Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2011, №8, с. 40–45 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421100123\0082*

А.Г. ПИНУС

О ∞-КВАЗИМНОГООБРАЗИЯХ

Аннотация. Вводится понятие ∞-квазимногообразия и приводится характеризация ∞-квазимногообразий как классов, замкнутых относительно некоторых операторов.

Ключевые слова: универсальные алгебры, квазитождества, прямые пределы, прямые произведения, подалгебры.

УДК: 512.563

Abstract. We introduce the notion of an ∞-quasivariety and characterize ∞-quasivarieties as classes closed with respect to certain operators.

Keywords: universal algebras, quasiidentities, direct limits, direct products, subalgebras.

В алгебраической геометрии универсальных алгебр важную роль играют так называемые ∞-квазитождества (например, [1]), т. е. формулы вида

$$\forall \overline{x}\ \ (\Phi(\overline{x}) \to s(\overline{x}) = t(\overline{x}))\,,$$

где $\overline{x}$ — конечная совокупность переменных, $\Phi(\overline{x})$ — конъюнкция (возможно бесконечная) равенств между термами некоторой фиксированной сигнатуры σ от переменных $\overline{x}$, а $s(\overline{x})$, $t(\overline{x})$ — термы сигнатуры σ от переменных $\overline{x}$.

Для важнейших в алгебраической геометрии отношений $\leqslant^{\Delta}$ и $\overset{\Delta}{\sim}$ (определение из [1]) между алгебрами справедлива доказанная в [1] теорема: для алгебр $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ имеет место отношение $\mathfrak{A}_1 \leqslant^{\Delta} \mathfrak{A}_2$ ($\mathfrak{A}_1 \overset{\Delta}{\sim} \mathfrak{A}_2$) тогда и только тогда, когда все ∞-квазитождества, истинные на алгебре $\mathfrak{A}_1$, будут истинны и на алгебре $\mathfrak{A}_2$ (соответственно и обратное).

∞-квазимногообразием назовем любой класс алгебр $\mathcal{K}$ фиксированной сигнатуры σ, состоящий из всех алгебр сигнатуры σ, на которых истинны ∞-квазитождества из некоторой фиксированной совокупности таковых (∞-q-теории класса $\mathcal{K}$). Цель данной работы — рассмотрение основных свойств ∞-квазимногообразий. Некоторые сведения об аналогах квазимногообразий в бесконечных языках имеются в [2].

Прежде всего найдем описание ∞-квазимногообразий как классов, замкнутых относительно тех или иных операторов на классах алгебр. Очевидно, любое ∞-квазимногообразие замкнуто относительно перехода к подалгебрам и относительно прямых произведений, т. е. $S\mathcal{K} = \mathcal{K}$ и $P\mathcal{K} = \mathcal{K}$. Здесь традиционно $S\mathcal{K}$ — класс всех подалгебр $\mathcal{K}$-алгебр, а $P\mathcal{K}$ — класс всех прямых произведений $\mathcal{K}$-алгебр.

Через $I\mathcal{K}$ будем обозначать класс всех алгебр, изоморфных какой-либо из $\mathcal{K}$-алгебр.

Поступила 07.05.2010

Напомним, что прямым спектром $\langle \mathfrak{A}_i, \varphi_{ij}, \langle I; \leqslant \rangle \rangle$ алгебр $\mathfrak{A}_i$ называется совокупность алгебр $\mathfrak{A}_i$ $(i \in I)$, где $\langle I; \leqslant \rangle$ — некоторое направленное вверх частично упорядоченное множество, и для $i \leqslant j$ элементов из I φ_{ij} — гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_i$ в алгебру $\mathfrak{A}_j$, при этом $\varphi_{jk}\varphi_{ij} = \varphi_{ik}$ для $i \leqslant j \leqslant k$. Традиционным образом (например, [2]) определяется прямой предел $\varinjlim \langle \mathfrak{A}_i, \varphi_{ij}, \langle I; \leqslant \rangle \rangle$ прямого спектра $\langle \mathfrak{A}_i, \varphi_{ij}, \langle I; \leqslant \rangle \rangle$. Если все алгебры $\mathfrak{A}_i$ входят в некоторый класс $\mathcal{K}$, то будем говорить о прямом $\mathcal{K}$-спектре алгебр. Если, кроме того, все гомоморфизмы φ_{ij} являются изоморфными вложениями (алгебры $\mathfrak{A}_i$ в алгебру $\mathfrak{A}_j$ соответственно), то будем говорить о прямом $\mathcal{K}$-спектре вложимости. Будем естественным образом отождествлять алгебры $\mathfrak{A}_i$ из прямого спектра вложимости $\langle \mathfrak{A}_i, \varphi_{ij}, \langle I; \leqslant \rangle \rangle$ с соответствующими подалгебрами прямого предела $\varinjlim \langle \mathfrak{A}_i, \varphi_{ij}, \langle I; \leqslant \rangle \rangle$. Напомним также, что совокупность подалгебр $\mathfrak{A}_i$ $(i \in I)$ алгебры $\mathfrak{A}$ называется локальным покрытием алгебры $\mathfrak{A}$, если множество $\{\mathfrak{A}_i \mid i \in I\}$, частично упорядоченное отношением "быть подалгеброй", является направленным вверх и объединение основных множеств алгебр $\mathfrak{A}_i$ $(i \in I)$ совпадает с основным множеством алгебры $\mathfrak{A}$. Если при этом $\mathfrak{A}_i \in \mathcal{K}$, то будем говорить о локальном $\mathcal{K}$-покрытии алгебры $\mathfrak{A}$.

