КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Н.Р. ХУСНУТДИНОВ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
Уравнение теплопроводности

Учебно-методическое пособие

КАЗАНЬ 2009

УДК 517.91

Печатается по решению
Редакционно-издательского совета физического факультета
Казанского государственного университета

Рецензенты – д.ф.-м.н., профессор А.В. Аминова,
д.ф.-м.н., профессор Л.А. Нефедьев (ТГГПУ)

Н.Р. Хуснутдинов. Уравнения математической физики. Уравнение теплопроводности. Учебно-методическое пособие – Казань, 2009. – 28с.

Цель настоящего учебно-методического пособия состоит в оказании помощи студентам физического факультета при изучении раздела "Уравнение теплопроводности" в курсе "Уравнения математической физики". В нем содержатся 25 вариантов для самостоятельной работы студентов. Имеется достаточный теоретический материал, приведены решения наиболее типичных задач.

1 Уравнение теплопроводности

Одномерное уравнение теплопроводности

$$u'_t(x,t) - a^2 u''_{xx}(x,t) = U(x,t).$$

Размерности:

$$\begin{aligned}
[u] &= [\text{Дж}] \text{ – \textit{Температура}},\\
[U] &= \left[\frac{\text{Дж}}{\text{сек}}\right] \text{ – \textit{Мощность источников}},\\
[a^2] &= \left[\frac{k}{c\rho}\right] = \left[\frac{\text{м}^2}{\text{сек}}\right].
\end{aligned}$$

Здесь k, c, ρ – коэффициент внутренней теплопроводности с размерностью *Дж/м · сек*, удельная теплоемкость с размерностью *Дж/кг*, объемная плотность с размерностью *кг/м*^{3}, соответственно.

Начальное условие (начальное распределение температуры):

$$u(x,0) = f(x).$$

Граничные условия

$$h_0(u(0,t) - T_0) = k_0 u'_x(0,t), \tag{1a}$$
$$h_l(u(l,t) - T_l) = -k_l u'_x(l,t). \tag{1b}$$

Эти условия являются неоднородными. Чтобы сделать условия однородными введем новую функцию $u(x,t) \to v(x,t)$ по правилу

$$u(x,t) = v(x,t) + \alpha + \beta x$$

и подчиним функции α и β условиям

$$\begin{aligned}
h_0(\alpha - T_0) &= k_0\beta,\\
h_l(\alpha + \beta l - T_l) &= -k_l\beta.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{h_0(k_l + l h_l)T_0 + h_l k_0 T_l}{h_0(l h_l + k_l) + h_l k_0},\\
\beta &= \frac{h_0 h_l (T_l - T_0)}{h_0(l h_l + k_l) + h_l k_0}.
\end{aligned}$$

Для таких значений α и β получаем, что функция $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности с измененной правой частью

$$v'_t(x,t) - a^2 v''_{xx}(x,t) = V(x,t) = U(x,t) - \alpha'_t - \beta'_t x, \tag{2}$$

начальному условию

$$v(x,0) = F(x) = f(x) - \alpha(0) - \beta(0)x, \tag{3}$$

и однородным граничным условиям

$$\begin{aligned}
h_0 v(0,t) &= k_0 v'_x(0,t),\\
h_l v(l,t) &= -k_l v'_x(l,t).
\end{aligned} \tag{4}$$

1.1 Отсутствие внешних источников: $V(x,t) = 0$.

Такая ситуация реализуется, если $U(x,t) - \alpha'_t - \beta'_t x = 0$. В этом случае уравнение (2) является однородным и его частное решение методом Фурье имеет следующий вид:

$$v_\lambda(x,t) = e^{-\lambda^2 a^2 t}(A_\lambda \cos\lambda x + B_\lambda \sin\lambda x),$$

с $\lambda \geq 0$. Решение нумеруется числом λ и зависят от двух произвольных постоянных A_λ и B_λ. Поскольку функция v удовлетворяет однородным граничным условиям, то общее решение можно представить в виде суперпозиции вышеприведенных решений. Вначале необходимо найти спектр возможных значений λ.

Из граничных условий (4) получаем, что спектр собственных значений, $\lambda = \lambda_n$, подчиняется трансцендентному уравнению

$$\operatorname{tg}\lambda_n l = \frac{c_n^0 + c_n^l}{1 - c_n^0 c_n^l}, \tag{5}$$

а решения имеют следующий вид

$$v_n(x,t) = A_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t}(\cos\lambda_n x + c_n^0 \sin\lambda_n x),$$

где коэффициенты A_n и B_n связаны соотношением

$$B_n = c_m^0 A_n.$$

Здесь для упрощения записи положено:

$$c_n^0 = \frac{h_0}{\lambda_n k_0}, \ c_n^l = \frac{h_l}{\lambda_n k_l}.$$

Отметим сразу, что спектр задачи не зависит от температур окружающей среды у концов стержня.

Учитывая однородность граничных условий получаем общее решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее граничным условиям

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\cos\lambda_n x + c_n^0 \sin\lambda_n x)e^{-\lambda_n^2 a^2 t}. \tag{6}$$

Здесь суммирование производится по всем λ_n, удовлетворяющим условию (5). Индекс n нумерует решения.

Для нахождения коэффициентов A_n используем начальное условие (3). Получаем соотношение

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(x) = F(x),$$

где $\phi_n(x) = \cos\lambda_n x + c_n^0 \sin\lambda_n x$. Умножим, далее, это соотношение на функцию $\phi_m(x)$ и проинтегрируем по x. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^l \phi_n(x)\phi_m(x)dx = \int_0^l \phi_m(x)F(x)dx.$$

Нетрудно показать, что

$$\int_0^l \phi_n(x)\phi_m(x)dx = \delta_{nm}\Phi_m,$$

где

$$\Phi_m = \frac{(1+c_m^{l\ 2})c_m^0 + (1+c_m^{0\ 2})(c_m^l + l\lambda_m(1+c_m^{l\ 2}))}{2\lambda_m(1+c_m^{l\ 2})}.$$

Таким образом,

$$A_m = \frac{1}{\Phi_m}\int_0^l \phi_m(x)F(x)dx,$$

и задача решена полностью для произвольных граничных условий. Решение имеет следующий вид:

$$u(x,t) = v(x,t) + \alpha + \beta x,$$

где

$$\begin{aligned}
v(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\cos\lambda_n x + c_m^0 \sin\lambda_n x)e^{-\lambda_n^2 a^2 t},\\
A_n &= \frac{1}{\Phi_n}\int_0^l \phi_n(x)F(x)dx,\\
\alpha &= \frac{h_0(k_l + lh_l)T_0 + h_l k_0 T_l}{h_0(lh_l + k_l) + h_l k_0},\\
\beta &= \frac{h_0 h_l (T_l - T_0)}{h_0(lh_l + k_l) + h_l k_0}.
\end{aligned}$$

Частные случаи граничных условий (1):

Пример 1. На правом конце стержня поддерживается постоянная температура, равная температуре окружающей среды T_l, а на левом конце температура меняется, но с постоянным нулевым градиентом. Для выполнения этих условий положим $h_l \to \infty$ и $h_0 \to 0$. В этом случае получаем, что $\alpha = T_l$ и $\beta = 0$. Из уравнения (5) получаем что $\operatorname{tg}\lambda_m l \to \infty$, т.е.

$$\cos\lambda_m l = 0. \tag{7}$$

Таким образом, спектр находится в явном виде:

$$\lambda_m = \frac{\pi(2m-1)}{2l}, \ m = 1, 2, \cdots.$$

При этом

$$\phi_m = \cos\lambda_m x, \ \Phi_m = \frac{l}{2},$$

и

$$A_m = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{\pi x(2m-1)}{2l}dx.$$

Решение имеет следующий вид:

$$u(x,t) = T_l + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t}\cos\frac{\pi x(2n-1)}{2l}.$$

Поскольку все собственные значения $\lambda_n = \frac{\pi(2n-1)}{2l} \neq 0$, то по истечении большого интервала времени, $t \to \infty$, получаем:

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = T_l.$$

Другими словами, температура стержня по всей его длине становится равной температуре окружающей среды T_l.

