает 98% поверхности Луны. На карте высоты приведены с шагом 100 метров. Применение лазерного высотного сканера, установленного на космическом спутнике LRO, позволило осуществить дополнительную проверку точности представленных на карте высотных данных.

2.3 Система координат Гайна

Селенографическая система координат Гайна (P и D) была использована в настоящей работе при моделировании краевой зоны

Луны. Графически система координат Гайна показана на рисунке 2.3.1. Положительным полюсом является точка пересечения нулевого меридиана с лунным экватором, координата D положительно отсчитывается по направлению к Земле. Если необходимо осуществить переход от селенографических координат к координатам Гайна применяется вспомогательная сфера, которая имеет центр в центре масс Луны. Точка Z – представляет собой видимую середину лунного диска; N' является северным полюсом Луны; C - позиционный угол дуги большого круга ZN' . В точке Z находится полюс большого круга O_1NE . Кроме того, полюс этого большого круга параллелен видимому краю Луны. Точка O является исследуемой точкой. В точке O_1 происходит пересечение круга O_1NE большим кругом, который проходит через центр Z и наблюдаемую точку O .

Началом счета долгот на лунном экваторе AE является точка A . Существует большой круг $N'ZB$, где $AB = \lambda_0, BZ = \beta_0$. Точка O_1 находится недалеко от точки O и расположена на невидимой стороне Луны. Угол $N'ZO_1 = \Pi = p_0 - C$, угол $N'ZA = \chi$ и угол $N'AZ = \varphi$.

При создании моделей либрационной зоны Луны использование Гайновской координатной системы P и D предпочтительно из соображений простоты и наглядности. В связи с этим, именно Гайновская координатная система является основой большинства карт краевой зоны Луны.

Луны в долготе, широте и позиционном угле l'', b'', C'' .

$$\begin{aligned}
 \sin b'' &= -\sin \delta' \cos i + \cos \delta' \sin i \sin(\alpha' - \Omega'), \\
 \cos b'' \sin(l'' + \phi - 180^0) &= -\sin i \sin \delta' - \cos i \cos \delta' \sin(\alpha' - \Omega'), \\
 \cos b'' \cos(l'' + \phi - 180^0) &= -\cos \delta' \cos(\alpha' - \Omega'), \\
 \cos b'' \sin C'' &= \sin i \cos(\alpha' - \Omega'), \\
 \sin C'' &= \sin i \cos(l'' + \phi - 180^0) \sec \delta',
 \end{aligned}
 \tag{2.3.2}$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned}
 \sin P \cos D &= \sin \Pi \cos l'' \cos R' \\
 &+ \cos \Pi \sin l'' \cos R' \sin b'' - \sin l'' \cos b'' \sin R', \\
 \cos P \cos D &= \cos \Pi \cos b'' + \sin b'' \sin R', \\
 \sin D &= \cos l'' \cos b'' \sin R' - \sin \Pi \cos l'' \sin b'' + \sin \Pi \sin l'',
 \end{aligned}
 \tag{2.3.3}$$

где $\Pi = \theta_*' - C''$. В итоге определяются координаты P, D для исследуемой точки на поверхности Луны.

2.4 Либрационная зона Луны: каталог объектов

Проблема привязки координатных систем обратной стороны Луны, полученных из космических миссий, и селенографических сетей, построенных на видимой стороне Луны, является актуальной и по сей день. Опорная сеть, построенная в либрационной зоне Луны, может быть основой для связи перечисленных координатных систем. При решении задачи привязки возникают определенные трудности: для космических наблюдений из-за неизвестной ориентации поверхности отсчета, а для наземных наблюдений сложно определить координаты кратера в либрационной зоне вследствие отсутствия

стереоэффекта между перекрывающимися снимками. В данной книге демонстрируется попытка решения этой проблемы.

Существуют несколько основных этапов метода построения опорного селенодезического каталога объектов в либрационной зоне:

- приведение изогипс карт Уоттса с поправками Моррисона к системе карт «Казань» в электронном виде;
- отождествление кратеров на картах краевой зоны с использованием «Полной карты Луны», и уточнение их положений;
- определение уточненных координат кратеров в системе гайновских координат с использованием динамических карт либрационной зоны, применяя программный пакет MAPS;
- вычисление прямоугольных координат опорных объектов и анализ их точности.

Применяя метод решения обратной задачи по привязке были получены предварительные координаты кратеров. Они, в свою очередь, были найдены на основе отождествления объектов на картах краевой зоны и топографических картах лунной поверхности. Используя координаты объекта на картах, определялись его координаты P, D, ρ по формуле:

$$\begin{pmatrix} \rho_0 \sin D_0 \\ -\rho_0 \cos D_0 \sin P_0 \\ \rho_0 \cos D_0 \cos P_0 \end{pmatrix} = R_m \begin{pmatrix} \sin \lambda_m \cos \beta_m \\ \sin \beta_m \\ \cos \lambda_m \cos \beta_m \end{pmatrix} \quad (2.4.1)$$

где ρ_0 - приближенный селеноцентрический радиус - вектор точки лунной поверхности, $R_m, \lambda_m, \varphi_m$ соответственно радиус-вектор, селенографические долгота и широта отождествленной точки.

Данные карт были внесены в электронную базу данных согласно их координатам P и D , далее была создана электронная модель карт «Казань». Точки с явными ошибочными значениями исключались. Полученные в результате данные сравнивались с высотами неровностей лунного края на картах Уоттса. При этом в картах Уоттса были учтены все поправки, полученные Моррисоном и Аплеби для приведения их системы координат к центру масс Луны. Данное исследование выявило хорошее согласие высот неровностей лунного края на картах Уоттса, исправленных поправками Моррисона, и картой «Казань». Причем, не было обнаружено в картах «Казань» ни одного явно ошибочного значения высоты.

Вычисления гайновских координат P, D происходит с целью нахождения поправок за неровности лунного края. При интерполяции данных с карт Уоттса в машинно - читаемом виде Моррисон вынужден был исправлять позиционный угол и следить за наклоном лунного экватора. Никаких дополнительных поправок в случае карт «Казань» вносить не требуется.

Подпрограмма интерполяции данных с карт «Казань» выполнена на языке Фортран. Сначала восстанавливаются с диска данные для всех точек неровностей лунного края. Эти точки входят в границы интерполяционного круга, центром которого является точка на лунной поверхности, для которой определяется поправка за неровность

лунного края. Радиус круга зависит от равномерности распределения и плотности данных карт «Казань» вокруг исследуемой точки. Интерполяционный круг делится равномерно на двадцать четыре сегмента. За нахождение в каждом сегменте ближайшей к центру круга точку карт отвечает специальная подпрограмма. Далее вычисляются высотные характеристики.

Целесообразно применять метод интерполяции данных с карт краевой зоны Луны в машинном виде, который является подобным методу, предложенным Мартином и Моррисоном, но с определенными изменениями. Каждой точке карты соответствует высота h_k и ее расстояние от центра интерполяционного круга d_k . Значения высот точек h_k и расстояний d_k этих точек ($k = 1, 2, 3, \dots, m$) используется для определения интерполируемой высоты - H_j исследуемой точки по формуле:

$$H_j = \sum_{k=1}^m (P_k (h_k / d_k)) / \sum (1 / d_k), \quad (2.4.2)$$

где k берется в зависимости от количества точек в сегментах, а P_k - вес определения H_j исследуемой точки, который зависит от расположения точки карт в сегментах.

Представленный метод "взвешивания" дает возможность оценить высоту необходимой исследуемой точки в пределах ошибки ± 0.1 ". В процессе интерполяции участвуют все данные цифровых карт в пределах интерполяционного круга. Вес будет меньше, если

расстояние больше от исследуемой точки до цифровой точки карт «Казань».

Данный метод удобен в применении и использует небольшое число исходных цифровых точек. Кроме того, отпадает необходимость в осуществлении дополнительных вычислений и построений непосредственно в самих картах.

На основе карт «Казань» необходимо предварительно вычислить плановые координаты центров искомых объектов. Затем определить высотные характеристики заданных точек, и только потом вычислить радиусы - векторы объектов. С этой целью был создан программный пакет MAPS для нахождения уточненных плановых координат и высот исследуемых кратеров. На основе программного пакета MAPS строилась модель исследуемого участка в либрационной зоне с использованием методов гармонического анализа. Далее, необходимо выбирать исследуемый объект, с помощью программных средств MAPS разместить в место расположения этого объекта эллипс так, чтобы он визуалью достаточно хорошо вписывался в границы кратера, при этом изменяя его размеры и положение на модели. Только после того, как геометрический центр эллипса задавался точным положением исследуемого объекта, были определены точные гайновские координаты кратера и его высота. Прямоугольные координаты определялись по формуле:

$$\begin{pmatrix} \xi_K \\ \eta_K \\ \zeta_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_k \sin D_k \\ -\rho_k \cos D_k \sin P_k \\ \rho_k \cos D_k \cos P_k \end{pmatrix}, \quad (2.4.3)$$

где ξ_K, η_K, ζ_K - прямоугольные координаты объектов в либрационной зоне Луны.

На данный момент создана опорная селеноцентрическая сеть кратеров либрационной зоны Луны. Данные кратеры расположены равномерно относительно лунного лимба, селеноцентрическая сеть построена в системе центра масс и главных осей инерции Луны. В таблице 2.4.1. представлены прямоугольные координаты некоторых этих кратеров.

В таблице первый столбец характеризует номер по порядку, далее располагаются прямоугольные селеноцентрические координаты кратера ξ_K, η_K, ζ_K в долях радиуса Луны и затем его селенографические долгота и широта λ_k, φ_k в градусах и радиус-вектор H_K в километрах, средний радиус Луны при вычислениях принят равным 1738.1 км.

Сравнительный анализ вычисленных данных показал, что координаты кратеров по значениям радиусов-векторов карт «Казань» и полученными миссиями «Kaguya» и «Clementine», имеют хорошее согласие.

Таблица 2.4.1 Прямоугольные координаты объектов либрационной зоны Луны

N π/π	ξ_K	η_K	ζ_K	λ_K	φ_K	H_K
1	0.56791	0.78234	0.25213	66.06	51.54	1736.5
2	0.62688	0.72582	0.27826	66.06	46.62	1735.7
3	0.62250	0.73011	0.27644	66.05	46.98	1735.5
4	0.63555	0.73262	0.23999	69.31	47.16	1736.6
5	0.68287	0.72879	-0.03232	92.71	46.83	1736.8
6	0.68495	0.72272	-0.07804	96.50	46.35	1736.0
7	0.76860	0.62317	-0.13514	99.97	38.60	1735.8
8	0.77537	0.60804	-0.15867	101.56	37.53	1734.7
9	0.82127	0.56046	-0.09533	96.62	34.13	1736.1
10	0.91776	0.39148	-0.04875	93.04	23.07	1736.3
11	0.92140	0.38586	0.03119	88.06	22.71	1737.1
12	0.90977	0.40245	0.09703	83.91	23.74	1737.3
13	0.95007	0.29158	0.09611	84.22	16.98	1735.4
14	0.95520	0.28873	0.03667	87.80	16.80	1735.6
15	0.97796	-0.16667	0.12102	82.94	-9.60	1737.1
16	0.96243	-0.26079	-0.06993	94.15	-15.12	1737.4
17	0.95288	-0.30178	0.00245	89.85	-17.57	1737.3
18	0.94770	-0.30658	-0.07146	94.31	-17.87	1735.7
19	0.83549	-0.54322	0.07551	84.83	-32.92	1737.1
20	0.70331	-0.70343	0.10480	81.52	-44.69	1738.5
21	0.73510	-0.67697	0.02520	88.03	-42.62	1737.5

22	0.69239	-0.71992	0.03551	87.06	-46.07	1737.2
23	0.51303	-0.84419	0.14695	74.01	-57.70	1735.9
24	0.69838	0.71445	0.02094	88.28	45.63	1736.9
25	0.71372	0.69818	-0.03909	93.13	44.32	1736.7
26	0.84598	0.53007	0.04545	86.92	32.03	1737.0
27	0.87857	0.45105	0.15663	79.89	26.81	1738.0
28	0.87712	0.40351	0.25844	73.58	23.81	1737.2
29	0.91931	0.38983	0.04437	87.23	22.95	1737.3
30	0.93882	0.30665	-0.15153	99.16	17.87	1736.7
31	0.98456	0.04733	0.17220	80.07	2.71	1739.2
32	0.99114	-0.08071	-0.09263	95.33	-4.63	1735.9
33	0.99125	-0.12307	-0.02542	91.46	-7.07	1736.7
34	0.96312	-0.26318	-0.04168	92.47	-15.27	1736.9
35	0.94350	-0.31086	-0.10641	96.43	-18.12	1736.5
36	0.76257	-0.64475	0.06617	85.04	-40.10	1739.5
37	0.77755	-0.62329	-0.06448	94.74	-38.62	1735.7
38	0.67657	-0.69990	0.22861	71.33	-44.42	1738.0
39	0.61108	-0.78605	0.07847	82.68	-51.91	1735.9
40	0.60855	-0.78958	0.07039	83.40	-52.19	1737.0

ГЛАВА 3

3.1 Опорный каталог объектов на поверхности Луны в небесной системе координат. Селенографические каталоги лунных объектов

Анализ каталогов Шрутка - Рехтештамм 1, Шрутка - Рехтештамм 2, Болдуин, ГАО АН УССР, AMS, ACJS, Миллса, был выполнен Никоновым В. и Скобелевой Т. по оценке средней квадратичной ошибки ε_b высот ближайших точек на равнинной поверхности по отношению к средним ошибкам ε_a . Критерии малости ε_b и ε_a , и наилучшего совпадения ε_b и ε_a определяют надежность селенодезических систем. Анализ исследований выявил, что достаточную надежность проявляет каталог Миллса, далее ACJS, затем AMS. Исследования показали, что точность определения положений центров селенодезических каталогов на порядок выше точности определения высот. Этот факт стал основополагающим для приведения различных каталогов к единому центру со средней квадратичной ошибкой в три раза меньше ошибки непосредственных определений координат в исходных селенодезических системах.

