УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2021, Т. 163, кн. 3–4
С. 291–303

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 514.763

doi: 10.26907/2541-7746.2021.3-4.291-303

КОНТАКТНАЯ И ПОЧТИ КОНТАКТНАЯ СТРУКТУРЫ НА ВЕЩЕСТВЕННОМ РАСШИРЕНИИ ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

В.И. Паньженский, А.О. Растрепина

Пензенский государственный университет, г. Пенза, 440026, Россия

Аннотация

В работе рассмотрена групповая модель $\mathbb{G}$ вещественного расширения плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Группа $\mathbb{G}$ является группой Ли матриц специального вида и подгруппой полной линейной группы $GL(3, \mathbb{R})$. Доказано, что на групповой модели вещественного расширения плоскости Лобачевского существует единственная левоинвариантная почти контактная метрическая структура с римановой метрикой прямого произведения, инвариантная относительно группы изометрий. Введено понятие линейной связности, согласованной с распределением. Найдены все левоинвариантные линейные связности, относительно которых тензоры почти контактной метрической структуры (η, ξ, φ, g) ковариантно постоянны. Среди левоинвариантных дифференциальных 1-форм выделена каноническая форма, определяющая на $\mathbb{G}$ контактную структуру. Найдены левоинвариантные контактные метрические связности. Имеется единственная левоинвариантная связность, относительно которой все тензоры почти контактной метрической структуры и каноническая контактная форма ковариантно постоянны. Доказано, что данная связность согласована с контактным распределением в том смысле, что через каждую точку в каждом контактном направлении проходит единственная геодезическая, касающаяся контактного распределения. Найдены параметрические уравнения геодезических данной связности. Установлено также, что связность Леви-Чивита римановой метрики прямого произведения не является связностью, согласованной с контактным распределением.

Ключевые слова: группа Ли, контактная структура, почти контактная структура, левоинвариантная связность, контактные геодезические

Введение

Изучение различных дифференциально-геометрических структур на группах Ли является одним из актуальных направлений в дифференциальной геометрии. Большое число публикаций посвящено левоинвариантным контактным и почти контактным структурам. Примеры групп Ли, наделенных такими структурами, широко используются в теории неголономных динамических систем, теории управления, субримановой геометрии [1–4].

В известном списке восьми трехмерных геометрий Тёрстона [5, 6] две последние – это геометрии матричных групп Ли Nil и Sol. Левоинвариантные контактные метрические структуры и связности на этих группах исследовались, в частности, в работах [7–9]. В списке Тёрстона имеется и геометрия вещественного расширения плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ с римановой метрикой прямого произведения $g = g_1 + g_2$, где g_1 – метрика на плоскости $\mathbb{H}^2$, g_2 – метрика на $\mathbb{R}$.

В настоящей работе предлагается групповая модель $\mathbb{G}$ многообразия $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Группа $\mathbb{G}$ является группой Ли матриц специального вида и подгруппой полной линейной группы $GL(3, \mathbb{R})$. Доказано, что на групповой модели вещественного расширения плоскости Лобачевского существует единственная левоинвариантная почти контактная метрическая структура с римановой метрикой прямого произведения, инвариантная относительно группы изометрий. Найдены все левоинвариантные линейные связности, относительно которых тензоры почти контактной метрической структуры (η, ξ, φ, g) ковариантно постоянны. Среди всех левоинвариантных дифференциальных 1-форм выделена каноническая форма, которая получена с помощью левых сдвигов формы Дарбу, заданной в касательном пространстве единицы группы. Эта форма определяет на $\mathbb{G}$ контактную структуру. Найдены левоинвариантные контактные метрические связности. Оказалось, что имеется единственная связность, относительно которой все тензоры почти контактной метрической структуры и каноническая контактная 1-форма ковариантно постоянны. Введено понятие линейной связности, согласованной с распределением. Доказано, что обнаруженная связность согласована с контактным распределением. Это означает, что через каждую точку в каждом контактном направлении проходит единственная геодезическая, касающаяся контактного распределения (контактная геодезическая).

1. Контактные и почти контактные метрические структуры

Пусть M – гладкое многообразие нечетной размерности $m = 2n+1$. Контактной формой на M называется дифференциальная 1-форма η, удовлетворяющая условию

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0,$$

где $\wedge$ – внешнее произведение, d – внешний дифференциал. Контактная форма η определяет вполне неголономное $2n$-мерное распределение $H = \ker \eta$, которое называется контактной структурой на M. Гладкое многообразие, наделенное контактной структурой, называется контактным многообразием. Контактное распределение H называется первым фундаментальным распределением, или горизонтальным, а 1-мерное распределение $V = \ker d\eta$ – вторым фундаментальным распределением, или вертикальным. В каждой точке $p \in M$ касательное пространство T_pM распадается в прямую сумму дополняющих друг друга подпространств H_p и V_p: $T_pM = H_p \oplus V_p$. Существует единственное векторное поле ξ, принадлежащее распределению V и удовлетворяющее условию $\eta(\xi) = 1$. Поле ξ называется характеристическим, или вектором Риба.