Пусть стержень в начальный момент времени был нагрет равномерно по всей своей длине с температурой T_i: $f(x) = T_i$. Тогда

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l}\int_0^l (T_i - T_l)\cos\frac{\pi x(2n-1)}{2l}dx \\ &= -\frac{4(-1)^n}{\pi(2n-1)}(T_i - T_l). \end{aligned}$$

Решение имеет следующий вид:

$$u(x,t) = T_l - (T_i - T_l)\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)}e^{-\lambda_n^2 a^2 t}\cos\frac{\pi x(2n-1)}{2l}.$$

Для численного анализа удобно измерять время в единицах $t^* = 4l^2/\pi^2 a^2$, длину в единицах длины стержня, а температуру в единицах температуры правого конца T_l. В этих единицах T_i, t, x являются безразмерными величинами, и мы получаем расчетную формулу:

$$u(x,t)/T_l = 1 - (T_i - 1)\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)}e^{-(2n-1)^2 t}\cos\frac{\pi x(2n-1)}{2}.$$

Численный анализ этой формулы изображен на Рис. 1. С течением времени температура правого конца не меняется и равняется

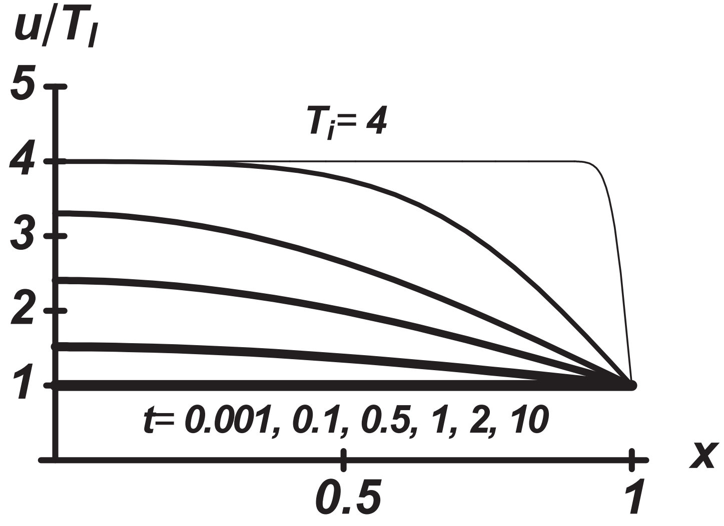

Рис. 1: На рисунке приведена зависимость температуры стержня от времени в единицах температуры правого конца T_l. За единицу времени принята величина $t^* = 4l^2/\pi^2 a^2$, а за единицу длины – длина стержня. Бóльшая толщина линии соответствует бóльшему моменту времени.

температуре T_l, в то время как температура вдоль стержня падает и уже для момента времени $t = 10$ практически весь стержень имеет температуру, равную температуре правого конца.

Пример 2. На правом конце стержня поддерживается постоянная температура, равная температуре окружающей среды T_l, а на левом конце температура меняется, но с постоянным ненулевым градиентом, равным T_0'. Для выполнения этих условий заменим вначале $T_0 = -T_0' k_0/h_0$, а затем устремим $h_l \to \infty$ и $h_0 \to 0$. В этом случае получаем, что $\alpha = T_l - lT_0'$ и $\beta = T_0'$. Из уравнения (5) получаем такой же спектр собственных значений, как и в предыдущем случае. В итоге решение задачи имеет следующий вид:

$$u(x,t) = T_l + T_0'(x-l) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t}\cos\frac{\pi x(2n-1)}{2l}.$$

Поскольку все собственные значения $\lambda_n = \frac{\pi(2n-1)}{2l} \neq 0$, то по истечении большого интервала времени, $t \to \infty$, получаем:

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = T_l + T_0'(x-l).$$

Другими словами, температура стержня по всей его длине линейно зависит от положения на стержне. На правой границе, при $x = l$, получаем, что температура равна температуре окружающей среды T_l, в то время как на левой границе, при $x = 0$, получаем $T_l - T_0' l < T_l$ при условии $T_0' > 0$.

Пусть стержень в начальный момент времени был нагрет равномерно по всей своей длине до температуры T_i: $f(x) = T_i$. Тогда

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l}\int_0^l (T_i - T_l + T_0'(l-x))\cos\frac{\pi x(2n-1)}{2l}dx \\ &= -\frac{4(-1)^n(T_i - T_l)}{\pi(2n-1)} + \frac{8lT_0'}{\pi^2(2n-1)^2}. \end{aligned}$$

Решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= T_l + T_0'(x-l) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{4(-1)^n(T_i - T_l)}{\pi(2n-1)}\right. \\ &+ \left.\frac{8lT_0'}{\pi^2(2n-1)^2}\right] e^{-\lambda_n^2 a^2 t}\cos\frac{\pi x(2n-1)}{2l}. \end{aligned}$$

Для численного анализа удобно измерять время в единицах $t^* = 4l^2/\pi^2 a^2$, длину в единицах длины стержня, а температуру в единицах температуры правого конца. В этих единицах T_i, T_0', t, x являются безразмерными величинами, и мы получаем расчетную формулу:

$$\begin{aligned} u(x,t)/T_l &= 1 + T_0'(x-1) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{4(-1)^n(T_i - 1)}{\pi(2n-1)}\right. \\ &+ \left.\frac{8T_0'}{\pi^2(2n-1)^2}\right] e^{-(2n-1)^2 t}\cos\frac{\pi x(2n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Численный анализ этой формулы изображен на Рис. 2. С течением времени температура правого конца не меняется и равняется температуре T_l в то время как температура вдоль стержня падает и

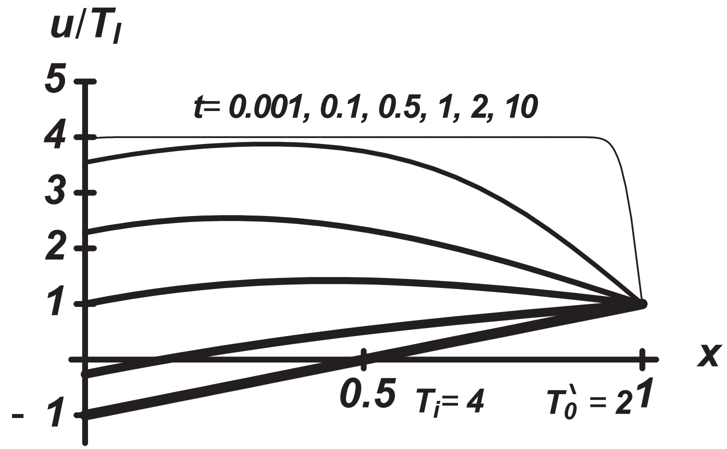

Рис. 2: На рисунке приведена зависимость температуры стержня от времени в единицах температуры правого конца T_l. За единицу времени принята величина $t^* = 4l^2/\pi^2 a^2$, а за единицу длины – длина стержня. Бо́льшая толщина линии соответствует бо́льшему моменту времени.

уже для момента времени $t = 10$ выходит на свое предельное значение с углом наклона T_0'.

Пример 3. На правом конце стержня поддерживается постоянная температура, равная температуре окружающей среды T_l; на левом конце поддерживается постоянная температура, равная температуре окружающей среды T_0. Для выполнения этих условий устремим $h_l \to \infty$ и $h_0 \to \infty$. В этом случае получаем, что $\alpha = T_0$ и $\beta = T_l - T_0$. Из уравнения (5) получаем что $\operatorname{tg}\lambda_n l = 0$, что приводит к спектру:

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l},\ n = 1, 2, \ldots.$$

Решение имеет следующий вид:

$$u(x,t) = T_0 + (T_l - T_0)\frac{x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t}\sin\frac{\pi x n}{l},$$

где

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{\pi x n}{l}dx.$$

По истечению большого времени получаем ожидаемый результат

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = T_0 + (T_l - T_0)\frac{x}{l},$$

т.е. установилось стационарное линейное распределение температуры от температуры T_0 на левом конце стержня и до температуры T_l на правом его конце.