Очевидно, что для любого прямого $\mathcal{K}$-спектра вложимости $\langle \mathfrak{A}_i, \varphi_{ij}, \langle I; \leqslant \rangle \rangle$ совокупность алгебр $\mathfrak{A}_i$ при указанном выше отождествлении алгебр $\mathfrak{A}_i$ с подалгебрами алгебры $\varinjlim \langle \mathfrak{A}_i, \varphi_{ij}, \langle I; \leqslant \rangle \rangle$ образуют локальное $\mathcal{K}$-покрытие последней.

Верно и обратное, любая алгебра $\mathfrak{A}$, допускающая локальное $\mathcal{K}$-покрытие $\mathfrak{A}_i$ $(i \in I)$, изоморфна прямому пределу прямого $\mathcal{K}$-спектра $\langle \mathfrak{A}_i, \varphi_{ij}, \langle I; \leqslant \rangle \rangle$, где порядок $\leqslant$ на I определен следующим образом: $i \leqslant j$, если $\mathfrak{A}_i$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}_j$ и φ_{ij} — тождественные вложения алгебр $\mathfrak{A}_i$ в алгебры $\mathfrak{A}_j$ (при $i \leqslant j$).

В частности, если для класса алгебр $\mathcal{K}$ имеют место включения $I\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, $S\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, то прямой предел любого прямого $\mathcal{K}$-спектра вложимости допускает локальное $\mathcal{K}$-покрытие своими конечно порожденными подалгебрами.

Через $\underset{\rightarrowtail}{\lim}\,\mathcal{K}$ обозначим совокупность прямых пределов любых прямых $\mathcal{K}$-спектров вложимости. Очевидным образом любое ∞-квазимногообразие $\mathcal{K}$ замкнуто относительно своих прямых пределов вложимости, т. е. $\underset{\rightarrowtail}{\lim}\,\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$.

Прежде всего докажем характеризацию ∞-квазимногообразий.

Теорема 1. *Класс алгебр $\mathcal{K}$ сигнатуры σ является ∞-квазимногообразием тогда и только тогда, когда $I\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, $S\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, $P\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ и $\underset{\rightarrowtail}{\lim}\,\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$.*

Доказательство. То, что любое ∞-квазимногообразие удовлетворяет указанным включениям, замечено выше. Покажем обратное. Пусть для класса $\mathcal{K}$ имеют место включения $I\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, $S\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, $P\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, $\underset{\rightarrowtail}{\lim}\,\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$. Докажем, что $\mathcal{K}$ — ∞-квазимногообразие. Через T обозначим ∞-q-теорию класса $\mathcal{K}$ (совокупность всех ∞-квазитождеств, истинных на всех алгебрах из $\mathcal{K}$). Пусть $\mathfrak{B}$ — алгебра, на которой истинны все формулы из T. Покажем, что $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$. Как замечено выше, $\mathfrak{B}$ является прямым пределом прямого спектра вложимости своих конечно порожденных подалгебр. Таким образом, для включения достаточно показать включение в $\mathcal{K}$ любой конечно порожденной подалгебры $\mathfrak{C}$ алгебры $\mathfrak{B}$. Заметим, что на $\mathfrak{C}$ истинны формулы из T. Пусть $\mathfrak{C}$ порождена своими элементами $c_1, \ldots, c_n$. Пусть $D_1(x_1, \ldots, x_n)$ — конъюнкция формул из позитивной диаграммы алгебры $\mathfrak{C}$ такая, что $\mathfrak{C} \models D_1(c_1, \ldots, c_n)$, а $\{D_2^i(x_1, \ldots, x_n) \mid i \in I\}$ — совокупность формул (отрицаний равенств между термами от переменных $x_1, \ldots, x_n$), входящих в негативную часть диаграммы алгебры $\mathfrak{C}$ и при этом $\mathfrak{C} \models D_2^i(c_1, \ldots, c_n)$ для любого $i \in I$ $(I = \varnothing$, если $|\mathfrak{C}| = 1)$. Тогда на алгебре $\mathfrak{L}$ истинны формулы (для $i \in I$)