Почти контактной структурой на M называется тройка тензорных полей (η, ξ, φ), где η – дифференциальная 1-форма, называемая контактной формой, ξ – характеристическое векторное поле, φ – структурный эндоморфизм модуля гладких векторных полей $\mathfrak{X}(M)$ на M. При этом требуется выполнение следующих условий [10, 11]:

$$\eta(\xi) = 1, \quad \varphi(\xi) = 0, \quad \eta \circ \varphi = 0, \quad \varphi^2 = -id + \eta \otimes \xi. \tag{1}$$

Если на M фиксированная риманова метрика такая, что

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \quad \forall\, X,\, Y \in \mathfrak{X}(M), \tag{2}$$

то четверка (η, ξ, φ, g) определяет на M почти контактную метрическую структуру.

Почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой, если выполняется условие

$$d\eta(X, Y) = g(X, \varphi Y), \quad \forall\, X,\, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{3}$$

В этом случае $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$, поэтому многообразие M, наделенное контактной метрической структурой, является контактным многообразием.

Если многообразие M есть группа Ли, то естественно исследовать левоинвариантные контактные и почти контактные структуры. Почти контактная (контактная) метрическая структура называется левоинвариантной, если левоинвариантны все определяющие ее тензорные поля η, ξ, φ, g.

В известном списке трехмерных модельных геометрий Тёрстона находится геометрия вещественного расширения плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, наделенная римановой метрикой прямого произведения $g = g_1 + g_2$, где g_1 – метрика плоскости Лобачевского, а g_2 – евклидова метрика на прямой $\mathbb{R}$.

Рассмотрим множество $\mathbb{G}$, элементами (точками) которого являются 3×3-матрицы следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & y & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где x, y, z – действительные числа: $x, y, z \in \mathbb{R}$, $y > 0$. Множество $\mathbb{G}$ является группой Ли относительно операции умножения матриц и подгруппой Ли полной линейной группы $GL(3, \mathbb{R})$. Умножая слева (4) на произвольную матрицу из группы $\mathbb{G}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & b & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & y & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z+c \\ 0 & by & bx+a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

заключаем, что левые сдвиги на $\mathbb{G}$ определяются следующими формулами:

$$\bar{x} = bx + a, \quad \bar{y} = by, \quad \bar{z} = z + c, \quad y > 0, \quad b > 0. \tag{5}$$

Дифференцируя (5) по параметрам a, b, c, находим левоинвариантные векторные поля на $\mathbb{G}$ – базис алгебры Ли группы Ли $\mathbb{G}$

$$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = x\partial_1 + y\partial_2, \quad X_3 = \partial_3, \tag{6}$$

где $\partial_1 = \partial/\partial x$, $\partial_2 = \partial/\partial y, \partial_3 = \partial/\partial z$ – естественный базис гладких векторных полей на $\mathbb{G}$.

Левоинвариантную риманову метрику на $\mathbb{G}$ можно получить следующим образом. В касательном пространстве единицы группы рассмотрим евклидову метрику

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

и сдвинем ее в произвольную точку

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \bar{z} \\ 0 & \bar{y} & \bar{x} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Разрешая уравнения (5), находим

$$x = \frac{1}{b}(\bar{x} - a), \quad y = \frac{1}{b}\bar{y}, \quad z = \bar{z} - c,$$

поэтому

$$dx = \frac{1}{b}d\bar{x}, \quad dy = \frac{1}{b}d\bar{y}, \quad dz = d\bar{z},$$

следовательно,

$$ds^2 = \frac{d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2}{b^2} + d\bar{z}^2.$$

Так как единица группы сдвигается в точку (7), то

$$\bar{x} = b \cdot 0 + a, \quad \bar{y} = b \cdot 1, \quad \bar{z} = z \cdot 0 + c,$$

в частности $b = \bar{y}$. Опуская черту над произвольной точкой, получаем левоинвариантую риманову метрику на $\mathbb{G}$

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} + dz^2. \tag{8}$$

Метрика (8) является стандартной римановой метрикой прямого произведения на вещественном расширении плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, а

$$ds_1^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \tag{9}$$

является метрикой плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2$ в модели Пуанкаре на евклидовой полуплоскости ${\mathbb{E}_+}^2$, $y > 0$. Таким образом, группа $\mathbb{G}$ с левоинвариантной метрикой (8) естественным образом отождествляется с $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ и, следовательно, является групповой моделью вещественного расширения плоскости Лобачевского.