Пусть стержень в начальный момент времени был нагрет равномерно по всей своей длине до температуры T_i: $f(x) = T_i$. Тогда

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l}\int_0^l (T_i - T_0 - (T_l - T_0)\frac{x}{l})\sin\frac{\pi n x}{l}dx \\ &= \frac{2[1-(-1)^n](T_i - T_0)}{\pi n} + \frac{2(-1)^n(T_l - T_0)}{\pi n}. \end{aligned}$$

Решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= T_0 + (T_l - T_0)\frac{x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2[1-(-1)^n](T_i - T_0)}{\pi n}\right. \\ &+ \left.\frac{2(-1)^n(T_l - T_0)}{\pi n}\right] e^{-\lambda_n^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n x}{l}. \end{aligned}$$

Разделим суммирование по нечетным и четным индексам. Получаем:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= T_0 + (T_l - T_0)\frac{x}{l} \\ &+ \left[T_i - \frac{T_0 + T_l}{2}\right]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4e^{-\lambda_{2n-1}^2 a^2 t}}{\pi(2n-1)}\sin\frac{\pi(2n-1)x}{l} \\ &+ [T_l - T_0]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_{2n}^2 a^2 t}}{\pi n}\sin\frac{2\pi n x}{l}. \end{aligned}$$

Поскольку все собственные значения $\lambda_n = \frac{\pi n}{l} \neq 0$, то по истечении большого интервала времени, $t \to \infty$, получаем:

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = T_0 + (T_l - T_0)\frac{x}{l}.$$

Другими словами, температура стержня по всей его длине линейно зависит от положения на стержне. На правой границе, при $x = l$, получаем, что температура равна температуре окружающей среды T_l,

на левой границе, при $x = 0$, тоже получаем температуру окружающей среды T_0. Заметим, что конечное распределение температуры не зависит от начального распределения температуры по длине стержня.

Для численного анализа удобно измерять время в единицах $t^* = l^2/\pi^2 a^2$, длину в единицах длины стержня, а температуру в единицах температуры правого конца. В этих единицах T_i, T_0, t, x являются безразмерными величинами, и мы получаем расчетную формулу:

$$\begin{aligned} u(x,t)/T_l &= T_0 + (1 - T_0)x + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2[1-(-1)^n](T_i - T_0)}{\pi n}\right. \\ &+ \left.\frac{2(-1)^n(1 - T_0)}{\pi n}\right] e^{-n^2 t}\sin\pi n x. \end{aligned}$$

Численный анализ этой формулы изображен на Рис. 3. С течением времени температура концов стержня не меняется, в то время как температура вдоль стержня падает и уже для момента времени $t = 10$ выходит на свое предельное значение.

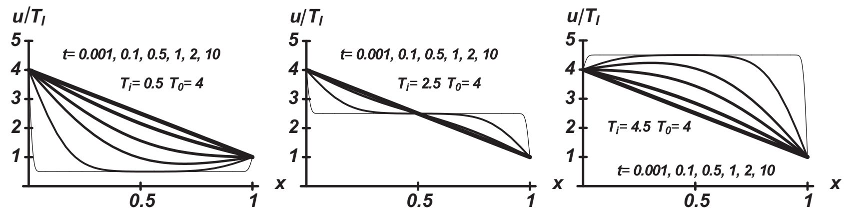

Рис. 3: На рисунках приведена зависимость температуры стержня от времени в единицах температуры правого конца T_l для трех значений начальной температуры: $T_i = 0.5, 2.5, 4.5$. За единицу времени принята величина $t^* = l^2/\pi^2 a^2$, а за единицу длины – длина стержня. Бóльшая толщина линии соответствует бóльшему моменту времени.

1.2 Общий случай: $V(x,t) \neq 0$.

В предыдущем параграфе мы выяснили, что общее решение однородного уравнения, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид (6). По этой причин будем искать решение неоднородного уравнения в следующем виде:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) T_n(t) \tag{8}$$

с неизвестной функцией $T_n(t)$. Здесь $\phi_n(t) = \cos\lambda_n x + c_n^0 \sin\lambda_n x$. Причина поиска решения в такой форме в том, что решение неоднородного уравнения должно удовлетворять тем же граничным условиям.

Представим функцию $V(x,t)$ в виде разложения по тем же функциям

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)\gamma_n(t),$$

где

$$\gamma_n(t) = \frac{1}{\Phi_n}\int_0^l \phi_n(x) V(x,t)dx.$$

Подставляя решение в форме (8) в неоднородное уравнение получаем уравнение для определения $T_n(t)$:

$$\dot{T}_n(t) + a^2\lambda_n^2 T_n(t) = \gamma_n(t). \tag{9}$$

Для решения этого уравнения необходимо знать начальные данные. В начальный момент времени

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) T_n(0) = F(x),$$

откуда

$$T_n(0) = \frac{1}{\Phi_n}\int_0^l \phi_n(x) F(x)dx.$$

Решаем уравнение (9) методом вариации постоянной. Решение однородного уравнения имеет следующий вид:

$$Ce^{-\lambda_n^2 a^2 t}.$$

Считая постоянную C функцией времени получаем уравнение для вычисления $C(t)$:

$$\dot{C}(t) = e^{\lambda_n^2 a^2 t}\gamma_n(t),$$

откуда

$$C(t) = C + \int_0^t e^{\lambda_n^2 a^2 \tau}\gamma_n(\tau)d\tau.$$

Таким образом, общее решение имеет следующий вид

$$T_n(t) = e^{-\lambda_n^2 a^2 t}(C + \int_0^t e^{\lambda_n^2 a^2 \tau}\gamma_n(\tau)d\tau).$$

Для определения C положим $t = 0$, получим:

$$T_n(0) = C.$$

Таким образом, мы получили общее решение поставленной задачи:

$$T_n(t) = e^{-\lambda_n^2 a^2 t} T_n(0) + \int_0^t e^{-\lambda_n^2 a^2 (t-\tau)}\gamma_n(\tau)d\tau, \tag{10}$$

где

$$T_n(0) = \frac{1}{\Phi_n}\int_0^l \phi_n(x) F(x)dx.$$

Первое слагаемое в (10) представляет собой решение однородной задачи, в отсутствии внешних источников. Второе слагаемое представляет собой частное решение неоднородной задачи. Рассмотрим пример.

Пример 4. На правом конце стержня поддерживается постоянная температура, равная температуре окружающей среды T_l; на левом конце поддерживается постоянная температура, равная температуре окружающей среды T_0. Первоначально стержень был равномерно нагрет по всей длине с температурой T_i. В последующее время стержень равномерно нагревается по всей длине: $U(x,t) = U$.

