

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 534.121

doi: 10.26907/2541-7746.2022.4.302-315

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТЕЛО В НЕСТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ, ПО ХАРАКТЕРИСТИКАМ ТЕЧЕНИЯ НА УДАЛЕННОЙ КОНТРОЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А.Н. Нуриев¹, А.М. Камалудинов², О.Н. Зайцева¹

¹*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия*

²*Казанский национальный исследовательский технический университет*

им. А.Н. Туполева – КАИ, г. Казань, 420111, Россия

Аннотация

В работе рассмотрен вопрос о вычислении гидродинамических сил, действующих на тело в нестационарном потоке, по характеристикам течения на удаленной контрольной поверхности. Получены общие формулы для определения гидродинамических сил как в трехмерной, так и в двумерной постановках, проведен анализ структуры формул, на базе нескольких задач показано значение их членов. С помощью представленного подхода проведено исследование гидродинамического воздействия на цилиндрическое тело произвольной формы сечения в осцилляционном потоке, по результатам которого построены универсальные зависимости гидродинамических сил от параметров колебания.

Ключевые слова: гидродинамические силы, вязкая жидкость, уравнение Навье–Стокса, нестационарное обтекание тела, периодическое движение

Введение

Работа посвящена одной из фундаментальных проблем гидродинамики – проблеме расчета гидродинамического воздействия на тело, находящееся в нестационарном потоке вязкой несжимаемой жидкости. Соответствующее направление исследования уходит корнями к работам основоположников современной аэрогидродинамики: Дж.Г. Стокса, Н.Е. Жуковского и др. – и продолжает активно развиваться в настоящее время [1–6].

В настоящей работе рассматриваются вопросы определения гидродинамических сил, действующих на тело произвольной формы, через характеристики течения на удаленной от тела контрольной поверхности, в частности на бесконечно удаленной поверхности. Такой способ вычисления сил имеет преимущества, когда характеристики течения на удалении от тела известны лучше (или описываются более простыми уравнениями), чем в пограничном слое. В качестве областей применения можно привести экспериментальные оптические методы измерения параметров потока, где характеристики течения в пограничном слое могут недостаточно точно фиксироваться [5–7], а также классические асимптотические методы исследования течений [8–10], где пограничный слой может определяться в членах более высокого порядка, чем внешнее течение.

В рамках исследования выводится формула для расчета гидродинамических сил как в общем трехмерном случае, где она записывается в тензорном виде, так

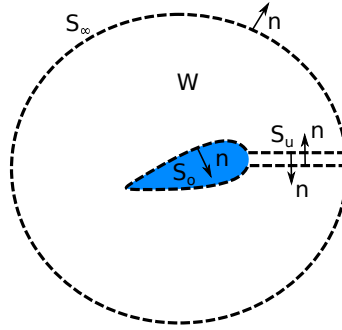


Рис. 1. Контрольный объем

и в двумерном случае, для которого представлена новая компактная запись формулы в криволинейной системе координат в комплексных переменных. В заключении работы представлен анализ структуры полученной формулы. Продемонстрировано применение формулы для определения гидродинамического воздействия на цилиндрическое тело произвольной формы, находящееся в стационарных и нестационарных потоках идеальной и вязких жидкостей. Для случая осцилляционного потока вязкой жидкости получены новые универсальные зависимости, обобщающие результаты [8–10].

1. Общий случай

Рассмотрим обтекание твердого тела нестационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Исследуем движение жидкости около тела в неподвижном контрольном объеме W , ограниченном поверхностью S , состоящей из внутренней поверхности тела S_0 , внешней ограничивающей поверхности S_∞ и поверхности бесконечно узкого разреза S_u (см. рис. 1). При этом

$$\oint_S \Phi dS = \int_{S_\infty} \Phi dS + \int_{S_0} \Phi dS + \int_{S_u} \Phi dS = \int_{S_\infty} \Phi dS + \int_{S_0} \Phi dS.$$

Запишем интегральное уравнение количества движения в объеме W , используя представление конвективного слагаемого в форме Громеки – Ламба

$$\int_W \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dW = - \int_S \mathbf{n} \left(p + \frac{1}{2} u^2 \right) dS + \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dS + \int_W \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} dS, \quad (1)$$

где $\mathbf{T} = \nu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$ – тензор вязких напряжений (деленный на плотность), ν – кинематическая вязкость, \mathbf{u} – вектор скорости, p – кинематическое давление, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ – завихренность, \mathbf{n} – единичная нормаль к поверхности (см. рис. 1).

Выразим из (1) силы, действующие на поверхность тела S_0 :

$$\mathbf{F} = \int_{S_0} \mathbf{n} p dS - \int_{S_0} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dS = - \int_{S_\infty} \mathbf{n} \left(p + \frac{1}{2} u^2 \right) dS + \int_{S_\infty} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dS - \frac{1}{2} \int_{S_0} \mathbf{n} u^2 dS + \int_W \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} dW - \int_W \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dW. \quad (2)$$

Заметим, что сила здесь поделена на ρ . В правой части уравнения (2) остаются силы, действующие на ограничивающую поверхность S_∞ , и приращение количества движения в W .

