УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2019, Т. 161, кн. 2 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 181–190 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 519.624 doi: 10.26907/2541-7746.2019.2.181-190

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ОСОБЕННОСТЯМИ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

М.Н. Афанасьева, Е.Б. Кузнецов

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, 125993, Россия

Аннотация

Рассматривается численное решение нелинейной краевой задачи для системы интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом. Для численного решения краевой задачи применяется метод стрельбы (пристрелки). Для нахождения значений введенного параметра «пристрелки» применяется метод продолжения по параметру в форме Лаэя и метод продолжения по наилучшему параметру совместно с методом Ньютона, что позволяет вычислить возможные решения, если задача является плохо обусловленной. Решение начальной задачи при каждом найденном значении параметра «пристрелки» строится с помощью метода Ньютона совместно с применением метода наилучшей параметризации, что обеспечивает отыскание решения при наличии предельных особых точек. Значения функций на предыстории определяются посредством построения интерполяционного полинома Лагранжа. Для вычисления интегральной составляющей задачи используется метод трапеций.

Ключевые слова: краевая задача, численное решение, дифференциальное уравнение с запаздыванием, метод стрельбы, метод продолжения по наилучшему параметру, предельные особые точки

Введение

Нелинейные краевые задачи для систем дифференциальных уравнений широко распространены при моделировании различных процессов в областях экономики, биологии, медицины, электроники, механики [1]. Зачастую описание подобных систем требует учесть влияние запаздывающего аргумента на поведение исследуемых характеристик. Подобные системы описывают процессы, зависящие не только от поведения анализируемых параметров в текущий момент, но и в предшествующий момент времени. Игнорирование запаздывания в модели может привести к некорректным результатам. Исследование зависимости решений краевых задач от сдвига аргумента приведено в статье [2].

В работе [3] рассмотрены методы решения линейных краевых задач с отклоняющимся аргументом. Сложности возникают в случае, когда задача является нелинейной. В настоящей статье для построения решения используется продолжение по наилучшему параметру, которым является длина кривой множества решений. Применение метода наилучшей параметризации положительно зарекомендовало себя при решении систем нелинейных дифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом [4]. Эффективность применения наилучшей параметризации для широкого спектра краевых задач без запаздывания показана в ряде статей: в [5] рассмотрено решение краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений; в [6] наилучшая параметризация применяется при решении краевой задачи для нелинейных дифференциально-алгебраических уравнений без запаздывания, в том числе для решения сингулярно возмущенных краевых задач данного типа. В работе [7] приводится решение начальных задач для систем интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздыванием с помощью дискретного и непрерывного продолжения по наилучшему параметру.

В настоящей работе предлагается алгоритм решения нелинейных краевых задач для систем интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом. Предложенный в работе алгоритм, в основу которого положены метод продолжения по наилучшему параметру [8] и классические численные методы [9], позволяет найти возможные решения подобных задач, а также построить решения в случае наличия предельных особых точек.

1. Постановка задачи

Рассматривается система следующего вида:

$$\frac{dy}{dt} = f_1\Big(t, y(t), y(t-\tau), \dot y(t-\tau), x(t), x(t-\tau), \dot x(t-\tau), z(t),$$
$$z(t-\tau), \dot z(t-\tau), \int\limits_{t_0}^{t} I_1\left[x(\xi), y(\xi), z(\xi)\right] d\xi\Big) = 0, \tag{1}$$
$$G\left(t, y(t), y(t-\tau), x(t), x(t-\tau), z(t), z(t-\tau)\right) = 0, \quad t \in [a, b],$$
$$\frac{dz_i}{dt} = f_{2i}\Big(t, y(t), y(t-\tau), \dot y(t-\tau), x(t), x(t-\tau), \dot x(t-\tau), z(t),$$
$$z(t-\tau), \dot z(t-\tau), \int\limits_{t_0}^{t} I_{2i}\left[x(\xi), y(\xi), z(\xi)\right] d\xi\Big) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, q,$$
$$f_1 : \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^{3s} \times \mathbf{R}^{3r} \times \mathbf{R}^{3q} \to \mathbf{R}^s,$$
$$G : \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^{2s} \times \mathbf{R}^{2r} \times \mathbf{R}^{2q} \to \mathbf{R}^r,$$
$$f_2 : \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^{3s} \times \mathbf{R}^{3r} \times \mathbf{R}^{3q} \to \mathbf{R}^q,$$