Сводный каталог, состоящий из 2580 точек, у которого присутствовал аналогичный эффект, был создан в ГАО АН УССР. Начало координат определили на основе наблюдений с космических аппаратов «ЛУНА 10» и «Lunar Orbiter», а вот ориентацию осей и масштаб системы данного каталога определили по каталогу «Артура». В.Кислюком был выполнен анализ лунных снимков КА «Зонд-8».

Выяснилось, что система астрофотографий реализуется достаточно надежно, поправки к высотам некоторых кратеров имеют большие значения, что показывает равенство средних уровней по участкам до и после уточнения.

Каталог из 4900 точек (ГАО АН УССР) является продолжением каталога 2580 точек. Данный каталог обладает следующими преимуществами: 1) увеличено число объектов каталога; 2) уточнены положение начала системы координат и ориентации каталога по результатам лазерной альтиметрии лунной поверхности с борта КК «Аполлон-15» и «Аполлон-16».

При создании Единой системы селенодезических координат реализован иной подход (ГАИШ МГУ). Все каталоги (их девять), были приведены к единой ориентации координатных осей и единому центру. Заметим, что Единую систему селенодезических координат образуют отдельные каталоги в двух комбинациях: координаты, отнесенные к центру масс и координаты, отнесенные к центру фигуры. Применение данного метода было оправдано на данном этапе создания опорных селенодезических сетей.

Актуальной стала задача по созданию опорных лунных сетей, у которых определение начала координат и ориентации системы координат селенодезического каталога абсолютно независимо от других систем. Первым автором такой работы является К. Шакиров. Его заслуга заключается в обработке гринвичских меридианных наблюдений кратера Местинг А и получение положения кратера в системе эфемеридного центра масс Луны. Таким образом, было

впервые найдено взаимное положение центра масс Луны (ЦМЛ) относительно центра ее фигуры (ЦФЛ). Но результаты, полученные К.Шакировым, не имеют согласования с новейшими представлениями о положении, так как при редукциях была использована теория движения Луны Брауна.

Внимания заслуживают работы С.Валеева по созданию независимых опорных сетей точек видимой стороны Луны. С.Валеев создал независимую селенодезическую сеть на основе 13 крупномасштабных снимков Луны со звездами, состоящую из 30 лунных кратеров. Независимое определение масштаба и ориентации фотопластинок по звездам дало возможность вычислить координаты кратеров в системе эфемеридного центра масс. Тем не менее, предложенная С.Валеевым селенодезическая сеть не обладает достаточной точностью координатных положений лунных кратеров вследствие ограниченного количества астрофотографий.

Прогрессом в создании независимых селенодезических опорных сетей, основанных на наземных наблюдениях, стал метод фотографирования Луны одновременно со звездами на отдельные фотопластинки, при этом применялся длиннофокусный горизонтальный телескопа с целостатом. Был создан специальный метод для привязки одной пластинки к другой. Привязка осуществлялась на основе фотограмметрического перехода от системы звездной пластинки к лунной системе с помощью световых меток. Вскоре казанскими исследователями был создан каталог на абсолютной основе, состоящий из 264 лунных объектов. Ошибки

плановых координат лунных объектов составили около $\pm 20 \times 10^{-5} R_C$, а ошибка значения координаты направленной к Земле примерно в три раза больше. Выяснилось, что реализуемая система координат каталога соответствует динамической системе.

Относительно селенодезических каталогов, построенных на основе космических наблюдений можно сказать следующее. Запуск пяти астрофотографических спутников «Лунар Орбитер 1-5» позволили получить 6000 снимков почти всей поверхности Луны. Отметим, однако, что точность полученной в итоге информации оказалась достаточно низкая для проведения значительного селенодезического анализа.

В дальнейшем данные полученные космической миссией «Аполло» позволили построить первый космический каталог – каталог Шимермана. С борта корабля специальной метрической камерой одновременно фотографировались поверхность Луны и звездное поле. Кроме этого, производилась лазерная альтиметрия фотографируемых участков. Фотографические и лазерные наблюдения Луны были приведены в единую систему фотограмметрическими методами обработки. Затем были получены координаты лунных объектов в системе центра масс Луны. Сравнительный анализ баллистических орбитальных эфемерид, лунные гравитационные и либрационные модели позволили определить координаты объектов на Луне. Тем не менее, описанная опорная сеть покрывает лишь 10% лунной поверхности (полоса шириной 150 - 500 км., простирающаяся по долготе от 60° с запада до 70° на восток в экваториальной зоне).

Расчетная точность координат составляет 20 - 40 метров по высоте и ± 300 метров в плановых координатах. Вопрос, связанный с точностью ориентации осей системы координат относительно лунных осей инерции и сдвиг ее по отношению к центру масс Луны остается не ясным.

Следует также отметить, что исследование обратной стороны Луны с помощью космических спутников «Зонд-6» и «Зонд-8» позволили обнаружить обширную низменность. А на основе данных КК «Аполлон-11» был построен профиль рельефа восточного сегмента лунного диска.

Следующим этапом стало создание опорной сети на видимой полусфере Луны, содержащая 1166 объектов. Данная сеть была получена на основе наблюдений космических аппаратов «Lunar Orbiter», «Apollo 15», «Apollo 16», «Apollo 17» и космических спутников «Зонд 6», «Зонд 8». Целью работы являлось создание единой согласованной опорной сети на основе всех источников данных.

Опорные сети DMA/A 15, NOS/USGS, и DMA/603 были созданы по результатам программы «Apollo». Определение параметров перемещения, вращения и изменения масштаба длин позволило трансформировать каждую из этих сетей на систему координат, основанную на положениях трех станций ALSEP.

Для DMA/603 среднеквадратичная ошибка составляет 58 м., для DMA/A15 – 73 м., для NOS/USGS – 76 м.

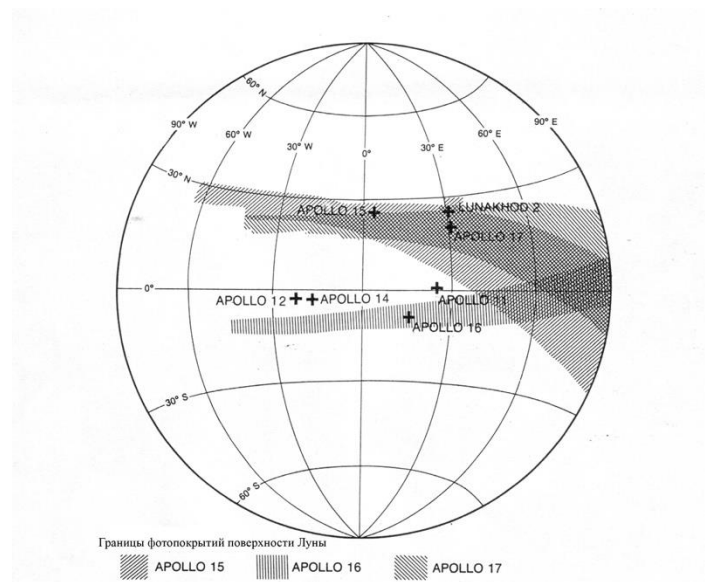


Рисунок 3.1.1 Границы области фотосъемки поверхности Луны миссии «Apollo»

Для DMA/603 среднее смещение координат ALSEP составило 308 м., для DMA/A 15 – 333м., для NOS/USGS – 2110 м. Координаты самих точек часто значительно отличались, хотя все три опорных сети были получены по одним и тем же измерениям и для одних и тех же точек. После произведения некоторых преобразований, координаты оказались определенным образом сопоставимыми. Общие точки для DMA/A 15 и NOS/USGS составляют 3791 точек. До преобразования средний сдвиг координат был равен 1995 м., после преобразования - 334 м. Количество общих точек для DMA/A 15 и DMA/603 составляет 4284; среднее различие координат до преобразования равно 340 м., после - 300 м. Количество общих точек NOS/USGS и DMA/603 равно 2624; средний сдвиг до преобразования 2140м., после - 274м.

Одной из современных лунных глобальных координационных систем является «ULCN 2005» - The Unified Lunar Control Network 2005. «ULCN 2005» представляет фотограмметрическую сеть,

имеющую расширенную опорную сеть, основанную на космических наблюдениях. Количество объектов, входящих в «ULCN 2005», составляет 272931 точек лунной поверхности. Кроме того, имеются значения 3D положений этих точек и исправления углов камеры «Clementine» для 43 866 снимков. Вычисления показывают, что самая большая невязка составляет 6,4 пикселей, а средняя квадратичная ошибка составляет $\pm 0,9$ пикселя в плоскости снимка.

Данные миссий «Clementine» (опорная сеть CLCN), «Apollon», «Mariner 10», и «Galileo» позволили создать исходный вариант опорной сети «ULCN 2005». Отметим, что «Galileo» имеет хороший количественный состав и хорошую точность представленных данных. С целью определения геометрических параметров для карты «Base Clementine» и была сформирована «CLCN». Полученные параметры также были необходимы для создания «Clementine UVVIS» (цифровой модели изображений) и глобальной мультиспектральной инфракрасной карты Луны миссии «Clementine». В итоге были реализованы планы для создания улучшенной системы «ULCN» при объединении этих двух сетей. Результатом явилась крупнейшая фотограмметрическая опорная сеть.

Попытка нахождения решения для системы отсчета радиусов-векторов контрольных точек является ключевым отличием «ULCN 2005» от ранних вариантов космических селенодезических сетей. Данное преимущество позволяет исключить возможные искажения горизонтальных положений (порядка 7 км. в среднем и до 15 км. и более), которые присутствовали в «CLCN», в первую очередь в связи

с тем, что положения опорных точек в «CLCN» ограничиваются поверхностью сферы радиуса 1736,7 км. Это стало возможным к осуществлению, так как из перекрытия снимков миссии «Clementine» действительно можно извлечь стерео информацию. Данный вид информации позволяет получить точность порядка нескольких сотен метров, и эти данные, как показал анализ, совместимы с высотными данными «Clementine LIDAR». Но существует средняя абсолютная разница между «ULCN 2005» и «LIDAR», которая составляет 700 м. Эта разница оказалась больше, чем предполагалось, но, тем не менее, определено, что радиусы-векторы при этом «восстанавливаются», достигая в результате достаточно хорошей точности реальных значений. «ULCN 2005» является достаточно полной селенографической моделью, с точностью подобной системе «LIDAR», за исключением некоторых ограниченных областей на поверхности Луны. 3D-система полно и абсолютно определяет значения по радиусам-векторам каталожных точек, входящих в «ULCN 2005». Таким образом, данная сеть является одним из единственных источников лунной топографической информации, где плановые положения объектов и высоты приведены в общую единую систему. Еще одной особенностью «ULCN 2005» является введение ограничений на все значения ракурсов камеры, используемых в ходе миссии, примерно с точностью $\pm 0,03^\circ$. Применялось ограничение 1° . Такая ситуация дает возможность получать улучшенные плановые координаты (и, таким способом, повышает точность и по высотным характеристикам), так как средние значения амплитуды высоты

составляют 640 м, то предполагаемая точность в плановых положениях (в связи с ограничением точности $\pm 0,03^\circ$) равна 335 метров. Учитывая, что 99% углов ориентации изменяется менее чем на $0,45^\circ$, а высотные данные 640 м, можно предположить, что даже если бы априорно углы были идеальными, максимальные горизонтальные ошибки составили бы 5,1 м. Это предполагает, что положения космического корабля являются идеальными. Очевидно, что это не так, но приведенные ошибки положения орбиты (особенно, в радиальном направлении) составляют порядка 100 м, которые, при увеличении ошибки местоположения с RSS (root sum square – квадратный корень из суммы квадратов), по-прежнему вызовет дополнительные ошибки максимально на несколько сотен метров. Существует и третья отличительная черта: было рассчитано значительное количество исходных точек сети «ULCN» на снимках миссии «Clementine» и эти измерения включены в новую сеть «ULCN 2005» (1261 точек измерены, а 754 точки из них имели два или более измерений). Это позволило реализовать прямое трансформирование «ULCN» в систему «ULCN 2005» путем «взвешивания» точек сети «ULCN» соответствующим образом. Такая привязка к «ULCN» и использование данных миссии «Clementine» в системе отсчета ME (Mean Earth/polar axis system - система координат средняя Земля / полярная ось, где ось Z направлена по вектору среднего вращения лунного полюса, а вектор среднего направления на Землю лежит в плоскости нулевого меридиана) в итоге позволило привязать «ULCN 2005» к этой системе.

В настоящее время проводятся работы по внесению цифровых параметров данных миссии «Lunar Orbiter» в систему «ULCN 2005». Так же проводится усовершенствование «ULCN 2005» прямым использованием снимков миссий «Mariner 10», «Galileo» и «Lunar Orbiter» и стерео-снимков «Clementine». Также устанавливается взаимосвязь с абсолютными системами ALSEP и LLR. Система «ULCN 2005» будет в дальнейшем обновляться на основе использовании информации будущих космических лунных миссий.

Следует отметить, что большой вклад был внесен использованием лазерной альтиметрии Луны (ЛАЛ). Благодаря ЛАЛ были найдены: средний радиус экваториальной зоны 1737.7 км. и средний радиус лунного трехосного эллипсоида, который составляет также 1737.7 км.

Существующие методы определения рельефа Луны предполагают аппроксимацию набора измерений высот разложением в ряды по выборочным или сферическим функциям.

Основной вывод следующий: современные селенодезические сети не представляются равноточными по отдельным координатным осям и обладают эллипсоидальным распределением ошибок. Устранение этих недостатков возможно при использовании двух основных подходов: 1) стереофотограмметрии с достаточным базисом; 2) комбинированные данные, которые получены как наземными наблюдениями Луны, так с помощью космических аппаратов.

3.2 Селенографические системы координат

Плоскость среднего экватора Луны обычно используют как основную плоскость средней селеноцентрической системы координат $OXYZ$ (Рисунок 3.2.1). Отметим некоторые условия определения данной плоскости: наклон к эклиптике сохраняет постоянное значение I , долгота восходящего узла лунной орбиты равна долготе нисходящего узла на эклиптике в любой момент времени.