Рассмотрим последний член в (2). Так как W не зависит от t , то

$$\int_W \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dW = \frac{d}{dt} \int_W \mathbf{u} dW. \quad (3)$$

Далее для преобразования выражения под производной можно использовать следующее интегральное тождество (см. [11]):

$$\frac{d}{dt} \int_W \mathbf{u} dW = \frac{1}{N-1} \frac{d}{dt} \int_W \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dW - \frac{1}{N-1} \frac{d}{dt} \int_W (\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\mathbf{r}\mathbf{u})) dW. \quad (4)$$

Здесь N – пространственная размерность задачи, \mathbf{r} – радиус-вектор. Второй интеграл в правой части (4) может быть преобразован в поверхностный

$$\frac{d}{dt} \int_W (\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\mathbf{r}\mathbf{u})) dW = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{n} \cdot ((\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} - (\mathbf{r}\mathbf{u})) dS = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) dS, \quad (5)$$

где \mathbf{I} – единичный тензор. Используя уравнение Навье – Стокса, можно провести следующие дальнейшие преобразования (5):

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) dS = \int_S \mathbf{r} \times \left(\mathbf{n} \times \left(-\nabla \left(p + \frac{1}{2} u^2 \right) + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \nabla \cdot \mathbf{T} \right) \right) dS. \quad (6)$$

Заметим, что согласно [11]

$$\int_{S_\infty} \mathbf{n} \left(p + \frac{1}{2} u^2 \right) dS = \frac{1}{N-1} \int_{S_\infty} \mathbf{r} \times \left(\mathbf{n} \times \left(-\nabla \left(p + \frac{1}{2} u^2 \right) \right) \right) dS. \quad (7)$$

Подставляя (3), (4), (6), (7) в (2), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & \int_W \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} dW - \frac{1}{N-1} \frac{d}{dt} \int_W \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dW + \\ & + \int_{S_\infty} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dS + \frac{1}{N-1} \int_{S_\infty} \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \nabla \mathbf{T})) dS - \\ & - \frac{1}{2} \int_{S_0} \mathbf{n} u^2 dS + \frac{1}{N-1} \frac{d}{dt} \int_{S_0} \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) dS. \quad (8) \end{aligned}$$

Два последних интеграла (8) на поверхности неподвижного твердого тела обращаются в нуль (в то же время в условиях текущей постановки касательные скорости на теле могут быть ненулевыми).

Формулу (8) можно преобразовать к следующему виду, предложенному в [6]:

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{N-1} \frac{d}{dt} \int_W \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dW + \int_W \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} dW + \int_{S_\infty} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\gamma} ds, \quad (9)$$

где

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{T} - \frac{1}{N-1} \mathbf{u}(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{N-1} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r} \times \mathbf{u}) + \frac{1}{N-1} ((\mathbf{r} \cdot \nabla \cdot \mathbf{T})\mathbf{I} - \mathbf{r}(\nabla \cdot \mathbf{T})).$$

Первый объемный интеграл может быть представлен через поверхностный как

$$\frac{d}{dt} \int_W \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dW = \frac{d}{dt} \int_{S_\infty} \mathbf{n} \cdot ((\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} - \mathbf{r}\mathbf{u} + (N-1)\mathbf{u}\mathbf{r}) dS + \frac{d}{dt} \int_{S_0} \mathbf{n} \cdot ((\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} - \mathbf{r}\mathbf{u} + (N-1)\mathbf{u}\mathbf{r}) dS.$$

Второй объемный интеграл $\int_W \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} dS$ – сила Жуковского (или вихревая сила в терминологии [11]) – может быть представлен через поверхностный как

$$\int_W \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} dW = \int_{S_\infty} \mathbf{n} \cdot \left(\frac{1}{2} u^2 \mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{u} \right) dS + \int_{S_0} \mathbf{n} \cdot \left(\frac{1}{2} u^2 \mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{u} \right) dS.$$

В результате конечную формулу для силы можно представить в виде

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{N-1} \frac{d}{dt} \int_{S_\infty} \mathbf{n} \cdot ((\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} - \mathbf{r}\mathbf{u} + (N-1)\mathbf{u}\mathbf{r}) dS + \int_{S_\infty} \mathbf{n} \cdot \left(\frac{1}{2} u^2 \mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{u} \right) dS - \frac{1}{N-1} \int_{S_\infty} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) dS + \int_{S_\infty} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\gamma}_1 dS - \int_{S_0} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) dS - \frac{d}{dt} \int_{S_0} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u}\mathbf{r}) dS, \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \mathbf{T} + \frac{1}{N-1} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r} \times \mathbf{u}) + \frac{1}{N-1} ((\mathbf{r} \cdot \nabla \cdot \mathbf{T})\mathbf{I} - \mathbf{r}(\nabla \cdot \mathbf{T})).$$