с заданными краевыми условиями

$$\begin{aligned} &W\left(y(a), y(b), x(a), x(b), z(a), z(b)\right) = 0, \\ &W : \mathbf{R}^{2s} \times \mathbf{R}^{2r} \times \mathbf{R}^{2q} \to \mathbf{R}^s \times \mathbf{R}^q, \end{aligned} \tag{2}$$

где $y(t) : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^s, x(t) : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^r, z(t) : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^q,$ – искомые функции, входящие в систему при различных значениях аргумента.

На множестве $E_0 = \{T < a \mid \exists\, t > a,\ t - \tau = T\}$ заданы достаточно гладкие функции $\varphi_{1,2}(T),\ \psi_{1,2}(T),\ \theta_{1,2}(T),\ T \in [a-\tau, a)$ такие, что:

$$\begin{aligned} &y_\tau = y(t-\tau) = \varphi_1(T), \dot y_\tau = \dot y(t-\tau) = \varphi_2(T), \\ &x_\tau = x(t-\tau) = \psi_1(T), \dot x_\tau = \dot x(t-\tau) = \psi_2(T), \\ &z_\tau = z(t-\tau) = \theta_1(T), \dot z_\tau = \dot z(t-\tau) = \theta_2(T). \end{aligned} \tag{3}$$

Граничные условия (2) являются согласованными, то есть справедливы соотношения

$$
\begin{aligned}
&G\left(a, y\left(a\right), y\left(a-\tau\right), x\left(a\right), x\left(a-\tau\right), z\left(a\right), z\left(a-\tau\right)\right)=0,\\
&G\left(b, y\left(b\right), y\left(b-\tau\right), x\left(b\right), x\left(b-\tau\right), z\left(b\right), z\left(b-\tau\right)\right)=0.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Под решением задачи (1)–(4) понимается непрерывно-дифференцируемая вектор-функция, которая обращает (1) в тождество и удовлетворяет краевым условиям (2).

2. Преобразование задачи

Исходная задача (1) преобразуется путем разностного представления производных и ввода параметра λ – наилучшего аргумента задачи – следующим образом: $x=x(\lambda)$, $y=y(\lambda)$, $z=z(\lambda)$, $t=t(\lambda)$.

Приведенные в работе [7] результаты сравнения эффективности использования различных подходов показали, что дискретный метод обладает более высокой эффективностью, что учитывалось при построении решения исследуемой задачи.

Параметру $\lambda=\lambda_j$ соответствуют приближенные значения решения $y_j=y(\lambda_j)$, $x_j=x(\lambda_j)$, $z_j=z(\lambda_j)$, $t_j=t(\lambda_j)$. При этом в качестве длины шага по параметру λ, $\Delta\lambda_j=\lambda_{j+1}-\lambda_j$, применяется заданное постоянное значение.

Так как исследуемая система уравнений (1) содержит интегральную составляющую I, необходимо рассмотреть соответствующий метод для определения значения интеграла. В настоящей работе для вычисления значения интеграла используется метод трапеций.

Согласно принципу метода пристрелки краевая задача преобразуется заменой краевого условия в конечной точке b интервала интегрирования на начальное условие путем ввода параметра p:

$$
\begin{aligned}
&y_l(a)=p_l, \quad l=1,2,\ldots,s_1, \quad s_1\le s,\\
&z_m(a)=p_{s+m}, \quad m=1,2,\ldots,q_1, \quad q_1\le q.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Далее преобразование задачи (1) и построение алгоритма рассматривается на примере системы интегродифференциально-алгебраических уравнений следующего вида:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy(t)}{dt}=f_1\Big(t, y, y_\tau, \dot{y}_\tau, x, x_\tau, \dot{x}_\tau, z, z_\tau, \dot{z}_\tau, \displaystyle\int_{t_0}^{t} I_1\left[x(\xi), y(\xi), z(\xi)\right]\, d\xi\Big),\\
\dfrac{dz(t)}{dt}=f_2\Big(t, y, y_\tau, \dot{y}_\tau, x, x_\tau, \dot{x}_\tau, z, z_\tau, \dot{z}_\tau, \displaystyle\int_{t_0}^{t} I_2\left[x(\xi), y(\xi), z(\xi)\right]\, d\xi\Big),\\
G(t, y, y_\tau, x, x_\tau, z, z_\tau)=0,\\
y(a)=y_a,\\
z(b)=z_b,\\
y_\tau=\varphi_1(T), \quad x_\tau=\psi_1(T), \quad z_\tau=\theta_1(T), \quad T\in[a-\tau, a),\\
\dot{y}_\tau=\varphi_2(T), \quad \dot{x}_\tau=\psi_2(T), \quad \dot{z}_\tau=\theta_2(T), \quad T\in[a-\tau, a).
\end{cases}
\tag{6}
$$

Задача (6), приведенная заменой согласно методу стрельбы (5) к начальной с учетом наилучшей параметризации, конечно-разностной аппроксимации производных $\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{dz}{dt}$ и преобразования интегральных составляющих согласно формуле трапеций, примет вид

$$\begin{cases} (y_{(i+1)} - y_{(i)}) - f_{1_{(i+1)}}(t, y, y_\tau, \dot{y}_\tau, x, x_\tau, \dot{x}_\tau, z, z_\tau, \dot{z}_\tau, S_1)(t_{(i+1)} - t_{(i)}) = 0, \\ (z_{(i+1)} - z_{(i)}) - f_{2_{(i+1)}}(t, y, y_\tau, \dot{y}_\tau, x, x_\tau, \dot{x}_\tau, z, z_\tau, \dot{z}_\tau, S_2)(t_{(i+1)} - t_{(i)}) = 0, \\ S_{1,2} \approx \dfrac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{i+1}(I_{1,2}^{(j-1)} + I_{1,2}^{(j)})(t^{(j)} - t^{(j-1)}), \\ G_{(i+1)}(t, y, y_\tau, x, x_\tau, z, z_\tau) = 0, \\ (t_{(i+1)} - t_{(i)})^2 + (y_{(i+1)} - y_{(i)})^2 + (x_{(i+1)} - x_{(i)})^2 + (z_{(i+1)} - z_{(i)})^2 - \Delta\lambda^2 = 0, \\ y(a) = y_a, \\ z(a) = p, \\ y_\tau = \varphi_1(T), \quad x_\tau = \psi_1(T), \quad z_\tau = \theta_1(T), \quad T \in [a-\tau, a), \\ \dot{y}_\tau = \varphi_2(T), \quad \dot{x}_\tau = \psi_2(T), \quad \dot{z}_\tau = \theta_2(T), \quad T \in [a-\tau, a). \end{cases} \tag{7}$$

3. Численное решение

С учетом параметризации согласно методу стрельбы, искомое решение задачи (7) теперь зависит от параметра p:

$$y = y(\lambda, p), \quad x = x(\lambda, p), \quad z = z(\lambda, p). \tag{8}$$

Для функций (8) должно выполняться условие (2), которое для параметризованных функций принимает вид:

$$\check{F}(p) = W\big(y\,(a,p)\,, y\,(b,p)\,, x\,(a,p)\,, x\,(b,p)\,, z\,(a,p)\,, z\,(b,p)\,\big) = 0. \tag{9}$$

На основе итерационного подхода подбирается значение параметра p, при котором в конечной точке интервала интегрирования выполняется граничное условие $z(b) = z_b$.

Для вычисления значений параметра p рассматривался метод Ньютона, обладающий наибольшей скоростью сходимости, что является преимуществом, так как для каждого вычисленного значения решается начальная задача (7):

$$p^{(k+1)} = p^{(k)} - \left[\frac{\check{F}(p^{(k)}) - \check{F}(p^{(k-1)})}{p^{(k)} - p^{(k-1)}}\right]^{-1} \check{F}(p^{(k)}), \quad p^{(0)} = p_0. \tag{10}$$

Однако для обеспечения сходимости метода Ньютона (10) начальное приближение p_0 должно быть выбрано достаточно близко к точному решению, что не всегда представляется возможным. Для преодоления подобных трудностей в [10] предлагается преобразовать систему путем ввода нового параметра $\mu \in [0,1]$ следующим образом:

$$\Phi(p,\mu) = \check{F}(p) - (1-\mu)\check{F}(p_0) = 0, \tag{11}$$

p_0 – решение при $\mu = 0$. Таким образом, новый параметр введен так, что при $\mu = 0$ решение системы известно или легко определяется, а при $\mu = 1$ получается исходное уравнение с искомым решением.