Замечание. Если в группе $\mathbb{G}$ матриц вида (4) положить $z = 0$, то получим подгруппу группы $\mathbb{G}$, которую можно рассматривать как группу Ли 2×2-матриц вида

$$\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Риманова метрика (9) является инвариантной относительно левых сдвигов

$$\bar{x} = bx + a, \quad \bar{y} = by, \quad y > 0, \quad b > 0, \tag{10}$$

поэтому данную группу можно отождествить с плоскостью Лобачевского в модели Пуанкаре $\mathbb{E}^2_+$, $y > 0$. В этом случае левые сдвиги (10) задают группу параллельных переносов на $\mathbb{E}^2_+$. Из (10) следует, что любой параллельный перенос на $\mathbb{E}^2_+$, с точки зрения евклидовой геометрии, представляет собой композицию гомотетии с центром в начале системы координат O и коэффициентом $b > 0$ и параллельного переноса вдоль оси OX.

Все левоинвариантные дифференциальные 1-формы можно найти, интегрируя уравнения инвариантности

$$X^p_\alpha \partial_p \eta_i + \partial_i X^p_\alpha \eta_p = 0$$

(производная Ли от формы η вдоль левоинвариантных векторных полей X_α (6), $\alpha = 1, 2, 3$, должна обращаться в нуль: $L_{X_\alpha}\eta = 0$). В результате получим следующее семейство дифференциальных 1-форм:

$$\eta = \frac{c_1}{y}\, dx + \frac{c_2}{y}\, dy + c_3 dz, \tag{11}$$

где c_1, c_2, c_3 – постоянные. Так как $d\eta = \dfrac{c_1}{y^2}\, dx \wedge dy$ и $\eta \wedge d\eta = \dfrac{c_1 c_3}{y^2}\, dx \wedge dy \wedge dz$, то при $c_1 c_3 \neq 0$ найденные формы являются контактными и определяют на $\mathbb{G}$ контактную структуру. Однако среди этих форм нет таких, которые бы вместе с римановой метрикой (8) определяли контактную метрическую структуру. Действительно, из требования (3) следует, что матрица структурного эндоморфизма имеет вид

$$\varphi^j_i = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие (2) в координатах имеет вид

$$g_{ps}\varphi_i^p\varphi_j^s = g_{ij} - \eta_i\eta_j.$$

Для метрики (8) имеем

$$\frac{1}{y^2}\,\varphi_i^1\varphi_j^1 + \frac{1}{y^2}\,\varphi_i^2\varphi_j^2 + \varphi_i^3\varphi_j^3 = g_{ij} - \eta_i\eta_j.$$

Если положить $i = 1,\ j = 3$, то получим, что $c_1c_3 = 0$ и, следовательно, $\eta\wedge d\eta = 0$.

Однако существуют левоинвариантные почти контактные метрические структуры с римановой метрикой прямого произведения $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$. Имеет место следующая

Теорема 1. *На групповой модели вещественного расширения плоскости Лобачевского существует единственная левоинвариантная почти контактная метрическая структура с римановой метрикой прямого произведения, инвариантная относительно группы изометрий.*

Доказательство. Полная группа изометрий многообразия $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ является четырехмерной группой Ли. Кроме параллельных переносов она содержит однопараметрическую подгруппу вращений. Векторное поле $Y = Y^i\partial_i$, порождающее эту подгруппу, можно найти интегрируя уравнения Киллинга $(L_Y g = 0)$

$$Y^p\partial_p g_{ij} + \partial_i Y^p g_{pj} + \partial_j Y^p g_{ip} = 0.$$

Общее решение этой системы

$$Y^1 = \frac{1}{2}\,c_4x^2 + c_2x - \frac{1}{2}\,c_4y^2 + c_1, \quad Y^2 = (c_4x + c_2y)y, \quad Y^3 = z + c_3$$

определяет базисные векторные поля группы изометрий. Постоянным $c_1,\ c_2,\ c_3$ соответствуют базисные векторные поля, определяющие сдвиги – левоинвариантные векторные поля (6), а постоянной c_4 соответствует векторное поле – оператор вращения

$$Y = \frac{1}{2}\,(x^2 - y^2)\partial_1 + xy\partial_2. \tag{12}$$

Требуя инвариантность 1-форм (11) относительно оператора вращений Y, заключаем, что $c_1 = c_2 = 0$, поэтому $\eta = c_3dz$, а так как c_3dz и dz определяют одно и то же распределение, то, полагая $c_3 = 1$, имеем следующую контактную форму:

$$\eta = dz. \tag{13}$$

Из условия левоинвариантности вектора Риба

$$X_\alpha^p\partial_p\xi^i - \partial_p X_\alpha^j\xi^p = 0$$

следует, что $\xi^1 = k_1y,\ \xi^2 = k_2y,\ \xi^3 = k_3,\ k_i = \mathrm{const}$. Требуя инвариантность ξ относительно оператора вращения Y, находим, что $k_1 = k_2 = 0$, и, наконец, условие $\eta(\xi) = 1$ однозначно определяет вектор Риба

$$\xi = \partial_3. \tag{14}$$

Все левоинвариантные эндоморфизмы можно найти решая уравнения инвариантности φ относительно левоинвариантных векторных полей (6)

$$X_\alpha^p\partial_p\varphi_i^j + \partial_i X_\alpha^p\varphi_p^j - \partial_p X_\alpha^j\varphi_i^p = 0.$$