В случае если тело неподвижно, сила полностью определяется через характеристики течения на внешней границе S_∞ контрольного объема W :

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{N-1} \frac{d}{dt} \int_{S_\infty} \mathbf{n} \cdot ((\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} - \mathbf{r}\mathbf{u} + (N-1)\mathbf{u}\mathbf{r}) dS + \int_{S_\infty} \mathbf{n} \cdot \left(\frac{1}{2} u^2 \mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{u} \right) dS - \frac{1}{N-1} \int_{S_\infty} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) dS + \int_{S_\infty} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\gamma}_1 dS. \quad (11)$$

Заметим также, что (для несжимаемой жидкости)

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} dS = \nu \int_S \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u} dS = -\nu \int_S \mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega} dS.$$

Для двумерного случая также имеем

$$\int_{S_\infty} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r} \times \mathbf{u}) dS = 0.$$

2. Двумерный случай

Рассмотрим двумерный вариант формул ($N = 2$) для вычисления продольной f_x и подъемной f_y компонент силы в декартовой системе координат (x, y) .

Выполним переход от тензорной формы записи в (10) к выражению в комплексных переменных, для этого вычислим подынтегральные выражения в декартовых координатах

$$\begin{aligned}
F = f_x + if_y = & -\frac{d}{dt} \int_{S_\infty} (n_x + in_y)((x + iy)(u_x - iu_y)) dS + \\
& + \int_{S_\infty} (n_x - in_y) \frac{1}{2} ((u_y^2 - u_x^2 - 2iu_x u_y)) dS + \\
& - \int_{S_\infty} \omega(n_x u_{xy} + n_y u_{yx} - i(n_x u_{xx} + n_y u_{yy})) dS + \nu \int_{S_\infty} (n_x + in_y) \omega dS + \\
& + \nu \int_{S_\infty} \left(n_{xy} \frac{\partial \omega}{\partial x} + n_{yx} \frac{\partial \omega}{\partial y} - i(n_{xx} \frac{\partial \omega}{\partial x} + n_{yy} \frac{\partial \omega}{\partial y}) \right) dS - \\
& - \int_{S_0} (n_x u_x + n_y u_y)(u_x + iu_y) dS - \frac{d}{dt} \int_{S_0} (n_x u_x + n_y u_y)(x + iy) dS. \quad (12)
\end{aligned}$$

Далее перейдем в ортогональную криволинейную систему координат, жестко связанную с обтекаемым телом. Переход из декартовой системы координат (x, y) в криволинейную (r, θ) зададим с помощью конформного отображения

$$z(\zeta) = x + iy, \quad \zeta = r + i\theta, \quad \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial y}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = -\frac{\partial x}{\partial \theta},$$

которое отображает область $(r_0 \leq r \leq \infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ во внешность сечения рассматриваемого цилиндрического тела в физической плоскости (x, y) , при этом $r = r_0$ переходит в замкнутую кривую, определяющую профиль сечения, а бесконечно удаленная точка переходит в бесконечно удаленную. Коэффициенты Ламе такого преобразования определяются как

$$h = h_r = h_\theta, \quad h^2 = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial \bar{z}}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \theta}.$$

Заметим также, что для двумерного случая все интегралы в (12) нужно считать криволинейными, при этом элемент ограничивающей кривой dS в заданной системе координат определяется как

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2} d\theta = \sqrt{\frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \theta}} d\theta = h d\theta.$$

Внешняя единичная нормаль n к кривой $r = \text{const}$ вычисляется как

$$n = n_x + in_y = \frac{\partial z}{\partial r} / h = -i \frac{\partial z}{\partial \theta} / h.$$

Скорости задаются как

$$u_r = \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

В этом случае (12) переписывается в виде

$$\begin{aligned}
 F = f_x + if_y = & \\
 = -i \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - i \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) z \right]_{r=r_\infty} d\theta - i \int_0^{2\pi} \left[2 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \theta} / h^2 \right]_{r=r_\infty} d\theta + & \\
 + i \int_0^{2\pi} \left[z \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \omega \right]_{r=r_\infty} d\theta + i\nu \int_0^{2\pi} \left[\omega \frac{\partial z}{\partial r} \right]_{r=r_\infty} d\theta - i\nu \int_0^{2\pi} \left[z \frac{\partial \omega}{\partial r} \right]_{r=r_\infty} d\theta + & \\
 + 2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial z}{\partial \theta} / h^2 \right]_{r=r_0} d\theta - \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \theta} z \right]_{r=r_0} d\theta. & \quad (13)
 \end{aligned}$$

Поскольку нормальная составляющая скорости u_r на теле равна нулю, то два последних слагаемых в (13) обращаются в нуль. Отметим также, что формулы (11) и (13) могут применяться для расчета гидродинамического воздействия и на группу тел. Внешняя ограничивающая поверхность (или контур в двумерной области) в этом случае должна охватывать все эти объекты вместе.