Полученная система (11) может быть решена методом непрерывного продолжения по параметру в форме Давиденко [11] или методом дискретного продолжения по параметру в форме Лаэя [12]. В настоящей работе применяется метод дискретного продолжения [12]. Отрезок, на котором изменяется параметр μ, разбивается на m равных частей $0 = \mu_1 < \cdots < \mu_m = 1$, и для каждого μ_k вычисляется p_k с помощью метода Ньютона

$$p_{(k)}^{(i+1)} = p_{(k)}^{(i)} - \left[\frac{\Phi(p_{(k)}^{(i)}, \mu_{(k)}) - \Phi(p_{(k)}^{(i-1)}, \mu_{(k)})}{p_{(k)}^{(i)} - p_{(k)}^{(i-1)}}\right]^{-1} \Phi(p_{(k)}^{(i)}, \mu_{(k)}) \qquad (12)$$

$$p_{(k+1)}^{(0)} = p_{(k)}^{(r_k)}, \quad i = 1, 2, \ldots, r_{k-1}.$$

Параметр μ здесь меняется монотонно. Трудности возникают, когда кривая множества решений содержит предельные точки, в которых вырождается матрица Якоби и итерационный процесс метода Ньютона расходится.

Преодолеть эту сложность можно путем преобразования алгоритма за счет введения нового параметра ν – длины кривой множества решений [8].

Кривая множества решений разбивается на l равных участков:

$$\nu_0 = 0 < \nu_1 < \nu_1 < \cdots < \nu_l = L.$$

Теперь неизвестные p, μ – функции параметра ν – являются равноправными и могут меняться немонотонно. Значения p и μ в $(k+1)$-й точке вычисляются путем решения системы

$$\Psi_{k+1}(\check{z}) = \begin{cases} \check{F}(p) - (1-\mu)\check{F}(p_0) = 0, \\ (p - p_k^{(r_k)})^2 + (\mu - \mu_k^{(r_k)})^2 - \triangle_\nu^2 = 0, \end{cases} \qquad (13)$$

где $\check{z} = (p, \mu)$, $\nu_{k+1} = \nu_k + \triangle_\nu$, $\nu_0 = 0$, $\nu_l = L$.

При очередном значении параметра ν система (13) решается методом Ньютона [13]:

$$\check{z}_k^{(i+1)} = \check{z}_k^{(i)} - \left[\frac{\partial \Psi(\check{z}_k^{(i)})}{\partial \check{z}}\right]^{-1} \Psi_k(\check{z}_k^{(i)}), \quad i = 1, 2, \ldots, r_{k-1}, \qquad (14)$$

$$\check{z}_k^{(0)} = 2\check{z}_{k-1}^{(r_{k-1})} - \check{z}_{k-2}^{(r_{k-2})}.$$

Использование наилучшей параметризации при вычислении значений параметра «пристрелки» позволяет определить возможные решения краевой задачи. При каждом найденном значении параметра p решается начальная задача (7), преобразованная к наилучшему аргументу λ. Для решения задачи Коши применяется метод Ньютона с постоянным шагом $\Delta\lambda$.

Исследуемая задача характеризуется наличием аргумента запаздывания τ. Для значений $t_\tau = (t(\lambda) - \tau)$, принадлежащих интервалу запаздывания E_0, дополнительных вычислений производить не требуется, поскольку значения функций определены условиями задачи (6). Для значений t_τ, попадающих в интервал $[a, b]$, требуются дополнительные вычисления, так как крайне редко точка запаздывания t_τ совпадает с узловой точкой, поэтому для вычисления значений функций в точке запаздывания τ строится интерполяционный полином Лагранжа по трем точкам, использующий значения, вычисленные на предыдущих шагах процедуры интегрирования.