Эта система легко интегрируется. Ее общее решение имеет вид

$$\varphi_i^j = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ c_1^3 \dfrac{1}{y} & c_2^3 \dfrac{1}{y} & c_3^3 \end{pmatrix}, \qquad (15)$$

где c_i^j – постоянные. Из условия $\varphi(\xi) = 0$ следует, что $c_3^1 = c_3^2 = c_3^3 = 0$, а из $\eta \circ \varphi = 0$ следует, что $c_1^3 = c_2^3 = c_3^3 = 0$. Таким образом,

$$\varphi_i^j = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & 0 \\ c_1^2 & c_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Остальные требования (1) и (2) на постоянные c_i^j накладывают следующие условия:

$$(c_1^1)^2 + c_2^1 c_1^2 = -1, \quad c_1^1 c_2^1 + c_2^1 c_2^2 = 0, \quad c_1^2 c_1^1 + c_2^2 c_1^2 = 0, \quad c_1^2 c_2^1 + (c_2^2)^2 = -1,$$

$$(c_1^1)^2 + (c_1^2)^2 = 1, \quad c_1^1 c_2^1 + c_1^2 c_2^2 = 0, \quad (c_2^1)^2 + (c_2^2)^2 = 1.$$

Накладывая на эндоморфизм φ условия его инвариантности относительно оператора вращения, находим, что $c_1^2 = -c_1^2$, $c_1^1 + c_2^2 = 0$, $c_1^1 = c_2^2 = 0$, $c_2^1 \cdot c_1^2 = -1$, $(c_2^1)^2 = (c_1^2)^2 = 1$. Следовательно, $c_2^1 = 1$, $c_1^2 = -1$ или $c_2^1 = -1$, $c_1^2 = 1$, поэтому структурный эндоморфизм определен с точностью до постоянного множителя. Таким образом, почти контактная метрическая структура, инвариантная относительно группы изометрий, имеет следующие структурные тензоры

$$\eta_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \xi^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_i^j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{y^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

□

Распределение $H = \ker \eta : dz = 0$ найденной почти контактной метрической структуры (16) является инволютивным. Интегральные поверхности данного распределения $z = \mathrm{const}$ – суть плоскости Лобачевского с метрикой Пуанкаре (9). Данные поверхности являются естественным слоением вещественного расширения плоскости Лобачевского.

2. Левоинвариантные связности

Вычисляя коэффициенты Γ_{ij}^k связности Леви-Чивита ∇ для метрики (8), находим их ненулевые компоненты

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\frac{1}{y}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}, \quad \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}. \qquad (17)$$

Эта связность инвариантна относительно группы изометрий, и следовательно, левоинвариантна. Прямым подсчетом нетрудно убедиться, что все тензоры, определяющие почти контактную метрическую структуру (η, ξ, φ, g), ковариантно постоянны. Оказывается, что кроме связности Леви-Чивита существуют левоинвариантные связности с кручением, относительно которых определяющие тензоры почти контактной метрической структуры ковариантно постоянны. Так как разность двух связностей является тензором, то коэффициенты $\overline{\Gamma}_{ij}^k$ любой линейной связности можно записать в виде суммы

$$\overline{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + T_{ij}^k,$$

где T_{ij}^k – компоненты тензора деформации связности Леви-Чивита ∇. Связность $\overline{\nabla}$ будет метрической тогда и только тогда, когда ковариантный тензор деформации T кососимметричен по последним двум аргументам, то есть $T_{ijk} = -T_{ikj}$, $T_{ijk} = T_{ij}^p g_{kp}$. Так как метрический тензор (8) левоинвариантен, то и левоинвариантна связность Леви-Чивита. Следовательно, связность $\overline{\nabla}$ левоинвариантна тогда и только тогда, когда левоинвариантен тензор деформации T. Это означает, что производная Ли вдоль левоинвариантных векторных полей X_α обращается в нуль $L_{X_\alpha} T = 0$. В координатах имеем следующую систему дифференциальных уравнений

$$X_\alpha^p \partial_p T_{ijk} + \partial_i X_\alpha^p T_{pjk} + \partial_j X_\alpha^p T_{ipk} + \partial_k X_\alpha^p T_{ijp} = 0.$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned}
&T_{ijk} = c_{ijk}\,\frac{1}{y^3}, \quad i,j,k = 1,2,\\
&T_{ijk} = c_{ijk}\,\frac{1}{y^2}, \quad \text{если один из индексов принимает значение 3},\\
&T_{ijk} = c_{ijk}\,\frac{1}{y}, \quad \text{если два индекса принимают значение 3},
\end{aligned}$$

где c_{ijk} – постоянные и $c_{ijk} = -c_{ikj}$. Если теперь потребовать, чтобы в этой связности были ковариантно постоянны η, ξ и φ, то компоненты T_{ijk}, содержащие хотя бы один индекс 3, обратятся в нуль, и мы будем иметь следующие коэффициенты связности $\overline{\nabla}$:

$$\overline{\Gamma}_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & -(1+\alpha_1)y^{-1} & 0 \\ -y^{-1} & -\alpha_2 y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{\Gamma}_{ij}^2 = \begin{pmatrix} (1+\alpha_1)y^{-1} & 0 & 0 \\ \alpha_2 y^{-1} & -y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{\Gamma}_{ij}^3 = 0,$$

где α_1, α_2 – произвольные постоянные.