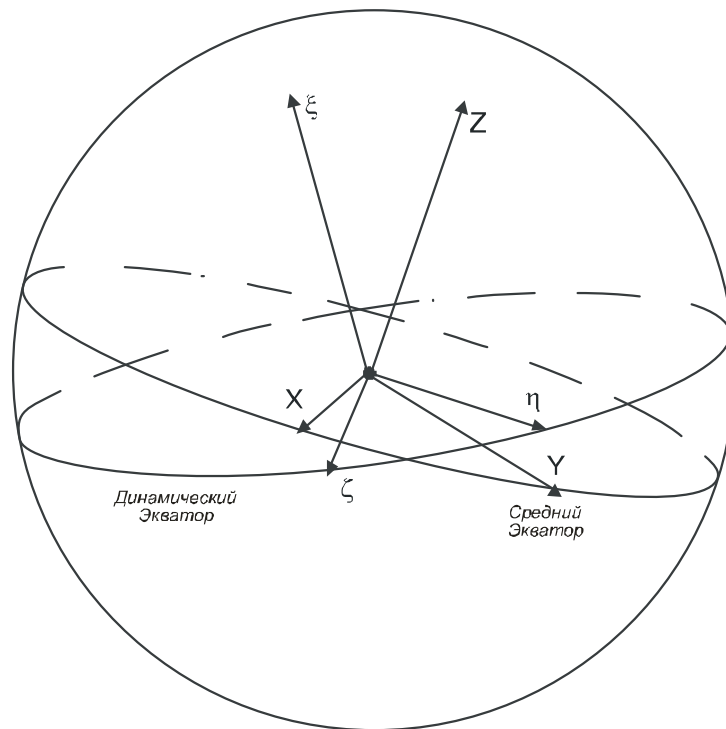


Рисунок 3.2.1 Селенографическая и селеноцентрическая системы координат

Ось OX совпадает с первым радиусом Луны, который получается в результате пересечения плоскости лунного меридиана и плоскости среднего экватора Луны, проведенной через центр масс Земли в момент, когда средняя долгота Луны равна долготе восходящего узла ее орбиты. Ось OZ перпендикулярна плоскости среднего экватора Луны и направлена к северу, ось OY лежит в основной плоскости и дополняет систему координат до правой (Рисунок 3.2.1).

Селенографическая система координат (СК) является динамической системой $O\xi\eta\zeta$, которая жестко связана с телом Луны. Иначе говоря, селенографическая СК определяется в виде системы осей инерции, для которой характерно: ось ζ направлена к Земле, ось ξ направлена к северному полюсу Луны, а ось η дополняет систему координат до правой. Таким образом, начало системы координат расположено в центре масс Луны, оси селенографической системы координат $O\xi\eta\zeta$ совпадают с главными осями эллипсоида инерции Луны.

На практике иногда реализуется квазидинамическая система координат. При создании большинства селенодезических каталогов как раз и получается именно квазидинамическая система координат. Особенности квазидинамической СК являются то, что центр системы совпадает с лунным центром масс, а оси совпадают с главными осями инерции Луны с точностью до постоянных членов при разложении физической либрации, что, как следствие, ведет к смещению ориентации осей квазидинамической системы по отношению к осям лунного эллипсоида инерции. Ситуация бывает обратной, все зависит от метода наблюдений.

На Рисунке 3.2.2 l, b являются селенографическими долготой и широтой Земли (или центра диска Луны, видимого из центра Земли). Они соответственно включают физическую и оптическую либрации Луны.

l', b' - оптическая либрация в широте и долготе Луны;

l'', b'' - физическая либрация в широте и долготе Луны;

P' - угол положения средней оси вращения Луны (угол между кругом склонений, проходящим через центр видимого диска Луны, и лунным меридианом, проходящим через ту же точку на орбите);

λ, β - видимые геоцентрические широта и долгота Луны;

P - угол положения мгновенной оси вращения Луны;

i, i_1 - наклон среднего (истинного) экватора Луны к истинному экватору Земли;

Δ, Δ_1 - угловое расстояние от восходящего узла среднего (истинного) лунного экватора на эклиптике до восходящего узла среднего (истинного) лунного экватора на истинном экваторе Земли;

Ω', Ω_1' - угловое расстояние восходящего узла среднего (истинного) лунного экватора на истинном экваторе Земли, отсчитываемое от истинной точки весеннего равноденствия;

I - наклон среднего лунного экватора к эклиптике;

Ω - средняя долгота восходящего узла орбиты Луны на эклиптике;

\mathcal{C} - средняя геоцентрическая долгота Луны;

Γ - средняя долгота солнечного перигея;

Γ' - средняя долгота перигея лунной орбиты.

Значения l, l', b, b' определяются из соотношений:

$$\begin{pmatrix} \cos b \cos l \\ \cos b \sin l \\ \sin b \end{pmatrix} = \bar{r}(180^\circ + \mathbb{C} + \tau - \Omega - \sigma) \bar{p} [-(I + \rho) \bar{r} (\Omega + \Delta\Psi + \sigma)] \times \\ \times \begin{bmatrix} \cos(-\beta) \cos(180^\circ + \lambda) \\ \cos(-\beta) \sin(180^\circ + \lambda) \\ \sin(-\beta) \end{bmatrix}, \quad (3.2.1)$$

$$\begin{pmatrix} \cos b' \cos l' \\ \cos b' \sin l' \\ \sin b' \end{pmatrix} = \bar{r}(180^\circ + \mathbb{C} - \Omega) \bar{p} (-I) \bar{r} (\Omega + \Delta\Psi) \times \\ \times \begin{bmatrix} \cos(-\beta) \cos(180^\circ + \lambda) \\ \cos(-\beta) \sin(180^\circ + \lambda) \\ \sin(-\beta) \end{bmatrix}, \quad (3.2.2)$$

где \bar{r}, \bar{p} - матрицы-операторы относительно осей Z и X соответственно, $\Delta\Psi$ - нутация по долготе.

Для заданного угла α матрицы поворотов представлены следующим образом:

$$\bar{p}(\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{vmatrix}, \quad \bar{r}(\alpha) = \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.2.3)$$

где b'', l'' являются поправками к приближенно заранее известным широте b' и долготе l' точки Е за счет перехода от системы координат $OXYZ$ к системе $O\xi, \eta, \zeta$ из-за физической либрации Луны. Значения поправок определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
 b &= b' + b'', l = l' + l'', \\
 b'' &= -\rho \sin(\mathbb{C} - \Omega + l') + \sigma \sin I \cos(\mathbb{C} - \Omega + l'), \\
 l'' &= -\tau + (\rho \cos(\mathbb{C} - \Omega + l')) + \sigma \sin I \sin(\mathbb{C} - \Omega + l') \tan b'.
 \end{aligned}
 \tag{3.2.4}$$

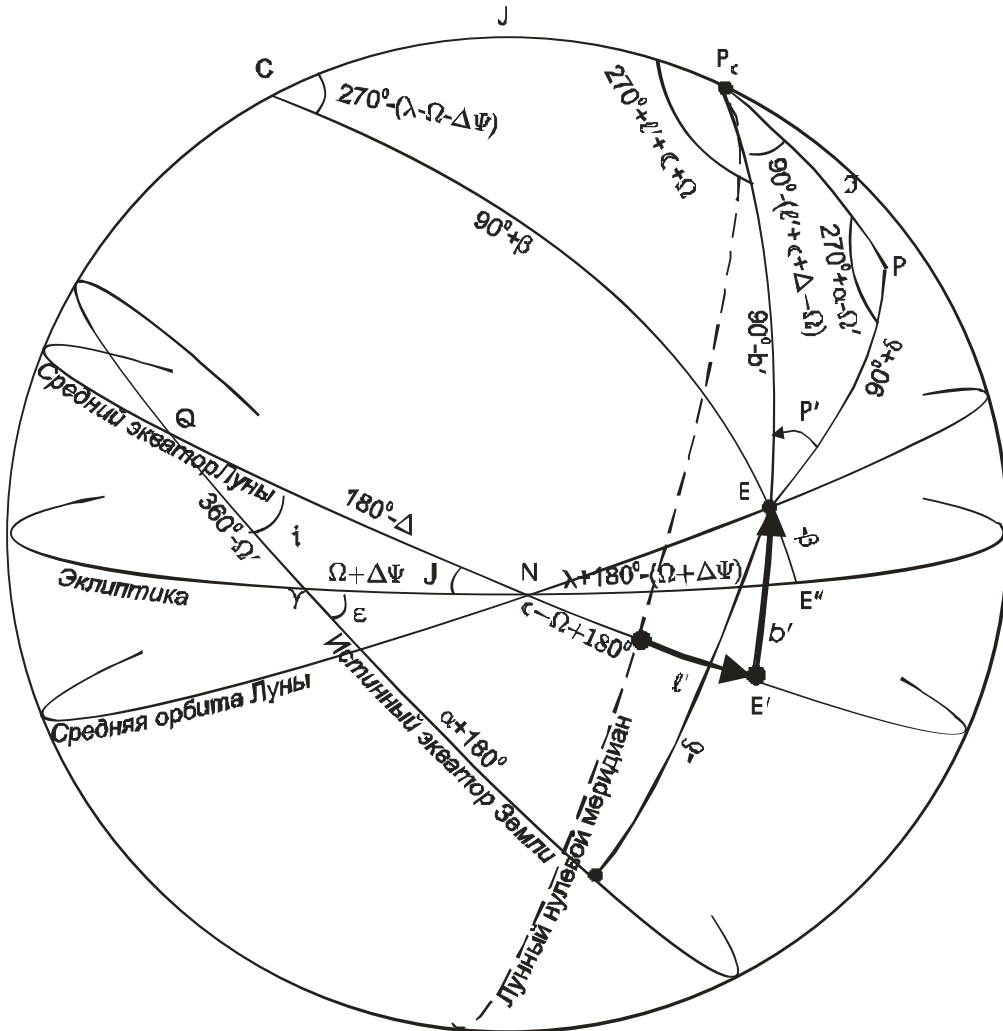


Рисунок 3.2.2 Элементы селенографической сферы

Величины P и P' находятся из уравнений:

$$\begin{aligned}
 \sin P &= \sin i_1 \cos(l + \Delta_1 + \mathbb{C} - \Omega) \sec \delta = \sin i_1 \cos(\alpha - \Omega_1) \sec b, \\
 \sin P' &= \sin i \cos(l' + \Delta + \mathbb{C} - \Omega) \sec \delta = \sin i \cos(\alpha - \Omega') \sec b'.
 \end{aligned}
 \tag{3.2.5}$$

Угол $P'' = P - P'$ является физической либрацией в угле положения оси вращения Луны.

l, l', F, D представляют фундаментальные аргументы и имеют вид:

$$l = 485\,866''\,733 + (1325^r + 715\,922''\,633)T + 31''\,310T^2 + 0''\,064T^3,$$

$$l' = 1\,287\,099''\,804 + (99^r + 1\,292\,581''\,224)T - 0''\,577T^2 - 0''\,012T^3,$$

$$F = 335\,778''\,877 + (1342^r + 295\,263''\,134)T + 13''\,257T^2 + 0''\,011T^3, \quad (3.2.6)$$

$$D = 1\,072\,261''\,307 + (1236^r + 1\,105\,601''\,328)T - 6''\,891T^2 + 0''\,019T^3,$$

$$\Omega = 450\,160''\,280 - (5^r + 482\,890''\,539)T + 7''\,455T^2 + 0''\,008T^3,$$

где $l = 1\,296\,000''$, $l = \mathcal{C} - \Gamma$ - средняя аномалия Луны,

$l' = L - \Gamma$ - средняя аномалия Солнца,

$F = \mathcal{C} - \Omega$ - средний аргумент широты Луны,

$D = \mathcal{C} - L$ - средняя элонгация Луны и Солнца (разность их средних долгот), L - средняя долгота Солнца и Γ - средняя долгота солнечного перигея:

$$L = 1\,009\,677''\,850 + (100^r + 2771''\,210)T + 1''\,089T^2,$$

$$\Gamma = 1\,018\,578''\,046 + 6\,190''\,046T + 1''\,666T^2 + 0''\,012T^3. \quad (3.2.7)$$

Средний наклон ε_0 эклиптики к экватору можно рассчитать так:

$$\varepsilon_0 = 84\,381''\,448 - 46''\,8150T - 0''\,00059T^2 + 0''\,001813T^3. \quad (3.2.8)$$

T отсчитывается от стандартной эпохи J 2000 в юлианских столетиях по 36525 суток.

Из разложения фундаментальных аргументов получают значения элементов лунной орбиты:

$\Gamma' = 300\,072''\,424 + (11^r + 392\,449''\,965)T - 37''\,112T^2 + 0''\,045T^3$ - средняя долгота перигея.

$\zeta = 785\,939''157 + (1336' + 1\,108\,372''598)T - 5''802T^2 + 0''019T^3$ - средняя долгота Луны.

Введем следующие обозначения:

$I = 5552''64$ - постоянный наклон среднего лунного экватора к эклиптике;

ε - истинный наклон экватора к эклиптике;

i, i_1 - наклон среднего (истинного) лунного экватора к истинному экватору Земли;

Δ, Δ_1 - угловое расстояние восходящего узла среднего (истинного) лунного экватора на истинном экваторе Земли от восходящего узла среднего (истинного) лунного экватора на эклиптике;

Ω', Ω'_1 - угловое расстояние от истинной точки весеннего равноденствия до восходящего узла среднего (истинного) лунного экватора на истинном экваторе Земли. Тогда

$$\begin{aligned}
 \sin i \sin \Delta &= -\sin \varepsilon \sin(\Omega + \Delta\Psi), \\
 \sin i \cos \Delta &= +\sin I \cos \varepsilon - \cos I \sin \varepsilon \cos(\Omega + \Delta\Psi), \\
 \cos i &= \cos I \cos \varepsilon + \sin I \sin \varepsilon \cos(\Omega + \Delta\Psi), \\
 \sin i \sin \Omega' &= \sin I \sin(\Omega + \Delta\Psi), \\
 \sin i \cos \Omega' &= \cos I \sin \varepsilon - \sin I \cos \varepsilon \cos(\Omega + \Delta\Psi), \\
 \sin i_1 \sin \Delta_1 &= -\sin \varepsilon \sin(\Omega + \Delta\Psi + \sigma), \\
 \sin i_1 \cos \Delta_1 &= \sin(I + \rho) \cos \varepsilon - \cos(I + \rho) \sin \varepsilon \cos(\Omega + \Delta\Psi + \sigma), \\
 \cos i_1 &= \cos(I + \rho) \cos \varepsilon + \sin(I + \rho) \sin \varepsilon \cos(\Omega + \Delta\Psi + \sigma), \\
 \sin i_1 \sin \Omega'_1 &= -\sin(I + \rho) \sin(\Omega + \Delta\Psi + \sigma), \\
 \sin i_1 \cos \Omega'_1 &= \cos(I + \rho) \sin \varepsilon - \sin(I + \rho) \cos \varepsilon \cos(\Omega + \Delta\Psi + \sigma),
 \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

здесь определяются элементы ориентации среднего и истинного лунных экваторов будут иметь следующие значения, а именно параметры $i, \Delta, \Omega, i_1, \Delta_1, \Omega_1'$.

