МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ им. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАИЯ

Направление: 050201.65 – математика с дополнительной специальностью информатика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Комбинаторные задачи разрезания выпуклых многоугольников

Студент 5 курса

Группа 05-008

"___"__________ 2015 г. ________ З.М. Гумерова

Научный руководитель:

Кандидат физ.-мат. наук, доцент

"___"__________ 2015 г. __________ М.И. Киндер

Заведующий кафедрой,
Доктор физ.-мат. наук, профессор
"___"__________ 2015 г. _________ Ю.Г. Игнатьев

Казань – 2015

Оглавление

Введение

При решении «Комбинаторных задач разрезания выпуклых многоугольников» возникают определенные трудности в плане понимания и представления общей картины. Выпускная квалификационная работа посвящена решению комбинаторных задач, связанных с подсчетом числа разбиений выпуклых многоугольников с помощью непересекающихся диагоналей.

Для достижения цели поставлены следующие задачи:

1. Рассмотреть несколько методов решений задач.

а) Задача о разрезании пятиугольника на остроугольные треугольники.

б) Задача на разрезание n-угольников.

в) Задача о количестве треугольников, на которые непересекающиеся диагонали разбивают n-угольник.

г) Задача о разрезания выпуклого многоугольника на остроугольные треугольники с непересекающимися диагоналями.

д) Задача о разрезания окружности непересекающимися хордами.

2. Познакомиться с различными интерпретациями чисел Каталана, Моцкина и др.

3. Решить комбинаторные задачи и проверить их решение с помощью пакета Maple.

4. Рассмотреть комбинаторные задачи разрезания многоугольников с помощью непересекающихся диагоналей.

Теоретической основой исследования послужили научные труды Ландо С.К. и др.

С.К. Ландо знакомит читателя с числами Каталана. В ней вводится определение этих чисел, путей Дика и многих других комбинаторных объектов, связанных с этими понятиями. Разобрано много примеров и содержится большое количество задач для самостоятельно решения.

В журнале Квант показаны решения комбинаторных задач на разрезания выпуклых многоугольников, объясняется решение задач с графами.

Данная работа закрепляет и обобщает сложившиеся ранее научные представления об исследуемом предмете.

Глава 1. Школьные задачи на разрезание выпуклых многоугольников

§1. Школьные комбинаторные задачи

В этом параграфе перечислим комбинаторные задачи, которые встречаются в школьном курсе, рассмотрим методы решений этих задач и познакомимся с историческими справками.

В школьном курсе можно встретить следующие задачи:

1. Можно ли разрезать на четыре остроугольных треугольника а) какой-нибудь выпуклый пятиугольник, б) правильный пятиугольник.
2. Докажите, что в любом многоугольнике, кроме треугольника, есть хотя бы одна диагональ, целиком лежащая внутри него.
3. На сколько частей n-угольник его диагонали, если никакие три диагонали не пересекаются в одной точке?
4. Докажите, что количество треугольников на которые непересекающиеся диагонали разбивают n-угольник, равно $n - 2$.
5. Многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что по крайней мере две из этих диагоналей отсекают от него треугольники.
6. Незнайка думает, что только равносторонний треугольник можно разрезать на три равных треугольника. Прав ли он?
7. Докажите, что выпуклый 22-угольник нельзя разрезать диагоналями на 7 пятиугольников.
8. На какие наименьшее число тупоугольных треугольников можно разрезать прямоугольник?

9. На окружности расположены 20 точек. Эти 20 точек попарно соединяются 10 хордами, не имеющими общих концов и непересекающихся. Сколькими способами можно это сделать?

10. На сколько частей могут разделить пространство n плоскостей? (Каждые три плоскости пересекаются в одной точке, никакие четыре плоскости не имеют общих точек)

§2. Решение комбинаторных задач

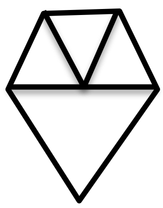
Рассмотрим решения некоторых, наиболее интересных, на наш взгляд, задач:

1. Задача о разрезании пятиугольника на остроугольные треугольники

Можно ли разрезать на четыре остроугольных треугольника а) какой-нибудь выпуклый пятиугольник, б) правильный пятиугольник.

Решение.

а)



б) каждая сторона пятиугольника содержит сторону одного из треугольников. У пятиугольника пять сторон, а треугольников у нас четыре. Значит, какие-то стороны пятиугольника содержит стороны одного и того же треугольника. Следовательно, угол между этими сторонами тупой. Противоречие с тем, что все треугольники должны быть остроугольными.

Ответ: а) да; б) нет.

2. Задача на разрезание *n*-угольников

Какое наибольшее количество непересекающихся диагоналей можно провести в выпуклом n-угольнике (допускающие диагонали, имеющие общую вершину)?

Для того чтобы заинтересовать учащихся какой-либо задачей ее можно представить в виде «псевдо-исторической» легенды:

«В 4-3 вв. до н. э. жил в греческом городе Сиракузы известный ученый Архимед. Кто-то считал его чудаком, кто-то лодырем, но многие признавали его талант архитектора, математика, астронома. Есть интересная легенда, рассказывающая о том, как он погиб: в 212 году до н. э. во время боя конь одного из римских воинов, прибывшего во двор Архимеда с целью привести того к своим военачальником для того, чтобы Архимед показал наиболее уязвимые места в оборонительных сооружениях города, копытами стер чертеж на песке, над которым ученый работал. Архимед, которого вопросы геометрических построений волновали в тот момент больше, нежели все перипетии на свете, возмутился и дерзко отказался повиноваться, за что и был убит. Сиракузы, в конце концов, пали и были разгромлены и разграблены, но… кто-то заинтересовался, что же так увлекло, тогда Архимеда и что за чертежи он рисовал. И знаете, оказалось, что он решал комбинаторную задачу на разрезание n-угольников, которая сегодня звучит так: какое наибольшее количество непересекающихся диагоналей можно провести в выпуклом n-угольнике (допускаются диагонали, имеющие общую вершину) ».

Решение. Каждая проведенная диагональ увеличивает число многоугольников-частей на 1. Поэтому, проведя k –

непересекающихся диагоналей, мы разрежем n – угольник на k+1 многоугольников.

<u>I-ый способ</u>. Общее число сторон получившихся частей равно n+2k (каждая сторона является стороной двух многоугольников). У каждого многоугольника не меньше трех сторон. Поэтому

$n+2k \geq 3(k+1)$,

т.е. $k \leq n-3$.

<u>II-ой способ.</u> Общая сумма углов получившихся частей равна сумме углов исходного n-угольника, т.е. $(n-2) \cdot 180°$. Сумма углов каждого многоугольника не меньше 180°. Поэтому

$n-2k \geq k+1$, т.е. $k \leq n-3$.

3. Задача о количестве треугольников, на которые непересекающиеся диагонали разбивают *n*-угольник

Докажите, что количество треугольников, на которые непересекающиеся диагонали разбивают n-угольник, равно n-2.

Эту задачу предлагаю оформить в виде такой легенды:

В славном городке N жили два волшебных человека Карандаш и Самоделкин. Однажды Карандаш, задумчиво водя носом по стене, нарисовал замысловатую фигуру – многоугольник с таким большим числом вершин, что даже не знал как его и назвать. А потом задумался, а как можно определить площадь такой фигуры? Ведь он пока умел определять только площади треугольников. Как всегда на помощь другу пришел мастер Самоделкин, который посоветовал Карандашу разделить многоугольник на треугольники, проведя для этого из каждой вершины непересекающиеся диагонали и сложить все их площади. Карандаш последовал совету товарища, но заметил одну закономерность: количество треугольников в любом многоугольнике при разбиении его непересекающимися диагоналями всегда равно *n-2* (где *n* – количество вершин многоугольника).

Решение. Сумма всех углов полученных треугольников равна сумме углов многоугольника, т.е. равна $(n-2)\cdot 180°$. Поэтому количество треугольников равно *n-2*.

