ЗАГАДОЧНЫЕ СТОРОНЫ ТРЕУГОЛЬНИКА ПАСКАЛЯ

Ксения Левинская
KOLevinskaya@kpfu.ru

19 декабря 2020 г.

«Треугольник Паскаля так прост, что выписать его сможет даже десятилетний ребенок. В то же время он таит в себе неисчерпаемые сокровища и связывает воедино различные аспекты математики, не имеющие на первый взгляд между собой ничего общего. Столь необычные свойства позволяют считать треугольник Паскаля одной из наиболее изящных схем во всей математике»

– Мартин Гарднер[1]

Представим $(a+b)^n$ в виде суммы. «Подумаешь, бином Ньютона!»

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k, \qquad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{1}$$

Остаётся лишь вычислить его коэффициенты. Если же считать факториалы очень не хочется, на помощь придёт треугольник Паскаля. Выписать его чрезвычайно просто. Начнём, конечно, с единицы. Под ней – ещё две. А дальше работа быстрая, почти автоматическая: каждая последующая строка на одно число длиннее предыдущей, начинается с единицы и заканчивается единицей, а все прочие числа получаются путём сложения двух других, расположенных в предыдущей строке слева и справа над искомым.

```
                    1
                  1   1
                1   2   1
              1   3   3   1
            1   4   6   4   1
          1   5   10  10  5   1
        1   6   15  20  15  6   1
      1   7   21  35  35  21  7   1
    1   8   28  56  70  56  28  8   1
  1   9   36  84  126 126 84  36  9   1
1   10  45  120 210 252 210 120 45  10  1
```

Рис. 1: первые 11 строк треугольника Паскаля

Определение. Треугольник Паскаля – бесконечная числовая таблица треугольной формы, в n-й строке которой расположены коффициенты бинома Ньютона порядка n ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

Треугольник получил своё название в честь знаменитого французского математика, механика и философа Блеза Паскаля, труды которого оказали значительное влияние на развитие многих областей современной науки. К слову, учёный не обошёл своим вниманием и процесс автоматизации вычислений. Так, в 1642 году Паскаль разработал одно из первых функционирующих вычислительных устройств – суммирующую машину, которая позволяла выполнять операции сложения и вычитания. „Паскалина“ (именно так впоследствии назвали этот калькулятор XVII века) была сложна в использовании и стоила очень дорого, однако принцип её работы лёг в основу современной вычислительной техники. Тем не менее, данная статья посвящена другому предмету размышлений французского гения.

Блез Паскаль
(1623-1662)

В 1654 году Блез Паскаль вступил в переписку с не менее выдающимся соотечественником Пьером Ферма. Данная переписка послужила возникновению нового направления математической науки - теории вероятностей, а также вдохновила Паскаля на написание „Трактата об арифметическом треугольнике“, в котором учёный изложил известные ему сведения о конструкции, которую мы сегодня называем его именем.

Справедливости ради стоит отметить, что числовые таблицы, как две капли воды похожие на треугольник Паскаля, были известны задолго до рождения математика. Первые письменные упоминания такого объекта можно найти в трудах индийских математиков X века. Около 1100 года н.э. исследованием занимательной таблицы всерьёз увлёкся другой небезызвестный философ - Омар Хайям. В некоторых ближневосточных странах пресловутый треугольник носит имя персидского поэта и математика. В 1303 году треугольник появился на обложке трактата китайского учёного Чжу Шицзе.[2]

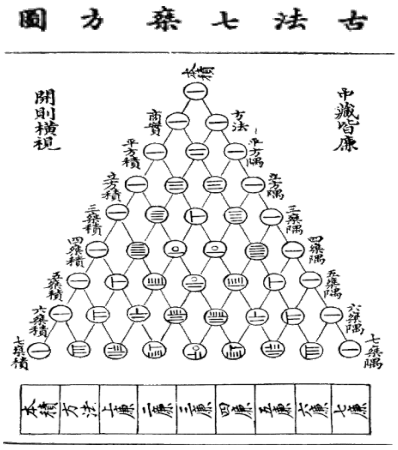

Рис. 2: обложка трактата „Яшмовое зеркало четырёх первоэлементов“

Эта удивительная конструкция на протяжении многих веков волновала умы математиков всего мира: её изучением занимались Никколо Тарталья, Михаэль Штифель, Петер Апиан. Однако именно Блез Паскаль первым наиболее подробно исследовал и обобщил свойства числового треугольника. Перейдём к рассмотрению некоторых из них.