Среди всех левоинвариантных 1-форм (11) выделим контактную форму

$$\eta = \frac{1}{y}\,dx + dz. \tag{18}$$

Эту форму можно получить следующим образом. В касательном пространстве единицы группы рассмотрим каноническую форму Дарбу $\eta = ydx + dz$ и так же, как и в случае римановой метрики, сдвинем ее в произвольную точку. В результате получим форму (18). Так как $\eta \wedge d\eta = \dfrac{1}{y^2}\,dx \wedge dy \wedge dz$, то данная форма определяет контактную метрическую структуру.

Линейную связность $\widetilde{\nabla}$ назовем контактной метрической связностью, если контактная форма и метрика ковариантно постоянны: $\widetilde{\nabla}\eta = 0$, $\quad \widetilde{\nabla} g = 0$. Такая связность необходимо имеет кручение. Теперь нетрудно убедиться, что на групповой модели вещественного расширения плоскости Лобачевского с римановой метрикой

(8) и контактной формой (18) существует трехпараметрическое семейство левоинвариантных контактных метрических связностей, имеющих следующие компоненты:

$$\widetilde{\Gamma}^1_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -(1+\beta_1)y^{-1} & 0 \\ -y^{-1} & -\beta_2 y^{-1} & 0 \\ 0 & -\beta_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\Gamma}^2_{ij} = \begin{pmatrix} (1+\beta_1)y^{-1} & 0 & -(1+\beta_1) \\ \beta_2 y^{-1} & -y^{-1} & -\beta_2 \\ \beta_3 & 0 & -\beta_3 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\Gamma}^3_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & (1+\beta_1)y^{-2} & 0 \\ 0 & \beta_2 y^{-2} & 0 \\ 0 & \beta_3 y^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая связности $\overline{\nabla}$ и $\widetilde{\nabla}$, заключаем, что имеется единственная связность $\overline{\widetilde{\nabla}}$, являющаяся левоинвариантной линейной связностью с кручением, относительно которой все тензоры, определяющие почти контактную структуру, и каноническая контактная форма (18) ковариантно постоянны. Имеем следующие ненулевые компоненты связности $\overline{\widetilde{\nabla}}$:

$$\overline{\widetilde{\Gamma}}{}^1_{21} = -\frac{1}{y}, \quad \overline{\widetilde{\Gamma}}{}^2_{22} = -\frac{1}{y}. \tag{19}$$

Нетрудно убедиться, что тензор кривизны этой связности равен нулю.

3. Связности, согласованные с распределением

Пусть M – гладкое m-мерное многообразие и H – распределение на M размерности $r < m$, то есть семейство r-мерных подпространств $\{H_p\}$ касательных пространств T_pM, гладко зависящих от точки $p \in M$.

Определение. Линейную связность ∇ на M назовем согласованной с распределением H, если через каждую точку $p \in M$ в каждом направлении $v_p \in H_p$ проходит единственная геодезическая γ, касающаяся распределения H (то есть ее поле касательных векторов $\dot{\gamma}$ принадлежит H). Геодезические связности ∇, касающиеся H, назовем контактными геодезическими.

Теорема 2. *Контактная метрическая связность* $\overline{\widetilde{\nabla}}$ *с ненулевыми коэффициентами* (19) *является связностью, согласованной с контактным распределением вещественного расширения плоскости Лобачевского.*

Доказательство. Дифференциальные уравнения геодезических связности $\overline{\widetilde{\nabla}}$

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{1}{y}\frac{dy}{ds}\frac{dx}{ds} = 0, \quad \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 0, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0 \tag{20}$$

легко интегрируются. Действительно, из последнего уравнения системы (20) следует, что

$$z = a_3 s + b_3, \quad a_3,\, b_3 - \text{ постоянные.} \tag{21}$$

Второе уравнение в (20) умножим на $\dfrac{1}{y}$, $y > 0$, и введем функцию $f = \ln y$. Тогда

$$\frac{df}{ds} = \frac{1}{y}\frac{dy}{ds}, \quad \frac{d^2f}{ds^2} = \frac{1}{y}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{1}{y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2, \quad \frac{1}{y}\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{d^2f}{ds^2} + \frac{1}{y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2,$$

и, подставляя в уравнение

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{1}{y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 0,$$