Мы рассмотрели несколько задач и показали их способы решения. Выбрала наиболее интересные задачи, показала свое видение.

4. Задача о разрезания выпуклого многоугольника на остроугольные треугольники с непересекающимися диагоналями

Докажите, что выпуклый многоугольник может быть разрезан непересекающимися диагоналями на остроугольные треугольники не более, чем одним способом.

Решение.

Пусть дан выпуклый n -угольник. Утверждение верно при n=3 . Пусть $n \geq 4$.

Будем называть триангуляцией разбиение n -угольника непересекающимися диагоналями на треугольники; остроугольной триангуляцией назовем разбиение n -угольника непересекающимися диагоналями на остроугольные треугольники. Треугольник из триангуляции назовем крайним, если две из его сторон являются сторонами n -угольника.

Нам понадобятся следующие утверждения:

(i) *В любой триангуляции найдутся по меньшей мере два крайних треугольника.*

Действительно, сумма углов всех треугольников из триангуляции равна сумме углов n-угольника, т.е. равна $(n\text{-}2)\pi$. Поскольку сумма углов треугольника равна π, количество треугольников в триангуляции равно $n\text{-}2$. Каждая из n сторон многоугольника является стороной одного из $n\text{-}2$ треугольников, причем у одного треугольника не более двух сторон являются сторонами n-угольника. Отсюда легко следует **(i)**.

(ii) *У выпуклого n-угольника не более трех острых углов.*

Действительно, предположив противное, получаем, что у n-угольника найдутся хотя бы 4 тупых внешних угла, сумма которых больше, чем $4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$. Но как известно, сумма внешних углов выпуклого n-угольника равна 2π. Противоречие.

Перейдем к решению задачи. Предположим, что нашлись две различные остроугольные триангуляции Δ_1, Δ_2 выпуклого n-угольника. Обозначим через A множество всех острых углов n-угольника. Рассмотрим крайний треугольник T триангуляции Δ_1. Один из его углов является углом n-угольника. А поскольку T остроугольный, этот угол является углом из множества A. Так как найдутся два крайних треугольника в триангуляции Δ_1 (согласно **(i)**), то два угла из множества A являются углами крайних треугольников триангуляции Δ_1. То же справедливо и для триангуляции Δ_2. Согласно **(ii)**, в множестве A содержится не более трех углов. Следовательно, хотя бы один угол из множества A одновременно является углом крайнего треугольника T_1 триангуляции Δ_1 и крайнего треугольника T_2 триангуляции Δ_2. Это означает, что треугольники T_1 и T_2 совпадают, т.е. что в Δ_1 и Δ_2 имеется общий крайний треугольник. Отрезав его, перейдем к исходной задаче для выпуклого $(n\text{-}1)$-угольника. Продолжая процесс отрезания крайних треугольников, получаем, что Δ_1 и Δ_2 состоят из одинаковых наборов треугольников.

5. Задача о разрезании окружности непересекающимися хордами.

На окружности расположены 20 *точек. Эти* 20 *точек попарно соединяются* 10 *непересекающимися хордами, не имеющими общих концов. Сколькими способами можно это сделать?*

Решение.

Пусть a_n – количество способов соединить $2n$ точек на окружности с помощью n непересекающихся хорд. Знаем, что $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$. Покажем, что $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}a_1 + a_{n-3}a_2 + \cdots + a_1a_{n-2} + a_{n-1}$.

Фиксируем одну из данных $2n$ точек. Хорда, выходящая из неё, делит окружность на две дуги, причём на каждой дуге расположено чётное число данных точек. Если на одной дуге расположено $2k$ точек, то на другой — $2(n - k - 1)$ точек; эти точки можно соединить непересекающимися хордами (не пересекающими первую хорду) $a_{n-k-1}a_k$ способами. Осталось просуммировать по k от 0 до $2n - 2$.

Таким образом,

$$a_3 = 2a_2 + a_1^2 = 5, a_4 = 2a_3 + 2a_1a_2 = 14, a_5 = 2a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2 = 42, \ldots, a_{10} = 16796.$$

Ответ: 16796.

Глава 2. Производящие функции для классических комбинаторных последовательностей

§1. Числа Каталана

Последовательность вычислений арифметических выражений задается расстановкой скобок, например, $(3-1)\cdot(4+(15-9)\cdot(2+6))$.

Если удалить все элементы выражения, кроме скобок, остальные скобки образуют правильную скобочную структуру:

$$()(()()).$$

Это все правильные скобочные структуры с числом пар 1,2 и 3:

$$()$$

$$()()\ (())$$

$$()()()\ ()(())\ (())()\ (()())\ ((()))$$

<u>*Определение 1.1.*</u> *Числом Каталана* c_n называется число различных правильных скобочных структур из n пар скобок.

Предположим, что $c_n = 1$. Тогда последовательность чисел Каталана будет таким:

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, . . .

Чтобы получить производящую функцию для чисел Каталана, найдем сначала рекуррентное соотношение для этих чисел.

Каждая правильная скобочная структура удовлетворяет следующим двум условиям:

1) число левых и правых скобок в правильной скобочной структуре одинаково;

2) число левых скобок в любом начальном отрезке правильной скобочной структуры не меньше числа правых скобок.

Наоборот, всякая (конечная) последовательность левых и правых скобок, удовлетворяющая условиям 1) и 2), является правильной скобочной структурой.

В правильной скобочной структуре все скобки разбиваются на пары: каждой левой скобке, соответствует парная ей правая. Парная правая скобка определяется следующим правилом: это первая правая скобка справа от данной левой скобки, такая, что между выбранными двумя скобками стоит правильная скобочная структура.

Сколько существует правильных скобочных последовательностей, состоящих из *2n* скобок (n открывающих и n закрывающих)? Например, при n =5

$$c_5 = c_0c_4 + c_1c_3 + c_2c_2 + c_3c_1 + c_4c_0 = 1 \cdot 14 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 14 \cdot 1 = 42$$

Рассмотрим производящую функцию для чисел Каталана

$$Cat(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \ldots = 1 + s + 2s^2 + 5s^3 + \ldots$$

Возведя ее в квадрат и умножив результат на s, получим

$$s\,Cat^2(s) = c_0^2 s + (c_0c_1 + c_1c_0)s^2 + (c_0c_2 + c_1c_1 + c_2c_0)s^2 + \ldots = s + 2s^2 + 5s^3 + 14s^4 + \ldots = Cat(s) - 1,$$

что дает нам квадратное уравнение на производящую функцию

$$s\,Cat^2(s) - Cat(s) + 1 = 0,$$

откуда

$$Cat(s) = \frac{1-\sqrt{1-4s}}{2s}. \qquad (1.1)$$

(Второй корень уравнения отбрасывается, так как $\frac{1+\sqrt{1-4s}}{2s} = \frac{1}{s} + \ldots$ содержит отрицательные степени s.)

С помощью производящей функцией (1.1) можем найти формулу для чисел Каталана. Согласно биному Ньютона

$$c_n = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2} \cdot 4^{n+1}}{2(n+1)!},$$

откуда, умножая числитель и знаменатель на $n!$ и сокращая на 2^{n+1}, получаем

$$c_n = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Последняя формула дает и более простое (хотя и с переменными коэффициентами) рекуррентное соотношение для чисел Каталана:

$$c_{n+1} = \frac{4n-2}{n+1}c_{n-1}, n > 0.$$

или $$\mathrm{c}_n = c_{2n}^{n} - c_{2n}^{n-1}$$

Числа Каталана перечисляют самые разнообразные комбинаторные объекты. Известно несколько десятков их различных определений. Приведем лишь две часто встречающиеся их реализации.

Рассмотрим выпуклый (n + 2)-угольник, вершины которого занумерованы против часовой стрелки числами от 0 до n + 1. *Диагональной триангуляцией,* назовем разбиение многоугольника на треугольники непересекающимися диагоналями. Всякая такая триангуляция содержит $n - 1$ диагональ. На рис. 1.1 приведены все различные диагональные триангуляции четырехугольника и пятиугольника.