$$\exists x_1, \ldots, x_n \left(D_1(x_1, \ldots, x_n) \& D_2^i(x_1, \ldots, x_n) \right),$$

являющиеся отрицаниями ∞-квазитождеств

$$\Phi_i = \forall x_1, \ldots, x_n \left(D_1(x_1, \ldots, x_n) \to \neg D_2^i(x_1, \ldots, x_n) \right).$$

Тем самым $\Phi_i \notin T$, т.е. существуют алгебры $\mathfrak{A}_i$ $(i \in I)$ из $\mathcal{K}$ такие, что

$$\mathfrak{A}_i \models \exists x_1, \ldots, x_n \left(D_1(x_1, \ldots, x_n) \& D_2^i(x_1, \ldots, x_n) \right).$$

В силу этого на $\mathcal{K}$-алгебре $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ истинна формула

$$\exists x_1, \ldots, x_n \big(D_1(x_1, \ldots, x_n) \& \mathop{\&}_{i \in I} D_2^i(x_1, \ldots, x_n) \big),$$

где $D_1(x_1, \ldots, x_n) \& \mathop{\&}\limits_{i \in I} D_2^i(x_1, \ldots, x_n)$ — полная диаграмма $D(x_1, \ldots, x_n)$ алгебры $\mathfrak{L}$ такая, что

$$\mathfrak{L} \models D(c_1, \ldots, c_n).$$

В силу чего, если $d_1, \ldots, d_n \in \prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ таковы, что $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i \models D(d_1, \ldots, d_n)$, то отображение $\psi : \{c_1, \ldots, c_n\} \to \{d_1, \ldots, d_n\}$ такое, что $\psi(c_i) = d_i$, продолжимо до изоморфизма алгебры $\mathfrak{L}$ на подалгебру $\mathfrak{A}'$ алгебры $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i$, порожденной элементами $d_1, \ldots, d_n$. Включения $S\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, $P\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ и $I\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ влекут при этом включение $\mathfrak{L} \in \mathcal{K}$, что (как замечено выше) и доказывает теорему. $\square$

Приведем ряд утверждений, связанных с идемпотентностью оператора $\varinjlim$ и его коммутируемостью с операторами S и P. Отметим, что в общем случае оператор $\varinjlim$ не идемпотентен (например, [2]). Здесь $\varinjlim \mathcal{K}$ — совокупность всех прямых пределов $\mathcal{K}$-алгебр.

Лемма 1. *Если для любого класса алгебр $\mathcal{K}$ $I\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ и $S\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, то $\lim\limits_{\rightarrowtail}(\lim\limits_{\rightarrowtail} \mathcal{K}) = \lim\limits_{\rightarrowtail} \mathcal{K}$.*

Доказательство. Включение $\lim\limits_{\rightarrowtail} \mathcal{K} \subseteq \lim\limits_{\rightarrowtail}(\lim\limits_{\rightarrowtail} \mathcal{K})$ очевидно. Пусть $\mathfrak{A} \in \lim\limits_{\rightarrowtail}(\lim\limits_{\rightarrowtail} \mathcal{K})$. В силу замеченного выше существует локальное $\lim\limits_{\rightarrowtail} \mathcal{K}$-покрытие $\mathfrak{A}_i$ $(i \in I)$ алгебры $\mathfrak{A}$. В свою очередь алгебры $\mathfrak{A}_i$ $(i \in I)$ допускают локальные $\mathcal{K}$-покрытия конечно порожденными алгебрами $\mathfrak{A}_{ij}$ $(j \in I_i)$. Но тогда, очевидно, алгебра $\mathfrak{A}$ допускает локальное $\mathcal{K}$-покрытие конечно порожденными алгебрами $\mathfrak{A}_{ij}$ $(i \in I,\ j \in I_i)$. Тем самым $\mathfrak{A} \in \lim\limits_{\rightarrowtail} \mathcal{K}$, и утверждение леммы доказано. $\square$