Свойство 1. Треугольник Паскаля симметричен относительно вертикальной оси.

Одна из важнейших характеристик, природа которой объясняется способом построения – коль скоро первые две строки симметричны, то и каждая последующая наследует это свойство.

Свойство 2. Сумма чисел, составляющих n-ю строку треугольника Паскаля, равна 2^n.

Данное свойство тривиальным образом следует из (1) при $a = b = 1$.

Для рассмотрения следующих свойств повернём таблицу, представленную на рис.1, на угол $\alpha = \pi/4$ против часовой стрелки.

Свойство 3. Каждое число p в треугольнике Паскаля равно

а) сумме чисел, стоящих в предыдущем горизонтальном ряду (от самого левого, до находящегося непосредственно над p);

б) сумме чисел, стоящих в предыдущем вертикальном ряду (от самого верхнего, до находящегося непосредственно слева от p).[3]

В справедливости свойства 3а) нетрудно убедиться, воспользовавшись методом математической индукции и тем фактом, что любой элемент треугольника Паскаля, ориентированного согласно рис.3, равен сумме двух элементов: расположенного над ним и слева от него. Свойство 3б) немедленно следует из 3а), если учесть симметрию треугольника относительно главной диагонали.

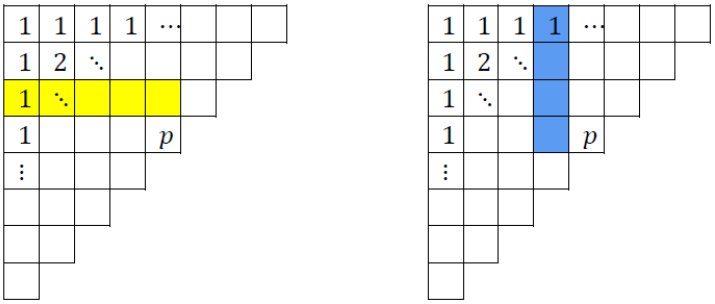

Рис. 3: иллюстрация свойства 3а) и 3б) соответственно

Разумеется, выше перечислена лишь малая толика свойств этой необыкновенной таблицы. Между тем, треугольник Паскаля поражает воображение не только удивительной красоты внутренними закономерностями, но и непостижимыми связями с другими математическими объектами.

Свойство 4. Если раскрасить чётные числа, входящие в треугольник Паскаля, в один цвет, а нечётные - в другой, то полученная таблица будет отображать фрактал, известный как треугольник Серпинского.[4]

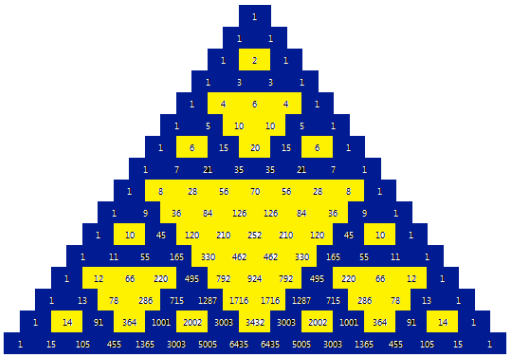

Рис. 4: треугольник Паскаля-Серпинского

Прежде чем перейти к следующему свойству, введём в рассмотрение ещё один родственный треугольнику Паскаля объект.

Определение. Матрица Паскаля – бесконечная матрица, элементами которой являются коффициенты бинома Ньютона.

В зависимости от того, как именно расположены элементы, различают следующие формы записи матрицы Паскаля:

а) верхняя треугольная:

$$P_U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

б) нижняя треугольная:

$$P_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

в) симметричная:

$$P_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \cdots \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & \cdots \\ 1 & 4 & 15 & 35 & 70 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Пусть ориентация треугольника Паскаля такова, что его элементы совпадают с ненулевыми элементами нижней треугольной матрицы P_L.

Свойство 5. Сумма элементов, стоящих на диагоналях треугольника Паскаля, проходящих перпендикулярно гипотенузе, образует последовательность Фибоначчи.