Необходимо отметить, что имеется несколько теорий физической либрации Луны (ФЛЛ). В целом, они подразделяются на две категории: аналитические теории и численные теории.

К аналитическим теориям относятся:

1. Хабибуллин Ш.Т., 1966 г.
2. Хабибуллин Ш.Т., Чиканов Ю.А., 1969 г.
3. Migus, 1980 г.
4. Eckhardt, 1981 г.
5. Moons, 1982-1984 гг.
6. Petrova, 1996 г.
7. Chapront et al., 1997 г., 1999 г.
8. Rambaux, Williams, 2011 г.

К численным теориям относятся:

1. Эфемериды DE118/LE62 NASA USA(1981 г.)
2. DE200/LE200 (1982 г.)
3. Эфемериды EPM87 (1974 – 1987 гг. (ИТА СССР)
4. Ширяев А.А., 1985 (ИТА СССР)
5. Eroshkin G.I., 1985 (ИТА СССР)
6. Эфемериды DE403/LE403 (1995 г.)
7. Эфемериды EPM98 (1998 г.)
8. Эфемериды DE405/LE405 (1998 г.)
9. Эфемериды EPM2000 (2000 г.)

10. Эфемериды EPM2003 (2003 г.)
11. Эфемериды DE418 (2007 г.)
12. Эфемериды DE421 (2008 г.)
13. Эфемериды EPM2011 (2011 г.)
14. Эфемериды DE430-431 (2013 г.)
15. Эфемериды DE432 (2014 г.)
16. Эфемериды EPM2015 (2015 г.)

Для создания теорий Экхардта, Мигус и Мунс были использованы модели физической либрации Луны, которые основывались на разложении гравитационного потенциала Луны с точностью до второй сферической гармоники. Отметим, что современные теории вращения Луны изучаются члены, которые ранее не рассматривались, хотя эти элементы учитывают гармоники разложения гравитационного потенциала выше второго порядка. Реализация данной задачи основывается на методах численного интегрирования дифференциальных уравнений физической либрации Луны.

3.3 Фундаментальный каталог положений точек на поверхности Луны

Построение единой системы положений лунных объектов является важнейшей задачей, при решении которой необходимо учитывать, что система должна реализовывать динамическую СК, осуществлять хороший охват видимой и обратной стороны Луны и иметь центр отсчета данных, близкий к центру масс.

Напомним, что благодаря миссиям «Аполло» для видимой стороны Луны и «Зонд-6», «Зонд-8» для обратной стороны была создана опорная селеноцентрическая сеть, но для ограниченной области лунной поверхности.

Ф.Д.Дойл и др. проанализировали внутреннюю точность координатной системы, которая реализуется топографическими данными миссии «Аполло». Оказалось, точность в плановых координатах лунных объектов зависит значительно от положения лунного объекта относительно треугольника, реализуемого станциями ALSEP (The Apollo Lunar Surface Experiments Package).

Учитывая квазидинамический характер самих космических сетей, к динамическим координатным системам для видимой стороны Луны можно отнести: опорную сеть, полученную по привязке кратеров к звездам на основе гелиометрических измерений, и каталоги «264 кратера» и «Казань-1162», построенные на основе крупномасштабных снимков Луны со звёздами.

Создание динамической системой координат подразумевает соблюдение следующих условий: оси системы координат совпадают с главными осями инерции Луны, а центр системы координат каталога совпадает с центром масс Луны.

Отметим основные этапы при создании единой системы координат с применением опорного каталога «Казань-1162» и других каталогов, которые кроме объектов видимой стороны Луны, содержат объекты в либрационной зоне и на обратной стороны Луны. Важнейшим этапом при решении данной задачи является

исследование каталога «Казань-1162» на наличие систематических и случайных ошибок, а также сгущение и расширение системы каталога «Казань-1162» на видимую, обратную стороны Луны и либрационную зону. Для трансформации и моделирования координатных систем были использованы специальные программные пакеты и модули.

Программный модуль «Моделирование координатных систем» (МКС) позволяет использовать для программирования современные программные продукты, например, систему Windows. МКС содержит подпрограмму для перевода прямоугольных координат из системы S_1 в систему S_2 по матрице поворотов A и вектору смещения S_0 . Программа имеет архитектуру, состоящую из двух независимых частей: ядра и графической оболочки. Ядро состоит из подклассов, реализующих основные функции, а управляющая подпрограмма дает возможность осуществить взаимодействие с пользователем. Предлагаемая структура в полном объеме реализует объектно-ориентированные принципы программирования. Представленная архитектура позволяет успешно проводить взаимодействие с другими программными комплексами, ведь при необходимости, ядро программы можно перемещать в другие программные модули. Командный модуль МКС позволяет контролировать вычислительные процессы, устранять ошибки, связанные с некорректными действиями пользователя. Краткое описание модулей, входящих в ядро, следующее. Первой ступенью алгоритма обработки является подпрограмма первичной обработки данных. С помощью этой подпрограммы возможен ввод данных для решения поставленной

задачи. Три ключевых особенности данной подпрограммы помогают осуществить трансформацию координат из прямоугольной системы в сферическую, трансформацию координат из сферической системы в прямоугольную, и отождествление общих точек с одинаковыми прямоугольными координатами. Второй ступенью алгоритма является подпрограмма построения аналитической модели. Данная подпрограмма осуществляет анализ матрицы поворота системы, вычисляет векторы относительного положения начал систем координат исследуемых систем, учитывает условия ортогональности различными методами (аналитическим, численным и параметрическим).

Программный модуль «Система поиска оптимальных регрессий» (СПОР+) применяется для научных исследований, а именно позволяет заменять первоначальные параметры другими близкими параметрами, а также создавать упрощенные модели. Используя СПОР+ возможно проводить анализ связей между несколькими независимыми переменными, выполнение программной процедуры регрессионного анализа, при которой независимые параметры могут пошагово вводиться или выводиться из уравнения регрессии, построения адаптивных моделей, анализа остаточных членов.

В систему каталога «Казань-1162» было переведено 12 каталогов: «ACIC», «AMS», «ARTHUR», «Baldwin», «Goloseevo-1», «Goloseevo-2», «MILLS-2», «SCHRUTKA-1», «SCHRUTKA-2», «Киевский каталог», The Unified Lunar Control Network 2005 (ULCN 2005) и каталог на западное полушарие Луны (Valeev).

Численным методом и методом без учета условий ортогональности для модели (3.3.1.) при условиях (3.3.2) были выполнены вычисления с учетом поворотных матриц A и векторов смещения S_0 .

$$S_2=AS_1+S_0, \quad (3.3.1)$$

где A представляет собой матрицу поворота систем координат, S_0 является вектором сдвига центра отсчета координат системы S_2 по отношению к координатной системе S_1 .

$$A^T A = E, \text{ где } \det T = 1. \quad (3.3.2)$$

Предлагаемый алгоритм позволяет сгустить координатную сеть на видимой стороне Луны и перевести систему координат опорного динамического каталога «Казань-1162» на обратную сторону Луны. В итоге были решены три основные задачи:

1. Анализ точности математической модели ортогональной трансформации координат;

2. Редукция систем трансформируемых каталогов для глобального распространение системы каталога «Казань-1162»;

3. Сгущение сети базисных точек каталога «Казань-1162» на видимой стороне Луны с использованием редукции координат объектов, входящих в 12 селенографических каталогов. В данном случае численный метод позволил выполнить прецизионные преобразования координат.

Следует отметить, что каталог «Казань-1162» реализует динамическую систему координат, в связи с этим и возникает необходимость трансформации координат селенографических

каталогов лунных положений в систему каталога «Казань-1162» с использованием матрицы ориентации \mathbf{A} и вектора смещения \mathbf{S}_0 . Усреднение остатков позволяет получить элементы вектора \mathbf{S}_0 , причем данные элементы не имеют геометрической интерпретации.

Таким образом, процедура распространения и сгущения системы «Казань-1162» возможна при использовании элементов перехода матриц \mathbf{A} и \mathbf{S}_0 уравнения (3.3.1). Численный метод редукций и учет условий (3.3.2) позволили получить необходимые решения поставленной задачи. Специальный программный модуль на основе невязок координат позволил отождествить общие точки для двух систем S_1 и S_2 для селенографической системы координат (ξ, η, ζ) , причем невязки не превышали по модулю для ξ, η, ζ соответственно значения 0,001; 0,001; 0,002 лунного радиуса.

Можно записать в векторной форме:

$$\mathbf{A} \times \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Z}, \quad (3.3.3)$$

где $\mathbf{A}(A_{ij})$ - структурированная переходная матрица,

$\boldsymbol{\theta}(\Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \zeta)$ - вектор-столбец искомых параметров,

$\boldsymbol{\varepsilon}$ - вектор-столбец случайных ошибок наблюдений,

$\mathbf{Z}(\Delta X, \Delta Y)$ - вектор-столбец наблюдений.

Оценка искомых параметров $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\Delta \xi}, \hat{\Delta \eta}, \hat{\Delta \zeta})$ выполнялась согласно следующему уравнению:

$$\hat{\theta} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{Z}), \quad (3.3.4)$$

Ковариационная матрица ошибок неизвестных определялась из выражения:

$$\mathbf{D}(\hat{\theta}) = \frac{\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V}}{2m-3} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}, \quad (3.3.5)$$

где \mathbf{V} - вектор остаточных уклонений.

Модель (3.3.4) является ортогональной, но ее можно представить и как приближенную не ортогональную систему в виде алгебраического полинома первой степени \mathbf{P}_1 . Таким образом, достоверность построенной модели можно исследовать на основе сравнения ее с результатами, полученными по модели (3.3.4) в виде \mathbf{P}_1 .

Значения матриц ориентации \mathbf{A} и векторов смещения \mathbf{S}_0 получены для пар каталогов: (КСК-1162, ACIC), (КСК-1162, AMS), (КСК-1162, ARTHUR), (КСК-1162, Baldwin), (КСК-1162, Goloseevo-1), (КСК-1162, Goloseevo-2), (КСК-1162, KIEV), (КСК-1162, MILLS-2), (КСК-1162, SCHRUTKA-1), (КСК-1162, SCHRUTKA-2), (КСК-1162, Valeev), (КСК-1162, ULCN 2005). Для этого каждый из каталогов был переведен в систему «Казань-1162». Значения элементов матриц ориентации \mathbf{A} , векторов смещения \mathbf{S}_0 и количество общих точек для всех 12 каталогов представлены в таблице 3.3.1. Численный метод использован для преобразования систем координат согласно общим точкам.

Благодаря решению задачи прецизионного сгущения и

расширения фундаментальной селеноцентрической сети «Казань-1162» на видимую и обратную стороны Луны был получен каталог трансформированных координат лунных объектов в динамической системе координат.

Таблица 3.3.1 Параметры каталогов в системе опорной сети «Казань-1162»

Название каталога	Матрица поворота	Вектор смещения	Количество общих точек
АСИС	1.000000 0.000197 -0.000078 -0.000197 1.000000 -0.000561 0.000078 0.000561 1.000000	-0.000173 -0.000198 -0.001176	64
AMS	1.000000 0.000057 -0.000214 -0.000057 1.000000 -0.000296 0.000214 0.000296 1.000000	-0.000003 -0.000347 -0.000820	52
ARTHUR	1.000000 -0.000044 -0.000124 0.000044 1.000000 -0.000558 0.000124 0.000558 1.000000	-0.000125 -0.000254 -0.001400	14
Голосеево-1	1,000000 0,000266 -0,000239 -0,000266 1,000000 -0,000452 0,000239 0,000452 1,000000	-0,000115 -0,000164 -0,000645	39
Голосеево-2	1.000000 0.000178 -0.000531 -0.000178 1.000000 -0.000707 0.000531 0.000707 1.000000	0.000123 -0.000213 -0.000404	44
Киев	1.000000 -0.000027 -0.000503 0.000027 1.000000 -0.000215	-0.000010 0.000031	659

	0.000503 0.000215 1.000000	-0.000038	
MILLS-2	1.000000 -0.000010 -0.000051 0.000010 1.000000 -0.000509 0.000051 0.000509 1.000000	-0.000200 -0.000256 -0.001119	93
SCHRUTKA-1	1.000000 0.000162 -0.000196 -0.000162 1.000000 -0.000300 0.000196 0.000300 1.000000	-0.000172 -0.000361 -0.001280	33
SCHRUTKA-2	1.000000 -0.000061 -0.000118 0.000061 1.000000 -0.000469 0.000118 0.000469 1.000000	-0.000152 -0.000242 -0.000883	35
Valeev	1.000000 -0.000027 -0.000503 0.000027 1.000000 -0.000215 0.000503 0.000215 1.000000	-0.000010 0.000031 -0.000038	21
Baldwin	1.000000 -0.000334 0.000002 0.000334 1.000000 -0.000592 -0.000002 0.000592 1.000000	0.000187 -0.000013 -0.000259	23
ULCN	1.00000 0.00016 0.00005 -0.00016 1.00000 -0.00007 -0.00005 0.00007 1.00000	0.00002 0.00005 0.00005	400