Пусть t_n— число триангуляций (n + 2)-угольника при $n \geq 1$; положим $t_0 = 1$. Рассмотрим произвольную триангуляцию и выделим треугольник, примыкающий к стороне 01 (см. рис. 2.2). Пусть k — номер третьей вершины этого треугольника. Выделенный треугольник разбивает (n + 2)-угольник на k-угольник и ($n - k$ + 3)-угольник, каждый из которых триангулирован диагоналями. Перенумеруем вершины этих многоугольников против часовой стрелки так, чтобы нумерация вершин в каждом из них начиналась с 0 (см. рис. 1.3).

В результате получим пару триангуляций k-угольника и $(n-k+3)$-угольника.

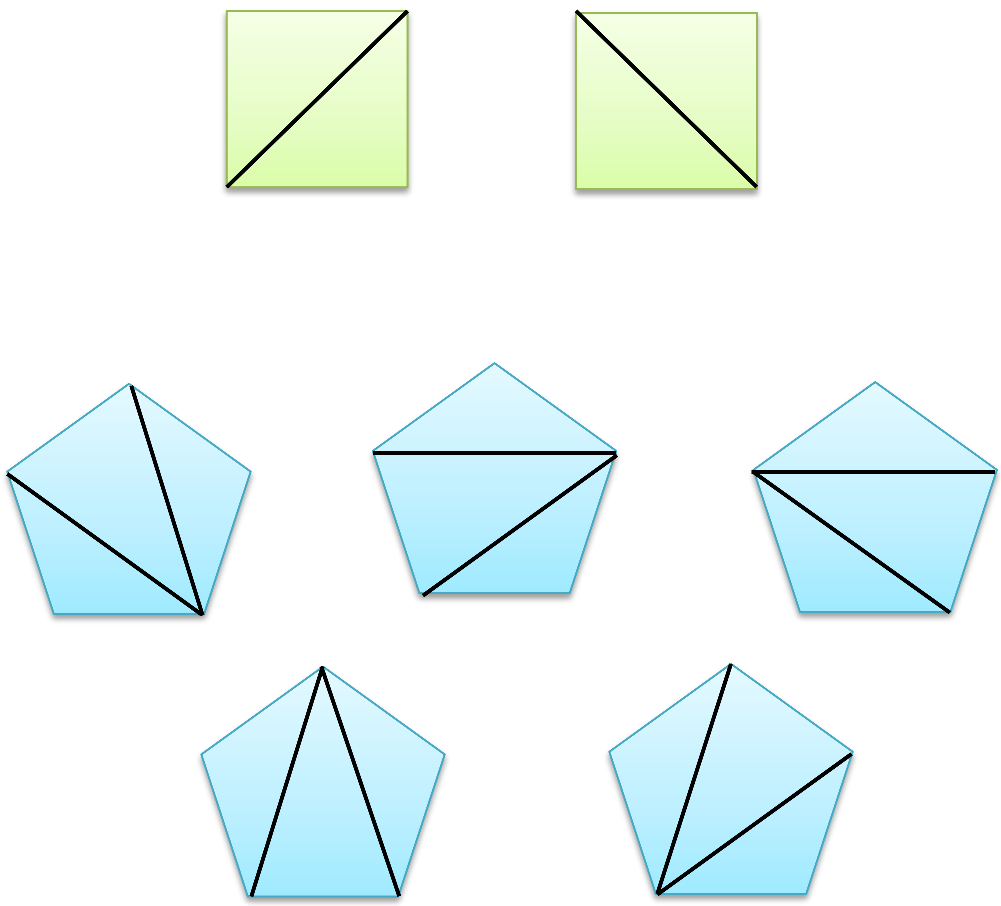


Рис. 1.1. Диагональные триангуляции 4- и 5-угольника

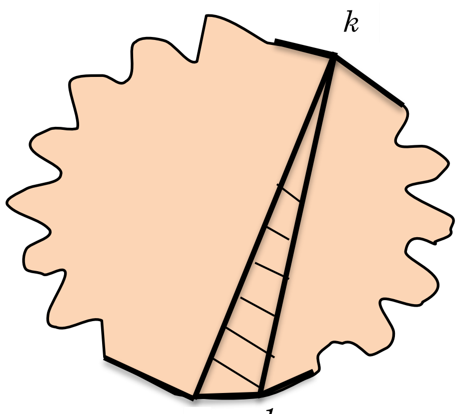


Рис.1.2 Треугольник, примыкающий к стороне 01

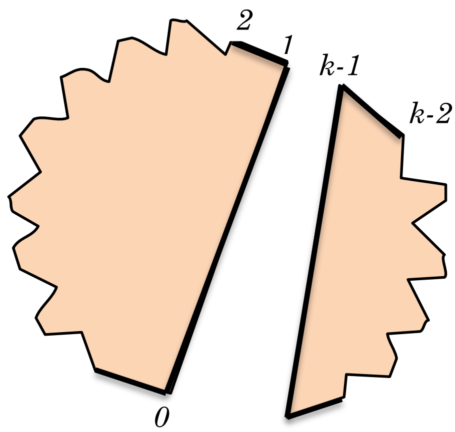


Рис.1.3 Перенумерация вершин многоугольников разбиения

Наоборот, каждая пара триангуляций k- угольника и *(n-k+3)*- угольника определяет триангуляцию исходного многоугольника. Поэтому

$$t_{n+1} = t_0 t_n + t_1 t_{n-1} + \ldots + t_n t_0,$$

и, поскольку $t_0 = 1$, последовательность чисел t_n совпадает с последовательностью Каталана.

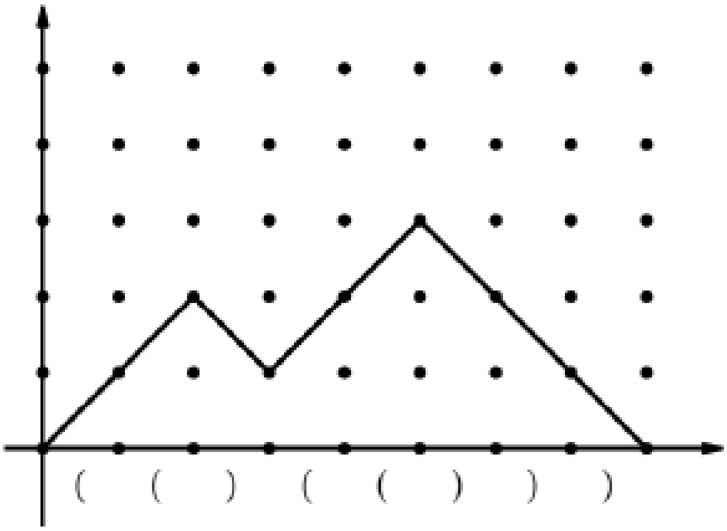
Описанная выше процедура сопоставляется триангуляции *(n+2)*-угольника пары триангуляций *k*-угольника и *(n-k+3)*-угольника позволяет установить и взаимно однозначное соответствие между триангуляциями *(n+2)*-угольника и скобочными структурами из n пар скобок. Действительно, предположим, что для всех меньших значений n такое соответствие установлено. Каждой триангуляции *(n+2)*-угольника мы сопоставили пару триангуляций многоугольников с меньшим числом сторон. По предположению, этой паре триангуляций соответствует пара скобочных структур. Заключим первую из этих скобочных структур в скобки и припишем к ней вторую – получим новую скобочную структуру, соответствующую исходной триангуляции всего *(n+2)*- угольника.

§2. Пути Дика

Важная реализация чисел Каталана связана с путями Дика. На плоскости рассмотрим целочисленную решетку в положительном квадранте. *Путем Дика* называется непрерывная ломаная в верхней полуплоскости, составленная из векторов (1,1) (назовем его подъемом) и (1,−1) (назовем его спадом),

начинающаяся в начале координат и заканчивающаяся на оси абсцисс.