Подобная задача, без источников тепла, была решена в предыдущем разделе, пункт 3. Используя это решение представим искомое решение в следующем виде:

$$u(x,t) = T_0 + (T_l - T_0)\frac{x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\phi_n(t),$$

где $\phi_n(t) = \sin\frac{\pi x n}{l}$, $\Phi_n = l/2$, и

$$\begin{aligned} T_n(0) = A_n &= \frac{2}{l}\int_0^l (T - T_0 - (T_l - T_0)\frac{x}{l})\sin\frac{\pi n x}{l}dx \\ &= \frac{2[1-(-1)^n](T-T_0)}{\pi n} + \frac{2(-1)^n(T_l - T_0)}{\pi n}. \end{aligned}$$

Представим функцию $V(x,t) = U$ в виде разложения по тем же функциям

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)\gamma_n,$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{1}{\Phi_n}\int_0^l \phi_n(x)V(x,t)dx = \frac{2U}{l}\int_0^l \sin\frac{\pi x n}{l}dx \\ &= \frac{2U(1-(-1)^n)}{\pi n}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} T_n(t) &= e^{-\lambda_n^2 a^2 t}T_n(0) + \int_0^t e^{-\lambda_n^2 a^2(t-\tau)}\gamma_n d\tau \\ &= A_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t} + \gamma_n\frac{1-e^{-\lambda_n^2 a^2 t}}{\lambda_n^2 a^2}, \end{aligned}$$

и решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= T_0 + (T_l - T_0)\frac{x}{l} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t} + \gamma_n\frac{1-e^{-\lambda_n^2 a^2 t}}{\lambda_n^2 a^2})\sin\frac{\pi x n}{l}. \end{aligned} \qquad (11)$$

Какое распределение температуры установится в стержне по истечении достаточно большого времени? Для ответа на этот вопрос вычислим предел $t \to \infty$ в формуле (11). Получим

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = T_0 + (T_l - T_0)\frac{x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n}{\lambda_n^2 a^2}\sin\frac{\pi x n}{l}.$$

Последняя сумма вычисляется точно:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n}{\lambda_n^2 a^2}\sin\frac{\pi x n}{l} = \frac{U}{2a^2}(l-x)x.$$

Таким образом, получаем предельное распределение температуры:

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = T_0 + (T_l - T_0)\frac{x}{l} + \frac{U}{2a^2}(l-x)x.$$

На концах стержня нет дополнительного вклада, и распределение температуры имеет вид параболы. Чтобы найти точку с максимальной температурой вычислим производную по x от вышеприведенной формулы и приравняем нулю:

$$(T_l - T_0)\frac{1}{l} + \frac{U}{2a^2}(l - 2x) = 0.$$

Отсюда находим координату точки с максимальной температурой:

$$\frac{x_{max}}{l} = \frac{T_l - T_0 + \frac{Ul^2}{2a^2}}{\frac{Ul^2}{a^2}}.$$

Температура стержня в этой точке

$$u(x_{max}, t)_{t\to\infty} = \frac{(2T_l + \frac{Ul^2}{a^2})^2 + 4T_0(T_0 - 2T_l + \frac{Ul^2}{a^2})}{8\frac{Ul^2}{a^2}}.$$

Для численного анализа удобно измерять время в единицах $t^* = l^2/\pi^2 a^2$, длину в единицах длины стержня, мощность источника в единицах T_l/t^*, а температуру в единицах температуры правого конца. В этих единицах U, T_i, T_0', t, x являются безразмерными величинами, и мы получаем расчетную формулу:

$$\begin{aligned} u(x,t)/T_l &= T_0 + (1 - T_0)x \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\left\{\frac{2[1-(-1)^n](T_i - T_0)}{\pi n} + \frac{2(-1)^n(1-T_0)}{\pi n}\right\}e^{-n^2 t} \\ &+ \frac{2U(1-(-1)^n)}{\pi n^3}(1 - e^{-n^2 t})\Bigg]\sin\pi n x. \end{aligned}$$

Предельное распределение температуры: координата точки с максимальной температурой:

$$x_{max} = \frac{1 - T_0 + \frac{1}{2}\pi^2 U}{\pi^2 U},$$

и температура стержня в этой точке

$$\frac{u(x_{max}, t)_{t\to\infty}}{T_l} = \frac{(2 + \pi^2 U)^2 + 4T_0(T_0 - 2 + \pi^2 U)}{8\pi^2 U}.$$

Выберем, для бо́льшей наглядности, $T_0 = 4$ и $U = 12/\pi^2$. Тогда: $x_{max} = 1/4$ и $u(x_{max}, t)_{t\to\infty}/T_l = 35/8 = 4.375$.

Численный анализ этой формулы изображен на Рис. 4. С течением времени температура концов стержня не меняется, в то время как температура вдоль стержня падает и уже для момента времени $t = 10$ выходит на свое предельное значение, максимум которого совпадает с вычисленным выше значением.

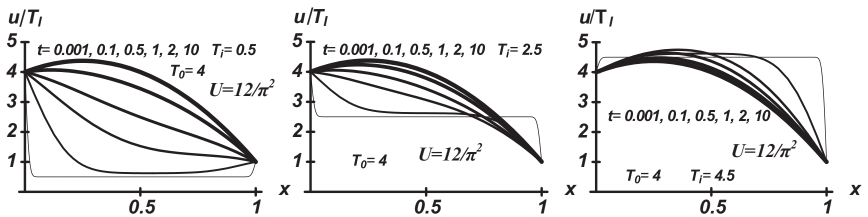

Рис. 4: На рисунках приведена зависимость температуры стержня от времени в единицах температуры правого конца T_l для трех значений начальной температуры: $T_i = 0.5, 2.5, 4.5$. За единицу времени принята величина $t^* = l^2/\pi^2 a^2$, а за единицу длины – длина стержня, мощность источника в единицах T_l/t^*. Бо́льшая толщина линии соответствует бо́льшему моменту времени.

2 Тексты индивидуальных заданий

Пояснения к графическому изображению распределения температуры в различные моменты времени. За единицу времени принять $t^* = 1/\lambda_1^2 a^2$, т.е. заменить время $t \to t/\lambda_1^2 a^2$; температуру измерять в единицах температуры правого конца T_l, т.е. заменить $T_l \to 1$; за единицу длины принять длину стержня l, т.е. заменить $x/l \to x$; T_0' измерять в единицах T_l/t^*.

1. Найти закон распределения температуры внутри стержня длины l, расположенного на отрезке $[0, l]$, если в начальный момент температура внутри стержня была распределена по закону $f(x)$. На правом конце стержня поддерживается постоянная температура, равная температуре окружающей среды T_l; на левом конце поддерживается постоянная температура, равная температуре окружающей среды T_0, внешние источники тепла отсутствуют. Графически изобразить распределение температуры в различные моменты времени.

2. Найти закон распределения температуры внутри стержня длины l, расположенного на отрезке $[0, l]$, если в начальный момент температура внутри стержня была распределена по закону $f(x)$. На правом конце стержня поддерживается постоянная температура, равная температуре окружающей среды T_l, а на левом конце температура меняется, но с постоянным градиентом, равным T_0', внешние источники тепла отсутствуют. Графически изобразить распределение температуры в различные моменты времени.

3. Найти закон распределения температуры внутри стержня длины l, расположенного на отрезке $[0, l]$, если в начальный момент температура внутри стержня была распределена по закону $f(x)$. На правом конце стержня поддерживается постоянная температура, равная температуре окружающей среды T_l; на левом конце поддерживается постоянная температура, равная температуре окружающей среды T_0, имеется источник тепла, мощность которого задается функцией $\mathcal{G}$. Графически изобразить распределение температуры в различные моменты времени.