При решении задачи преобразования координат на базе координатного обеспечения общих лунных объектов применялось адаптивное регрессионное моделирование. Данный вид моделирования позволил осуществить поиск достоверных оценок параметров и систем модельного преобразования координат. Основу адаптивного регрессионного моделирования составляет метод

структурно-параметрической идентификации адекватной модели преобразования координат. Целью предложенного в настоящей работе метода является интерполяция (сгущение) и экстраполяция (расширение) опорной селеноцентрической сети. Отождествление общих объектов в автоматизированном режиме позволяет организовать система моделирования координатных систем (МКС). Кроме того, МКС дополнительно с пакетом СПОР+ дает возможности получать координаты объектов рассматриваемого каталога в системе «Казань-1162» для аппроксимирующих преобразований. Совместная реализация данных систем моделирования позволяет получить параметры в виде данных о диапазоне расхождений координат для исходной и редуцированной версий каталогов, причем полученных в разнородных системах отсчета координат. Используются следующие формулы перевода сферических координат в прямоугольные:

$$\xi = R \sin(\lambda) \cos(\beta)$$

$$\eta = R \sin(\beta)$$

$$\zeta = R \cos(\lambda) \cos(\beta)$$

Также используются следующие формулы перевода прямоугольных координат в сферические координаты:

$$\lambda = \frac{180}{\pi} \arctg\left(\frac{\xi}{\zeta}\right), \zeta > 0$$

$$\lambda = \frac{180}{\pi} (\pi + \arctg\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)), \zeta \leq 0$$

$$\beta = \frac{180}{\pi} \arctg \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}}$$

$$R = R_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \text{ где } R_0 = 1738.1 \text{ км.}$$

3.4 Исследование фундаментального каталога опорных точек на поверхности Луны

Важнейшей задачей после трансформации исследуемых каталогов с использованием опорного каталога «Казань-1162» является сравнение полученного и исходных каталогов селенографических координат объектов на лунной поверхности. Данная задача может быть решена следующим способом:

Для двух сравниваемых каталогов применяется метод сравнительного анализа:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ E & F & G \\ M & N & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_i^{Kaz} \\ \eta_i^{Kaz} \\ \zeta_i^{Kaz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D \\ H \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta \xi_i \\ \Delta \eta_i \\ \Delta \zeta_i \end{pmatrix}, \quad (3.4.1)$$

где A, F, L - коэффициенты, характеризуют различие масштабов двух систем по осям ξ, η, ζ и, по существу, являются масштабными множителями по координатам ξ, η, ζ в сравниваемых каталогах:

$$\xi_{Kat} = (1-A) \xi_{Kaz}, \eta_{Kat} = (1-A) \eta_{Kaz}, \zeta_{Kat} = (1-A) \zeta_{Kaz}. \quad (3.4.2)$$

Коэффициенты B, C, E, G, M, N характеризуют отличие ориентации осей систем координат сравниваемых каталогов. D, H, K - свободные члены, обязанные своими не нулевыми значениями несовпадению начал селенодезических систем. $\xi_i^{Cat}, \eta_i^{Cat}, \zeta_i^{Cat}$ - ($i=1, 2, \dots, m$), где m число сравниваемых точек, а $\xi_i^{Cat}, \eta_i^{Cat}, \zeta_i^{Cat}$ координаты общих сравниваемых точек, $\Delta \xi_i, \Delta \eta_i, \Delta \zeta_i$ представляют собой разности вида:

$$\Delta \xi_i = \xi_i^{Cat} - \xi_i^{Kaz}, \Delta \eta_i = \eta_i^{Cat} - \eta_i^{Kaz}, \Delta \zeta_i = \zeta_i^{Cat} - \zeta_i^{Kaz}, \quad (3.4.3)$$

где ξ_i^{Cat} , η_i^{Cat} , ζ_i^{Cat} - координаты кратеров, входящих в каталоги, которые сравниваются с каталогом Казань-1162, последний обозначен как ξ_i^{Kaz} , η_i^{Kaz} , ζ_i^{Kaz} . Индекс i определяет номер сравниваемого кратера.

Базовый каталог «Казань-1162» и трансформированные каталоги «Киев 4900», «ULCN 2005» содержат наибольшее количество общих точек, поэтому сравнение выполнялось для указанных трех каталогов.

Для указанных выше каталогов составлены условные уравнения вида (3.4.1), которые решались методом наименьших квадратов. В таблице 3.4.1. представлены полученные результаты. Значения μ, ν, π являются углами поворота сравниваемых систем в соответствующих координатных плоскостях $\xi O \eta, \xi O \zeta, \eta O \zeta$, где O - начало координат. μ, ν, π определяются по следующим формулам:

$$\pi = \frac{N-G}{2}, \nu = \frac{C-M}{2}, \mu = \frac{E-B}{2}. \quad (3.4.4)$$

Следует учитывать, что значения μ, ν, π из выражений (3.4.4) получаются в радианах, а в таблице 3.4.1. они указаны в секундах дуги. В таблице 3.4.1. коэффициенты B, C, E, G, M, N безразмерные, умноженные на 10^5 , а D, H, K выражены в долях лунного радиуса, умноженные на 10^5 . Анализ таблицы 3.4.1. показывает, что координаты ξ , ζ и η близки у всех сравниваемых каталогов. Нуль - пункты в пределах ошибок в плановых координатах имеется хорошее согласие с базовым каталогом «Казань-1162». Система координат сравниваемых каталогов в плоскости $\xi O \eta$ (угол μ) также хорошо

ориентирована относительно сети «Казань-1161», тем не менее, наиболее близкое совпадение наблюдается с каталогом «ULCN». В плоскости $\eta O \zeta$ (угол π) отличие ориентации имеется только в пределах ошибок измерений. В плоскости $\xi O \zeta$ (угол ν) наблюдается также хорошее согласие. Анализ выбранных сравниваемых каталогов показал, что в пределах точности наблюдений оси трансформированных каталогов ориентированы одинаковым образом относительно каталога «Казань-1162».

Таблица 3.4.1. - Результаты исследования трансформированных каталогов «Киев 4900» и «ULCN 2005» с каталогом «Казань-1162»

Каталоги	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	π
	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	ν
	<i>M</i>	<i>N</i>	<i>L</i>	<i>K</i>	μ
ULCN 2005	8±10	14±15	48±19	– 11±18	74"
	13±15	20±14	35±17	– 27±20	18
	43±29	55±35	32±25	– 38±37	–32
Киев 4900	17±18	38±25	82±15	27±19	16"
	24±15	29±25	18±14	85±79	28
	60±41	31±42	– 37±55	47±53	30

ГЛАВА 4

4.1 Модель макрофигуры лунного диска. Методы построения моделей макрофигуры Луны

Создание точных моделей макрофигуры Луны возможно благодаря данным космических миссий. Учитывая высокую точность физического рельефа, тем не менее, ключевой задачей является

определение положения координатной сетки и определение значений селеноцентрических координат точек.

Численно-аналитический метод является основным методом для исследования лунного макрорельефа. Цель численно-аналитического метода заключается в разложении высотных данных каталогов в гармонические ряды по сферическим функциям. Успехом пользуются методы регрессионного анализа. Регрессионный анализ, как представитель статистических методов, наиболее часто используется для обработки и оценки экспериментальных результатов. Таким образом, исследователи получают возможность на основе разнородных наблюдений создавать точные математические модели. Благодаря моделированию появляется возможность создания соответствующих параметрических взаимосвязей между наблюдаемыми процессами и соответствующими им параметрами. Основные характерные моменты регрессионного анализа следующие:

- представление данных на основе математических методов;
- создание моделей, максимально соответствующих наблюдаемому процессу;
- поиск искомых неизвестных в математической модели с применением метода наименьших квадратов;
- поиск и выборка более реальной модели на основе анализа.

Ключевую модель регрессионного анализа можно записать как:

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}\alpha + \varepsilon, \quad (4.1.1)$$

где \mathbf{V} - векторная матрица наблюдений, размером $(i \times 1)$, где i число наблюдений, \mathbf{R} - матрица регрессии, необходимая для связи

параметров модели с размером $(n \times p)$, которая содержит один столбец с величинами $r_{10} = r_{20} = \dots = 1$ и значения r_{ij} соответствующие i наблюдениям $(i \dots n)$ над параметрами уравнения регрессии r_j ($j=1, \dots, p-1$), где p количество таких параметров; α вектор, характеризующий размерность $(p \times 1)$ искомым неизвестных параметров α_j ($j=0, \dots, p-1$), которые необходимо определить, ε представляет матрицу ошибок модели $(n \times 1)$.

Основной задачей для данных исследований является выбор оптимальной модели. Необходимо отметить, что модель является прототипом изучаемого явления или процесса с некоторым приближением и не может быть точной копией. На процесс оценивания искомым величин некоторые параметры могут оказать определенное воздействие, причем в процессе наблюдений данные не измеряются. Указанные параметры имеют как систематический, так случайный характер. Первые - вызывают изменение коэффициентов модели, вторые - повторные опыты будут давать различные значения оцениваемой переменной при одних и тех же значениях факторов. Создавая определенную модель невозможно точно учесть влияние случайных возмущений в каждом отдельном измерении, моделирование лишь показывает некоторые усредненные характеристики. В результате невозможно создать "истинную" модель, можно только оценить степень ее адекватности. Для случая линейной регрессии была построена модель (4.1.1), которая характеризуется неопределенной структурированностью, а именно,

неопределенности как в размерности и составляющих элементов системы, так и входящих параметров - величинам α_i матрицы α . В данном случае поиск необходимых величин заключается в определении на основе данных наблюдений истинных значений α_i . Задача определения структуры модели сводится в принципе к получению достаточно адекватной данной модели структурированности. Основным этапом линейного регрессионного анализа является поиск α_i по результатам определенных наблюдений $v_i, r_{i0}, \dots, r_{p-1}$. Величины α_i представляются случайными величинами, основными числовыми характеристиками которых является определенное математическое ожидание $M(\alpha_i)$ и дисперсия $D(\alpha_i)$. Основная цель параметрического оценивания заключается в поиске числовых характеристик $M(\alpha_i)$ и $D(\alpha_i)$ и нахождению искомым параметров. Поэтому при наличии нескольких методов оценивания появляется необходимость выбора такого из них, который наилучшим образом обеспечивает свойства «наилучшего линейного» или «оптимального» нахождения параметров модели. Оптимальный подход к нахождению параметров используемой регрессионной модели предполагает применение первоначальной структуры модели в виде (4.1.1), нахождение искомым неизвестных α_i с применением МНК и определение структуры наиболее благоприятной модели.

Степень соответствия модели с наблюдаемым значениям представляется важным этапом при анализе исходной модели. Анализ соответствия модели наблюдениям является одним из главных

статистических условий для регрессионного анализа. Практическое использование построенной модели должно наилучшим образом удовлетворять соответствию теоретической и реальной основы для изучаемого объекта. Одним из ведущих критериев при нахождении структуры построенной модели является ее простота и наименьшее количество входящих в нее переменных. Критерий выбора структуры модели предполагает стремление создать наиболее простую интерпретацию реальности с наименьшим количеством переменных. Структура модели должна иметь простую систему с ограниченным количеством переменных параметров и с ограниченным количеством связей между этими параметрами. Все вышесказанное имеет отношение к принципу экономичности модели. Сокращение числа параметров модели упрощает процесс нахождения искомым параметров и позволяет использовать данную модель для решения широкого круга задач. Для этих целей вводятся статистические меры соответствия, которые характеризуются мерой расхождения между предполагаемыми и наблюдаемыми значениями. Соответственно меры подразделяются на внешние (в случае стохастических моделей) и внутренние (в случае редуцированных моделей).

4.2 Современные модели макрофигуры Луны

Гудас К. в 1963 г. впервые выполнил разложение по сферическим функциям высотных данных рельефа до восьмого порядка, тем самым было положено начало гармоническому анализу.

Порядок гармоник определялся точностью наблюдательных данных и количеством гармоник. Анализируя результаты разложений

можно сделать вывод, что средняя квадратичная ошибка вычислений уменьшается при увеличении порядка гармоник. Основой гармонического анализа является точность измерения высот, приводящая к единственному источнику ошибок, а методы вычислений, применяемые при получении коэффициентов гармоник, не содержат дополнительных ошибок. Для определения коэффициентов разложений использовался МНК. Гудас предположил, что на видимой и обратной сторонах лунной сферы рельеф симметричный, так как отсутствовала информация о рельефе обратной стороны Луны. Разумеется, это исказило результаты описания глобального рельефа естественного спутника Земли.

Исследования Луны до космической эры предполагали использование только наземных наблюдений, что давало ошибку определения высот точек поверхности порядка ± 100 метров. Этот факт не лучшим образом сказывался на точности разложения и самого физического рельефа. Так как данные о рельефе обратной стороны отсутствовали, положение начала системы координат также определить достоверно не удавалось. Космическая эпоха существенно изменила эту ситуацию. Были получены и фотографические снимки всей исследуемой поверхности Луны, и возможность дополнить, скорректировать их данными лазерной альтиметрии. В итоге на основе метода разложения селенографических наблюдательных данных в ряды по сферическим функциям были получены модели лунной макрофигуры. Билс Б. и Феррари А. в своих исследованиях использовали 3300 измерений высот, полученных наземными

методами, 1400 фотографий миссии «Apollo» и 5800 альтиметрических наблюдений с целью построения модели макрофигуры Луны на основе гармонических разложений 12 порядка. Вскоре была создана модель лунного рельефа с точностью представленных данных ± 1 км и покрывающая существенную область лунной поверхности, лежащую между отметками 45° северной и южной широты.

В процессе разработки методов гармонического анализа селенографических данных существенную роль оказали исследования отечественных авторов. Анализ данных космических миссий «Зонд-6» и «Зонд-8» дал возможность улучшить точность разложений по сферическим функциям в определенных областях лунной сферы, а именно, в южной части западного полушария, полярных областях и краевой зоне Луны. В данном исследовании впервые было произведено разложение рельефа по выборочным функциям совместно с разложениями по сферическим функциям.