3. Обтекание тела нестационарным потоком идеальной жидкости

3.1. Вычисление силы. Чтобы пояснить значения главных членов формулы (13), рассмотрим задачу обтекания цилиндрического тела (произвольного сечения) идеальной жидкостью. Формула (13) для вычисления силы, действующей на цилиндрическое тело, в нестационарном потенциальном ($\omega = 0$) потоке преобразуется к виду

$$f_x + if_y = -i \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - i \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) z \right]_{r=r_\infty} d\theta - i \int_0^{2\pi} \left[2 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \theta} / h^2 \right]_{r=r_\infty} d\theta. \quad (14)$$

Заметим также, что, положив $u_\infty = const$, выбрав $r_\infty = r_0$ и приняв нормальные скорости равными нулю, мы можем перейти к известной формуле Чаплыгина

$$\begin{aligned}
 f_x + if_y = -i \int_0^{2\pi} \left[2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial \theta} / h^2 \right]_{r=r_0} d\theta = -\frac{i}{2} \int_0^{2\pi} \left[u_\theta^2 \frac{\partial z}{\partial \theta} \right]_{r=r_0} d\theta = -\frac{i}{2} \int_{S_0} u^2 dz; \\
 f_x - if_y = \frac{i}{2} \int_{S_0} u^2 d\bar{z} = \frac{i}{2} \int_{S_0} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 d\bar{z},
 \end{aligned}$$

где w – комплексный потенциал.

3.2. Обтекание неподвижного тела. Классическое решение задачи для случая, когда тело неподвижно, а скорость на бесконечности определяется как $u_\infty(t)e^{i\alpha}$ (где α – угол отклонения потока от оси Ox), записывается в виде

$$\begin{aligned}
 \psi = u_\infty S(r, \theta) - \frac{\Gamma}{2\pi} r, \quad S(r, \theta) = 2e^{r_0} m_\infty \sinh(r - r_0) \sin(\theta - \alpha), \quad (15) \\
 m_\infty = \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} e^{-\zeta} \right)_{\zeta=\infty}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим определение силы при $r_\infty \rightarrow \infty$. Первое нестационарное слагаемое в (14) вычисляется как

$$-i \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - i \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) z \right]_{r \rightarrow r_\infty} d\theta = i 2e^{r_0} m_\infty \frac{du_\infty}{dt} \int_0^{2\pi} [\sin(\alpha - \theta + i(r - r_0))z]_{r \rightarrow r_\infty} d\theta.$$

Оно пропорционально ускорению потока и определяет силу присоединенных масс.

Второе слагаемое (14) вычисляется как

$$-i \int_0^{2\pi} \left[2 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \theta} / h^2 \right]_{r \rightarrow r_\infty} d\theta = -ie^{i\alpha} \Gamma u_\infty.$$

Оно отражает теорему Жуковского о подъемной силе (как уже отмечалось ранее, сила всюду поделена на ρ). В отсутствие циркуляции (при $\Gamma = 0$) это слагаемое, очевидно, равно нулю для произвольного профиля и произвольного потока $u_\infty(t)$.

4. Обтекание тела потоком вязкой несжимаемой жидкости

4.1. Вычисление силы. Продолжая анализ членов формулы (13), рассмотрим вычисление силы, действующей на твердое цилиндрическое тело, обтекаемое нестационарным потоком вязкой жидкости. Принимая $r_\infty = r_0$ и равенство нулю нормальных и касательных скоростей на границе тела, получим, что первые три слагаемых в (13) исчезают. Силы определяются как

$$f_x + if_y = i\nu \int_0^{2\pi} \left[\omega \frac{\partial z}{\partial r} \right]_{r=r_0} d\theta - i\nu \int_0^{2\pi} \left[z \frac{\partial \omega}{\partial r} \right]_{r=r_0} d\theta. \quad (16)$$

Из оставшихся слагаемых в (16) первое определяет вклад в силу от касательных напряжений, второе – вклад от давления. Если касательные скорости на теле не равны нулю (это допускает рассматриваемая модель с неподвижным контрольным объемом), то в (16) появится еще одно слагаемое:

$$f_x + if_y = -\frac{i}{2} \int_0^{2\pi} \left[u_\theta^2 \frac{\partial z}{\partial \theta} \right]_{r=r_0} d\theta + i\nu \int_0^{2\pi} \left[\omega \frac{\partial z}{\partial r} \right]_{r=r_0} d\theta - i\nu \int_0^{2\pi} \left[z \frac{\partial \omega}{\partial r} \right]_{r=r_0} d\theta.$$

