9 класс

1. Даны три положительных числа, произведение любых двух из них больше третьего на одно и то же число a. Докажите, что $a \geq -1/4$.

2. В школе учатся 210 учеников 9-го класса. В кабинете математики имеется 6 разных книг по алгебре и 5 разных книг по геометрии. Каждого ученика попросили выбрать 6 наименований книг: три — по алгебре и три — по геометрии. Докажите, что найдутся по крайней мере два ученика, у которых списки выбранных книг совпадают.

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $BAMN$ и $BCKL$ с общей вершиной B. Докажите, что отрезок NL, соединяющий концы сторон квадратов, исходящих из B, в два раза длиннее медианы треугольника, исходящей из той же вершины B.

4. Вычислите сумму: $\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{2^2}{3}\right]+\ldots+\left[\frac{2^{1000}}{3}\right]$. (Здесь $[x]$ — целая часть числа x, то есть наибольшее целое, не превосходящее x.)

Решения задач. 9 класс.

1. Обозначим числа через x, y и z. Имеем $xy - z = a$, $xz - y = a$, $yz - x = a$. Тогда $xy - z = xz - y$, $xy - z - xz + y = 0$ или $(x+1)(y-z) = 0$. Поскольку $x > 0$, $x+1 \neq 0$ и тогда $y - z = 0$, т. е. $y = z$. Совершенно аналогично получаем, что $x = y$. Таким образом, $a = xy - z = x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$.

2. Найдем количество различных вариантов выбора трех наименований книг по алгебре из 6 возможных. В качестве первой книги можно выбрать любую из 6, в качестве второй — любую из 5 оставшихся, а в качестве третьей — любую из четырех оставшихся после выбора первых двух. Таким образом, имеем $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ различных вариантов. Но при этом следует учесть, что варианты выбранных наименований книг A, B, C отличающиеся только порядком, следует считать одинаковыми. Таких вариантов из одного набора можно составить 6: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Итак, на самом деле различных вариантов будет $120 : 6 = 20$. (Для тех, кто знаком с комбинаторикой, может легко подсчитать это число как число сочетаний из шести по три: $C_6^3 = 20$.) Аналогично различных вариантов выбора трех наименований книг по геометрии из пяти будет $5 \cdot 4 \cdot 3 : 6 = 10$. Отсюда следует, что количество различных выборов шести наименований книг указанным образом равно $20 \cdot 10 = 200$. Поскольку число учеников $210 > 200$, то по крайней мере у двоих списки выбранных книг совпадут.

3. Сделаем дополнительное построение. Пусть P — точка, симметричная точке B относительно середины Q стороны AC. Тогда $ABCP$ — параллелограмм.

Рассмотрим треугольник ABP. Докажем, что он равен треугольнику BNL. Действительно, AB и BN имеют одинаковые длины как стороны квадрата $BAMN$. Аналогично одинаковые длины имеют отрезки BC и BL, а AP и BC имеют одинаковые длины как противоположные стороны параллелограмма $ABCP$. Следовательно, длина AP равна длине BL. Осталось показать, что величины углов NBL и BAP равны. Обозначим $\alpha = \angle ABC$. Так как $ABCP$ — параллелограмм, получаем $\angle BAP = 180° - \angle ABC = 180° - \alpha$. Так как $\angle ABN = \angle CBL = 90°$, имеем $\angle NBL = 360° - \angle ABN - \angle CBL - \angle ABC = 180° - \alpha$. Итак $\angle NBL = \angle BAP$. Следовательно, треугольники ABP и BNL равны по двум сторонам и углу между ними. Тогда длины третьих сторон в них также совпадают, т. е. длина NL равна длине BP. Остается заметить, что медиана BQ треугольника ABC в два раза короче диагонали BP параллелограмма $ABCP$.

4. Найдем сумму членов S геометрической прогрессии

$$S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3} + \ldots + \frac{2^{1000}}{3} = \frac{1}{3}(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{1000)}) = \frac{1}{3}(2^{1001} - 1).$$

Обозначим через $\{x\}$ дробную часть числа x: по определению, $\{x\} = x - [x]$, где $[x]$ — целая часть x. Найдем дробные части членов рассматриваемой прогрессии:

$$\left\{\frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3},\ \left\{\frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3},\ \left\{\frac{2^2}{3}\right\} = \frac{1}{3},\ \left\{\frac{2^3}{3}\right\} = \frac{2}{3}, \ldots, \left\{\frac{2^{1000}}{3}\right\} = \frac{1}{3}.$$

Тогда сумма дробных частей прогрессии Σ равна

$$\Sigma = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \ldots \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{500 \text{ раз}} = 500\frac{1}{3}.$$

10 КЛАСС

1. Расставьте числа $x=(a+b)(b+c)$, $y=(a+c)(b+d)$, $z=(a+d)(b+c)$ в порядке возрастания, если известно, что $a<b<c<d$.

