Известия вузов. Математика
2014, № 5, с. 64–67

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение

Ф.Г. АВХАДИЕВ, Б.С. ТИМЕРГАЛИЕВ

НЕРАВЕНСТВА ТИПА БРУННА–МИНКОВСКОГО ДЛЯ КОНФОРМНЫХ И ЕВКЛИДОВЫХ МОМЕНТОВ ОБЛАСТЕЙ

Аннотация. Доказаны неравенства типа Брунна–Минковского для трех новых функционалов, представляющих собой степенные моменты от конформных и евклидовых характеристик областей.

Ключевые слова: неравенства Брунна–Минковского, коэффициент гиперболической метрики, функция расстояния.

УДК: 517.5 : 517.956

1. Введение

В настоящее время имеется большое число работ, посвященных неравенствам типа Брунна–Минковского в геометрическом анализе, математической физике и теории вероятностей. Отметим лишь несколько публикаций, которые способствовали становлению и развитию этого обширного раздела теории неравенств. В 1956 году Х. Хадвигер [1] обнаружил, что неравенства типа Брунна–Минковского справедливы и для двух моментов инерции выпуклой области, а именно, момента области относительно центра масс и момента относительно гиперплоскости. В 1971–1972 гг. А. Прекопа [2] и Л. Лайндлер [3] доказали следующую функциональную версию неравенства Брунна–Минковского.

Теорема A. *Пусть* $0 < t < 1$, *и пусть* φ_0, φ_1, h — *неотрицательные интегрируемые функции в евклидовом пространстве* $\mathbb{R}^n$. *Если для всех* $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$h((1-t)x + ty) \geq \varphi_0(x)^{1-t}\varphi_1(y)^t, \tag{1}$$

то

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_0(x)dx\right)^{1-t}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(x)dx\right)^t. \tag{2}$$

Усиления теоремы A и ряд новых результатов можно найти в статьях Х. Браскампа, Е. Либа [4] и К. Борелла [5]. Литература по неравенствам типа Брунна–Минковского и основные результаты, появившиеся до 2006 года, содержатся в обзорных статьях Р. Гарднера [6] и Ф. Барта [7]. Отметим также ряд статей, появившихся в последние годы [8]–[10].

В 2007 году Г. Кэди [11] обосновал неравенство типа Брунна–Минковского для геометрического функционала, введенного в [12]. Данная статья посвящена развитию результата Кэди.

Поступила 04.12.2013

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №№ 14-01-00351, 12-01-97013-р-поволжье-а.

2. Основные результаты

Пусть Ω — ограниченная область произвольной связности на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Очевидно, в силу ограниченности Ω является областью гиперболического типа. Поэтому для любой точки $z = x + iy \in \Omega$ определен коэффициент $\lambda_\Omega(z)$ гиперболической метрики с гауссовой кривизной, равной -4. Известно (см., например, [13], гл. 6, 8 или [14], гл. 3), что функция λ_Ω является положительной и гладкой, удовлетворяет соотношению $\lambda_\Omega^{-1}(z) = O(\delta \ln(1/\delta))$ вблизи $\partial\Omega$, где $\delta = \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$ — расстояние от точки $z \in \Omega$ до границы этой области.

Теорема 1. *Пусть Ω_0 и Ω_1 — ограниченные области произвольной связности на плоскости $\mathbb{C}$, $\Omega_0 + \Omega_1 = \{z_0 + z_1 : z_0 \in \Omega_0,\ z_1 \in \Omega_1\}$ — сумма Минковского, k — неотрицательная постоянная, H_k — функционал на множестве ограниченных областей, определенный равенством*

$$H_k^{2+k}(\Omega) := \iint_\Omega \lambda_\Omega^{-k}(x + iy)dx\,dy.$$

Тогда справедливо следующее неравенство типа Брунна–Минковского

$$H_k(\Omega_0 + \Omega_1) \geq H_k(\Omega_0) + H_k(\Omega_1).$$

Пусть $|\Omega|$ — площадь области Ω. Очевидно, при $k = 0$ утверждение теоремы 1 сводится к классическому неравенству Брунна–Минковского $|\Omega_0+\Omega_1|^{1/2} \geq |\Omega_0|^{1/2}+|\Omega_1|^{1/2}$ для плоских ограниченных областей. Поэтому достаточно доказать теорему 1 лишь для $k > 0$.

Параметрическим мостиком между теоремой 1 и результатом Кэди [11] для случая плоских выпуклых областей является

Теорема 2. *Пусть $\Omega_0 + \Omega_1$ — сумма Минковского двух плоских ограниченных выпуклых областей Ω_0 и Ω_1. Если k и α — постоянные, $k \geq 0$, $\alpha \in [0, 1]$, и $\rho_\alpha(z, \Omega) := \alpha/\lambda_\Omega(z) + (1 - \alpha)\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$, то имеет место следующее неравенство типа Брунна–Минковского*:

$$\left(\iint_{\Omega_0+\Omega_1} \rho_\alpha^k(x + iy, \Omega_0 + \Omega_1)dx\,dy\right)^{1/(2+k)} \geq$$
$$\geq \left(\iint_{\Omega_0} \rho_\alpha^k(x + iy, \Omega_0)dx\,dy\right)^{1/(2+k)} + \left(\iint_{\Omega_1} \rho_\alpha^k(x + iy, \Omega_1)dx\,dy\right)^{1/(2+k)}.$$

В следующем утверждении рассматриваются как плоские, так и пространственные выпуклые области.