Совершенно ясно, как устанавливается соответствие между путями Дика и правильными скобочными структурами: нужно



сопоставить вектору (1,1) левую скобку, а вектору (1,1) — правую скобку (Рис.1.4). Тогда условие, что путь лежит в верхней полуплоскости и заканчивается на оси абсцисс, и есть в точности условие правильности скобочной структуры. Поэтому число путей Дика из звеньев равному числу Каталана.

Также можно интерпретировать эти числа, как числа маршрутов шахматного короля из левого нижнего угла в правый нижний угол шахматной доски размером $(2n + 1) \times (2n + 1)$, при условии, что король может ходить только по направлению "вправо-вверх" и "вправо-вниз".

§3. Числа Моцкина

Предположим теперь, что кроме открывающихся и закрывающей в последовательности может присутствовать еще один символ, не нарушающий правильность правильных скобочных последовательностей. Например, символ «0». Такую последовательность будем называть «правильная скобочная последовательность, разреженная нулями». Например, количество таких последовательностей, состоящих из 4 элементов, равно 9:

0000, ()00, 0()0, 00(), (0)0, 0(0), (00), ()(), (()).

Выведем формулу для количества M_n правильных скобочных последовательностей, разреженных нулями и состоящих из n символов. Сперва отметим, что число пар скобок, которые могут присутствовать в такой правильной скобочной последовательности, разреженной нулями, равно $[\frac{\pi}{2}]$. Если некоторая правильная скобочная последовательность, разреженная нулями, содержит правильных скобочных последовательностей из k пар скобок, то в ней также содержится $n-2k$ символов «0». Скобки, которые соответствуют правильным скобочным последовательностям, могут быть упорядочены C_k способами и установлены на n свободных позиций C_n^{2k} способами (остальные позиции занимают символы «0»). Таким образом, общая формула имеет вид:

$$M_n = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^{2i} C_i, \text{где } C_i = \frac{1}{i+1} C_{2i}^{i}.$$

Числа Моцкина также можно интерпретировать, как количество *маршрутов шахматного короля* из левой нижней клетки в первую нижнюю клетку шахматной доски размером $(n+1)\times(n+1)$, при условии, что он можетт двигаться по направлениям «вправо-вверх», «вправо-вниз» и «вправо».

Чсила Моцкина равны также количеству способов соединить n точек окружности непересекающимися хордами.

Начало последовательности Моцкина:

1, 1, 2, 4, 9, 21, 51, 127, 323, 835, 2188, 5798, 15511, 41835, 113634, 310572, 853467, 2356779, 6536382, 18199284, 59852019, 142547559, 400763223, 1129760415, 3192727797, 9043402501, 25669818476, 73007772802, 208023278209, 593742784829, … .

Чтобы вывести производящую функцию для чисел Моцкина, найдем сначала *рекуррентное соотношение* для этих чисел.

$$M_n = M_{n+1} + \sum_{k=0}^{n=1} M_n M_{n-2-k}$$

Производящую функцию ищем в виде

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n z^n$$

получаем:

$$G(z) = 1 + zG(z) + z^2G^2(z),$$

$$z^2G^2(z) + G(z)(z-1) + 1 = 0,$$

$$G(z) = \frac{(1-z) - \sqrt{1-2x-3z^2}}{2z^2}.$$

Известны многие их свойства и выражения, связывающие пути Моцкина с известными комбинаторными числами. Например, числа Моцкина M_n и числа Каталана C_n:

$$M_n = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^{2i} C_i \qquad C_{n+1} \sum_{i=0}^{n} C_n^i M_i, n \geq 0.$$

§4. Производящие функции нескольких переменных

Понятие производящей функции естественным образом распространяется на функции нескольких переменных. Производящие функции двух переменных отвечают двух индексным последовательностям. Такие последовательности удобно записывать в виде треугольник (соответствующего положительному квадрату целочисленной решетки).

§4.1. *Треугольник Паскаля*

Треугольник Паскаля изображен на рисунке 1. Элементы этого треугольника перечисляют пути, идущие из его вершины в соответствующую клетку. Пути имеют вид ломаных, составленных из векторов единичной длины двух видов: идущих вправо-вниз и идущих влево-вниз.

Числа, стоящие в треугольнике Паскаля, - это уже хорошо знакомые нам биномиальные коэффициенты

$$c_{n,k} = \binom{n}{k}.$$

Это не сложно доказать индукцией по n. Предположим, что числа в n-й строке треугольника совпадают с коэффициентами разложения многочлена $(1+s)^n$. Число различных путец, ведущих в точку $(n+1,k)$, равно сумме числа путей, ведущих в точку $(n,k-1)$, и числа путей, ведущих в точку (n,k), $c_{n+1,k} = c_{n,k-1} + c_{n,k}$. Поэтому число $c_{n+1,k}$ совпадает с коэффициентом при s^k в многочлене $(1+s)\cdot(1+s)^n = (1+s)^{n+1}$.

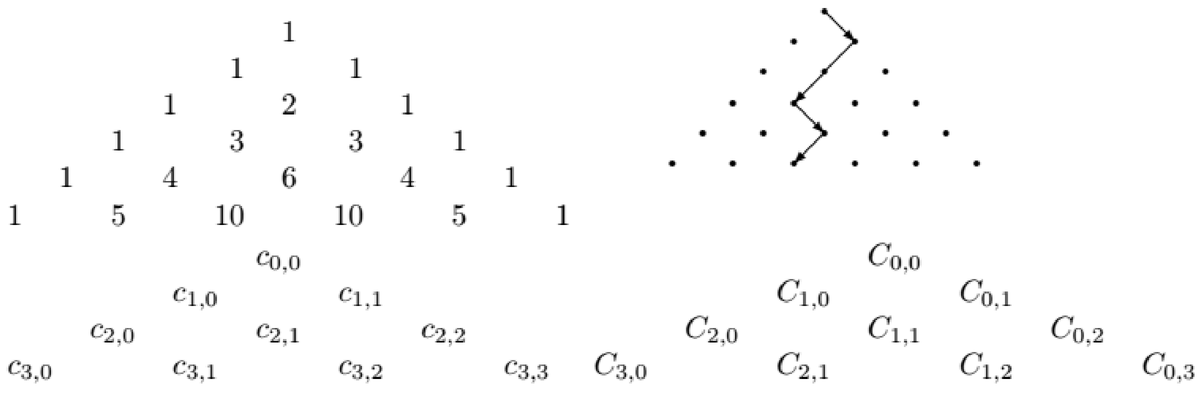


Рисунок 1

Производящая функция может быть сопоставлена треугольнику Паскаля несколькими способами. Например, можно рассмотреть производящую функцию

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} c_{n,k} x^k y^n = \sum_{n,k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \right) y^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (1+x)^n y^n = \frac{1}{1-y-xy}.$$

Второй способ соответствует нумерации элементов треугольника числом отрезков каждого типа на путях, ведущих в соответствующую точку (рисунок 5 г)). Для этой нумерации

$$C_{n,m} = c_{n+m,m} = \frac{1}{1-x-y},$$

и производящая функция имеет вид

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} C_{n,m} x^n y^m = \sum_{n,m=0}^{\infty} \binom{n+m}{m} x^n y^m = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n+m=k} \binom{n+m}{m} x^n y^m$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (x+y)^k = \frac{1}{1-x-y}.$$

На этот раз она оказалось симметричной по переменным x и y.

§4.2. *Треугольник Каталана*

Треугольником Каталана называется арифметический треугольник, в котором m-й элемент n-й строки ($n \geq 0, 0 \leq m \leq n$) определяется по формуле

$$C_{nm} = \frac{(n+m)!\,(n-m+1)}{m!\,(n+1)!}.$$

Так,

$$C_{00} = \frac{0! \cdot 1}{0! \cdot 1!} = 1,$$

$$C_{10} = \frac{1! \cdot 2}{0! \cdot 2!} = 1, \quad C_{11} = \frac{2! \cdot 1}{1! \cdot 2!} = 1,$$

$$C_{20} = \frac{2! \cdot 3}{0! \cdot 3!} = 1, \quad C_{21} = \frac{3! \cdot 2}{1! \cdot 3!} = 2, \quad C_{22} = \frac{4! \cdot 1}{2! \cdot 3!} = 2$$

и т.д. Первые несколько строк треугольника Каталана представлены на рисунке 6.