4. Численный пример

Рассматривается нелинейная система уравнений с запаздыванием

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y(t) - 2z(t) - \dfrac{x(t)}{y^2(t-\tau)} + \displaystyle\int\limits_0^t \left[\xi^{2/3}u(\xi) - z(\xi)\right] d\xi, \\ \dfrac{dz}{dt} = z(t-\tau) - 2y(t) + x(t), \\ x(t) - y(t-\tau) + t^2 - 4 = 0, \\ \text{с заданными краевыми условиями:} \\ z(0) = 0, \\ y(0.52) = 4, \\ \text{и значениями функций на интервале запаздывания } \ T = t - \tau \in [-1, 0): \\ y(T) = \sqrt[3]{2T+1}, \\ z(T) = 0, \end{cases}$$

где параметр запаздывания $\tau = 1$.

Преобразованная задача

$$\begin{cases} (y_i - y_*) - (t_i - t_*)(y_i - 2z_i - \dfrac{x_i(t)}{y_{\tau i}^2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{i}(I^{(j-1)} + I^{(j)})(t^{(j)} - t^{(j-1)})) = 0, \\ (z_i - z_*) - (t_i - t_*)(z_{\tau i} - 2y_i + x_i) = 0, \\ x_i - y_{\tau i} + t_i^2 - 4 = 0, \\ (y_i - y_*)^2 + (z_i - z_*)^2 + (x_i - x_*)^2 + (t_i - t_*)^2 - \Delta\lambda^2 = 0; \\ t(0) = 0, \\ z(0) = 0, \\ y(0) = p, \\ y(T) = \sqrt[3]{2T+1}, \\ z(T) = 0, T = t - \tau \in [-1, 0) \end{cases}$$

при каждом найденном значении параметра p решалась методом Ньютона с $\Delta\lambda = 0.05$.

Рассматриваемая задача имеет особенность: в точке $t = 0.5$ правая часть первого уравнения содержит знаменатель, равный нулю. При решении задачи без использования наилучшей параметризации при прохождении точки $t = 0.5$ алгоритм, как правило, расходится, что обусловлено делением на нуль.

На рис. 1–3 приведены графики решения краевой задачи при найденном значении параметра $p = 5.4515$, начальном значении $p_0 = 3$, $\Delta\lambda = 0.01$, $\Delta\nu = 0.05$.

Представленные графики решений $y(t)$, $x(t)$ иллюстрируют, что касательная в окрестности точки $t = 0.5$ ортогонаьна оси абсцисс, в связи с чем классические численные методы в точке $t = 0.5$ могут расходиться. Предложенный алгоритм позволил найти значение введенного параметра p и построить искомое решение.

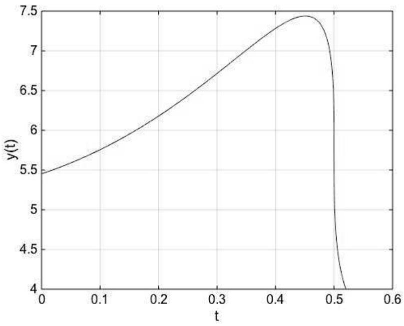

Рис. 1. Решение $y(t)$

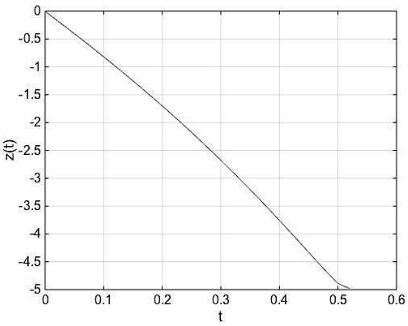

Рис. 2. Решение $z(t)$

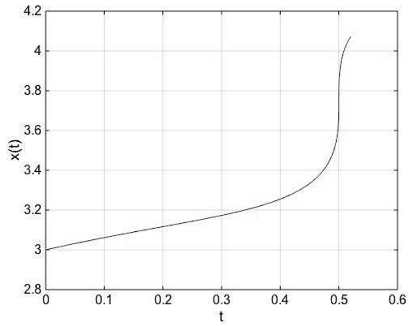

Рис. 3. Решение $x(t)$

5. Выводы

Применение метода продолжения по наилучшему параметру для вычисления значений введенного параметра «пристреливания» в ходе метода стрельбы позволяет определять возможные решения поставленной краевой задачи с запаздыванием. Выполнение преобразования начальной задачи к наилучшему аргументу позволяет эффективно справиться с нахождением решений при наличии предельных особых точек, что не всегда удается достичь с помощью традиционных методов.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 18-19-00474).