При расчете силы через характеристики течения на бесконечности заметим, что при стандартных условиях затухания завихренности на бесконечности $r_\infty \rightarrow \infty$: $\omega \approx (e^{-r})$ в (13) пропадают четвертый и пятый члены. Таким образом, формула переписывается в виде

$$f_x + if_y = -i \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} - i \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) z \right]_{r \rightarrow \infty} d\theta - i \int_0^{2\pi} \left[2 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \theta} / h^2 \right]_{r \rightarrow \infty} d\theta + i \int_0^{2\pi} \left[z \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \omega \right]_{r \rightarrow \infty} d\theta. \quad (17)$$

Заметим, что в используемой системе координат e^{-r} обозначает в традиционном смысле не экспоненциальное, а линейное затухание; так в полярной системе координат полярный радиус определяется как $r^* = e^r$. Далее покажем, что третье слагаемое, которого нет в идеальной жидкости, играет в вязкой жидкости значимую

роль в определении сопротивления тела (этот вопрос также широко обсуждается в работе [11]).

4.2. Обтекание тела стационарным потоком с образованием стационарного следа. Проведем анализ гидродинамического воздействия на симметричное (относительно оси Ox) цилиндрическое тело, обтекаемое стационарным потоком со скоростью U , направленным параллельно оси Ox . При этом будем считать, что в следе за телом течение также остается симметричным и стационарным. Такое справедливо, например, для круглого цилиндра радиуса a при числе Рейнольдса $Re = U_0 a / \nu < 40$, а для хорошо обтекаемых тел в еще большем диапазоне. Как известно (см., например, [12]), асимптотическое решение в стационарном следе на большом удалении от тела ($x \gg x_0 = x(r_0)$) может быть представлено в виде (для любого симметричного цилиндрического тела):

$$x \gg x_0 : \quad U - u_x < Q \sqrt{\frac{U}{4\pi\nu x}} \exp(-Uy^2/(4\nu x)), \quad \int_{-\infty}^{\infty} (U - u_x) dy = Q. \quad (18)$$

Константа Q здесь может быть интерпретирована как объемный расход добавочного течения, образующегося в следе и направленного к телу.

Используя (18), можно вычислить гидродинамические силы по формуле (17) через характеристики течения на бесконечности. Заметим, что в силу стационарности течения первое слагаемое в формуле (17) обращается в нуль. Для вычисления остальных членов удобно перейти в декартову систему координат и выбрать в качестве ограничивающего контура S_∞ бесконечно удаленный прямоугольник. В этом случае второй интеграл в (17) будет вычисляться как

$$-\frac{i}{2} \int_{S_\infty} uu d\bar{z} = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [u_x^2]_{x \rightarrow \infty} - [u_x^2]_{x \rightarrow -\infty} dy + U \int_{-\infty}^{\infty} [2u_y]_{y \rightarrow \infty} dx.$$

Так как полный поток массы через контур должен быть нулевым, для последнего слагаемого имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} [2u_y]_{y \rightarrow \infty} dx = \int_{-\infty}^{\infty} [u_x]_{x \rightarrow \infty} - [u_x]_{x \rightarrow -\infty} dy.$$

Далее, учитывая затухание скорости вне следа (как e^{-r}) и в следе (18), получим, что и второй интеграл в (17) равен нулю

$$-\frac{i}{2} \int_{S_\infty} uu d\bar{z} = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [(u_x - U)^2]_{x \rightarrow \infty} - [(u_x - U)^2]_{x \rightarrow -\infty} dy = 0.$$

При вычислении третьего интеграла заметим, что завихренность принимает ненулевые значения только в следе. Используя (18), получим

$$f_x = - \int_{-\infty}^{\infty} [u_x \omega y]_{x \rightarrow \infty} dy = - \int_{-\infty}^{\infty} \left[u_x \frac{\partial (U - u_x)}{\partial y} y \right]_{x \rightarrow \infty} dy = U \int_{-\infty}^{\infty} (U - u_x) dy = QU.$$

Как видно, найденная сила пропорциональна скорости потока и определяет сопротивление тела. Заметим, что в общем случае Q зависит от числа Рейнольдса и геометрии тела. Так, в частности, для круглого цилиндра (см., например, [12]) при малых числах Рейнольдса $Q = 4\pi\nu / \ln(7.406 / (2Re))$, $Re \sim 1$.

4.3. Обтекание тела осцилляционным потоком. В качестве заключительного примера проведем оценку гидродинамического воздействия на неподвижное цилиндрическое тело характерного размера a (с произвольной формой сечения), находящееся в осцилляционном потоке вязкой несжимаемой жидкости, через характеристики на бесконечности. Нормируя скорость, пространственные координаты и время на U , a , w^{-1} (где w и U – угловая частота и амплитуда скорости колебаний потока соответственно), запишем систему уравнений движения жидкости в ортогональной криволинейной системе координат (r, θ) в виде

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{\gamma \varepsilon}{h^2} \frac{\partial (\psi, \Delta \psi)}{\partial (r, \theta)} = \varepsilon^2 \Delta^2 \psi, \quad \Delta = \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right). \quad (19)$$