Впрочем, существует и гораздо более простой способ построения треугольника Каталана. Для его получения заметим, что *левая сторона треугольника Каталана состоит из единиц:*

$$C_{n0} = \frac{n!\,(n+1)}{0!\,(n+1)!} = 1.$$

$$\begin{array}{cccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 \\
1 & 2 & 2 \\
1 & 3 & 5 & 5 \\
1 & 4 & 9 & 14 & 14 \\
1 & 5 & 14 & 28 & 42 & 42 \\
1 & 6 & 20 & 48 & 90 & 132 & 132 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot
\end{array}$$

Кроме того, *правая сторона треугольника Каталана состоит из числе Каталана* $C_1, C_2, C_3 \ldots$:

$$C_{nn} = \frac{(2n)! \cdot 1}{n!\,(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n!\,n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_{n+1}.$$

Наконец, легко убедиться, что *любой внутренний элемент треугольника Каталана* $C_{(n+1)m}$ *может быть получен как сумма его левого и верхнего соседей*. Действительно,

$$C_{nm} + C_{(n+1)(m-1)} = \frac{(n+m)!\,(n-m+1)}{m!\,(n+1)!} + \frac{(n+m)!\,(n-m+3)}{(m-1)!\,(n+2)!}$$

$$= \frac{(n+m)!}{(n+1)!\,(m-1)!} \cdot \left(\frac{n-m+1}{m} + \frac{n-m+3}{n+2}\right)$$

$$= \frac{(n+m)!}{(n+1)!\,(m-1)!} \frac{(n+m+1)(n+2) + m(n-m+3)}{m(n+2)}$$

$$= \frac{(n+m)(n^2 - nm + n + 2n - 2n + 2 + nm - m^2 + 3m)}{(n+1)!\,(m-1)!\,(n+2)m}$$

$$= \frac{(n+m)!\,(n+m+1)(n-m+2)}{m!\,(n+2)!} = \frac{(n+1+m)!\,(n-m+2)}{m!\,(n+2)!}$$

$$= C_{(n+1)m}.$$

Следовательно, построение треугольника Каталана можно осуществить рекурсивно:

- крайний левый элемент каждой строки треугольника равен единице:$C_{n0} = 1$;
- крайний правый элемент каждой строки треугольника равен числу Каталана: $C_{nn} = C_{n+1}$;
- любой внутренний элемент треугольника получается как сумма его верхнего и левого соседей: $C_{(n+1)m} = C_{nm} + C_{(n+1)(m-1)}$.

Данный арифметический треугольник обладает и рядом других интересных свойств. Так, *предпоследний элемент любой строки треугольника Каталана совпадает с последним элементом той же строки и, следовательно, с соответствующим числом Каталана:*

$$C_{n(n-1)} = \frac{(n+n-1)! \cdot 2}{(n-1)!\,(n+1)!} = \frac{(2n-1)! \cdot 2n}{(n-1)! \cdot n \cdot (n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!} = C_{nn} = C_{n+1}.$$

Кроме того, *сумма элементов любой строки треугольника Каталана равна последнему элементу следующей строки и, следовательно, числу Каталана* C_{n+2}:

$$C_{n0} + C_{n1} + .. + C_{nn} = \frac{n!\,(n+1)}{0!\,(n+1)!} + \frac{(n+1)!\,n}{1!\,(n+1)!} + .. + \frac{(2n)! \cdot 1}{n!\,(n+1)!}$$
$$= \frac{1}{n+1}\left[\binom{n}{0}(n+1) + \binom{n+1}{1} \cdot n + .. + \binom{n+n}{n} \cdot 1\right]$$
$$= \frac{1}{n+1}\binom{2n+2}{n+2} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)n!\,(n+2)!} = \frac{(2n+2)!}{\left((n+1)!\right)^2 (n+2)}$$
$$= \frac{1}{n+2}\binom{2(n+1)}{n+1} = C_{n+2}.$$

§5. Примеры задач на комбинаторные числа

Задача 3.1.

Сколькими способами можно пройти из левого нижнего угла 3×3 *доски в её правый верхний угол, сдвигаясь каждым ходом по линиям сетки вверх или вправо и ни разу не оказавшись выше диагонали .*

Решение.

Мы видим, что количество способов является числом Каталана. Число Каталана вычисляется по формуле: $C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$. У нас n=3. Вычисляем

$$C_5 = \frac{1}{4} C_6^3 = \frac{1}{4} \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{1}{4} \frac{6!}{3!3!} = 5$$

Следовательно, 5 способами можно пройти из левого нижнего угла доски в её правый верхний угол, сдвигаясь каждым ходом по линиям сетки вверх или вправо и ни разу не оказавшись выше диагонали.

Проверим вычисления с помощью программного пакета Maple:

```
> n:=3;
n:=3
> Catalon_numbers:=binomial(2*n, n)/(n+1);
Catalon_numbers:=5
```

Ответ: 5.

Задача 3.2.

На окружности отмечены 18 точек. Сколькими способами можно так разбить их на пары, чтобы соответствующие хорды не пересекались?

Решение.

Из условии видно, что количество способов является числом Каталана. Число Каталана вычисляется по формуле:

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

В нашем случае n=9 Вычислим:

$$C_9 = \frac{1}{10} C_{18}^9 = \frac{1}{10} \frac{18!}{9!(18-9)!} = \frac{1}{10} \frac{18!}{9!9!} = 4862,$$

следовательно, 4862 способов. Проверим вычисления с помощью программного пакета Maple:

```
> n:=9;
```

$n := 9$

```
> Catalon_numbers:=binomial(2*n, n)/(n+1);
```

$Catalon\_numbers := 4862$

Ответ: 4862.

Задача 3.3.

Сколькими способами можно триангулировать выпуклый 6-угольник?

Решение.

Количество различных триангуляций выпуклого (n+2)-угольника равно числу Каталана. Числа Каталана вычисляются по формуле:

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

n=4 , поэтому $C_4 = \frac{1}{5} C_8^4 = \frac{1}{5} \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{1}{5} \frac{8!}{4!4!} = 14$, то есть выпуклый 6- угольник можно триангулировать 14 способами.

Проверим вычисления с помощью программного пакета Maple:

```
> n:=4;
```

$n := 4$

```
> Catalon_numbers:=binomial(2*n, n)/(n+1);
```

$Catalon\_numbers := 14$

Ответ: 14

Задача 3.4.

Сколькими способами король может пройти из левого нижнего угла шахматной доски 23×23 *в правый нижний угол, сдвигаясь каждым ходом по направлению "вправо-вверх" и "вправо-вниз".*

Решение.

Вычислим по формуле:

$$C_n = C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n-1}.$$

В нашем случае n=11. Вычислим

$$C_{11} = C_{22}^{11} - C_{22}^{10} = \frac{22!}{11!\cdot 11!} - \frac{22!}{10!\cdot 12!} = 705432 - 646646 = 58786$$

следовательно, 58786 способов

Проверим вычисления с помощью программного пакета Maple:

```
> n:=11;
```

n:=11

```
> Catalon_numbers:=binomial(2*n, n)-binomial(2*n, n-1);
```

Catalon_numbers := 58786

Ответ: 58786.

Задача 3.5.

Докажите, что число Каталана C_n *нечетно тогда и только тогда, когда* $n = 2^k, k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Решение.

Поскольку сумма $C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_1$ одинаково читается как и слева направо, так и справа налево, то четны все числа $C_{2n-1}, n>0$; по той же причине число C_{2n} четно тогда и только тогда, когда четно число C_n.

Задача 3.6.

Сколькими способами король может перейти из левой нижней клетки в правую нижнюю клетку шахматной доски размером 8×8, *при условии, что он также может двигаться по направлениям «вправо-вверх», «вправо-вниз» и «вправо».*

Решение.