№1

1. $f(x)=T\begin{cases}\frac{x(l/4-x)}{l^2}\ , & 0\le x\le l/4\\ 0\ , & l/4\le x\le l\end{cases}.$

2. $f(x)=T\begin{cases}\frac{3x^2}{l^2}\ , & 0\le x\le l/2\\ \frac{3(x-l)^2}{l^2}\ , & l/2\le x\le l\end{cases}.$

3. $\mathcal{G}=g\frac{x}{l},\ \ f(x)=T\begin{cases}0\ , & 0\le x\le l/4\\ \frac{(x-l)(l/4-x)}{l^2}\ , & l/4\le x\le l\end{cases}.$

4. $\mathcal{G}=g\left(e^{\frac{x}{2l}}-\frac{3x^2}{4l^2}\right)\cos\frac{\pi vt}{l}, f(x)=0, F(x)=\begin{cases}\frac{3x^2}{l}, & 0\le x\le l/4\\ \frac{(x-l)^2}{3l}, & l/4\le x\le l\end{cases}$

5. $\begin{matrix}\phi=g\left(e^{-\frac{\pi vt}{l}}-1\right)\\ \psi=0\end{matrix}, F(x)=0, f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le l/4\\ \frac{(x-\frac{l}{4})(\frac{3l}{4}-x)}{h}, & l/4\le x\le 3l/4\\ 0, & 3l/4\le x\le l\end{cases}$

№2

1. $f(x)=T\frac{x-l}{l}\sin\frac{2\pi x}{l}.$

2. $f(x)=T\begin{cases}4(1-\cos\frac{\pi x}{l})\ , & 0\le x\le l/2\\ \frac{16(x-l)^2}{l^2}\ , & l/2\le x\le l\end{cases}.$

3. $\mathcal{G}=g\frac{x^2}{l^2},\ \ f(x)=T\frac{x^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l}.$

4. $\mathcal{G}=g\frac{x}{l}\cos\frac{\pi vt}{l}\ ,\ F(x)=0\ ,\ f(x)=\begin{cases}4l(1-\cos\frac{\pi x}{l}), & 0\le x\le 3l/4\\ \frac{64(x-l)^2}{l}(1+\frac{\sqrt{2}}{2}), & 3l/4\le x\le l\end{cases}$

5. $\begin{matrix}\psi=g\frac{vt}{l}e^{-2\pi vt/l}\\ \phi=0\end{matrix}\ ,\ f(x)=0\ ,\ F(x)=|x-\frac{l}{2}|\sin\frac{2\pi x}{l}.$

№3

1. $f(x)=T\begin{cases}0\ , & 0\le x\le l/4\\ \frac{(x-l)(l/4-x)}{l^2}\ , & l/4\le x\le l\end{cases}.$

2. $f(x)=T\begin{cases}-\frac{3x^2}{l^2}\ , & 0\le x\le l/3\\ -\frac{3(x-l)^2}{4l^2}\ , & l/3\le x\le l\end{cases}.$

3. $\mathcal{G}=ge^{x/l},\ \ f(x)=T\begin{cases}0\ , & 0\le x\le l/2\\ \frac{(x-l)(l/2-x)}{l^2}\ , & l/2\le x\le l\end{cases}.$

4. $\mathcal{G}=g\left(\frac{x}{l}-\frac{6x^2}{l^2}\right)\sin\frac{3\pi vt}{l}, f(x)=0, F(x)=\begin{cases}-\frac{3x^2}{l}, & 0\le x\le l/5\\ -\frac{3(x-l)^2}{16l}, & l/5\le x\le l\end{cases}$

5. $\begin{matrix}\phi=g\frac{v^2t^2}{l^2}e^{-3\pi vt/l}\\ \psi=0\end{matrix}\ , F(x)=0, f(x)=\begin{cases}\frac{x(3l/4-x)}{h}, & 0\le x\le 3l/4\\ 0, & 3l/4\le x\le l\end{cases}.$

№4

1. $f(x)=T\frac{x^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l}.$

2. $f(x)=T\begin{cases}4(1-\cos\frac{\pi x}{l})\ , & 0\le x\le 3l/4\\ \frac{64(x-l)^2}{l^2}(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\ , & 3l/4\le x\le l\end{cases}.$

3. $\mathcal{G}=ge^{2x/l},\ \ f(x)=T\frac{(x-l)^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{2l}.$

4. $\mathcal{G}=g\frac{4x}{l}\cos\frac{2\pi vt}{l}, F(x)=0, f(x)=\begin{cases}-\frac{l}{3}(1-\cos\frac{\pi x}{l}), & 0\le x\le l/2\\ -\frac{4}{3l}(x-l)^2, & l/2\le x\le l\end{cases}$

5. $\begin{matrix}\psi=g\left(e^{\pi vt/l}-1\right)\\ \phi=0\end{matrix}\ ,\ f(x)=0\ ,\ F(x)=\frac{(x-l)^2}{h}\sin\frac{\pi x}{4l}.$

№5

1. $f(x)=T\begin{cases}0\ , & 0\le x\le l/2\\ \frac{(x-l)(l/2-x)}{l^2}\ , & l/2\le x\le l\end{cases}.$

2. $f(x)=T\begin{cases}\frac{3x^2}{l^2}\ , & 0\le x\le l/4\\ \frac{(x-l)^2}{3l^2}\ , & l/4\le x\le l\end{cases}.$

3. $\mathcal{G}=g\left(\frac{2x}{l}+4\right),\ \ f(x)=T\begin{cases}0, & 0\le x\le l/4\\ \frac{(x-l/4)(3l/4-x)}{l^2}, & l/4\le x\le 3l/4\\ 0, & 3l/4\le x\le l\end{cases}$

4. $\mathcal{G}=g\left(\frac{3x}{l}-e^{-\frac{x}{l}}\right)\sin\frac{2\pi vt}{l}, f(x)=0, F(x)=\begin{cases}\frac{3}{l}x^2, & 0\le x\le l/6\\ \frac{3}{25l}(x-2)^2, & l/6\le x\le l\end{cases}$

5. $\begin{matrix}\phi=g\frac{vt}{l}e^{-\frac{\pi vt}{l}}\\ \psi=0\end{matrix}\ , F(x)=0, f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le 3l/4\\ \frac{(x-l)(3l/4-x)}{h}, & 3l/4\le x\le l\end{cases}$

№6

1. $f(x)=T\frac{(x-l)^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{2l}.$

2. $f(x)=T\begin{cases}4(1-\cos\frac{\pi x}{l})\ , & 0\le x\le l/3\\ \frac{9(x-l)^2}{2l^2}\ , & l/3\le x\le l\end{cases}.$

3. $\mathcal{G} = g\frac{4x}{l},\ f(x) = T\left|\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\right| \sin\frac{2\pi x}{l}.$

4. $\mathcal{G} = g\frac{x}{3l}\cos\frac{3\pi vt}{l}, F(x) = 0, f(x) = \begin{cases} -\frac{l}{3}(1 - \cos\frac{\pi x}{l}), & 0 \le x \le l/2 \\ -\frac{4}{3l}(x-l)^2, & l/2 \le x \le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix} \psi = g\frac{v^2t^2}{l^2}e^{2\pi vt/l} \\ \phi = 0 \end{matrix}\ ,\ f(x) = 0\ ,\ F(x) = \frac{x(x-l)}{h}\cos\frac{\pi x}{4l}.$

№7

1. $f(x) = T\begin{cases} 0\ , & 0 \le x \le l/4 \\ \frac{(x-l/4)(3l/4-x)}{l^2}\ , & l/4 \le x \le 3l/4 \\ 0\ , & 3l/4 \le x \le l \end{cases}.$

2. $f(x) = T\begin{cases} -\frac{3x^2}{l^2}\ , & 0 \le x \le l/5 \\ -\frac{3(x-l)^2}{16l^2}\ , & l/5 \le x \le l \end{cases}.$

3. $\mathcal{G} = g\frac{2x^2}{l^2},\ f(x) = T\begin{cases} \frac{x(3l/4-x)}{l^2}\ , & 0 \le x \le 3l/4 \\ 0\ , & 3l/4 \le x \le l \end{cases}.$

4. $\mathcal{G} = g\left(1 - e^{-\frac{2x}{l}}\right)\sin\frac{\pi vt}{l}, f(x) = 0, F(x) = \begin{cases} \frac{3}{l}x^2, & 0 \le x \le l/7 \\ \frac{1}{12l}(x-l)^2, & l/7 \le x \le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix} \phi = g\left(e^{\frac{3\pi vt}{l}} - 1\right) \\ \psi = 0 \end{matrix}\ , F(x) = 0, f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le l/4 \\ \frac{(x-l/4)(l/2-x)}{h}, & l/4 \le x \le l/2 \\ 0, & l/2 \le x \le l \end{cases}$