Здесь безразмерные параметры ε , γ определяются как

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\nu}{\omega a^2}}, \quad \gamma = \frac{U}{\sqrt{\omega \nu}}.$$

Далее будем рассматривать случай, когда ε – малое, а γ – величина порядка единицы. Определим граничные условия на границе цилиндра и на бесконечности следующим образом:

$$\begin{aligned} r \rightarrow \infty: \quad \psi &\sim m_\infty e^r \sin(\theta - \alpha) \cos(t), \quad m_\infty = \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} e^{-\zeta} \right)_{\zeta \rightarrow \infty}; \\ r = r_0: \quad \psi &= 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Используя подход [8, 9], представим решение задачи в виде разложения в ряд по степеням ε^k , $k = 1, 2, \dots$, полагая $\varepsilon \ll 1$. В главном члене $O(\varepsilon^0)$ решение должно удовлетворять уравнению

$$\Delta \Psi_0 = 0.$$

Его решение уже обсуждалось в разд. 3.. Оно записывается в виде (15) при $u_\infty = \cos(t)$ и $\Gamma = 0$. Решение (15) на границе цилиндра не удовлетворяет второму из условий (20) – равенству нулю касательной компоненты скорости, поэтому решение вблизи тела остается фактически не определено. Однако соответствующая главному члену компонента силы может быть вычислена согласно (17) через характеристики бесконечности. Получим в главном члене

$$\begin{aligned} f_0 &= -i \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial r} - i \frac{\partial \Psi_0}{\partial \theta} \right) z \right]_{r \rightarrow \infty} d\theta = \\ &= -i 2e^{r_0} m_\infty \sin t \int_0^{2\pi} [\sin(\alpha - \theta + i(r - r_0)) z]_{r \rightarrow r_\infty} d\theta. \end{aligned}$$

Это слагаемое определяет силу присоединенных масс в точно таком же виде, как и в идеальной жидкости (см. разд. 3.2.).

Для определения вклада в гидродинамическую силу от погранслоного течения (он, очевидно, имеет порядок $O(\varepsilon^1)$) построим внутреннее (погранслоное) разложение, удовлетворяющее второму условию (20). Для этого перейдем к погранслоной координате $\eta = (r - r_0)/\varepsilon$ в (19). Для определения погранслоного решения ψ_0 получим следующую задачу:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \eta^2} - \frac{1}{h(r_0)} \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial \eta^4} = 0$$

с граничными условиями

$$\eta \rightarrow \infty : \psi_0 \sim \eta \left[\frac{\partial \Psi_0}{\partial r} \right]_{r=r_0} = \eta \cos(t) V(\theta) h(r_0); \quad \eta = 0 : \widetilde{\psi}_0 = 0, \quad \frac{\partial \widetilde{\psi}_0}{\partial \eta} = 0;$$

$$V(\theta) = 2e^{r_0} m_\infty \sin(\theta - \alpha) / h(r_0).$$

Первое из них является условием срачивания с найденным внешним течением. Решение погранслошной задачи можно записать в виде

$$\psi_0 = V(\theta) \operatorname{Real} \left\{ e^{it} \left(\eta h(r_0) + \frac{(1-i)(E-1)}{\sqrt{2}} \right) \right\}, \quad E = \exp \left(-\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \eta h(r_0) \right).$$

Из найденного решения получим граничное условие для следующего внешнего члена разложения (порядка $O(\varepsilon^1)$)

$$\Psi_1(r_0) = \psi_0(\eta \rightarrow \infty) - \eta \cos(t) V(\theta) h(r_0) = -\operatorname{Real} \left\{ e^{it} \frac{(1-i)}{\sqrt{2}} \right\} V(\theta),$$

который определяется из уравнения

$$\Delta \Psi_1 = 0.$$

Используя формулу (17), можно вычислить гидродинамическое воздействие на цилиндр как

$$f_1 = -\frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial r} - i \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta} \right) iz \right)_{r \rightarrow \infty} d\theta.$$

В то же время, как нетрудно заметить, имеем

$$\int_W S^* \Delta \Psi_1 dW = \int_0^{2\pi} \left(z \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} - \Psi_1 \frac{\partial z}{\partial r} \right)_{r \rightarrow \infty} d\theta + m_\infty \int_0^{2\pi} \left(\Psi_1 \frac{\partial S^*}{\partial r} \right)_{r=r_0} d\theta = 0,$$

$$S^* = 2m_\infty e^{r_0} \sinh(r - r_0) e^{i\theta} e^{-i\alpha}.$$

Таким образом, вторая компонента силы f_1 определяется только решением порядка $O(\varepsilon^1)$ в пограничном слое:

$$f_1 = i \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} \left(\Psi_1 \frac{\partial S^*}{\partial r} \right)_{r=r_0} d\theta = m_\infty 2e^{r_0} \frac{d}{dt} \operatorname{Real} \left\{ e^{it} \frac{(1-i)}{\sqrt{2}} \right\} \pi (A_1 - iB_1);$$

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V(\theta) \sin(\theta) d\theta, \quad B_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V(\theta) \cos(\theta) d\theta.$$

Она описывает силу Бассе или наследственную силу.