Из условии видно, что количество способов является числом Моцкина. Число Моцкина вычисляется по формуле $M_n = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^{2i}\, C_i$, где C_i число Каталана.

$$M_n = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^{2i} \frac{1}{i+1} C_{2i}^{i} = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{1}{i+1} C_n^{2i}\, C_{2i}^{i}.$$

В нашем случае $n = 7$.

$$M_7 = \sum_{i=0}^{3} \frac{1}{i+1} C_3^{2i}\, C_{2i}^{i} = C_7^0 C_0^0 + \frac{1}{2} C_7^2 C_2^1 + \frac{1}{3} C_7^4 C_4^2 + \frac{1}{4} C_7^6 C_6^3$$

$$= \frac{1}{1}\frac{7!}{7!} + \frac{1}{2}\frac{7!}{2!\,5!}\frac{2!}{1!\,1!} + \frac{1}{3}\frac{7!}{4!\,3!}\frac{4!}{2!\,2!} + \frac{1}{4}\frac{7!}{6!\,1!}\frac{6!}{3!\,3!} = 127$$

Следовательно, 127 способами король может перейти из левой нижней клетки в правую нижнюю клетку шахматной доски размером 8×8, при условии, что он также может двигаться по направлениям «вправо-вверх», «вправо-вниз» и «вправо».

Проверим вычисления с помощью программного пакета Maple:

```
> n:=7;
                              n := 7
> Motzkin_numbers:=sum(binomial(n+1,k)*binomial(n+1-k,k-1),
k=0..ceil((n+1)/2))/(n+1);
                       Motzkin_numbers := 127
```

Ответ: 127.

Задача 3.7.

Сколькими способами можно соединить 5 точек с помощью непересекающихся хорд.

Решение.

Количество способов соединить n точек окружности непересекающимися хордами равно числу Моцкина. Имеем

$$M_n = \sum\nolimits_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2i} \frac{1}{i+1} = \sum\nolimits_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{i+1} C_n^{2i} C_{2i}^{i}.$$

В нашем случае $n = 5$.

$$M_5 = \sum_{i=0}^{2} \frac{1}{i+1} C_5^{2i} C_{2i}^{i} = C_5^0 C_0^0 + \frac{1}{2} C_5^2 C_2^1 + \frac{1}{3} C_5^4 C_4^2 = 21.$$

Следовательно, 5 точек окружности можно соединить непересекающимися хордами 21 способом.

Проверим вычисления с помощью программного пакета Maple:

```
> n:=5;
                                   n := 5
> Motzkin_numbers:=sum(binomial(n+1,k)*binomial(n+1-k,k-1),
k=0..ceil((n+1)/2))/(n+1);
                           Motzkin_numbers := 21
```

Ответ: 21.

Задача 3.8.

120 одинаковых шаров плотно уложены в виде правильной треугольной пирамиды. Сколько шаров лежит в основании?

Решение.

В первом слое – один шар, во втором – на два раза больше, т. е. три, в третьем – на три больше (шесть), и т. д.

Теперь будем складывать полученные числа до того, пока не получим 120: 1+3+6+10+15+21+28+36=120.

Ответ: 36.

Задача 3.9.

Сколькими способами можно прочитать слово «строка», двигаясь вправо или вниз?

С Т Р О К А

Т Р О К А

Р О К А

О К А

К А

А

Решение.

Понятно, что начать движение можно только с буквы «С». С каждым ходом мы опускаемся на одну диагональ ниже, и перед очередным ходом перед нами имеется выбор: идти вправо или вниз. При каждой из этих двух возможностей мы вновь опускаемся на диагональ ниже и тем самым продолжаем чтение слова «строка». Таким образом, возможностей прочитать слово «строка» столько же, сколько возможностей последовательного пятикратного выбора из двух вариантов, т. е. $2^5 = 32$.

Ответ: 32.

Задача 3.10.

Рассмотрим шахматную доску 8×8. *Требуется провести ладью из левого нижнего угла в правый верхний. Двигаться можно только вверх и вправо, не заходя при этом на клетки выше главной* *диагонали. (Ладья находится на главной диагонали) Сколько существует таких маршрутов?*

<u>Решение.</u>

							429
						132	429
					42	132	232
				14	42	90	165
			5	14	28	48	75
		2	5	9	14	20	27
	1	2	3	4	5	6	7
	1	1	1	1	1	1	1

<u>Ответ:</u> 429.

Задача 3.11.

Сколькими способами можно пройти из левой нижней клетки в правую нижнюю клетку квадратной доски размером 10×10, при условии, что он также может двигаться по направлениям "вправо-вверх", "вправо-вниз" и "вправо".

<u>Решение.</u>

Вычисляем по формуле:

$$M_n = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^{2i} \frac{1}{i+1} C_{2i}^{i} = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{1}{i+1} C_n^{2i} C_{2i}^{i}.$$

В нашем случае n=9.

$$M_9 = \sum_{i=0}^{4} \frac{1}{i+1} C_9^{2i} C_{2i}^{i} = C_9^0 C_0^0 + \frac{1}{2} C_9^2 C_2^1 + \frac{1}{3} C_9^4 C_4^2 + \frac{1}{4} C_9^6 C_6^3 + \frac{1}{5} C_9^8 C_8^4$$

$$= \frac{1}{1}\frac{9!}{9!} + \frac{1}{2}\frac{9!}{2!\,7!}\frac{2!}{1!\,1!} + \frac{1}{3}\frac{9!}{4!\,5!}\frac{4!}{2!\,2!} + \frac{1}{4}\frac{9!}{6!\,3!}\frac{6!}{3!\,3!} + \frac{1}{5}\frac{9!}{8!\,1!}\frac{8!}{4!\,4!} = 835$$

Следовательно, 835 способами король может перейти из левой нижней клетки в правую нижнюю клетку шахматной доски размером 10×10, при условии, что он также может двигаться по направлениям «вправо-вверх», «вправо-вниз» и «вправо».

Проверим вычисления с помощью программного пакета Maple:

```
> n:=9;
```

$$n := 9$$

```
> Motzkin_numbers:=sum(binomial(n+1,k)*binomial(n+1-k,k-1),
k=0..ceil((n+1)/2))/(n+1);
```

$$Motzkin\_numbers := 835$$

Ответ: 835.

Задача 3.12.

Сколькими способами король может пройти из левого нижнего угла квадратной решётки 15×15 в противоположный по диагонали угол, используя только ходы вверх, вправо или вверх-вправо («ходом короля»), с дополнительным условием, что пути не поднимаются выше диагонали.

Решение.

В нашем случае n = 15.

$$S_{15} = \sum_{k=0}^{15}\frac{1}{k+1}C_{15}^{k}C_{15+k}^{k} = \frac{1}{1}\,C_{15}^{0}C_{15}^{0} + \frac{1}{2}\,C_{15}^{1}C_{16}^{1} + \frac{1}{3}\,C_{15}^{2}C_{17}^{2} + \frac{1}{4}\,C_{15}^{3}C_{18}^{3} + \frac{1}{5}C_{15}^{4}C_{19}^{4} + \frac{1}{6}\,C_{15}^{5}C_{20}^{5} + \frac{1}{7}\,C_{15}^{6}C_{21}^{6} + \frac{1}{8}\,C_{15}^{7}C_{22}^{7} + \frac{1}{9}\,C_{15}^{8}C_{23}^{8} + \frac{1}{10}\,C_{15}^{9}C_{24}^{9} + \frac{1}{11}\,C_{15}^{10}C_{25}^{10} + \frac{1}{12}\,C_{15}^{11}C_{26}^{11} + \frac{1}{13}\,C_{15}^{12}C_{27}^{12} + \frac{1}{14}\,C_{15}^{13}C_{28}^{13} + \frac{1}{15}\,C_{15}^{14}C_{29}^{14} + \frac{1}{16}\,C_{15}^{15}C_{30}^{15} = 3937603038.$$

Таким образом, 3937603038 способами король может пройти из левого нижнего угла квадратной решётки 15×15 в противоположный по диагонали угол, используя только ходы вверх, вправо или вверх-вправо, с дополнительным условием, что пути не поднимаются выше диагонали.