Эти исследования основаны на анализе абсолютных высот объектов на обратной стороне западного полушария Луны. Была построена гипсометрическая карта видимой стороны Луны, которая покрывала область на лунной поверхности $\pm 70^\circ$ по долготе и широте. Создание гипсометрической карты основывалось по данным опорного каталога Милза. В Голосеевской обсерватории совместно с данными альтиметрии космических миссий «Apollo-15» и «Apollo-16» был создан каталог высот краевой зоны Луны.

Разработка метода разложения рельефа до восьмого порядка гармоник, а также его реализация принадлежит Н.А.Чуйковой. Разложение рельефа до десятого порядка и вывод параметров высот рельефа обратной стороны Луны был выполнен И.Г.Чугуновым (1977 г.), и на основе анализа аномалий силы тяжести А.С.Дубровским и Ю.А.Чикановым (1978-1979 гг.). В.С.Кислюк внес существенный вклад в развитие методологии гармонического анализа лунной топографии, он проанализировал два метода построения мегарельефа Луны: картографический и метод сферического гармонического анализа. В качестве селенографической основы применялась бланковая карта Луны. На основе селенодезических координат 2390 опорных точек каталога «Киев-4900» и абсолютных высот отдельных валов крупных кратеров, пиков хребтов, полученных с американских карт видимого лунного полушария, была построена гипсометрическая карта Луны. При этом лунная поверхность была разделена на сегменты размером $10^{\circ} \times 10^{\circ}$, а средние значения высот получены в результате сглаживания используя метод скользящего среднего. Глобальный мегарельеф Луны (для математического представления) разделен на 56 сегментов указанного размера. Сегменты располагались симметрично относительно экватора и нулевого меридиана, что позволяло получить некоррелированные значения гармонических членов разложения на основании свойств ортогональности сферических функций. Средние уровни каждого из 56 сегментов с учетом весов были найдены как средние взвешенные значения высот точек, попадающих на предлагаемый сегмент.

Отметим, что отдельно исследовались морские и материковые зоны, разложение по сферическим функциям было выполнено до пятой степени. В итоге, полученные карты оказались достаточно точными ($\pm 0.18 - 0.30$ км по высоте) и хорошо согласующимися с данными гипсометрической карты, построенной Биллзом и Феррари на основе метода гармонического анализа данных лазерной альтиметрии. Основываясь на описанных подходах, были определены параметры геометрической фигуры Луны, найдены размеры трехосного эллипсоида, аппроксимирующего геометрическую фигуру Луны, и определено смещение центра фигуры Луны относительно центра масс.

Данные гипсометрических карт Феррари, Биллза и Чуйковой, которые охватывают 60% поверхности Луны, дают значения селенографических координат 261 объектов, расположенных на обратной стороне и в либрационной зоне. На основе этого задела С.Г.Валеев получил разложения глобального рельефа Луны в ряд по сферическим функциям до восьмого порядка. Опорной селенодезической сетью в этом случае являлся каталог лунных объектов «Киев-4900». В практике гармонического анализа впервые с помощью ковариационной функции в предположении однородности и изотропности вариаций топографии была заполнена область, где отсутствовали наблюдательные данные. Метод регрессионного моделирования впервые использовался в аналогичных исследованиях при поиске искомым параметров. В результате, на основе реализации регрессионного подхода, получена наилучшая достоверная модель поверхности Луны с учетом коэффициентов разложения восьмого

порядка. Согласно критерию Стьюдента, значимые гармонические коэффициенты были исключительно стохастическими. На основе внутренних стохастических условий и в процессе анализа было установлено увеличение точности полученных параметров разложения и высокая детализация построенной модели.

В результате была создана гипсометрическая карта в проекции Мольвейде, которая оказалась достаточно близкой к данным оптимального разложения. В работе С.Г.Валеева (1991 г.) получены важные результаты, которые использованы в наших исследованиях:

1. Как правило, в разложениях присутствуют параметры, которые коррелируют друг с другом, что приводит к ненадежному выявлению соответствующих коэффициентов гармоник;

2. Разложению меньшим числом членов ряда - принцип регрессионного анализа гармоник;

3. Статистическая оценка разложения по сферическим функциям может быть использована как мера качества, которая выявляет прогностическую ценности модели и позволяет дискриминировать конкурирующие описания.

На основе данных миссии «Clementine» в Лаборатории ракетного движения (JPL USA) построена модель лунного рельефа. В настоящее время, эта модель разложения рельефа Луны в ряд по сферическим функциям 70-ого порядка является достаточно полной и подробной из всех построенных ранее. Достаточно большое количество входящих в разложение коэффициентов представляют сложность построения подробных моделей макрорельефа Луны. Модель базируется на

сфероиде со сжатием $1/3234.93$, средним радиусом 1738 км и покрывает зону, заключенную между 75° южной и северной широты. Метод численного интегрирования по лунной сфере позволил создать модель 70-го порядка разложения рельефа Луны и получить коэффициенты гармоник. В итоге созданная селенографическая модель наиболее достоверно из всех существующих, дает значения высотных радиусов-векторов Луны. Последнее объясняется следующим образом: ранние космические лунные миссии, например миссии «Аполло», при измерениях на лунной поверхности были ограничены экваториальными областями, а также большими селенографическими ошибками определения высот, порядка $\pm 0,5-1$ км. Позднее, данные миссии «Clementine» позволили получать селенографические ошибки высот около ± 10 метров.

Тем не менее, современные модели физической поверхности Луны имеют достаточную точность представленного рельефа, но селенодезическая привязка точек по всем трем осям остается достаточно неопределенной. В связи с этим, определение базисной координатной системы отсчета является современной и актуальной задачей.

4.3 Данные каталога селеноцентрических опорных точек для построения модели макрофигуры Луны

Анализ селенодезического каталога селеноцентрических опорных точек (КСОТ) радиусов-векторов (абсолютных высот)

282215 точек, созданного в Казани, позволил получить новые данные о рельефе видимой стороны лунной поверхности.

При создании каталога КСОТ использовался метод трансформации координат в фундаментальную динамическую систему координат. Иначе говоря, КСОТ построен на основе трансформации координат в систему, центр которой лежит в центре масс Луны, а координатные оси направлены вдоль главных осей инерции. Таким образом, в данном селенодезическом каталоге положения объектов реализуют небесную систему координат.

Разработка метода построения регрессионных моделей мегарельефа и гравитационных полей небесных тел подразумевает необходимость в наиболее улучшенной, достоверной системе анализа данных, которая характеризуется решением задачи многопараметрической оптимизации, применению последовательных приближений к нарушению условий метода наименьших квадратов. С программной точки зрения данный подход является сложным в практической реализации. Кроме того, задача разработки метода поиска наиболее достоверных регрессионных моделей на основе определенного количества разнообразных стохастических подходов, является актуальной. Даже неполное решение только для ограниченного количества таких условий для МНК, но являющихся основными для структуризации модели, может позволить определить наилучшие линейные параметры для искомым величин и, тем самым, осуществить прогнозирование для случайных ошибок измерений, которые не могут быть исключены.

В настоящей работе на основе метода регрессионного моделирования реализовано построение моделей макрофигуры Луны. С этой целью использовалась Автоматизированная система научных исследований (АСНИ+), описанная в параграфе 1.6. Совместно с АСНИ+ была осуществлена попытка применения и программного пакета СПОР+ (Система Поиска Оптимальных Регрессий), который позволяет осуществить регрессионное моделирование с особой эффективностью при обработке астрофотографий в процессе построения модели макрофигуры Луны.

Было подтверждено, что особенность данных по мегарельефу и гравитационному полю Луны (размерность и структура), методов их преобразования при применении регрессионного подхода не позволяет применять СПОР+. Поэтому было принято решение, что для получения результата при обработке наблюдательных данных должна использоваться только автоматизированная система АСНИ+. АСНИ+ является программным пакетом, состоящим из специальных модулей для выполнения процедур регрессионного моделирования и позволяющих анализировать процессы в астрономических и геодезических системах. Данный программный пакет позволяет исследовать топографию Луны и ее гравитационного поля. Основным является возможность создания стохастических моделей, поиск искомых параметров с учетом прогнозирования, осуществляется обратная связь с параметрами полученных значений и имеется возможность полномасштабного управления вычислительным процессом. Предлагаемый комплекс создан для решения

специфических подходов к поставленным задачам, которые требуют достаточного количества комбинаций решений и использованию разнообразных методов определения ошибок неизвестных величин. Важным является решение задачи сопоставления остаточных членов в конечном нахождении параметров модели во взаимосвязи с основными предположениями МНК. Применяя основной режим моделирования, данная система позволяет реализовать следующие вычисления:

- построение моделей в виде разложения по сферическим функциям;
- реализация методов структурной идентификации;
- автоматизация процесса обработки при различных порядках разложения;
- построение и анализ графиков "остаток-отклик", "остаток-регрессор" для организации проверки регрессионного анализа;
- проверку выполнения предположения о нормальном распределении стандартизованных остатков;
- определение автокорреляции остатков по критерию Дарбина-Уотсона;
- поддержка доступного и удобного предметно-ориентированного интерфейса с пользователем.

Программные модули АСНИ+ обеспечивают решение вопросов, связанных с нормальными и избыточными (переопределенными) системами алгебраических линейных уравнений. Метод наименьших квадратов позволяет решить полученные уравнения. В качестве выходных данных могут быть значения искомым неизвестных и их

ошибки, значения элементов корреляционной матрицы, внутренние и внешние меры качества для определения достоверности и получения рекомендаций для структурирования модели. Программа содержит процедуру поиска наиболее улучшенной и достоверной структурированности модели. Существует возможность использования пошагового регрессионного анализа для получения модели по меньшему числу наблюдений n , чем число коэффициентов p . Это возможно, поскольку члены включаются в модель последовательно, один за другим, и процедура может закончиться раньше, чем возникнет избыточность.

Рассмотрим кратко сам метод и математический аппарат построения селенографических моделей. Один из способов построения модели мегарельефа Луны - разложение функции вариаций радиусов-векторов $R(\lambda_i, \varphi_i)$ точек лунной поверхности с известными координатами в ряд по сферическим функциям в виде:

$$R(\lambda_i, \varphi_i) = F(\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}, \bar{P}_{nm}), \quad (4.3.1)$$

где λ_i, φ_i - известные селенографические координаты объектов Луны; $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ - стандартизованные коэффициенты сферических гармоник; \bar{P}_{nm} - стандартизованные присоединенные функции Лежандра.

На основе данных каталога КСОТ была построена модель восьмой степени разложения (4.3.1) по сферическим функциям. Основные этапы создания модели следующие:

- регрессионный анализ моделей рельефа Луны для различных степеней разложения. Было выяснено, что нет влияния увеличения степени разложения на точность результата с определенной степени;
- анализ оптимальных структур для данной модели;
- влияние переопределенности структуры модели на значения искомым параметров.

Метод наименьших квадратов использовался в нахождении искомым неизвестных и анализе полученной модели (4.3.1). С целью разложения данных мегарельефа по сферическим функциям применялась пошаговая регрессия. Все построенные модели включали только значимые элементы. Было выполнено исследование по нахождению наиболее улучшенной и достоверной степени разложений рельефа. Выяснилось, что степень разложения восемнадцатого порядка является наиболее оптимальной для данного числа наблюдений.

С целью оценки достоверности построенной модели было решено осуществить сравнение каталог «КСОТ» и данные мисии «Clementine». Метод сравнения изогипс данных (анализ сопоставимости и достоверности) моделей топографической информации является одним из прямых методов исследования моделей макрорельефа Луны, построенного на основании данных разнородных селенографических систем. При этом каталог «Казань-1162» определяет основную уровенную поверхность отсчета высот.

Напомним, что на основе гармонического анализа построена модель макрорельефа лунной поверхности в JPL USA. Это

единственная модель, на данное время, которая содержит коэффициенты до 70-го порядка и охватывает область на лунной поверхности, ограниченную 75° южной и северной широты. Но для наших исследований оказалось достаточно использовать модель макрорельефа лунной поверхности 40-го порядка. Модель макрорельефа содержит 72548 высот и построена в УЛГТУ.

Были проанализированы изогипсы сечений построенной в настоящей работе модели макрофигуры Луны, а также моделей созданных на основе наблюдений космической миссии «Clementine» и данных каталогов «Казань-1162», «Киев-4900» и «КСОТ». Данные модели создавались используя пятый порядок разложений по сферическим функциям. В результате были исследованы изогипсы для значений селенографической долготы ($\lambda=40^{\circ}, 20^{\circ}, 0^{\circ}, -20^{\circ}, -40^{\circ}$) с шагом по широте 20° . Сечения лунного макрорельефа для четырех селенографических систем для долготы $\lambda= -20^{\circ}$ приведены на рисунке 4.3.1. Ось ординат определяет селенографические широты, ось абсцисс - высоты изогипс по отношению к базовой высоте (1738км).

Анализ изогипс, построенных для селенографических долгот $\lambda= 40^{\circ}; 20^{\circ}; 0^{\circ}; -20^{\circ}; -40^{\circ}$ показал:

1. Усредненный уровень поверхности Луны на юге выше уровня северного полушария. Разница высотных данных между этими лунными секторами Луны составляет порядка 0.5-1.0 км;

2. Формы гипсометрических кривых изогипс «КСОТ», «Казань-1162» и миссии «Clementine» близки, а вариации изогипс каталога

«Киев-4900» имеют более значительные отличия от выше указанных каталогов.

Был разработан алгоритм корреляционного анализа кривых гипсометрических сечений для значения селенографической долготы $\lambda = -20^0$. Задача: определить корреляционную зависимость между высотными данными, представленными на рисунке 4.3.1. Были вычислены высотные вариации одной исследуемой кривой x_i в зависимости от селенографической широты и аналогично для другой y_i . Найдены их средние значения \bar{x}, \bar{y} :

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i,$$

Определены коэффициенты корреляции r согласно выражению:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (4.3.2)$$

Результаты вычислений представлены в таблице 4.3.1.