Итоговую формулу для вычисления силы можно записать в следующем виде:

$$F/(a^2 U w) = -i 2e^{r_0} m_\infty \sin t \int_0^{2\pi} [\sin(\alpha - \theta + i(r - r_0)) z]_{r \rightarrow r_\infty} d\theta +$$

$$+ \varepsilon \sqrt{2} (\cos(t) - \sin(t)) m_\infty e^{r_0} \pi (A_1 - iB_1) + O(\varepsilon^2).$$

В частном случае, для круглого цилиндра $z(\zeta) = e^\zeta$, $h(r_0) = 1$, $V(\theta) = 2 \sin(\theta - \alpha)$ полученный результат в точности совпадает с классической формулой, представленной впервые в работе [8]. Заметим, что для определения тех же двух членов силы с помощью формулы (16) на границе тела потребовалось бы определение двух дополнительных членов разложения: внешнего решения Ψ_1 и следующего погранслоного решения ψ_1 (как это было сделано в [8]). Отметим также, что первое слагаемое в (17) определяет в вязкой жидкости не только силу присоединенных масс, как в потенциальном течении, но целый ряд других нестационарных компонент (которые находятся в последующих членах разложения), включая представленную выше силу Бассе.

Заключение

Полученные в работе формулы позволяют определять гидродинамическое воздействие на тело, обтекаемое нестационарным потоком несжимаемой жидкости, по произвольному замкнутому контуру, охватывающему тело. Как было показано выше, это в частности дает возможность анализировать гидродинамические силы, действующие на тело по параметрам течения в следе на бесконечно удаленной границе. С помощью этого подхода в работе были проанализированы несколько задач, в том числе задачи стационарного обтекания цилиндрического тела и обтекания цилиндрического тела осциллирующим потоком вязкой несжимаемой жидкости. В первом случае была получена классическая формула для силы сопротивления, описывающая взаимосвязь силы с объемным расходом добавочного возвратного течения, образующегося в следе. Во втором случае получена новая универсальная зависимость гидродинамических сил, действующих на цилиндрическое тело с произвольной формой сечения, от параметров колебания потока. В отличие от задачи стационарного обтекания, где фактически определяется только структура силы, она позволяет определять конкретную величину силы при малоамплитудных колебаниях.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-38-60023, разд. 1) и РНФ (проект № 22-79-10033, разд. 2–4).

Литература

1. Wu J.C. Theory for aerodynamic force and moment in viscous flows // AIAA J. – 1981. – V. 19, No 4. – P. 432–441. – doi: 10.2514/3.50966.
2. Dynnikova G.Ya. Forces exerted on a body in an unsteady vortex separation flow of an ideal incompressible fluid // Fluid Dyn. – 2001. – V. 36, No 2. – P. 285–295. – doi: 10.1023/A:1019294303580.
3. Dynnikova G.Ya., Andronov P.R. Expressions of force and moment exerted on a body in a viscous flow via the flux of vorticity generated on its surface // Eur. J. Mech. B/Fluids. – 2018. – V. 72. – P. 293–300. – doi: 10.1016/j.euromechflu.2018.06.002.
4. Chang Ch.-C., Yang Sh.-H., Chu Ch.-Ch. A many-body force decomposition with applications to flow about bluff bodies // J. Fluid Mech. – 2008. – V. 600 – P. 95–104. – doi: 10.1017/S0022112008000396.
5. Chin D.D., Lentink D. Fluid moment and force measurement based on control surface integration // Exp. Fluids. – 2020. – V. 61. – Art. 18, P. 1–19. – doi: 10.1007/s00348-019-2838-7.

6. *Noca F.* On the evaluation of time-dependent fluid-dynamic forces on bluff bodies: Ph.D. Thesis. – Pasadena: Calif. Inst. Technol., 1997. – xiv, 157 p. – doi: 10.7907/K2Z0-9016. – URL: <https://resolver.caltech.edu/CaltechETD:etd-08102005-132659>.
7. *Shrestha B., Ahsan S.N., Aureli M.* Experimental study of oscillating plates in viscous fluids: Qualitative and quantitative analysis of the flow physics and hydrodynamic forces // *Phys. Fluids*. – 2018. – V. 30, No 1. – Art. 013102, P. 1–16. – doi: 10.1063/1.5001330.
8. *Wang C.-Y.* On high-frequency oscillatory viscous flows // *J. Fluid Mech.* – 1968 – V. 32, No 1. – P. 55–68. – doi: 10.1017/S0022112068000583.
9. *Nuriev A.N., Egorov A.G.* Asymptotic investigation of hydrodynamic forces acting on an oscillating cylinder at finite streaming Reynolds numbers // *Lobachevskii J. Math.* – 2019. – V. 40, No 6. – P. 794–801. – doi: 10.1134/S1995080219060180.
10. *Nuriev A.N., Egorov A.G., Kamalutdinov A.M.* Hydrodynamic forces acting on the elliptic cylinder performing high-frequency low-amplitude multi-harmonic oscillations in a viscous fluid // *J. Fluid Mech.* – 2021. – V. 913. – Art. A40, P. 1–27. – doi: 10.1017/jfm.2020.1180.
11. *Saffman P.G.* *Vortex Dynamics*. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. – xiv, 312 p. – doi: 10.1017/CBO9780511624063.
12. *Бетчелор Дж. К.* Введение в динамику жидкости. – М.: Мир, 1973. – 758 с.