получаем, что $\dfrac{d^2f}{ds^2} = 0$, $f = a_2s + b_2$, $\ln y = a_2s + b_2$ и

$$y = \exp{(a_2s + b_2)}, \quad a_2,\ b_2 - \text{постоянные}. \tag{22}$$

Далее, подставляя y и $\dfrac{dy}{ds} = a_2\exp{(a_2s + b_2)}$ в первое уравнение системы (20), получим

$$\frac{d^2x}{ds^2} - a_1\frac{dx}{ds} = 0, \quad \frac{dx}{ds} = h, \quad \frac{dh}{ds} - a_1h = 0,$$

$$\frac{dh}{h} = a_1ds, \quad h = a_1\exp{(a_2s)}, \quad \frac{dx}{ds} = a_1\exp{(a_2s)},$$

следовательно,

$$x = \frac{a_1}{a_2}\exp{(a_2s)} + b_1, \quad a_1,\ b_1 - \text{постоянные}, \quad a_2 \neq 0. \tag{23}$$

Необходимо еще учесть, что s – естественный параметр, то есть

$$\frac{1}{y^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \frac{1}{y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

откуда получаем следующее условие на постоянные

$$\left(\frac{a_1}{\exp{(b_2)}}\right)^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 = 1. \tag{24}$$

Таким образом, общее решение (21)–(23) системы (20) при условии (24) на постоянные является параметрическими уравнениями геодезических связности $\tilde{\tilde{\nabla}}$. В силу однородности группы $\mathbb{G}$ достаточно исследовать геодезические, выходящие из единицы $E(0,1,0)$ группы. При $s = 0$ и $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ будем иметь

$$b_1 = -\frac{a_1}{a_2}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 0,$$

следовательно,

$$x = \frac{a_1}{a_2}(\exp{(a_2s)} - 1), \quad y = \exp{(a_2s)}, \quad z = a_3s, \tag{25}$$

$${a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 = 1. \tag{26}$$

Для того чтобы геодезическая γ касалась контактного распределения, необходимо и достаточно, чтобы $\eta(\dot{\gamma}) = 0$, то есть

$$\frac{1}{y}\frac{dx}{ds} + \frac{dz}{ds} = 0, \tag{27}$$

откуда следует, что $a_1 = -a_3$ и, следовательно,

$$x = \frac{a_3}{a_2}\,(1 - \exp{(a_2s)}), \quad y = \exp{(a_2s)}, \quad z = a_3s, \tag{28}$$

$$2{a_3}^2 + {a_2}^2 = 1, \quad a_2 \neq 0 \tag{29}$$

являются параметрическими уравнениями горизонтальных геодезических связности $\widetilde{\widetilde{\nabla}}$, выходящих из единицы группы.

Докажем теперь, что через единицу группы в каждом контактном направлении проходит единственная контактная геодезическая. Векторные поля

$$Z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, y\, \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\, \frac{\partial}{\partial z}, \quad Z_2 = y\, \frac{\partial}{\partial y}, \quad Z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, y\, \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, \frac{\partial}{\partial z} \tag{30}$$

единичны и попарно ортогональны относительно метрики (8) вещественного расширения плоскости Лобачевского. Так как $\eta(Z_1) = \eta(Z_2) = 0$, то поля Z_1 и Z_2 принадлежат контактному распределению H. Зафиксируем ортонормированный репер $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$ и отождествим $\mathbb{G} \cong \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ с полупространством $\mathbb{E}^3_+$ $(y > 0)$. В единице группы $E(0,1,0)$ с учетом (30) контактная плоскость $\mathbb{H}_E$ имеет направляющие векторы $\vec{i} - \vec{k}$ и $\vec{j}$ и, следовательно, определяется уравнением $x + z = 0$. Пусть $P(\alpha, \beta, \gamma)$ – произвольная точка плоскости $\mathbb{H}_E$. Тогда вектор $\overrightarrow{EP}$ имеет координаты $(\alpha,\, \beta - 1,\, -\alpha)$. Нам необходимо доказать, что в направлении вектора $\overrightarrow{EP}$ проходит единственная контактная геодезическая. Вектор скорости $\dfrac{d\vec{r}}{ds}$ геодезической (28) имеет координаты $(-a_3 \exp{(a_2 s)},\, a_2 \exp{(a_2 s)},\, a_3)$, а в точке $E(s=0)$ $(-a_3,\, a_2,\, a_3)$. Докажем, что существуют единственные постоянные $a_2,\ a_3$, удовлетворяющие условию (29), такие, что

$$\left.\frac{d\vec{r}}{ds}\right|_{s=0} = \lambda \overrightarrow{EP},$$

где $\lambda \neq 0$ – некоторая постоянная. Сравнивая координаты $\overrightarrow{EP}$ и $\left.\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right|_{s=0}$ и учитывая (29), находим

$$a_3 = -\lambda\alpha, \quad a_2 = \lambda(\beta - 1), \quad \lambda^2 = \frac{1}{2\alpha^2 + {(\beta - 1)}^2}.$$

Таким образом, в произвольном направлении $\overrightarrow{OP}$ проходит единственная контактная геодезическая. Кроме того, так как вектору $-\overrightarrow{EP}$ соответствует вектор $-\dfrac{d\vec{r}}{ds}$, то геодезическая обладает свойством симметрии и, следовательно, прямая EP является ее касательной. $\square$