Таблица 4.3.1 Значения коэффициентов корреляции для гипсометрических кривых для селенографической долготы $\lambda = -20^0$

N п/п	Пары исследуемых гипсометрических кривых для селенографической долготы $\lambda = -20^0$	Коэффициент корреляции
1	«КСОТ» - «Киев»	0.42
2	«КСОТ» - «Clementine»	0.65

3	«КСОТ» - «Казань-1162»	-0.81
4	«Киев» - «Clementine»	0.58
5	«Киев» - «Казань-1162»	-0.45
6	«Clementine» - «Казань-1162»	-0.87

Из таблицы видно, что во всех случаях корреляция не большая, но имеет максимальное значение в случае 2. Объяснение этого факта состоит в следующем: большинство точек в каталоге «КСОТ» трансформированы из каталога «ULCN», а последний был искусственно исправлен за поправку высоты именно по топографическим данным миссии «Clementine» и последующих космических миссий.

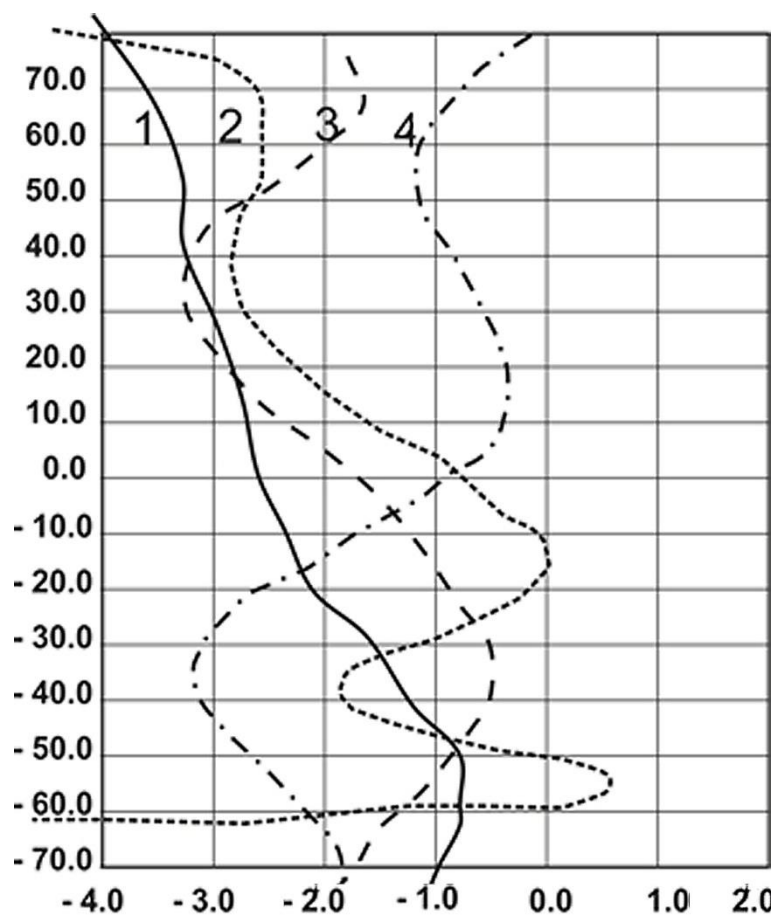


Рисунок 4.3.1 Сравнение сечений моделей гипсометрической фигуры Луны по данным миссии «Clementine» (линия 3), каталогов «Казань-1162» (линия 4), «Киев» (линия 2) и каталога «КСОТ» (линия 1). По оси абсцисс отложены высоты в км, по оси ординат селенографические широты в градусах, кривые приведены для селенографической долготы $\lambda = -20^{\circ}$.

Аналогично объясняется и определенная положительная корреляция в случаях 1 и 4.

Среднеквадратическое отклонение вычислялось по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

где n количество измерений отклонения двух кривых. Получено, что для случая «КСОТ» – «Clementine» это отклонение равно 0,9 км, а для случая «Clementine» - «Казань-1162» 1,7 км, следовательно, каталог «КСОТ» по высотным данным для долготы $\lambda = -20^0$ оказался более близким к системе данных миссии «Clementine», чем каталог «Казань-1162».

4. Сравнение трех гипсометрических кривых для каталогов «КСОТ», «Казань-1162» и миссии «Clementine» также согласуется с ранее сделанным выводом, что существует понижение в северном полушарии Луны средней высоты макрорельефа относительно южного полушария.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выше изложенного материала, можно сделать следующие выводы. Анализ динамической и геометрической фигур Луны показал:

- 1) Все современные топографические модели, построенные по космическим наблюдениям, в целом имеют неопределенные поверхности отсчета координат, что приводит к непосредственному снижению точности координат представленных в них лунных кратеров;
- 2) При отсутствие опорного каталога лунных объектов, охватывающего лучшим образом исследуемую область поверхности, невозможно решить вопрос сгущения и расширения космических навигационных сетей.

В работе рассмотрены космические миссии «Lunar Orbiter» (США), «Apollo» (США), «Clementine» (США), «Lunar Prospector» (США), «SMART-1» (Европа), «SELENE» (Япония), «Chang'E-1» (Китай), «Chandrayaan-1» (Индия), «Lunar Reconnaissance Orbiter» (США), «KAGUYA» (Япония). Показана необходимость многократной обработки разнородных наборов космических данных, в связи с улучшениями методов обработки глобальных селенодезических опорных сетей. Это направление становится особенно важным с появлением динамических селеноцентрических опорных сетей. Также актуален вопрос создания баз данных для глобальных высотных измерений в последующих космических миссиях. В современных космических миссиях повышается точность

опорных селеноцентрических сетей, как это было при исследованиях Марса. Анализ динамической и геометрической фигуры Луны показал необходимость на основе анализа взаимного положения лунного центра фигуры и ее центра масс провести исследования систем координат селенографических каталогов и параметров космических миссий.

Данные лунной топографии можно разделить на два вида: одни данные, полученные на основе лазерного сканирования лунной поверхности с бортов спутников, хорошо описывают лунный рельеф, но не дают значения координат опорных объектов на Луне. Другой вид данных дает точные координаты опорных объектов на основе наблюдений прямой привязки их к звездам, но не описывают с достаточной точностью рельеф Луны. Кроме того, все системы имеют разные системы отсчета и ориентацию осей координат. С другой стороны, данные космических миссий относятся к квазидинамической системе координат, в которой центром отсчета координат является центр масс Луны, но оси координат не совпадают с осями инерции Луны. К квазидинамической системе координат относятся большинство современных селенодезических каталогов, так как у них или центр отсчета координат не совпадает с центром масс Луны, или оси координат не совпадают с осями инерции Луны. В настоящее время не существует опорной динамической селеноцентрической системы координат, полученной на основе космических наблюдений и описывающей достаточную площадь на лунной поверхности. Несмотря на точность определения физического рельефа Луны

космическими миссиями, поверхность отсчета отметок этого рельефа представляет собой абсолютно неопределенную фигуру. Таким образом, нет возможности утверждать, что спутниковые топографические карты являются полноценными моделями, имеющими определенную поверхность отсчета топографических данных. С целью исследования достоверности топографических моделей, полученных на основе спутниковых и наземных наблюдений, нами выполнены следующие исследования:

- прямое сравнение поверхностей лунного макрорельефа задаваемого спутниковой топографической картой и макрорельефов полученных из других источников;

- сравнительный анализ значений положения центра масс относительно центра фигуры Луны для разных источников топографической информации.

Метод гармонического анализа на основе разложения гипсометрических данных в ряд по сферическим функциям применялся для решения поставленных задач. При этом использовались следующие источники топографической информации: данные космических миссий «Clementine» и «KAGUYA», данные наземных каталогов «Казань-1162», «Киев-4900», каталог ГАИШ, данные работы Феррари и Биллза, опорная сеть «ULCN-2005». Регрессионное моделирование применялось для решения систем уравнений для разнородных источников гипсометрической информации. В качестве вычислительных схем МНК использовались алгоритмы Гаусса-Жордана и Хаусхолдера. Пошаговая регрессия

позволила устранить шумовые гармоники. Были получены координаты центра фигуры Луны относительно ее центра масс для разнородных источников топографической информации. Анализ каталога «Казань-1162» для видимой стороны Луны, имеющий систему координат с началом в лунном центре масс и осями, совпадающими с главными осями инерции Луны, при совместном использовании объектов из списка «Clementine», которые находятся вне зоны охвата каталога, наилучшим образом согласуется с результатами последних космических миссий. Также было определено, что коррекция первых измерений миссии «Clementine», выполненная авторами «ULCN-2005», кажется, имеет отношение к данным относящимся к видимой лунной полусфере.

Построение опорной селеноцентрической сети в либрационной зоне Луны является актуальной задачей, так как либрационная зона Луны не исследована в достаточной степени.

При анализе современных методов построения селенографических моделей либрационной зоны Луны особое внимание было уделено проблеме построения селеноцентрической опорной сети, так как создание такой системы предполагает ее использование для связи и трансформации координат навигационных систем между видимой и обратной сторонами Луны. Метод построения опорного селенодезического каталога объектов в либрационной зоне включает:

- приведение изогипс карт Уоттса с поправками Моррисона к системе карт «Казань-1162» в электронном виде;

-отождествление кратеров на картах краевой зоны с использованием Полной карты Луны ГАИШ МГУ и уточнение их положения по картам космических миссий;

- уточнение координат кратеров в системе гайновских координат с использованием динамических карт либрационной зоны с использованием программного пакета MAPS;

- получение прямоугольных координат опорных объектов и проведение анализа их точности.

Сравнение полученных координат с высотной топографией миссий «Clementine» и «KAGUYA» показали хорошее согласие.

На основе данных космических миссий решена задача построения опорного каталога объектов на поверхности Луны в небесной системе координат. Произведен анализ методов построения селенографических каталогов лунных объектов. Отметим, что современные селенодезические сети однозначно не являются равноточными, так как относятся к различным координатным осям. Для устранения этих неточностей применяются два подхода: 1) стереофотограмметрический подход с использованием значимых базисов; 2) совместное использование наземных наблюдений Луны и космических наблюдений для получения совместных решений. В этих целях был создан математический аппарат для работы с селенографическими системами координат. Были рассмотрены взаимосвязи построенных координатных систем с современными динамическими селенодезическими параметрами. Были проанализированы системы селенографических и динамических

координат, методы их трансформации, основные поправки, которые необходимо учитывать при вычислениях. Установлено, что для видимой стороны Луны существует несколько координатных систем, среди которых ряд каталогов построен в динамической системе координат. Этими каталогами являются каталог «Казань-1162», созданный на основе наблюдений привязки лунных кратеров к звёздам на восьми метровом горизонтальном телескопе, а также построенный подобным методом каталог «Казань-264». Была решена основная задача исследования систематических и случайных ошибок каталога «Казань-1162» и сгущение и расширение системы каталога «Казань-1162» на видимую, обратную стороны Луны и либрационную зону. Для этого было разработано специальное информационное и программное обеспечение. В итоге в систему каталога «Казань-1162» были переведены 12 селенографических каталогов: «ACIC», «AMS», «ARTHUR», «Baldwin», «Goloseevo-1», «Goloseevo-2», «MILLS-2», «SCHRUTKA-1», «SCHRUTKA-2», «Киев 4900», «ULCN 2005») и каталог Валеева С.Г. на западное полушарие Луны. Работа по использованию поворотных матриц ориентации и векторов смещения позволила произвести сгущение на видимой стороне опорного селеноцентрического каталога «Казань – 1162» и распространение данной сети на обратную сторону Луны. Предложенный подход дает возможность создать систему с осями координат, направленным вдоль осей инерции Луны и центром координат, совпадающим с центром массы Луны. В результате была построена опорная селеноцентрическая сеть, содержащая 282 215 объектов и созданная в

динамической системе координат. Было выполнено сравнение полученного после трансформации каталога опорных точек на лунной поверхности с данными каталога «Казань-1162». В итоге показано, что в пределах точности наблюдений оси трансформированных каталогов приблизительно одинаково ориентированы относительно каталога «Казань-1162». Построенная селеноцентрическая сводная сеть близка к динамической системе. Следующим этапом стало создание модели макрофигуры лунного диска на основе построенного селеноцентрического каталога. Создание моделей макрофигуры Луны, несмотря на точность представления самого физического рельефа, получаемого на основе данных космических миссий, до настоящего времени остается не решенной задачей в связи с определением размерности и ориентации координатной сетки. Этот факт приводит к неточности отсчетов самих координат в моделях физической поверхности Луны.

Численно-аналитический метод является основным методом для исследования лунного макрорельефа. Суть численно-аналитического метода заключается в разложении селенографических данных в гармонические ряды по сферическим функциям. При этом используются методы регрессионного анализа. Новые данные о рельефе видимой стороны лунной поверхности были получены при анализе радиусов-векторов (абсолютных высот) 282215 точек селенодезического каталога селеноцентрических опорных точек (КСОТ). Модель восьмого порядка разложений построена на основе данных каталога КСОТ.

Анализ точности построенной гипсометрической модели был выполнен сопоставлением меридианных сечений исследуемых систем. Причем средний гипсометрический уровень был задан данными каталога «Казань-1162». В результате исследований установлено хорошее согласие рельефа в моделях, построенных по данным космической миссии «Clementine» и «КСОТ».

Если говорить о перспективах продолжения исследований, каталог «КСОТ» планируется использовать для трансформации в динамической системе координат топографических данных, полученных миссией «KAGUYA». Ведутся работы по отождествлению опорных точек в обеих упомянутых системах. Планируется исследовать более точно основные теории эволюционной истории Луны на основе анализа данных о положении центра масс Луны относительно ее центра фигуры. Также будут в дальнейшем выполнены исследования фрактальных свойств лунного рельефа.