Лемма 2. *Для любого класса $\mathcal{K}$ такого, что $I\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, имеет место включение*

$$S \lim_{\rightarrowtail} \mathcal{K} \subseteq \lim_{\rightarrowtail} S\mathcal{K}.$$

Действительно, если $\mathfrak{A}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{A}'$, допускающей локальное $\mathcal{K}$-покрытие $\mathfrak{B}_i$ $(i \in I)$, то $\mathfrak{A}$ допускает локальное $S\mathcal{K}$-покрытие $\mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{A}$ $(i \in I)$.

Лемма 3. *Для любого класса алгебр $\mathcal{K}$ имеет место включение $P \lim\limits_{\rightarrowtail} \mathcal{K} \subseteq \lim\limits_{\rightarrowtail} P\mathcal{K}$.*

Действительно, пусть алгебры $\mathfrak{A}_i$ $(i \in I)$ допускают локальные $\mathcal{K}$-покрытия $\mathfrak{A}_{ij}$ $(j \in \langle I_i; \leqslant \rangle)$ соответственно и при этом для $j_1 \leqslant j_2 \in I_i$: $\mathfrak{A}_{ij_1} \subseteq \mathfrak{A}_{ij_2}$. Тогда алгебра $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ допускает локальное $P\mathcal{K}$-покрытие алгебрами $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_{if(i)}$ $\Big(f \in \prod\limits_{i \in I} \langle I_i; \leqslant \rangle \Big)$.

Для любого класса σ-алгебр $\mathcal{K}$ через $Q_\infty(\mathcal{K})$ обозначим наименьшее ∞-квазимногообразие, включающее в себя класс $\mathcal{K}$ (∞-квазимногообразие, порожденное классом $\mathcal{K}$). Укажем для ∞-квазимногообразий следующий аналог HSP-формулы Биркгофа для многообразий.

Очевидным образом из утверждений теоремы 1 и лемм 1–3 вытекает

Теорема 2. *Для любого класса σ-алгебр $\mathcal{K}$ имеет место равенство $Q_\infty(\mathcal{K}) = \lim\limits_{\rightarrowtail} ISP(\mathcal{K})$.*

Поскольку пересечение любого числа ∞-квазимногообразий само является ∞-квазимногообразием, то совокупность всех ∞-квазимногообразий сигнатуры σ образует полную решетку $L^\sigma_{\infty-q}$ относительно теоретико-множественного включения, нулем которой является ∞-квазимногообразие одноэлементных алгебр, а единицей — совокупность всех σ-алгебр. При этом в силу теоремы 2 для любых двух ∞-квазимногообразий $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ алгебра $\mathfrak{A}$ входит в $\mathcal{K}_1 \vee \mathcal{K}_2$ тогда и только тогда, когда все ее конечно порожденные подалгебры изоморфны произведениям $\mathcal{K}_1$- и $\mathcal{K}_2$-алгебр.

Традиционным образом через L^σ_q обозначим решетку квазимногообразий сигнатуры σ. Очевидно, L^σ_q является подрешеткой решетки $L^\sigma_{\infty-q}$. Однако в отличии от L^σ_q (о свойствах последней см., например, [2]) решетка $L^\sigma_{\infty-q}$ не обязана быть атомной.

Действительно, рассмотрим сигнатуру σ, состоящую из одноместных функций $f(x)$, $g_n(x)$, где $n \in \omega$. Алгебру $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ определим следующим образом: для $n \in \omega$ $\;f(n) = n+1$; для $i \leqslant n$ $\;g_n(i) = i$, для $i > n$ $\;g_n(i) = i+1$. На алгебре $\mathfrak{A}$ истинны тождества

$$\begin{aligned}
&\forall x, y\ \ (f^n(x) = x \to y = x) \quad \text{для} \quad n \in \omega;\\
&\forall x\ \ (g_j(x) = x \to g_i(x) = x) \quad \text{для} \quad i \leqslant j;\\
&\forall x\ \ \big(g_n(f^{n+1}(x)) = f^{n+2}(x)\big)
\end{aligned}$$