Приведем решение этой задачи в пакете СКМ Maple:

```
> n:=15;
```

$$n := 15$$

```
> Schroeder_numbers:=sum(binomial(n,k)*binomial(n+k,k)/(k+1),k=0..n
);
```

$$Schroeder\_numbers := 393760303\!:$$

Ответ: 3937603038

Глава 3. Комбинаторные задачи разрезания многоугольников с помощью непересекающихся диагоналей

В этой главе мы обсудим решение задач, связанных с разрезанием выпуклых многоугольников на части с помощью непересекающихся внутри многоугольника диагоналей.

Задача 1. *Сколько существует способов разрезать выпуклый n-угольник ровно на k частей с помощью диагоналей, непересекающихся внутри многоугольника?*

<u>Решение.</u>

Обозначим через $m[n][k]$ количество способов разрезать n-угольник на k частей.

Занумеруем вершины многоугольника числами от 1 до n в порядке его обхода по часовой стрелке. Выделим одно из ребер, например, ребро 1-2, и рассмотрим ту часть *K*, которая содержит это ребро. Разобьем все способы разрезания на два непересекающихся класса:

1) те, у которых эта часть содержит ребро 2-*j,* входящее из вершины 2;
2) и те, у которых в части K нет ребра из вершины 2.

В первом случае часть K содержит ребра 1-2-*j*. Все такие разбиения можно разбить на два множества:

1a) те, в которых K – это треугольник 1-2-*j*. Удали эту часть из разбиения, получим аналогичные задачи для многоугольников с числом сторон *j-1* и *n-j+2.* Если в первом из них i частей, то второй многоугольник содержит *(k-i-1)* частей. Количество разбиений этих многоугольников равно $m[j-1][i] \cdot m[n-j+2][k-i-1]$.

1*б*) те, в которых K не является треугольником *1-2-j*. Тогда можно «объединить» ребра 1-2 и 1-2-j в одно ребро 1-j. Это означает, что из части K можно удалить треугольник 1-2-j, получив при этом аналогичную задачу для (j-1)-угольника 2-3-…-j и (n-j+2)-угольника 1-j-…-n. Если в первом из них i частей, то второй многоугольник содержит (k-1) частей. Количество разбиений теперь равно $m[j-1][i] \cdot m[n-j+2][k-i]$.

Осталось просуммировать найденные количество способов по всем значениям j от 4 до n и всем i от 0 до k-1. (Учтем, что в (j-1)-многоугольнике количество частей не может быть равно k, так как по другую сторону от ребра 2-j есть по крайней мере одна часть). Имеем $\sum_{j=4}^{n}\sum_{i=0}^{k-1} m[j-1][i] \cdot (m[n-j+2][k-i-1] + m[n-j+2][k-i])$.

Во втором случае, кроме ребра 1-2, часть K содержит также и ребро 2-3. Все такие разбиения можно разбить на два множества:

2*а*) те, в которых K – это треугольник 1-2-3. Удалив эту часть из разбиения, получим аналогичную задачу для (n-1)-угольника, который требуется разрезать на (k-1) частей. Количество таких разбиений равно $m[n-1][k-1]$.

2*б*) те, в которых K не является треугольником 1-2-3. Тогда можно объединить ребра 1-2 и 2-3 в одно ребро 1-3. Это означает, что из части K можно удалить треугольник 1-2-3, получив при этом аналогичную задачу для (n-1)-угольника 1-3+4-…-n, который нужно разрезать на k частей. Количество таких разбиений равно $m[n-1][k]$. Значит, количество способов во втором случае равно $m[n-1][k-1] + m[n-1][k]$.

Задача 2. *Найдите количество способов разрезать выпуклый n-угольник ровно на k треугольных частей с помощью непересекающихся внутри диагоналей?*

Решение:

Подсчитаем $m[n,k]$ – количество способов разрезать n-угольник на k треугольных частей.

Занумеруем вершины многоугольника числами от 1 до n в порядке его обхода по часовой стрелке. Выделим одно из ребер, например, ребро 1-2, и разобьем все способы разрезания на два непересекающихся класса:

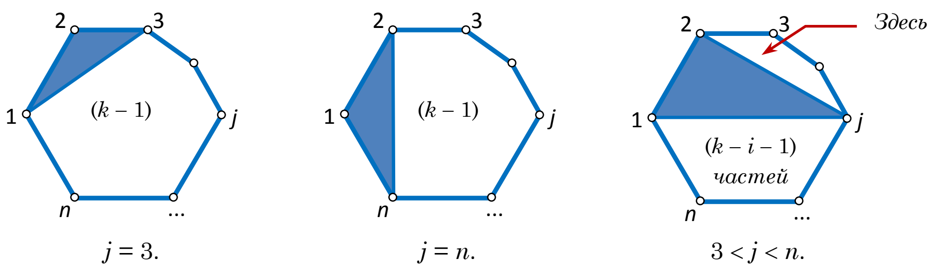
1) разбиения, которые содержат треугольный кусок с ребром 1-2;

2) разбиения, у которых нет треугольного куска с ребром 1-2;

Разбиения первого класса содержат треугольный кусок 1-2-j.

Если j равно 3 или n, треугольник 1-2-j можно удалить из разбиения, при этом получится аналогичная задача для (n-1)-угольника, который требуется разрезать на (k-1) треугольных частей. Количество таких разбиений для j=3 и для j=n равно m[n-1,k-1], всего $2 \cdot m[n-1,k-1]$.

Случай 1.



Если же $3 < j < n$, то после удаления из разбиения треугольника 1-2-j получим аналогичную задачу для двух многоугольников с числом сторон (j-1) и (n-j+2). Если в первом из них iчастей, то второй многоугольник содержит (k-i-1) частей. Количество разбиений этих многоугольников равно $m[j-1,i]\cdot m[n-j+2,k-i-1]$.

Суммируя найденные количества способов по всем значениям j от 4 до n-1 и всем i от 0 до k-1 (с учетом треугольника 1-2-j в (j-1)-многоугольнике количество частей будет меньше k), получим:

$$\sum_{j=4}^{n-1}\sum_{i=0}^{k-1} m[j-1,i]\cdot m[n-j+2,k-i-1],$$

причем m[3,1]=1 и m[3,i]=0 при $i \neq 1$. Для получения общего количества способов первого класса осталось еще добавить слагаемые, которые получились при j=3 и j=n. Сохраним общий вид формулы

$$T_1[n,k] = \sum_{j=3}^{n}\sum_{i=0}^{k-1} m[j-1,i]\cdot m[n-j+2,k-i-1],$$

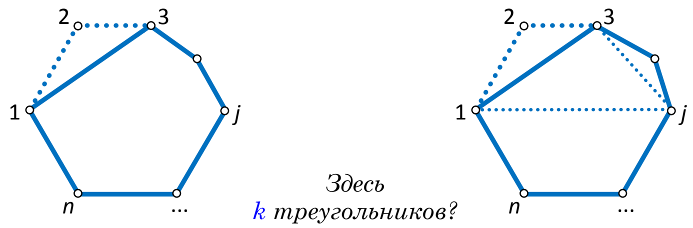
добавив дополнительные условия m[2,0]=1 и m[2,i]=0 при $i \neq 0$.

Множество разрезаний из второго класса снова разобьем на два класса:

а) ребро 1-2 не принадлежит ни одной из k треугольных частей, причем из вершины 2 не выходит ни одного ребра. В этом случае ребро 2-3 тоже не принадлежит ни одному треугольнику, и значит, ребра 1-2 и 2-3 лежат в одной и той же не треугольной части. Тогда можно слить ребра 1-2 и 2-3 в одно ребро 1-3, рассматривая задачу о разрезании (n-1)-угольника 1-3-4-…-n на k частей.