Данная работа была выполнена в соответствии с Программой Правительства РФ конкурентоспособности Казанского федерального университета и поддержана грантом РФФИ 16-32-60071 мол-а-дк.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Andreev, A. O. Development of methods for navigational referencing of circumlunar spacecrafts to the selenocentric dynamic coordinate system / A. O. Andreev, Y. A. Nefedyev, N. Y. Demina, L. A. Nefediev, N. K. Petrova, A. A. Zagidullin // *Astronomy Reports*. — 2020. — Vol. 64, no. 9. — Pp. 795–803.
2. Andreev, A. The Physical Surface of the Moon: A Digital Model Based on Satellite Altimetry / A. Andreev, E. Akhmedshina, L. Nefediev, Y. A. Nefedyev, N. Y. Demina // *Astronomy Reports*. — 2021. — Vol. 65, no. 5. — Pp. 435–444.
3. Araki, H. Observation of the lunar topography by the laser altimeter LALT on board Japanese lunar explorer SELENE / H. Araki, S. Tazawa, H. Noda, T. Tsubokawa, N. Kawano, S. Sasaki // *Advances in Space Research*. — 2008. — Vol. 42, no. 2. — Pp. 317–322.
4. Archinal, B. A. Final completion of the unified lunar control network 2005 and topographic model // *Lunar and Planetary Science Conference*. — No. 1338. — 2007. — P. 1904.
5. Archinal, B. A. The unified lunar control network 2005 / B. A. Archinal, M. R. Rosiek, R. L. Kirk, B. L. Redding et al. // *US Geological Survey Open-File Report*. — 2006. — Vol. 1367. — P. 18.
6. Bagrov, A. V. Single-satellite global positioning system / A. V. Bagrov, V. A. Leonov, A. S. Mitkin, A. F. Nasyrov, A. D. Ponomarenko, K. M. Pichkhadze, V. K. Sysoev // *Acta Astronautica*. — 2015. — Vol. 117. — Pp. 332–337.
7. Barkin, Y., Hanada, H., Matsumoto, K., Sasaki, S., Barkin, M. *Solar Sys. Res.* 48 (6), 403–419 (2014). DOI: <https://doi.org/10.1134/S003809461406001X>
8. Binder, A. B. Lunar prospector: overview / A. B. Binder // *Science*. — 1998. — Vol. 281, no. 5382. — Pp. 1475–1476.
9. Briaud, A., A. Fienga, D. Melini, N. Rambaux, A. Mémin, G. Spada, C. Saliby, H. Hussmann, A. Stark, V. Viswanathan, D. Baguet, *Icarus*, 394, 115419 (2023). DOI:10.1016/j.icarus.2023.115426
10. Briaud, A., C. Ganino, A. Fienga, A. Mémin & N. Rambaux, *Nature*, 617, 743–746 (2023). DOI: <https://doi.org/10.1038/s41586-023-05935-7>
11. Cook, A. C. Lunar polar topography derived from Clementine stereoimages / A. C. Cook, T. R. Watters, M. S. Robinson, P. D. Spudis, D. B. J. Bussey // *Journal of Geophysical Research: Planets*. — 2000. — Vol. 105, no. E5. — Pp. 12023–12033.
12. Demin, S. A. The fractal analysis of the topography and gravitational field of Venus // *Journal of Physics: Conference Series* / IOP Publishing. — Vol. 1038. — 2018. — P. 012020.
13. Dickey J. O. Lunar laser ranging: a continuing legacy of the Apollo program / J. O. Dickey, P. L. Bender, J. E. Faller, X. X. Newhall, R. L. Ricklefs, J. G. Ries, P. J. Shelus et al. // *Science*. — 1994. — Vol. 265, no. 5171. — Pp. 482–490.
14. Draper, J. W. XXXII. On the process of Daguerreotype, and its application to taking portraits from the life / J. W. Draper // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. — 1840. — Vol. 17, no. 109. — Pp. 217–225.
15. Geology and scientific significance of the Rümkler region in northern Oceanus Procellarum: China's Chang'E-5 landing region / Y. Qian, L. Xiao, S. Zhao, J. Zhao, J. Huang, J. Flahaut, M. Martinot et al. // *Journal of Geophysical Research: Planets*. — 2018. — Vol. 123, no. 6. — Pp. 1407–1430.
16. Goswami, J. N. Chandrayaan-1 mission to the Moon / J. N. Goswami, M. Annadurai // *Acta Astronautica*. — 2008. — Vol. 63, no. 11-12. — Pp. 1215–1220.
17. Gregory, R. A. Lunar Photography / R. A. Gregory // *Nature*. — 1890. — Vol. 42, no. 1093. — Pp. 568–571.
18. Guo J. Ji, D. The 1: 2,500,000-scale geologic map of the global Moon / J. Ji, D. Guo, J. Liu, S. Chen, Z. Ling, X. Ding, K. Han et al. // *Science Bulletin*. — 2022.
19. Ivanov M. A. Landing site selection for luna-glob mission in crater boguslawsky / M. A. Ivanov, H. Hiesinger, A. M. Abdrakhimov, A. T. Basilevsky, J. W. Head, J. H. Pasckert, K. Bauch et al. // *Planetary and Space Science*. — 2015. — Vol. 117. — Pp. 45–63.

20. Jones, R. L. Estimates of the Moon's geometry using lunar orbiter imagery and Apollo laser altimeter data / R. L. Jones. — National Aeronautics and Space Administration, 1973. — Vol. 407.
21. Kato, M. The Kaguya mission overview / M. Kato, S. Sasaki, Y. Takizawa // Space Science Reviews. — 2010. — Vol. 154, no. 1. — Pp. 3–19.
22. Konopliv A. S. The JPL lunar gravity field to spherical harmonic degree 660 from the GRAIL Primary Mission / A. S. Konopliv, R. S. Park, D.-N. Yuan, S. W. Asmar, M. M. Watkins, J. G. Williams, E. Fahnestock et al. // Journal of Geophysical Research: Planets. — 2013. — Vol. 118, no. 7. — Pp. 1415–1434.
23. Lemoine, F. G. Results from the Clementine lunar geodesy investigation / F. G. Lemoine, D. E. Smith, D. D. Rowlands, M. T. Zuber, G. Neumann // *Astrodynamics* 1995. — 1996. — Pp. 201–223.
24. Massopust, P. R. Fractal functions, fractal surfaces, and wavelets / P. R. Masopust. — Academic Press, 2016.
25. Mylswamy, A. Chandrayaan-2: India's First Soft-landing Mission to Moon / A. Mylswamy, A. Krishnan, T. Alex, G. Rama Murali // 39th COSPAR Scientific Assembly. — 2012. — Vol. 39. — P. 1311.
26. Nefedyev, Y. A. Creation of a global selenocentric coordinate reference frame / Y. A. Nefedyev, A. Andreev, N. Petrova, N. Y. Demina, A. Zagidullin // Astronomy Reports. — 2018. — Vol. 62, no. 12. — Pp. 1016–1020.
27. Nefedyev, Y. Analysis of data of "Clementine" and "Kaguya" missions and "ULCN" and "KSC-1162" catalogues / Y. Nefedyev, S. Valeev, R. Mikeev, A. Andreev, N. Varaksina // Advances in space research. — 2012. — Vol. 50, no. 11. — Pp. 1564–1569.
28. Nozette S. The Clementine mission to the Moon: Scientific overview / S. Nozette, P. Rustan, L. Pleasance, J. Kordas, I. Lewis, H. Park, R. Priest et al. // Science. — 1994. — Vol. 266, no. 5192. — Pp. 1835–1839.
29. Overview of the Chang'e-4 mission: Opening the frontier of scientific exploration of the lunar far side / C. Li, W. Zuo, W. Wen, X. Zeng, X. Gao, Y. Liu, Q. Fu et al. // Space Science Reviews. — 2021. — Vol. 217, no. 2. — Pp. 1–32.
30. Petrova, N. K. , Y. A. Nefedyev, A. O. Andreev and A. A. Zagidullin, Astronomy Reports. 64 1078–1086 (2020). DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063772920120094>
31. Petrova, N. The analytical and numerical approaches to the theory of the Moon's librations: Modern analysis and results / N. Petrova, A. Zagidullin, Y. Nefedyev, V. Kosulin, A. Andreev // Advances in Space Research. — 2017. — Vol. 60, no. 10. — Pp. 2303–2313.
32. Petrova, N.K. , Y.A. Nefedyev, A.A. Zagidullin, A.O. Andreev. Astron. Rep., 62(12), 1021 (2018). DOI: [10.1134/S1063772918120120](https://doi.org/10.1134/S1063772918120120)].
33. Petrova, N. Analytical extension of lunar libration tables / N. Petrova // Earth, Moon, and Planets. — 1996. — Vol. 73, no. 1. — Pp. 71–99.
34. Phillips R. J. Preliminary Results of the Apollo Lunar Sounder Experiment / R. J. Phillips, G. F. Adams, W. E. Brown Jr, R. E. Eggleton, P. Jackson, R. Jordan, W. J. Peeples et al. — 1973. — Vol. 4.
35. Pugacheva, S. G. The proposed landing site for the luna-25 mission in the south polar region of the moon // The Eleventh Moscow Solar System Symposium 11M-S3. — 2020. — Pp. 232–
36. Rambaux, N. The Moon's physical librations and determination of their free modes / N. Rambaux, J. G. Williams // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. — 2011. — Vol. 109, no. 1. — Pp. 85–100.
37. Rambaux, N., J.G. Williams, Celest. Mech. Dyn. Astron., 109(1), 85 – 100 (2011). DOI: <https://doi.org/10.1007/s10569-010-9314-2>
38. Ranguelov, B. Mercury's DEM and FAG fractal structure—indicator for meteorite bombardment by different density space bodies / B. Ranguelov, R. Iliev // Russian Journal of Earth Sciences. — 2019. — Vol. 19, no. 6.
39. Rizvanov, N. Research on selenodesy and dynamics of the Moon in Kazan / N. Rizvanov, Y. A. Nefed'ev, M. Kibardina // Solar System Research. — 2007. — Vol. 41, no. 2. — Pp. 140–149.
40. Rue, W. Photographs of the Moon / W. de La Rue // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 1858. — Vol. 18. — P. 257.

41. Shirenin, A. M. Development of a high-precision selenodetic coordinate system for the physical surface of the Moon based on LED beacons on its surface / A. M. Shirenin, E. M. Mazurova, A. V. Bagrov // *Cosmic Research*. — 2016. — Vol. 54, no. 6. — Pp. 452–457.
42. SMART-1 mission to the Moon: status, first results and goals / B. Foing, G. D. Racca, A. Marini, E. Evrard, L. Stagnaro, M. Almeida, D. Koschny et al. // *Advances in Space Research*. — 2006. — Vol. 37, no. 1. — Pp. 6–13.
43. Smith D. E. Initial observations from the lunar orbiter laser altimeter (LOLA) / D. E. Smith, M. T. Zuber, G. A. Neumann, F. G. Lemoine, E. Mazarico, M. H. Torrence, J. F. McGarry et al. // *Geophysical Research Letters*. — 2010. — Vol. 37, no. 18.
44. Smith, W. H. F. Gridding with continuous curvature splines in tension / W. H. F. Smith, P. Wessel // *Geophysics*. — 1990. — Vol. 55, no. 3. — Pp. 293–305.
45. Stepinski, T. F. Martian geomorphology from fractal analysis of drainage networks / T. F. Stepinski, M. L. Collier, P. J. McGovern, S. M. Clifford // *Journal of Geophysical Research: Planets*. — 2004. — Vol. 109, no. E2.
46. The Chang'e 3 mission overview / C. Li, J. Liu, X. Ren, W. Zuo, X. Tan, W. Wen, H. Li et al. // *Space Science Reviews*. — 2015. — Vol. 190, no. 1. — Pp. 85–101.
47. Varaksina, N. Y. Selenocentric reference coordinates net in the dynamic system // *Journal of Physics: Conference Series* / IOP Publishing. — Vol. 661. — 2015. — P. 012014.
48. Vondrak, R. Lunar Reconnaissance Orbiter (LRO): Observations for lunar exploration and science / R. Vondrak, J. Keller, G. Chin, J. Garvin // *Space Science Reviews*. — 2010. — Vol. 150, no. 1-4. — Pp. 7–22.
49. Wessel, P. Free software helps map and display data / P. Wessel, W. H. F. Smith // *Eos, Transactions American Geophysical Union*. — 1991. — Vol. 72, no. 41. — Pp. 441–446.
50. Williams J. G. Lunar interior properties from the GRAIL mission / J. G. Williams, A. S. Konopliv, D. H. Boggs, R. S. Park, D.-N. Yuan, F. G. Lemoine, S. Goossens et al. // *Journal of Geophysical Research: Planets*. — 2014. — Vol. 119, no. 7. — Pp. 1546–1578.
51. Williams J. G., A.S.Konopliv, D. H. Boggs et al. *J. Geophys. Res. Planets*, 119, 1546–1578 (2014). DOI: <https://doi.org/10.1002/2013JE004559>
52. Williams, J. G. Lunar laser ranging tests of the equivalence principle with the Earth and Moon / J. G. Williams, S. G. Turyshev, D. H. Boggs // *International Journal of Modern Physics D*. — 2009. — Vol. 18, no. 07. — Pp. 1129–1175.
53. Williams, J.-P. , J. L. Bandfield, D. A. Paige, T. M. Powell, B. T. Greenhagen, S. Taylor, P. O. Hayne, Speyerer, E. J., R. R. Ghent, E. S. Costello, *Journal of Geophysical Research: Planets*, 123(9), 2380–2392 (2018). DOI: <https://doi.org/10.1029/2018JE005652>
54. Wollenhaupt, W. R. Comments on the figure of the Moon from Apollo landmark tracking / W. R. Wollenhaupt, R. K. Osburn, G. A. Ransford // *The Moon*. — 1972. — Vol. 5, no. 1-2. — Pp. 149–157.
55. Zagidullin, A.A., V.S. Usanin, N.K. Petrova, Y.A. Nefedyev, A.O. Andreev, T.V. Gudkova. *Astron. Rep.*, 64(12), 1093 (2020). DOI: 10.1134/S1063772921010066
56. Zuber M. T. Gravity field of the Moon from the Gravity Recovery and Interior Laboratory (GRAIL) mission / M. T. Zuber, D. E. Smith, M. M. Watkins, S. W. Asmar, A. S. Konopliv, F. G. Lemoine, H. J. Melosh et al. // *Science*. — 2013. — Vol. 339, no. 6120. — Pp. 668–671.
57. Zuber, M. T. The shape and internal structure of the Moon from the Clementine mission / M. T. Zuber, D. E. Smith, F. G. Lemoine, G. A. Neumann // *Science*. — 1994. — Vol. 266, no. 5192. — Pp. 1839–1843.