и ∞-квазитождество

$$\forall x, y\ \big(\mathop{\&}_{i=0}^{\infty} g_i(x) = f(x) \to y = x\big).$$

Здесь $f^n(x)$ — n-я итерация суперпозиций функции $f(x)$. Пусть $\mathfrak{B} \in Q_\infty(\mathfrak{A})$ и $b \in \mathfrak{B}$. Через $\mathfrak{B}_n$ обозначим подалгебру алгебры $\mathfrak{B}$, порожденную элементом $f^n(b)$. Тогда для любых $i < j \in \omega$

$$Q_\infty(\mathfrak{B}_j) \subseteq Q_\infty(\mathfrak{B}_i)$$

и

$$\bigcap_{n\in\omega} Q_\infty(\mathfrak{B}_n) = O_\sigma,$$

где O_σ — совокупность одноэлементных σ-алгебр. Тем самым $Q_\infty(\mathfrak{A})$ — безатомный элемент решетки $L^\sigma_{\infty-q}$ и, значит, последняя не является атомной.

Представляет интерес выяснение иных свойств решеток $L^\sigma_{\infty-q}$, в частности, будут ли $L^\sigma_{\infty-q}$ коалгебраическими, как решетки L^σ_q [2].

Остановимся еще на одном вопросе, связанном с ∞-квазимногообразиями: нас будут интересовать атомы решеток $L^\sigma_{\infty-q}$ (в случае их существования). ∞-квазимногообразие $\mathcal{K}$ назовем ∞-q-полным, если оно является атомом в решетке $L^\sigma_{\infty-q}$ для соответствующей сигнатуры σ. Иначе говоря, если любые две неодноэлементные $\mathcal{K}$-алгебры имеют одну и ту же ∞-q-теорию или [1] любые две неодноэлементные $\mathcal{K}$-алгебры геометрически эквивалентны ($\stackrel{\Delta}{\sim}$). Алгебру $\mathfrak{A}$ назовем ∞-q-полной, если ∞-квазимногообразие $Q_{\infty-q}(\mathfrak{A})$ ∞-q-полно. Опять же в силу [1] алгебра $\mathfrak{A}$ ∞-q-полна, если класс $\mathfrak{A}/\stackrel{\Delta}{\sim}$ является коатомом в геометрической шкале любого многообразия, включающего в себя алгебру $\mathfrak{A}$.

Описание ∞-q-полных алгебр дает

Теорема 3. *Неодноэлементная алгебра $\mathfrak{A}$ ∞-q-полна тогда и только тогда, когда для любых двух неодноэлементных конечно порожденных ее подалгебр $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ и любой конечно порожденной подалгебры $\mathfrak{L}$ некоторой прямой степени $\mathfrak{A}_1^I$ алгебры $\mathfrak{A}_1$ существует прямая степень $\mathfrak{L}^J$ алгебры $\mathfrak{L}$, в которую вложима алгебра $\mathfrak{A}_2$.*

Доказательство. В силу [1] две алгебры $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ геометрически эквивалентны ($\mathfrak{A}_1 \overset{\triangle}{\sim} \mathfrak{A}_2$) тогда и только тогда, когда любая неодноэлементная конечно порожденная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}_1$ ($\mathfrak{A}_2$) изоморфно вложима в некоторую степень $\mathfrak{A}_2^I$ ($\mathfrak{A}_1^J$) алгебры $\mathfrak{A}_2$ ($\mathfrak{A}_1$). Если $\mathfrak{A}$ ∞-q-полна и $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ — ее неодноэлементные конечно порожденные подалгебры, то $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \in Q_{\infty-q}(\mathfrak{A})$ и, значит, $\mathfrak{A}_2 \overset{\triangle}{\sim} \mathfrak{A}_1^I$ для любого множества I, в частности, для любой неодноэлементной конечно порожденной подалгебры $\mathfrak{L}$ алгебры $\mathfrak{A}_1^I$ существует прямая степень $\mathfrak{L}^J$ алгебры $\mathfrak{L}$, в которую вложима алгебра $\mathfrak{A}_2$.