Литература

1. *Na T.Y.* Computational methods in engineering boundary value problems. – N. Y.: Acad. Press, 1980. – 309 p.

2. *Иванова Е.П.* Непрерывная зависимость решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений от сдвигов аргумента // Соврем. матем. Фундаментальные направления. – 2016. – Т. 59. – С. 74–96.

3. *Каменский Г.А., Скубачевскиий А.Л.* Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. – М.: Изд-во МАИ, 1992. –192 с.

4. *Кузнецов Е.Б., Микрюков В.Н.* Численное интегрирование системы дифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2007. – Т. 47, № 1. – С. 83–95.

5. *Красников С.Д., Кузнецов Е.Б.* Параметризация численного решения краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2005. – Т. 45, № 12. – С. 2148–2158.

6. *Будкина Е.М., Кузнецов Е.Б.* Моделирование технологического процесса производства узлов летательных аппаратов на основе наилучшей параметризации краевой задачи для нелинейных дифференциально-алгебраических уравнений // Вестн. МАИ. – 2016. – Т. 23, № 1. – С. 189–196.

7. *Дмитриев С.С., Кузнецов Е.Б.* Численное решение систем интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2008. – Т. 48, № 3. – С. 430–444. – doi: 10.1134/S096554250803007X.

8. *Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 222 с.

9. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 600 с.

10. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – Киев: Наукова думка, 1986. – 222 с.

11. *Давиденко Д.Ф.* Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений // Докл. АН СССР. – 1953. – Т .88, № 4. – С. 601–602.

12. *Lahaye M.E.* Une metode de resolution d'une categorie d'equations transcendentes // Compter Rendus hebdomataires des seances de L'Academie des sciences. – 1934. –V. 198, No 21. – P. 1840–1842.

13. *Kuznetsov E.B.* Optimal parametrization in numerical construction of curve // J. Franklin Institute. – 2007. – V. 344, – P. 658–671.

Поступила в редакцию
26.04.19

Афанасьева Мария Николаевна, аспирант кафедры «Моделирование динамических систем»

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)
Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, 141701, Россия
E-mail: *mary.mai.8@yandex.ru*

Кузнецов Евгений Борисович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Моделирование динамических систем»

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)
Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, 141701, Россия
E-mail: *kuznetsov@mai.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2019, vol. 161, no. 2, pp. 181–190

doi: 10.26907/2541-7746.2019.2.181-190

The Numerical Solution of the Nonlinear Boundary Value Problem with Singularity for the System of Delay Integrodifferential-Algebraic Equations

*M.N. Afanaseva**, *E.B. Kuznetsov***

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993 Russia
E-mail: **mary.mai.8@yandex.ru*, ***kuznetsov@mai.ru*

Received April 24, 2019

Abstract

The numerical method for solving the nonlinear boundary value problem for a delay system of integrodifferential-algebraic equations was discussed. The occurrence of a delay argument in the system characterizes the behavior of the studied parameters not only at the current, but also at the previous period of time.

Of particular interest are the problems characterized by the existence of singular limit points. It is very difficult to solve these problems using the classical methods.

A numerical solution of the boundary value problem was constructed by the shooting method. The values of the "shooting" parameter were found using a combination of the method of continuation with respect to the best parameter, the method of continuation with respect to the parameter in the Lahaye form, and the Newton method. At each iteration of the shooting method, the initial problem was solved. The computation of the initial problem influences the finding of the required solution and the continuation of the iterative process of the shooting method. The initial problem was rearranged based on the best parameter – the length of the curve of the solution set, and finite-difference representation of derivatives. The resulting problem was solved by the Newton method. The values of the functions at the deviation point, where the values are not defined by conditions of the problem, were calculated with the help of the Lagrange polynomial with three points. To find the value of the integral components of the problem, the trapezoid method was used.