№8

1. $f(x) = T\frac{|x-\frac{l}{2}|}{l}\sin\frac{2\pi x}{l}.$

2. $f(x) = T\begin{cases} -\frac{1}{3}(1 - \cos\frac{\pi x}{l})\ , & 0 \le x \le l/2 \\ -\frac{4}{3l^2}(x-l)^2\ , & l/2 \le x \le l \end{cases}.$

3. $\mathcal{G} = g\left(e^{x/l} + 1\right),\ f(x) = T\frac{(x-l)^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{4l}.$

4. $\mathcal{G} = g\frac{x^2}{l^2}\sin\frac{\pi vt}{l}, F(x) = 0, f(x) = \begin{cases} -\frac{l}{5}(1 - \cos\frac{\pi x}{l}), & 0 \le x \le l/3 \\ -\frac{9}{40l}(x-l)^2 & l/3 \le x \le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix} \psi = g\left(e^{-\pi vt/l} - e^{\pi vt/l}\right) \\ \phi = 0 \end{matrix}\ ,\ f(x) = 0\ ,\ F(x) = \frac{x(x-l)}{h}\cos\frac{2\pi x}{l}.$

№9

1. $f(x) = T\begin{cases} \frac{x(3l/4-x)}{l^2}\ , & 0 \le x \le 3l/4 \\ 0\ , & 3l/4 \le x \le l \end{cases}.$

2. $f(x) = T\begin{cases} \frac{3}{l^2}x^2\ , & 0 \le x \le l/6 \\ \frac{3}{25l^2}(x-2)^2 & l/6 \le x \le l \end{cases}.$

3. $\mathcal{G} = ge^{-2x/l},\ f(x) = T\begin{cases} 0\ , & 0 \le x \le 3l/4 \\ \frac{(x-l)(3l/4-x)}{l^2}\ , & 3l/4 \le x \le l \end{cases}.$

4. $\mathcal{G} = g\left(\frac{3x}{l} - e^{-\frac{x}{l}}\right)\cos\frac{3\pi vt}{l}, f(x) = 0, F(x) = \begin{cases} \frac{3}{l}x^2, & 0 \le x \le l/8 \\ \frac{3}{49l}(x-l)^2, & l/8 \le x \le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix} \phi = g\left(e^{-\frac{\pi vt}{2l}} - e^{\frac{\pi vt}{2l}}\right) \\ \psi = 0 \end{matrix}\ , F(x) = 0, f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le l/8 \\ \frac{(x-\frac{l}{8})(\frac{l}{2}-x)}{h}, & l/8 \le x \le l/2 \\ 0, & l/2 \le x \le l \end{cases}$

№10

1. $f(x) = T\frac{(x-l)^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{4l}.$

2. $f(x) = \begin{cases} 4(1 - \cos\frac{\pi x}{l})\ , & 0 \le x \le l/4 \\ \frac{64}{9l^2}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})(x-l)^2 & l/4 \le x \le l \end{cases}.$

3. $\mathcal{G} = g\left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{x}{l}\right),\ f(x) = T\frac{x(x-l)}{l^2}\cos\frac{\pi x}{4l}.$

4. $\mathcal{G} = g\frac{x^2}{l^2}\sin\frac{2\pi vt}{l}, F(x) = 0, f(x) = \begin{cases} 4l(1 - \cos\frac{\pi x}{l}), & 0 \le x \le l/5 \\ \frac{25}{4l}(1 - \cos\frac{\pi}{5})(x-l)^2, & l/5 \le x \le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix} \psi = g\frac{vt}{l}e^{\pi vt/2l} \\ \phi = 0 \end{matrix}\ ,\ f(x) = 0\ ,\ F(x) = \frac{x(x-l)}{h}\cos\frac{\pi x}{l}.$

№11

1. $f(x) = T\begin{cases} 0\ , & 0 \le x \le 3l/4 \\ \frac{(x-l)(3l/4-x)}{l^2}\ , & 3l/4 \le x \le l \end{cases}.$

2. $f(x) = T\begin{cases} \frac{3}{l^2}x^2\ , & 0 \le x \le l/7 \\ \frac{1}{12l^2}(x-l)^2\ , & l/7 \le x \le l \end{cases}.$

3. $\mathcal{G} = g\frac{x}{3l},\ f(x) = T\begin{cases} 0\ , & 0 \le x \le l/4 \\ \frac{(x-l/4)(l/2-x)}{l^2}\ , & l/4 \le x \le l/2 \\ 0\ , & l/2 \le x \le l \end{cases}.$

4. $\mathcal{G} = g\left(\frac{x^2}{l^2} + e^{\frac{x}{l}}\right)\cos\frac{2\pi vt}{l}, f(x) = 0, F(x) = \begin{cases} \frac{3}{l}x^2, & 0 \le x \le l/9 \\ \frac{3}{64l}(x-l)^2, & l/9 \le x \le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix} \phi = g\frac{v^2t^2}{l^2}e^{-\frac{\pi vt}{3l}} \\ \psi = 0 \end{matrix}\ , F(x) = 0, f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le l/8 \\ \frac{(x-\frac{l}{8})(\frac{l}{4}-x)}{h}, & l/8 \le x \le l/4 \\ 0, & l/4 \le x \le l \end{cases}$

№12

1. $f(x) = T\frac{x(x-l)}{l^2}\cos\frac{\pi x}{4l}$.

2. $f(x) = T\begin{cases} -\frac{1}{5}(1-\cos\frac{\pi x}{l}) , & 0 \le x \le l/3 \\ -\frac{9}{40l^2}(x-l)^2 & l/3 \le x \le l \end{cases}.$

3. $\mathcal{G} = g\frac{x^2}{6l^2},\ f(x) = T\frac{x(x-l)}{l^2}\cos\frac{2\pi x}{l}$.

4. $\mathcal{G} = g\frac{x^2}{6l^2}\sin\frac{3\pi vt}{l}, F(x) = 0, f(x) = \begin{cases} -7l(1-\cos\frac{\pi x}{l}), & 0 \le x \le l/3 \\ -\frac{63}{18l}(x-l)^2, & l/3 \le x \le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix} \psi = g\frac{vt}{l}e^{\pi vt/3l} \\ \phi = 0 \end{matrix}\ ,\ f(x) = 0\ ,\ F(x) = |x - \frac{l}{2}|\sin\frac{\pi x}{l}$.

№13

1. $f(x) = T\begin{cases} 0\ , & 0 \le x \le l/4 \\ \frac{(x-l/4)(l/2-x)}{l^2}\ , & l/4 \le x \le l/2 \\ 0\ , & l/2 \le x \le l \end{cases}.$

2. $f(x) = T\begin{cases} \frac{3}{l^2}x^2\ , & 0 \le x \le l/8 \\ \frac{3}{49l^2}(x-l)^2\ , & l/8 \le x \le l \end{cases}.$

3. $\mathcal{G} = g\left(\frac{x}{l} + e^{-\frac{x}{l}}\right),\ f(x) = T\begin{cases} 0, & 0 \le x \le l/8 \\ \frac{(x-\frac{l}{8})(\frac{l}{2}-x)}{l^2}, & l/8 \le x \le l/2 \\ 0, & l/2 \le x \le l \end{cases}$

4. $\mathcal{G} = g\left(\frac{x}{l} + 3\right)^2\cos\frac{\pi vt}{l}, f(x) = 0, F(x) = \begin{cases} \frac{1}{7l}x^2, & 0 \le x \le l/2 \\ \frac{1}{7l}(x-l)^2, & l/2 \le x \le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix} \phi = g\frac{vt}{l}\left(e^{-\frac{\pi vt}{l}} - e^{\frac{\pi vt}{l}}\right) \\ \psi = 0 \end{matrix}\ , F(x) = 0, f(x) = \begin{cases} \frac{x(\frac{l}{8}-x)}{h}, & 0 \le x \le l/8 \\ 0, & l/8 \le x \le l \end{cases}$

№14

1. $f(x) = T\frac{x(x-l)}{l^2}\cos\frac{2\pi x}{l}$.