Докажем обратное. Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ обладает указанным в формулировке теоремы свойством. Пусть $\mathfrak{A}' \in Q_{\infty-q}(\mathfrak{A})$ и неодноэлементна. Включение $\mathfrak{A}' \in Q_{\infty-q}(\mathfrak{A})$ в силу теоремы 2 означает, что все конечно порожденные подалгебры алгебры $\mathfrak{A}'$ вложимы в прямые степени алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{L}$ — неодноэлементная конечно порожденная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}'$, т. е. $\mathfrak{L}$ изоморфна некоторой подалгебре алгебры вида $\prod\limits_{i\in I} \mathfrak{A}_i$, где $\mathfrak{A}_i$ — конечно порожденные неодноэлементные подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть $i_0 \in I$. Тогда в силу предположения для любого $i \in I$ алгебры $\mathfrak{A}_i$ изоморфно вложимы в некоторые прямые степени алгебры $\mathfrak{A}_{i_0}$. Тем самым алгебра $\mathfrak{L}$ изоморфна подалгебре некоторой прямой степени алгебры $\mathfrak{A}_{i_0}$. Для требуемого включения $\mathfrak{A} \in Q_{\infty-q}(\mathfrak{A}')$ достаточно показать, что любая неодноэлементная конечно порожденная подалгебра $\mathfrak{A}_2$ алгебры $\mathfrak{A}$ вложима в некоторую прямую степень алгебры $\mathfrak{L}$, последнее же имеет место в силу предположения (условия теоремы). □

Близкие к теореме 3 вопросы, связанные с так называемыми геометрически полными многообразиями, рассматриваются в [3].

Наконец, остановимся на вопросе о коатомах решеток $L^{\sigma}_{\infty-q}$. Как и в вопросе об атомах, ответ зависит от сигнатуры σ: так, в случае пустой сигнатуры σ решетка $L^{\sigma}_{\infty-q}$ очевидным образом двухэлементна, а значит, атомна и коатомна. В общем же случае $L^{\sigma}_{\infty-q}$ не обязана быть коатомной.

К примеру, пусть σ состоит из единственной трехместной функции $g(x,y,z)$. Прежде всего заметим, что любая σ-алгебра $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ является подалгеброй некоторой простой σ-алгебры $\mathfrak{A}' = \langle A'; \sigma\rangle$. Действительно, пусть $a \notin A$ и $A' = A \cup \{a\}$. Функцию $g(x,y,z)$ на A' определим как продолжение на A' функции g, определенной в алгебре $\mathfrak{A}$, и, кроме того, пусть $g(a,y,y) = a$ для любых $y \in A$, $g(a,y,z) = z$ для любых $y,z \in A$, если $y \neq z$, и $g(y,z,a) = y$, $g(y,a,z) = a$ для любых $y,z \in A$. Без труда замечается простота алгебры $\mathfrak{A}'$ и то, что $\mathfrak{A}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{A}'$. Алгебра $\mathfrak{A}'$ конечно порождена в случае конечной порожденности алгебры $\mathfrak{A}$.

Покажем теперь, что решетка $L^{\sigma}_{\infty-q}$ для подобной сигнатуры не имеет коатомов. Пусть $\mathcal{K}$ — произвольное ∞-квазимногообразие сигнатуры σ, не содержащее некоторую алгебру $\mathfrak{A}$. В силу теоремы 1 можно считать $\mathfrak{A}$ конечно порожденной и подпрямо неразложимой. Тогда в силу отмеченного выше строения ∞-квазимногообразия $\mathcal{K} \vee Q_{\infty}(\mathfrak{A})$ его конечно порожденные подпрямо неразложимые алгебры суть подобные алгебры из $\mathcal{K}$ и подпрямые сомножители конечно порожденных подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{A}'$ — построенное выше простое (а значит, и подпрямо неразложимое) конечно порожденное расширение алгебры $\mathfrak{A}$. Тем самым, $\mathfrak{A}' \notin \mathcal{K} \vee Q_{\infty}(\mathfrak{A})$ и, значит, ∞-квазимногообразие $\mathcal{K}$ не является коатомом, т. е. (в случае подобной сигнатуры σ) решетка $L^{\sigma}_{\infty-q}$ не содержит коатомов.

Литература

[1] Пинус А.Г. *Геометрические шкалы многообразий алгебр и квазитождества*, Матем. труды **12** (2), 2, 160–169.

[2] Горбунов В.А. *Алгебраическая теория квазимногообразий* (Изд-во “Научная книга”, Новосибирск, 1999).

[3] Пинус А.Г. *О геометрически полных многообразиях*, Вестн. Новосибирск. ун-та (в печати).

А.Г. Пинус

профессор, кафедра алгебры и математической логики,
Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, д. 20, г. Новосибирск, 630092,

`e-mail:` ag.pinus@gmail.com

A.G. Pinus

Professor, Chair of Algebra and Mathematical Logic,
Novosibirsk State Technical University,
20 K. Marks Ave., Novosibirsk, 630092 Russia,

`e-mail:` ag.pinus@gmail.com