2. Вершина радиомачты видна с расстояний 30 *м*, 60 *м* и 90 *м* от ее основания под углами α_1, α_2 и α_3, соответственно. Зная, что $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=90°$, найдите высоту радиомачты.

3. Экзамены по алгебре, биологии и химии сдавал 41 студент. Следующая таблица показывает, сколько студентов провалилось на каждом предмете и их различных комбинациях:

Предмет	А	Б	Х	АБ	АХ	БХ	АБХ
Количество провалившихся	12	5	8	2	6	3	1

(К примеру, 5 студентов провалились по биологии, среди них 3 провалившихся как по биологии, так и по химии, и только один из этих 3 провалился по всем трем предметам). Сколько студентов сдали все три экзамена?

4. Докажите, что $2012^{2011}-1$ делится без остатка на 2011^2.

Решения задач. 10 класс.

1. Имеем $z-y=ab+ac+db+dc-ab-ad-cb-cd=ac+db-ad-cb=(b-a)(d-c)>0$ как произведение положительных чисел. Поэтому всегда $z>y$.

Далее, $z-x=(d-b)(b+c)$. Поскольку $a+b<a+d$, величина $x=(a+b)(b+c)$ меньше $z=(a+d)(b+c)$, если $b+c>0$. Если $b+c=0$, то $x=z>y$. Если $b+c<0$, то $x>z>y$. Таким образом, по начальным данным нельзя определить, что больше, x или z.

Покажем теперь, что по начальным данным нельзя определить, что больше, x или y. Если все числа a, b, c и d больше нуля, то $0<a+b<a+c$, $0<b+c<b+d$ и $x=(a+b)(b+c)$ меньше $y=(a+c)(b+d)$. Если же среди чисел a, b, c и d есть отрицательные, то возможна ситуация, когда $x>y$. Например, пусть $a=-7$, $b=-1$, $c=2$, $d=3$, тогда $x=-8$, $y=-10$ и $x>y$.

Ответ: $z>y$, а величина x при различных значениях a, b, c и d может быть больше z, меньше y или располагаться между z и y.

2. Пусть радиомачта BC видна из точек E, D и A, расположенных на отрезке AC, перпендикулярном BC, под углами α_1, α_2 и α_3, длины отрезков EC, DC и AC равны 30, 60 и 90 метров. Обозначим длину BC через x. Тогда $\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{x}{30}$, $\operatorname{tg}\alpha_2=\frac{x}{60}$, $\operatorname{tg}\alpha_3=\frac{x}{90}$. Если $k=\operatorname{tg}\alpha_1$, то $\operatorname{tg}\alpha_2=\frac{k}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha_3=\frac{k}{3}$. С другой стороны,

$$k=\operatorname{tg}\alpha_1=\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha_2-\alpha_3)=\operatorname{ctg}(\alpha_2+\alpha_3)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha_2+\alpha_3)}=$$

$$=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha_2\operatorname{tg}\alpha_3}{\operatorname{tg}\alpha_2+\operatorname{tg}\alpha_3}=\frac{1-\frac{k}{2}\cdot\frac{k}{3}}{\frac{k}{2}+\frac{k}{3}}=\frac{6-k^2}{5k}.$$

Итак, $k=\frac{6-k^2}{5k}$, откуда $k=1$ и $x=30\operatorname{tg}\alpha_1=30k=30$ метров.

3. Из таблицы следует, что число студентов АБ$_1$, провалившихся по алгебре и биологии, но сдавших химию равно АБ $-$ АБХ $=2-1=1$. Аналогично число студентов АХ$_1$, провалившихся по алгебре и химии, но сдавших биологию равно АХ$-$АБХ$=6-1=5$, а число БХ$_1$, провалившихся по биологии и химии, но сдавших алгебру равно БХ $-$ АБХ $=3-1=2$. Число студентов А$_1$, провалившихся по алгебре, но сдавших остальные два экзамена, равно А $-$ АБ$_1-$ $-$ АХ$_1-$ АБХ $=12-1-5-1=5$, точно так же Б$_1=$ Б $-$ АБ$_1-$ БХ$_1-$ АБХ $=$ $=5-1-2-1=1$, а Х$_1=$ Х $-$ АХ$_1-$ БХ$_1-$ АБХ $=8-5-2-1=0$. Таким образом, число проваливших только один экзамен равно А$_1+$ Б$_1+$Х$_1=5+1+0=6$, два экзамен из трех равно АБ$_1+$АХ$_1+$БХ$_1=1+5+2=8$, а все три — АБХ$=1$. Общее число не сдавших экзамены равно $6+8+1=15$, а сдавших все экзамены равно $41-15=26$.

4. Имеем $x^{n-1}-1=(x-1)(x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x+1)$, поэтому

$$2012^{2011}-1=2011(2012^{2010}+2012^{2009}+2012^{2008}\ldots+2012+1).$$

Для любого натурального k имеем $2012^k=(1+2011)^k\equiv 1 \pmod{2011}$, откуда

$$2012^{2010}+2012^{2009}+2012^{2008}\ldots+2012+1\equiv\underbrace{1+1+\ldots+1}_{2011\text{ раз}}\equiv 0 \pmod{2011}.$$

Следовательно, число $2012^{2010}+2012^{2009}+2012^{2008}\ldots+2012+1$ делится на 2011, а $2012^{2011}-1$ — на 2011^2.