The results of the numerical study confirm the efficiency of the proposed algorithm for solving the studied problem. The obtained numerical solution of the nonlinear boundary value problem with delay has the equation that loses its meaning in singular limit points. Thus, using of the continuation with respect to the best parameter while solving the problem allows to find all possible values of the parameter of the shooting method and to solve the problem.

Keywords: boundary value problem, numerical solution, differential equations with delay, shooting method, method of continuation with respect to best parameter, singular limit points

Acknowledgments. The study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 18-19-00474).

Figure Captions

Fig. 1. The solution of $y(t)$.

Fig. 2. The solution of $z(t)$.

Fig. 3. The solution of $x(t)$.

References

1. Na T.Y. *Computational Methods in Engineering Boundary Value Problems*. New York, Acad. Press, 1980. 309 p.
2. Ivanova E.P. Continuous dependence of solutions of boundary-value problems for differential-difference equations on shifts of the argument. *CMFD*, 2016, vol. 59, pp. 74–96. (In Russian)
3. Kamenskii G.A., Skubachevskii A.L. *Lineinye kraevye zadachi dlya differentsial'no-raznostnykh uravnenii* [Linear Boundary Value Problems for Differential-Difference Equations]. Moscow, Izd. MAI, 1992. 190 p. (In Russian)
4. Kuznetsov E.B., Mikryukov V.N. Numerical integration of systems of delay differential-algebraic equations. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2007, vol. 47, no. 1, pp. 80–92. doi: 10.1134/S0965542507010095.
5. Krasnikov S.D., Kuznetsov E.B. On the parametrization of numerical solutions to boundary value problems for nonlinear differential equations. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2005, vol. 45, no. 12, pp. 2066–2076.
6. Budkina E.M., Kuznetsov E.B. Modeling the technological process for manufacturing of aircraft structural components based on the best parametrization of the boundary value problem for nonlinear differential-algebraic equations. *Vestn. MAI*, 2016, vol. 23, no. 1, pp. 189–196. (In Russian)
7. Dmitriev S.S., Kuznetsov E.B. Numerical solution to systems of delay integrodifferential algebraic equations. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2008, vol. 48, no. 3, pp. 406–419. doi: 10.1134/S096554250803007X.
8. Shalashilin V.I., Kuznetsov E.B. *Parametric Continuation and Optimal Parametrization in Applied Mathematics and Mechanics.* Springer, 2003. viii, 228 p. doi: 10.1007/978-94-017-2537-8.
9. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. *Chislennye metody* [Numerical Methods]. Moscow, Nauka, 1987. 600 p. (In Russian)
10. Samoilenko A.M., Ronto N.I. *Chislenno-analiticheskie metody issledovaniya reshenii kraevykh zadach* [Numerical and Analytic Methods in Studying the Solutions of Boundary Value Problems]. Kiev, Naukova Dumka, 1986. 222 p. (In Russian)
11. Davidenko D.F. On a new method of numerical solution of systems of nonlinear equations.Dokl. *Akad. Nauk SSSR*, 1953, vol. 88, no. 4, pp. 601–602. (In Russian)
12. Lahaye M.E. Une metode de resolution d'une categorie d'equations transcendentes. *Compter Rendus hebdomataires des seances de L'Academie des sciences.* 1934, vol. 198, no. 21, pp. 1840–1842. (In French)
13. Kuznetsov E.B. Optimal parametrization in numerical construction of curve. *J. Franklin Inst.*, 2007, vol. 344, pp. 658–671.

***Для цитирования*:** *Афанасьева М.Н., Кузнецов Е.Б.* Численное решение нелинейных краевых задач с особенностями для систем интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздыванием // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2019. – Т. 161, кн. 2. – С. 181–190. – doi: 10.26907/2541-7746.2019.2.181-190.

***For citation*:** Afanaseva M.N., Kuznetsov E.B. The numerical solution of the nonlinear boundary value problem with singularity for the system of delay integrodifferential-algebraic equations. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 161, no. 2, pp. 181–190. doi: 10.26907/2541-7746.2019.2.181-190. (In Russian)