Теорема 3. *Пусть P_0, P_1 и Ω — ограниченные выпуклые области пространства $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$). Пусть, далее, $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ — расстояние от точки $x \in \Omega$ до границы этой области. Если k — неотрицательная постоянная, P_0, P_1 и их сумма Минковского являются подмножествами Ω, то справедливо следующее неравенство типа Брунна–Минковского*:

$$\left(\int\limits_{P_0+P_1} \operatorname{dist}^k(x, \partial\Omega)dx\right)^{1/(n+k)} \geq \left(\int\limits_{P_0} \operatorname{dist}^k(x, \partial\Omega)dx\right)^{1/(n+k)} + \left(\int\limits_{P_1} \operatorname{dist}^k(x, \partial\Omega)dx\right)^{1/(n+k)}.$$

3. О доказательствах

Схема доказательства теоремы 1. Пусть $k > 0$, $t \in [0, 1]$, $D = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ — единичный круг с центром в начале координат. Определим сумму Минковского $\Omega_t := \{(1 - t)w_0 + tw_1 : w_0 \in \Omega_0,\ w_1 \in \Omega_1\}$. Очевидно, Ω_t является ограниченной областью. Возьмем фиксированные точки $z_0 \in \Omega_0$, $z_1 \in \Omega_1$, $z_t = (1 - t)z_0 + tz_1 \in \Omega_t$. По теореме Пуанкаре (см., например, [13], гл. 4) существуют и определяются единственным образом накрывающие конформные отображения f_0, f_1 и f_t единичного круга D на области Ω_0, Ω_1 и Ω_t соответственно, нормированные условиями $f_\tau(0) = z_\tau$, $f'_\tau(0) = \operatorname{Re} f'_\tau(0) > 0$, где $\tau = 0, 1$ и t. Согласно определению гиперболической метрики имеем равенства $1/\lambda_{\Omega_0}(z_0) = f'_0(0)$, $1/\lambda_{\Omega_1}(z_1) = f'_1(0)$, $1/\lambda_{\Omega_t}(z_t) = f'_t(0)$. Рассмотрим теперь голоморфную функцию g_t, определенную равенством $g_t(\zeta) := (1-t)f_0(\zeta) + tf_1(\zeta)$, $\zeta \in D$. Очевидно, $g_t(\zeta) \subset \Omega_t$ при любом $\zeta \in D$. По принципу гиперболической метрики (см., например, [13], гл. 8) имеем точную оценку $|g'_t(0)| \le |f'_t(0)|$. Следовательно, $0 < g'_t(0) = (1-t)f'_0(0) + tf'_1(0) \le f'_t(0)$. Таким образом, для любых $z_0 \in \Omega_0$, $z_1 \in \Omega_1$ и $z_t = (1-t)z_0 + tz_1$ справедливо неравенство

$$\lambda^{-1}_{\Omega_t}(z_t) \ge (1-t)\lambda^{-1}_{\Omega_0}(z_0) + t\lambda^{-1}_{\Omega_1}(z_1). \tag{3}$$

Далее следуем схеме доказательства Кэди [11]. Оценивая снизу правую часть (3) с помощью известного неравенства о средних и возведя получаемое неравенство в степень k, имеем

$$\lambda^{-k}_{\Omega_t}(z_t) \ge \lambda^{-k(1-t)}_{\Omega_0}(z_0)\, \lambda^{-kt}_{\Omega_1}(z_1). \tag{4}$$

Будем считать, что $\lambda^{-1}_{\Omega}(z) = 0$ для любой точки $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Пусть χ_Ω — характеристическая функция области Ω. Имеет место неравенство (см., например, [6]) $\chi_{\Omega_t}((1-t)z + tw) \ge \chi_{\Omega_0}(z)^{1-t}\chi_{\Omega_1}(w)^t$. Определим непрерывные на всей плоскости функции h, φ_0, φ_1 равенствами $h((1-t)z + tw) = \lambda^{-k}_{\Omega_t}((1-t)z + tw)\chi_{\Omega_t}((1-t)z + tw)$, $\varphi_0(z) = \lambda^{-k}_{\Omega_0}(z)\chi_{\Omega_0}(z)$, $\varphi_1(w) = \lambda^{-k}_{\Omega_1}(w)\chi_{\Omega_1}(w)$. Тогда требуемое условие (1) теоремы А следует из (4). На основании функционального неравенства Прекоры–Лайндлера (2) получаем $H_k(\Omega_t) \ge H_k^{1-t}(\Omega_0)H_k^t(\Omega_1)$ для любого $t \in [0, 1]$. Отсюда следует свойство квазивогнутости

$$H_k(\Omega_t) \ge \min\{H_k(\Omega_0), H_k(\Omega_1)\}, \quad t \in [0, 1]. \tag{5}$$