2. $f(x) = T\begin{cases} 4(1-\cos\frac{\pi x}{l})\ , & 0 \le x \le l/5 \\ \frac{25}{4l^2}(1-\cos\frac{\pi}{5})(x-l)^2\ , & l/5 \le x \le l \end{cases}.$

3. $\mathcal{G} = ge^{x/4l},\ f(x) = T\frac{x(x-l)}{l^2}\cos\frac{\pi x}{l}$.

4. $\mathcal{G} = g\frac{3x}{2l}\sin\frac{\pi vt}{l}, F(x) = 0, f(x) = \begin{cases} 4l(1-\cos\frac{\pi x}{l}), & 0 \le x \le l/6 \\ \frac{9}{25l}(1-\frac{\sqrt{3}}{2})(x-l)^2, & l/6 \le x \le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix} \psi = g\left(e^{-2\pi vt/l} - e^{2\pi vt/l}\right) \\ \phi = 0 \end{matrix}\ ,\ f(x) = 0\ ,\ F(x) = (x-l)\sin\frac{\pi x}{2l}$.

№15

1. $f(x) = T\begin{cases} 0\ , & 0 \le x \le l/8 \\ \frac{(x-l/8)(l/2-x)}{l^2}\ , & l/8 \le x \le l/2 \\ 0\ , & l/2 \le x \le l \end{cases}.$

2. $f(x) = T\begin{cases} \frac{3}{l^2}x^2\ , & 0 \le x \le l/9 \\ \frac{3}{64l^2}(x-l)^2\ , & l/9 \le x \le l \end{cases}.$

3. $\mathcal{G} = g\left(1 - \frac{4x}{l}\right)^2,\ f(x) = T\begin{cases} 0, & 0 \le x \le l/8 \\ \frac{(x-\frac{l}{8})(\frac{l}{4}-x)}{l^2}, & l/8 \le x \le l/4 \\ 0, & l/4 \le x \le l \end{cases}$

4. $\mathcal{G} = g\left(\frac{x}{l} + e^{-\frac{x}{l}}\right)\cos\frac{3\pi vt}{l}, f(x) = 0, F(x) = \begin{cases} \frac{1}{7l}x^2, & 0 \le x \le l/3 \\ \frac{1}{28l}(x-l)^2, & l/3 \le x \le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix} \phi = g\frac{vt}{l}e^{\frac{2\pi vt}{l}} \\ \psi = 0 \end{matrix}\ , F(x) = 0, f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le l/8 \\ \frac{(x-l)(\frac{l}{8}-x)}{h}, & l/8 \le x \le l \end{cases}$

№16

1. $f(x) = T\frac{x(x-l)}{l^2}\cos\frac{\pi x}{l}$.

2. $f(x) = \begin{cases} -7(1-\cos\frac{\pi x}{l})\ , & 0 \le x \le l/3 \\ -\frac{63}{18l^2}(x-l)^2\ , & l/3 \le x \le l \end{cases}.$

3. $\mathcal{G} = g\frac{3x}{2l},\ f(x) = |\frac{x}{l} - \frac{1}{2}|\sin\frac{\pi x}{l}$.

4. $\mathcal{G} = ge^{\frac{x}{l}}\cos\frac{\pi vt}{l}, F(x) = 0, f(x) = \begin{cases} -\frac{l}{6}(1-\cos\frac{\pi x}{l}), & 0 \le x \le 2l/3 \\ -\frac{9}{4l}(x-l)^2, & 2l/3 \le x \le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix} \psi = g\left(e^{-3\pi vt/l} - e^{3\pi vt/l}\right) \\ \phi = 0 \end{matrix}\ ,\ f(x) = 0\ ,\ F(x) = x\sin\frac{2\pi x}{l}$.

№17

1. $f(x) = T\begin{cases} 0\ , & 0 \le x \le l/8 \\ \frac{(x-l/8)(l/4-x)}{l^2}\ , & l/8 \le x \le l/4 \\ 0\ , & l/4 \le x \le l \end{cases}.$

2. $f(x) = T\begin{cases} \frac{1}{7l^2}x^2\ , & 0 \le x \le l/2 \\ \frac{1}{7l^2}(x-l)^2\ , & l/2 \le x \le l \end{cases}.$

3. $\mathcal{G} = g\frac{3x^2}{4l^2},\ f(x) = T\begin{cases} \frac{x(l/8-x)}{l^2}\ , & 0 \le x \le l/8 \\ 0\ , & l/8 \le x \le l \end{cases}.$

4. $\mathcal{G} = g\left(e^{\frac{x}{l}}+1\right)\cos\frac{2\pi vt}{l}, f(x)=0, F(x)=\begin{cases} \frac{1}{7l}x^2, & 0\le x\le l/4 \\ \frac{1}{63l}(x-l)^2, & l/4\le x\le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix} \phi = g\frac{vt}{l}e^{\frac{4\pi vt}{l}} \\ \psi = 0 \end{matrix}, F(x)=0, f(x)=\begin{cases} \frac{x(x-\frac{3l}{8})}{h}, & 0\le x\le 3l/8 \\ 0, & 3l/8\le x\le l \end{cases}$

№18

1. $f(x) = T\frac{|x-\frac{l}{2}|}{l}\sin\frac{\pi x}{l}$.

2. $f(x) = T\begin{cases} 4(1-\cos\frac{\pi x}{l}), & 0\le x\le l/6 \\ \frac{9}{25l^2}(1-\frac{\sqrt{3}}{2})(x-l)^2, & l/6\le x\le l \end{cases}$.

3. $\mathcal{G} = g\left(\frac{2x^2}{l^2}+e^{x/l}\right),\ f(x) = (\frac{x}{l}-1)\sin\frac{\pi x}{2l}$.

4. $\mathcal{G} = ge^{\frac{2x}{l}}\sin\frac{\pi vt}{l}, F(x)=0, f(x)=\begin{cases} 4l(1-\cos\frac{\pi x}{l}), & 0\le x\le l/7 \\ \frac{49}{9l}(1-\cos\frac{\pi}{7})(x-l)^2, & l/7\le x\le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix} \psi = g\left(e^{-\pi vt/2l}-e^{\pi vt/2l}\right) \\ \phi = 0 \end{matrix},\ f(x)=0,\ F(x)=\frac{x(x-l)}{h}\cos\frac{\pi x}{2l}$.

№19

1. $f(x) = T\begin{cases} \frac{x(l/8-x)}{l^2}, & 0\le x\le l/8 \\ 0, & l/8\le x\le l \end{cases}$.

2. $f(x) = T\begin{cases} \frac{1}{7l^2}x^2, & 0\le x\le l/3 \\ \frac{1}{28l^2}(x-l)^2, & l/3\le x\le l \end{cases}$.

3. $\mathcal{G} = g\left(1-e^{-\frac{2x}{l}}\right),\ f(x) = T\begin{cases} 0, & 0\le x\le l/8 \\ \frac{(x-l)(\frac{l}{8}-x)}{l^2}, & l/8\le x\le l \end{cases}$

4. $\mathcal{G} = g\left(\frac{3x^2}{l^2}-\frac{x}{l}\right)\cos\frac{2\pi vt}{l}, f(x)=0, F(x)=\begin{cases} \frac{1}{7l}x^2, & 0\le x\le 2l/3 \\ \frac{4}{7l}(x-l)^2, & 2l/3\le x\le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix} \phi = g\frac{vt}{l}e^{\frac{\pi vt}{2l}} \\ \psi = 0 \end{matrix}, F(x)=0, f(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le 3l/8 \\ \frac{(x-l)(x-\frac{3l}{8})}{h}, & 3l/8\le x\le l \end{cases}$

№20

1. $f(x) = T\frac{x-l}{l}\sin\frac{\pi x}{2l}$.