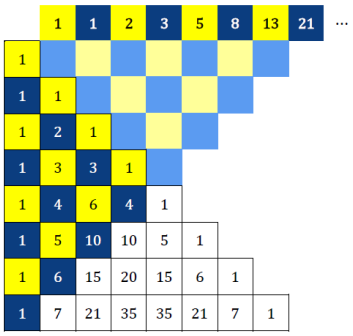

Рис. 5: иллюстрация свойства 5

Вариативность матричных представлений приводит к целому ряду удивительных свойств.

Свойство 6. Для матриц Паскаля справедливо соотношение[5]

$$P_S = P_L P_U. \tag{2}$$

Как прямое следствие из формулы (2) получаем, что

$$det(P_S) = det(P_L) \cdot det(P_U) = 1.$$

Кроме того, свойство 6 позволяет мгновенно получить LU-разложение симметричной матрицы Паскаля.

Свойство 7. Нижняя и верхняя треугольные матрицы Паскаля связаны соотношением:

$$P_L = P_U^T. \tag{3}$$

Из выполнения равенств (2) и (3) следует положительная определённость матрицы P_S, а также разложение Холецкого.[6]

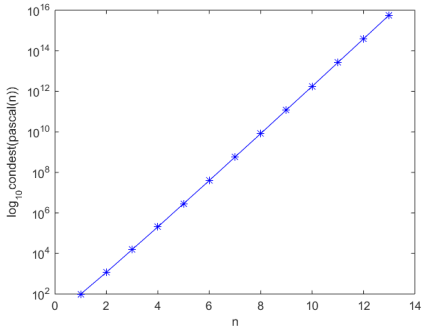

Рис. 6: иллюстрация свойства 8

Свойство 8. Число обусловленности матрицы P_S растёт с увеличением размерности по логарифмическому закону.

В справедливости данного факта можно убедиться при помощи программных средств (например, пакета MATLAB).

Напоследок приведём ещё одну любопытную картинку, отражающую распределение абсолютных величин элементов симметричной матрицы Паскаля.

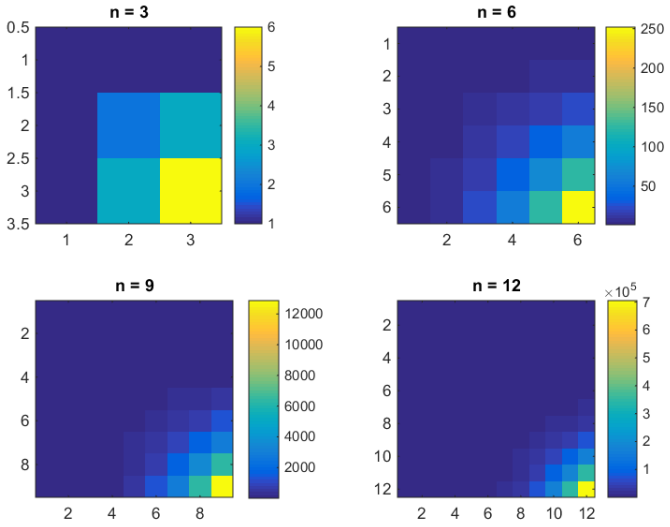

Рис. 7: распределение модулей элементов P_S

Треугольник Паскаля – фигура в высшей степени прекрасная. Он может служить замечательным примером того, как на первый взгляд совершенно незамысловатый математический объект на поверку оказывается сотканным из великого множества поразительных закономерностей.

Список литературы

[1] М. Гарднер. Математические новеллы. — М.: Мир, 1974. — 456 с.;

[2] О.В. Кузьмин. Треугольник и пирамида Паскаля: свойства и обобщения. — Соросовский Образовательный Журнал, 6(5), 2000. — С. 101-109.;

[3] В.А. Успенский. Треугольник Паскаля. — М.: Наука, 1979. — 48 с.;

[4] http://mech.math.msu.su/∼shvetz/54/inf/perl-problems/chPascalTriangle.xhtml;

[5] A. Edelman, G. Strang. Pascal Matrices. — American Mathematical Monthly, 111 (3), 2003. — P. 361–385.;

[6] C.B. Moler. Numerical Computing with MATLAB. — The MathWorks, 2010. — 352 p.