Каждая треугольная часть разбиения (n-1)-угольника 1-3-4-…-n будет входить в разрезание исходного n-угольника на k треугольников, за исключением треугольников со стороной 1-3.

Случай 2,*а*.



Именно, треугольная часть со стороной 1-3 будет для исходного многоугольника четырехугольной частью. Поэтому все разбиения (n-1)-угольника 1-3-4-…-n снова разделим на два множества.

- разбиения, которые содержат треугольные куски с ребром 1-3. Таких разбиений будет $T_1[n-1,k+1]$. (Любое разбиение (n-1)-угольника 1-3-4-…-n на (n-1) треугольников, один из которых треугольник 1-3-j, порождает соответствующее разбиение исходного n-угольника на k треугольников и один четырехугольник 1-2-3-j.)

- разбиения, которые не содержат треугольные куски с ребром 1-3. Таких разбиений будет $m[n-1,k]-T_1[n-1,k]$.

Таким образом, общее количество разбиений в случае 2,а равно

$$T_2[n,k]=m[n-1,k]-T_1[n-1,k]+T_1[n-1,k+1].$$

б) ребро 1-2 не принадлежит ни одному из k треугольников, причем из вершины 2 выходит хотя бы одно ребро. Выберем среди них ребро 2-s с наибольшим номером s. Подсчитаем, сколько треугольников с одной стороны от этого ребра, а сколько с другой. Пусть в (s-1)угольника на t треугольников равно $m[s\text{-}1,t]$.

В (n-s+3)-угольнике 1-2-s-…-n ребра 1-2 и 2-s должны лежать в одной не треугольной части разбиения, причем нет ни одного ребра из вершины 2. На основании пункта 2,а количество способов разрезать этот многоугольник на (k-t) частей равно $T_2[n-s+3,k-t]$, и тогда количество разбиений обоих многоугольников будет $m[s-1,t]\cdot T_2[n-s+3,k-t]$.

Осталось просуммировать найденные количества способов по всем значениям s от 4 до n-1 и всем t от 0 до k:

$$\sum_{s=4}^{n-1}\sum_{t=0}^{k} m[s-1,t]\cdot T_2[n-s+3,k-t],$$

Добавим в эту сумму количество способов $T_2[n,k]$ из случая 2,а. принимая во внимание, что $m[2,t]$ равно 0 при $t \neq 0$, для случая 2 окончательно получаем:

$$\sum_{s=3}^{n-1} \sum_{t0}^{k} m[s-1,t] \cdot T_2[n-s+3,k-t]$$

$$= \sum_{s=3}^{n-1} \sum_{t=0}^{k} m[s-1,t]$$

$$\cdot (m[n-s+2,k-t] - T_1[n-s+2,k-t]$$

$$+ T_1[n-s+2,k-t+1]).$$

К этой сумме добавим количество способов $T_1[n,k]$ из случая 1:

$$m[n,k] = \sum_{j=3}^{n} \sum_{i=0}^{k-1} m[j-1,i] \cdot m[n-j+2,k-i-1]$$

$$+ \sum_{s=3}^{n-1} \sum_{t=0}^{k} m[s-1,t] \cdot m[n-s+2,k-t]$$

$$+ \sum_{s=3}^{n-1} \sum_{t=0}^{k} m[s-1,t] \cdot$$

$$\cdot (T_1[n-s+2,k-t+1] - T_1[n-s+2,k-t]) =$$

$$= \sum_{j=3}^{n} \sum_{i=0}^{k-1} m[j-1,i] \cdot m[n-j+2,k-i-1]$$

$$+ \sum_{j=3}^{n-1} \sum_{i=0}^{k} m[j-1,i] \cdot m[n-j+2,k-i] + \sum_{s=3}^{n-1} \sum_{t=0}^{k} m[s-1,t]$$

$$\cdot (T_1[n-s+2,k-t+1] - T_1[n-s+2,k-t]).$$

Последнее слагаемое можно записать в виде

$$T_1[n-s+2,k-t+1] - T_1[n-s+2,k-t] =$$

$$= \sum_{j=3}^{n-s+2} \sum_{i=0}^{k-t} m[j-1,i] \cdot$$

$$\cdot (m[n-s-j+,k-t-i] + m[n-s-j+4,k-t-i-1]).$$

(Здесь для $k<0$ значение $m[n,k]$ считается равным нулю.)

Приведем решение этой задачи в пакете СКМ Maple:

>T:=(n,k)->binomial(n+k-2,k)*sum(binomial(n-2+k+i,i)*binomial(n-3-k-i,i-1),i=0..floor((n-2)/2))/(n-1):
seq(seq(T(n,k), k=0..n-2), n=2..14);

1, 0, 1, 1, 4, 12, 1, 5, 15, 40, 4, 6, -63, -448, -1750, 8, 35, 28, -336, -2100, -7812, 25, 80, 216, 2760, 24090, 134640, 566412, 64, 309, 540, 1155, 15510, 127413, 678678, 2769624, 191, 890, 2475, 3080, -94380, -1279278, -9564555, -52109200, -229266180, 540, 3058, 7788, 16302, 16016, -585585, -7343336, -52256776, -275150304, -1182803050, 1616, 9580, 30108, 54964, 96005, 4311216, 70666960, 658099104, 4409151552, 23573353960, 106478393164, 4785, 31863, 102466, 235235, 342160, 525980, 27530412, 427340628, 3802404450, 24611640690, 128249301180, 568515055836, 14512, 103054, 372981, 857360, 1601740, 1962072, -189462756, -3952186656, -44375878260, -353584540540, -2227772221906, -11769466232496, -54093363342928

В качестве примера приведем результаты, связанные с подсчетом количества таких способов разрезания выпуклого многоугольника, при которых не получается ни одного треугольника.

>T:=(n,k)->binomial(n+k-2,k)*sum(binomial(n-2+k+i,i)*binomial(n-3-k-i,i-1),i=0..floor((n-2)/2))/(n-1):
seq(seq(T(n,k), k=0), n=2..14);

1, 0, 1, 1, 4, 8, 25, 64, 191, 540, 1616, 4785, 14512

Заключение

В данной квалификационной работе рассмотрены школьные комбинаторные задачи и показаны решения наиболее интересных задач. Изучены и выведены формулы числа Каталана, Моцкина и пути Дика.

Решены примеры на вычисление чисел Каталана, Моцкина. Вычисления проверены с помощью программы пакета Maple.

Рассмотренные школьные комбинаторные задачи можно показать на элективных курсах математики. Предложенные решения задач наиболее эффективен для усвоения и предпочтителен при объяснении темы.

Данная работам может быть использовано как учебное пособие учителям школ при подготовки учеников к олимпиаде.

Литература

1. Ландо С.К. Лекции о производящих функциях. – М.: МЦНМО, 2007. – 28-36с.

2. Ландо С.К. Введение в дискретную математику. – М.: МЦНМО, 2012. –44-51 с.

3. Спивак А. Числа Каталана. // Квант. 2004. - №3. – 2-10 с.

4. О.В. Кузьмин, Т.Г.Тюрнева, Некоторые свойства и перечислительные интерпретации чисел Моцкина, 12-ая Байкальская межвузовская конференция. -Иркутск : Иркутский государственный университет, 2001.- 78-91с.

5. Dickau, R. M. Delannoy and Motzkin Numbers.http://www.prairienet.org/~pops/delannoy.html.

6. http://oeis.org/A090985.

7. http://www.problems.ru/view_by_subject_new.php?parent=373&start=10.

8. Алфутова Н. Б., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел для математических школ. – М.: МЦНМО, 2002. – 25-25 с.

9. Иванов О. А. элементарная математика для школьников, студентов и преподавателей. – М.: МЦНМО, 2009 – 64-66 с.

10. Прасолов В. В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу: Учебное пособие. – М.: МЦНМО, 2007. – 182-184 с.

11. Иванова Д. Е. Специальные числа натурального ряда: Учебное пособие. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. – 194-231.

12. http://oeis.org/A033282.