11 КЛАСС

1. Докажите, что функция $f(x) = \sin x + \sin\sqrt{2}x$ — непериодическая.

2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^{2012} + y^{2012} = 2, \\ 2012x - y^{2011} = 2012y - x^{2011}. \end{cases}$

3. Даны несколько векторов. Длина суммы каждых двух из них не превосходит 2. Докажите, что длина суммы любых трех из этих векторов не больше 3.

4. Докажите, что для любого натурального $n > 1$ число $n^{n-1} - 1$ делится без остатка на $(n-1)^2$.

Решения задач. 11 класс.

1. Предположим, что существует $T > 0$ такое, что для любого x имеет место равенство $\sin x + \sin\sqrt{2}\,x = \sin(x+T) + \sin\sqrt{2}(x+T)$. Тогда $\sin(x+T) - \sin x +$ $+ \sin\sqrt{2}(x+T) - \sin\sqrt{2}\,x = 0$ или $2\sin\frac{T}{2}\cos\left(x+\frac{T}{2}\right) + 2\sin\frac{\sqrt{2}\,T}{2}\cos\sqrt{2}\left(x+\frac{T}{2}\right) = 0$, т. е.

$$\sin\frac{T}{2}\cos\left(x+\frac{T}{2}\right) + \sin\frac{\sqrt{2}\,T}{2}\cos\sqrt{2}\left(x+\frac{T}{2}\right) = 0 \qquad (1)$$

для любого x. Пусть $x = -\frac{T}{2}$, тогда

$$\sin\frac{T}{2} + \sin\frac{\sqrt{2}\,T}{2} = 0. \qquad (2)$$

Покажем, что $\sin\frac{T}{2} \neq 0$. Действительно, если $\sin\frac{T}{2} = 0$, то тогда в силу (2) $\sin\frac{\sqrt{2}T}{2} = 0$. Отсюда следует, что $T = 2\pi k$ и $\sqrt{2}\,T = 2\pi l$, где k, l — целые. Так как $T \neq 0$, получаем, что $k \neq 0$ и $\sqrt{2} = \frac{l}{k}$. Это противоречит тому, что $\sqrt{2}$ — иррациональное число.

Итак,

$$\sin\frac{T}{2} = -\sin\frac{\sqrt{2}\,T}{2} \neq 0. \qquad (3)$$

Из (1) и (3) следует, что для любого x выполнено равенство $\cos(x+\frac{T}{2}) =$ $= \cos\sqrt{2}(x+\frac{T}{2})$ или $\cos t = \cos\sqrt{2}\,t$, $t \in \mathbb{R}$. Но последнее равенство не верно, например, при $t = \frac{\pi}{2}$.

2. Из второго уравнения получаем $2012(x-y) = y^{2011} - x^{2011}$. Покажем, что $x = y$. Действительно, если, к примеру, $x > y$, то тогда $y^{2011} > x^{2011}$ и $y > x$ — противоречие. Итак, $x = y$. Из первого уравнения получаем $2x^{2012} = 2$, откуда $x = \pm 1$. Ответ: $x = y = \pm 1$.

3. Обозначим через $|\overrightarrow{v}|$ длину вектора $\overrightarrow{v}$. Для любых двух векторов $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ имеем

$$|\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}| \leq |\overrightarrow{v_1}| + |\overrightarrow{v_2}|. \qquad (*)$$

Это неравенство следует из того, что в треугольнике, построенном с помощью этих векторов при их сложении по правилу треугольника, длина стороны меньше или равна сумме длин двух других. Для любых двух данных векторов $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ имеем $|\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}| \leq 2$. Тогда для любых трех векторов $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$ с использованием (*) имеем $2|\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}| = |2\overrightarrow{v_1} + 2\overrightarrow{v_2} + 2\overrightarrow{v_3}| = |(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) + (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_3}) + (\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3})| \leq$ $\leq |\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}| + |\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_3}| + |\overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}| \leq 2 + 2 + 2 = 6$, откуда $|\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}| \leq 3$.

4. Имеем $x^{n-1} - 1 = (x-1)(x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x + 1)$, поэтому

$$n^{n-1} - 1 = (n-1)(n^{n-2} + n^{n-3} + \ldots + n + 1).$$

Для любого натурального k имеем $n^k = (1 + (n-1))^k \equiv 1 \pmod{n-1}$, поэтому

$$n^{n-2} + n^{n-3} + \ldots + 1 \equiv \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{(n-1)\text{ раз}} \equiv 0 \pmod{n-1}.$$

Следовательно, число $n^{n-2} + n^{n-3} + \ldots + 1$ делится на $(n-1)$, а $n^{n-1} - 1$ — на $(n-1)^2$.