2. $f(x) = T\begin{cases} -\frac{1}{6}(1-\cos\frac{\pi x}{l}), & 0\le x\le 2l/3 \\ -\frac{9}{4l^2}(x-l)^2, & 2l/3\le x\le l \end{cases}$.

3. $\mathcal{G} = g\left(\frac{x}{l}-\frac{6x^2}{l^2}\right),\ f(x) = \frac{x}{l}\sin\frac{2\pi x}{l}$.

4. $\mathcal{G} = g\left(1-\frac{x}{l}\right)^2\cos\frac{3\pi vt}{l}, F(x)=0, f(x)=\begin{cases} 2l(1-\cos\frac{\pi x}{l}), & 0\le x\le 2l/3 \\ \frac{27}{l}(x-l)^2, & 2l/3\le x\le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix} \psi = g\frac{vt}{l}e^{-\pi vt/3l} \\ \phi = 0 \end{matrix},\ f(x)=0,\ F(x)=(x-l)\sin\frac{2\pi x}{l}$.

№21

1. $f(x) = T\begin{cases} 0, & 0\le x\le l/8 \\ \frac{(x-l)(l/8-x)}{l^2}, & l/8\le x\le l \end{cases}$.

2. $f(x) = T\begin{cases} \frac{1}{7l^2}x^2, & 0\le x\le l/4 \\ \frac{1}{63l^2}(x-l)^2, & l/4\le x\le l \end{cases}$.

3. $\mathcal{G} = g\left(\frac{x}{l}-1\right),\ f(x) = T\begin{cases} \frac{x(x-3l/8)}{l^2}, & 0\le x\le 3l/8 \\ 0, & 3l/8\le x\le l \end{cases}$.

4. $\mathcal{G} = g\left(\frac{x}{l}-1\right)\sin\frac{2\pi vt}{l}, f(x)=0, F(x)=\begin{cases} 4l(1-\cos\frac{\pi x}{l}), & 0\le x\le 2l/3 \\ \frac{54}{l}(x-l)^2, & 2l/3\le x\le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix} \phi = g\left(e^{-\frac{\pi vt}{4l}}-e^{\frac{\pi vt}{4l}}\right) \\ \psi = 0 \end{matrix}, F(x)=0, f(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le l/4 \\ \frac{(x-l)(\frac{l}{4}-x)}{h}, & l/4\le x\le l \end{cases}$

№22

1. $f(x) = T\frac{x}{l}\sin\frac{2\pi x}{l}$.

2. $f(x) = T\begin{cases} 4(1-\cos\frac{\pi x}{l}), & 0\le x\le l/7 \\ \frac{49}{9l^2}(1-\cos\frac{\pi}{7})(x-l)^2, & l/7\le x\le l \end{cases}$.

3. $\mathcal{G} = g\left(\frac{x}{l}+3\right)^2,\ f(x) = T\frac{x(x-l)}{l^2}\cos\frac{\pi x}{2l}$.

4. $\mathcal{G} = g\frac{3x^2}{4l^2}\sin\frac{3\pi vt}{l}, F(x)=0, f(x)=\begin{cases} 4l(1-\cos\frac{\pi x}{l}), & 0\le x\le l/2 \\ \frac{16(x-l)^2}{l}, & l/2\le x\le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix} \psi = g\frac{v^2t^2}{l^2}e^{\pi vt/4l} \\ \phi = 0 \end{matrix},\ f(x)=0,\ F(x)=\frac{x^2}{h}\sin\frac{\pi x}{l}$.

№23

1. $f(x) = T\begin{cases} \frac{x(x-3l/8)}{l^2}, & 0 \le x \le 3l/8 \\ 0, & 3l/8 \le x \le l \end{cases}.$

2. $f(x) = T\begin{cases} \frac{1}{7l^2}x^2, & 0 \le x \le 2l/3 \\ \frac{4}{7l^2}(x-l)^2, & 2l/3 \le x \le l \end{cases}.$

3. $\mathcal{G} = g\left(\frac{3x}{l} - e^{-\frac{x}{l}}\right),\ f(x) = T\begin{cases} 0, & 0 \le x \le 3l/8 \\ \frac{(x-l)(x-\frac{3l}{8})}{l^2}, & 3l/8 \le x \le l \end{cases}$

4. $\mathcal{G} = g\left(\frac{2x}{l} + 4\right)\cos\frac{\pi vt}{l}, f(x) = 0, F(x) = \begin{cases} -\frac{3x^2}{l}, & 0 \le x \le l/3 \\ -\frac{3(x-l)^2}{4l}, & l/3 \le x \le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix} \phi = g\frac{vt}{l}\left(e^{-\frac{\pi vt}{l}} - e^{\frac{\pi vt}{l}}\right) \\ \psi = 0 \end{matrix}, F(x) = 0, f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le l/2 \\ \frac{(x-l)(\frac{l}{2}-x)}{h}, & l/2 \le x \le l \end{cases}$

№24

1. $f(x) = T\frac{x(x-l)}{l^2}\cos\frac{\pi x}{2l}.$

2. $f(x) = T\begin{cases} -2(1-\cos\frac{\pi x}{l}), & 0 \le x \le 2l/3 \\ -\frac{27}{l^2}(x-l)^2, & 2l/3 \le x \le l \end{cases}.$

3. $\mathcal{G} = g\left(\frac{x}{2l} + e^{2x/l}\right),\ f(x) = (\frac{x}{l} - 1)\sin\frac{2\pi x}{l}.$

4. $\mathcal{G} = ge^{-\frac{2x}{l}}\sin\frac{2\pi vt}{l}, F(x) = 0, f(x) = \begin{cases} 4l(1-\cos\frac{\pi x}{l}), & 0 \le x \le 3l/4 \\ \frac{64(x-l)^2}{l}(1+\frac{\sqrt{2}}{2}), & 3l/4 \le x \le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix} \psi = g\left(e^{\pi vt/l} - e^{-\pi vt/2l}\right) \\ \phi = 0 \end{matrix},\ f(x) = 0,\ F(x) = \frac{(x-l)^2}{h}\sin\frac{\pi x}{2l}.$

№25

1. $f(x) = T\begin{cases} 0, & 0 \le x \le 3l/8 \\ \frac{(x-l)(x-3l/8)}{l^2}, & 3l/8 \le x \le l \end{cases}.$

2. $f(x) = T\begin{cases} 4(1-\cos\frac{\pi x}{l}), & 0 \le x \le 2l/3 \\ \frac{54}{l^2}(x-l)^2, & 2l/3 \le x \le l \end{cases}.$

3. $\mathcal{G} = g\left(e^{\frac{x}{2l}} - \frac{3x^2}{4l}\right),\ f(x) = T\begin{cases} \frac{x(\frac{l}{4}-x)}{l^2}, & 0 \le x \le l/4 \\ 0, & l/4 \le x \le l \end{cases}$

4. $\mathcal{G} = ge^{\frac{x}{4l}}\sin\frac{3\pi vt}{l}, f(x) = 0, F(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{l}, & 0 \le x \le l/4 \\ \frac{(x-l)^2}{3l}, & l/4 \le x \le l \end{cases}$

5. $\begin{matrix} \phi = g\left(e^{-\frac{4\pi vt}{l}} - e^{\frac{\pi vt}{2l}}\right) \\ \psi = 0 \end{matrix}, F(x) = 0, f(x) = \begin{cases} \frac{x(\frac{l}{4}-x)}{h}, & 0 \le x \le l/4 \\ 0, & l/4 \le x \le l \end{cases}$

Список литературы

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., Наука, 1973

[2] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М. Наука, 1971

[3] Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. М. Наука, 1969

[4] Очан Ю.С. Методы математической физики. М. Высшая школа, 1965

[5] Кошляков Н.С. и др. Уравнения в частных производных математической физики. М. Наука, 1970

[6] Годунов С.К. Уравнения математической физики. М. Наука, 1971