Пользуясь определением гиперболической метрики нетрудно доказать, что H_k — функционал, однородный степени 1, т. е. $H_k(s\Omega) = sH_k(\Omega)$ для любой ограниченной области Ω и любого числа $s > 0$, где $s\Omega := \{sz : z \in \Omega\}$. Как показано в [15], свойство однородности и (5) влекут неравенство $H_k(\Omega_t) \ge (1-t)H_k(\Omega_0) + tH_k(\Omega_1)$ для любого $t \in [0, 1]$. Полагая $t = 1/2$ в этом неравенстве и снова пользуясь свойством однородности, получаем утверждение теоремы 1.

Вместо ключевого утверждения (3) *при доказательстве теоремы* 2 используется неравенство $\rho_\alpha(z_t, \Omega_t) \ge (1-t)\rho_\alpha(z_0, \Omega_0) + t\rho_\alpha(z_1, \Omega_1)$. Оно является следствием (3) и аналогичного утверждения для функции расстояния, доказанного Кэди [11] для выпуклых областей.

Доказательство теоремы 3 основано на следующем аналоге (3): $\operatorname{dist}(z_t, \partial\Omega) \ge (1-t)\operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega) + t\operatorname{dist}(z_1, \partial\Omega)$ для любых $z_0 \in P_0$ и $z_1 \in P_1$. Доказательство этого утверждения приведено в [16].

Литература

[1] Hadwiger H. *Konkave eikörperfunktionale und höhere trägheitsmomente*, Comment Math. Helv. **30**, 285–296 (1956).

[2] Prékopa A. *Logarithmic concave measures with application to stochastic programming*, Acta Sci. Math. (Szeged) **32** (3–4), 301–316 (1971).

[3] Leindler L. *On a certain converse of Hölder's inequality.* II, Acta Sci. Math. (Szeged) **33** (3–4), 217–223 (1972).

[4] Brascamp H.J. and Lieb E.H. *On extensions of the Brunn–Minkowski and Prékopa–Leindler theorems, including inequalities for log concave functions, and with an application to the diffusion equation*, J. Func. Analysis **22** (4), 366–389 (1976).

[5] Borell C. *Diffusion equations and geometric inequalities*, Potential Anal. **12** (1), 49–71 (2000).

[6] Gardner R.J. *The Brunn–Minkowski inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. **39** (3), 355–405 (2002).

[7] Barthe F. *The Brunn–Minkowski theorem and related geometric and functional inequalities*, Proc. Internat. Congress Math. Vol. II (Eur. Math. Soc., Zürich, 2006).

[8] Figalli A., Maggi F., Pratelli A. *A refined Brunn–Minkowski inequality for convex sets*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire **26** (6), 2511–2519 (2009).

[9] Gardner R.J. and Zvavitch A., *Gaussian Brunn–Minkowski inequalities*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (10), 5333–5353 (2010).

[10] Lv S. *Dual Brunn–Minkowski inequality for volume differences*, Geom. Dedicata **145**, 169-180 (2010).

[11] Keady G. *On a Brunn–Minkowski theorem for a geometric domain functional considered by Avhadiev*, J. Inequal. Pure Appl. Math. **8** (2), article 33, 4 p. (electronic).

[12] Ф.Г. Авхадиев, *Решение обобщенной задачи Сен-Венана*, Матем. сб. **189** (12), 3–12 (1998).

[13] Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного* (Наука, М., 1966).

[14] Avkhadiev F.G., Wirths K.-J. *Schwarz–Pick type inequalities* (Birkhäuser Verlag, Basel–Boston–Berlin, 2009).

[15] Knothe H. *Contributions to the theory of convex bodies*, Michigan Math. J. **4**, 39-52 (1957).

[16] Тимергалиев Б.С. *Неравенство Брунна–Минковского для функционалов, связанных с граничными моментами области*, сб. статей "Итоговая научно-образовательная конференция студентов КФУ 2012 года" **5**, 27–29 (2012).

Ф.Г. Авхадиев

профессор, заведующий кафедрой теории функций и приближений,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: favhadiev@kpfu.ru

Б.С. Тимергалиев

аспирант, кафедра теории функций и приближений,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: bulat7@pochta.ru

F.G. Avkhadiev and B.S. Timergaliev

Brunn–Minkowski type inequalities for conformal and Euclidean moments of domains

Abstract. We prove Brunn–Minkowski type inequalities for three new functionals which are power moments for conformal and Euclidean characteristics of domains.

Keywords: Brunn–Minkowski inequalities, hyperbolic metric coefficient, distance function.

F.G. Avkhadiev

Professor, Chair of Function Theory and Appoximations,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420048 Russia,

e-mail: favhadiev@kpfu.ru

B.S. Timergaliev

Postgraduate, Chair of Function Theory and Appoximations,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420048 Russia,

e-mail: bulat7@pochta.ru