Если вектор $\overrightarrow{EP}$ имеет координаты $(0, \beta - 1, 0)$, $\beta \neq 1$, то геодезической, с точки зрения евклидовой геометрии, является открытый луч (OY) (то есть положительная часть оси OY), уравнения которого относительно естественного параметра s имеет вид

$$x = 0, \quad y = \exp{(\pm s)}, \quad z = 0. \tag{31}$$

Если $\beta = 1$, то есть $\alpha_2 = 0$, то уравнения (28) теряют смысл, так как направление вектора $\overrightarrow{EP}$ параллельно абсолюту, то есть координатной плоскости XOZ, а это направление, как и абсолют, не принадлежит пространству $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \cong \mathbb{E}^3_+ (y > 0)$.

Примером связности, не согласованной с контактным распределением, может служить связность Леви-Чивита ∇. Действительно, система дифференциальных уравнений геодезических этой связности имеет вид

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{2}{y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} = 0, \quad \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{1}{y}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 0, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

Так как $\dfrac{dz}{ds} = c = \mathrm{const}$, то из условия горизонтальности (27) следует, что

$$\frac{dx}{ds} = -cy, \quad \frac{d^2x}{ds^2} = -c\,\frac{dy}{ds}.$$

Поэтому из первого уравнения системы следует, что $c\,\dfrac{dy}{ds} = 0$. Если $\dfrac{dy}{ds} = 0$, то из второго уравнения системы следует, что $\dfrac{dx}{ds} = 0$ и в силу (27) $\dfrac{dz}{ds} = 0$. Это означает, что связность ∇ не имеет контактных геодезических. Если $\dfrac{dy}{ds} \neq 0$, то $c = 0$, откуда следует, что $\dfrac{dx}{ds} = 0$ и $\dfrac{dz}{ds} = 0$, а второе уравнение системы будет совпадать со вторым уравнением системы (20), а контактные геодезические, выходящие из единицы группы, имеют вид (31), то есть мы имеем только одну контактную геодезическую.

Замечание. Пусть на многообразии M заданы линейная связность ∇ и распределение H. Естественно возникает следующая задача: найти необходимые и достаточные условия согласованности связности ∇ и распределения H. Для связностей, согласованных с распределением, возникают классические задачи по геодезическим отображениям. Пусть мы имеем многообразие M, наделенное распределением H и согласованное с этим распределением связностью ∇. Возникает, например, следующий вопрос: допускает ли многообразие M геодезические отображения, при которых контактные геодезические отображаются на контактные геодезические некоторого многообразия M', наделенного распределением H' и связностью ∇', согласованной с распределением H'.

Литература

1. *Вершик А.М., Фадеев Л.Д.* Лагранжева механика в инвариантном изложении // Проблемы теоретической физики: Сб. ст. / Под ред. М.Г. Веселова и др. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1975. – С. 129–141.
2. *Вершик А.М., Гершкович В.Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. – 1987. – Т. 16. – С. 5–85.
3. *Сачков Ю.Л.* Теория управления на группах Ли // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2008. – Т. 27. – С. 5–59.
4. *Аграчев А.А.* Некоторые вопросы субримановой геометрии // Усп. матем. наук. – 2016. – Т. 71, № 6. – С. 3–36.
5. *Скотт П.* Геометрии на трехмерных многообразиях / Под ред. В.И. Арнольда. – М.: Мир, 1986. – 164 с.
6. *Терстон У.* Трехмерная геометрия и топология / Пер. с англ. под ред. О.В. Шварцмана. – М.: МЦНМО, 2001. – 312 с.
7. *Pan'zhenskii V.I., Klimova T.R.* The contact metric connection on the Heisenberg group // Russ. Math. – 2018. – V. 62, No 11. – P. 45–52. – doi: 10.3103/S1066369X18110051.
8. *Panzhenskii V.I., Klimova T.R.* The contact metric connection with skew torsion // Russ. Math. – 2019. – V. 63, No 11. – P. 47–55. – doi: 10.3103/S1066369X19110070.
9. *Паньженский В.И., Растрепина А.О.* Левоинвариантная контактная метрическая структура на многообразии Sol // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2020. – Т. 162, кн. 1. – С. 77–90. – doi: 10.26907/2541-7746.2020.1.77-90.

10. *Blair D.E.* Contact Manifolds in Riemannian Geometry. – Berlin; N. Y.: Springer, 1976. – 148 p. – doi: 10.1007/BFb0079307.

11. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. – Одесса: Печатный дом, 2013. – 458 с.

Поступила в редакцию
06.04.2021

Паньженский Владимир Иванович, кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математическое образование»

Пензенский государственный университет
ул. Красная, 40, г. Пенза, 440026, Россия
E-mail: *kaf-geom@yandex.ru*

Растрепина Анастасия Олеговна, студент факультета физико-математических и естественных наук

Пензенский государственный университет
ул. Красная, 40, г. Пенза, 440026, Россия
E-mail: *n.rastrepina@mail.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2021, vol. 163, no. 3–4, pp. 291–303

doi: 10.26907/2541-7746.2021.3-4.291-303

Contact and Almost Contact Structures on the Real Extension of the Lobachevsky Plane

V.I. Pan'zhenskii, A.O. Rastrepina***

Penza State University, Penza, 440026 Russia
E-mail: **kaf-geom@yandex.ru*, ***n.rastrepina@mail.ru*

Received April 6, 2021

Abstract

In this article, we propose a group model $\mathbb{G}$ of a real extension of the Lobachevsky plane $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. The group $\mathbb{G}$ is a Lie group of special-form matrices and a subgroup of the general linear group $GL(3, \mathbb{R})$. It is proved that, on the group model of the real extension of the Lobachevsky plane, there is a unique left-invariant almost contact metric structure with the Riemannian metric of the direct product that is invariant with respect to the isometry group. The concept of a linear connection compatible with the distribution is introduced. All left-invariant linear connections for which the tensors of the almost contact metric structure $(\eta,\ \xi,\ \varphi,\ g)$ are covariantly constant are found. Among the left-invariant differential 1-forms, a canonical form defining a contact structure on $\mathbb{G}$ is distinguished. The left-invariant contact metric connections are found. There is a unique left-invariant connection for which all tensors of the almost contact metric structure and the canonical contact form are covariantly constant. It is proved that this connection is compatible with the contact distribution in the sense that a single geodesic tangent to the contact distribution passes through each point in each contact direction. Parametric equations of geodesics of the given connection are found. It is also established that the Levi-Civita connection of the Riemannian metric of the direct product is not a connection compatible with the contact distribution.

Keywords: Lie group, contact structure, almost contact structure, left-invariant connection, contact geodesics

References

1. Vershik A.M., Fadeev L.D. Lagrangian mechanics in invariant form. In: *Problemy teoreticheskoi fiziki* [Problems of Theoretical Physics]. Veselov M.G. et al. (Eds.). Leningrad, Izd. LGU, 1975, pp. 129–141. (In Russian)

2. Vershik A.M., Gershkovich V.Ya. Nonholonomic dynamical systems. Geometry of distributions and variational problems. *Itogi Nauki Tekh., Ser.: Sovrem. Probl. Mat. Fundam. Napravleniya*, 1987, vol. 16, pp. 5–85. (In Russian)

3. Sachkov Yu.L. Control theory on Lie groups. *J. Math. Sci.*, 2009, vol. 156, no. 3, pp. 381–439. doi: 10.1007/s10958-008-9275-0.

4. Agrachev A.A. Topics in sub-Riemannian geometry. *Russ. Math. Surv.*, 2016, vol. 71, no. 6, pp. 989–1019. doi: 10.1070/RM9744.

5. Scott P. *Geometrii na trekhmernykh mnogoobraziyakh* [The Geometries of 3-Manifolds]. Arnol'd V.I. (Ed.). Moscow, Mir, 1986. 164 p. (In Russian)

6. Thurston W.P. *Trekhmernaya geometriya i topologiya* [The Geometry and Topology of Three-Manifolds]. Shvartsman O.V. (Ed.). Moscow, MTsNMO, 2001. 312 p. (In Russian)

7. Pan'zhenskii V.I., Klimova T.R. The contact metric connection on the Heisenberg group. *Russ. Math.*, 2018, vol. 62, no. 11, pp. 45–52. doi: 10.3103/S1066369X18110051.

8. Panzhenskii V.I., Klimova T.R. The contact metric connection with skew torsion. *Russ. Math.*, 2019, vol. 63, no. 11, pp. 47–55. doi: 10.3103/S1066369X19110070.

9. Pan'zhenskii V.I., Rastrepina A.O. The left-invariant contact metric structure on the Sol manifold. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 1, pp. 77–90. doi: 10.26907/2541-7746.2020.1.77-90. (In Russian)

10. Blair D.E. *Contact Manifolds in Riemannian Geometry.* Berlin, New York, Springer, 1976. 148 p. doi: 10.1007/BFb0079307.

11. Kirichenko V.F. *Differentsial'no-geometricheskie struktury na mnogoobraziyakh* [Differential-Geometric Structures on Manifolds]. Odessa, Pechatnyi Dom, 2013. 458 p. (In Russian)

***Для цитирования*:** *Паньженский В.И., Растрепина А.О.* Контактная и почти контактная структуры на вещественном расширении плоскости Лобачевского // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2021. – Т. 163, кн. 3–4. – С. 291–303. – doi: 10.26907/2541-7746.2021.3-4.291-303.

***For citation*:** Pan'zhenskii V.I., Rastrepina A.O. Contact and almost contact structures on the real extension of the Lobachevsky plane. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2021, vol. 163, no. 3–4, pp. 291–303. doi: 10.26907/2541-7746.2021.3-4.291-303. (In Russian)