Поступила в редакцию
19.09.2022

Нуриев Артем Наилевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры аэрогидромеханики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: Artem.Nuriev@kpfu.ru

Камалутдинов Айрат Марсович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИЛ 53

Казанский национальный исследовательский технический университет имени А.Н. Туполева – КАИ
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия
E-mail: amkamalutdinov@mail.ru

Зайцева Ольга Николаевна, кандидат педагогических наук, старший научный сотрудник НИЛ «Интеллектуальные биомиметические и природосообразные системы»

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: olga_fdpi@mail.ru

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)
2022, vol. 164, no. 4, pp. 302–315

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2022.4.302-315

**Determination of Hydrodynamic Forces Acting
on the Body in an Unsteady Viscous Flow Using Characteristics
of the Flow on the Control Surface**

A.N. Nuriev^{a}, A.M. Kamalutdinov^{b**}, O.N. Zaitseva^{a***}*

^a*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*

^b*Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI,
Kazan, 420111 Russia*

E-mail: ^{*}*Artem.Nuriev@kpfu.ru*, ^{**}*amkamalutdinov@mail.ru*, ^{***}*olga_fdpi@mail.ru*

Received August 10, 2022

Abstract

This article considers the problem of determining the hydrodynamic forces acting on the body in an unsteady flow on a distant control surface. General formulas for calculating hydrodynamic forces in the three- and two-dimensional cases were derived. The structure of these formulas was analyzed, and, based on several problems, the values of their main terms were obtained. Using the approach presented here, a study of the hydrodynamic influence on the cylindrical body of arbitrary cross-sectional shape in an oscillatory flow was carried out. Its results were used to identify universal dependences of the hydrodynamic forces on oscillation parameters.

Keywords: hydrodynamic forces, viscous flow, Navier–Stokes equation, unsteady flow past a body, periodic motion

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-38-60023, sect. 1) and the Russian Science Foundation (project no. 22-79-10033, sect. 2–4).

Figure Captions

Fig. 1. Control volume.

References

1. Wu J.C. Theory for aerodynamic force and moment in viscous flows. *AIAA J.*, 1981, vol. 19, no. 4, pp. 432–441. doi: 10.2514/3.50966.
2. Dynnikova G.Ya. Forces exerted on a body in an unsteady vortex separation flow of an ideal incompressible fluid. *Fluid Dyn.*, 2001, vol. 36, no. 2, pp. 285–295. doi: 10.1023/A:1019294303580.
3. Dynnikova G.Ya., Andronov P.R. Expressions of force and moment exerted on a body in a viscous flow via the flux of vorticity generated on its surface. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 2018, vol. 72, pp. 293–300. doi: 10.1023/A:1019294303580.

4. Chang Ch.-C., Yang Sh.-H., Chu Ch.-Ch. A many-body force decomposition with applications to flow about bluff bodies. *J. Fluid Mech.*, 2008, vol. 600, pp. 95–104. doi: 10.1017/S0022112008000396.
5. Chin D.D., Lentink D. Fluid moment and force measurement based on control surface integration. *Exp. Fluids*, 2020, vol. 61, art. 18, pp. 1–19. doi: 10.1007/s00348-019-2838-7.
6. Noca F. On the evaluation of time-dependent fluid-dynamic forces on bluff bodies. *Ph.D. Thesis*. Pasadena, Calif. Inst. Technol., 1997. xiv, 157 p. doi: 10.7907/K2Z0-9016. Available at: <https://resolver.caltech.edu/CaltechETD:etd-08102005-132659>.
7. Shrestha B., Ahsan S.N., Aureli M. Experimental study of oscillating plates in viscous fluids: Qualitative and quantitative analysis of the flow physics and hydrodynamic forces. *Phys. Fluids*, 2018, vol. 30, no. 1, art. 013102, pp. 1–16. doi: 10.1063/1.5001330.
8. Wang C.-Y. On high-frequency oscillatory viscous flows. *J. Fluid Mech.*, 1968, vol. 32, no. 1, pp. 55–68. doi: 10.1017/S0022112068000583.
9. Nuriev A.N., Egorov A.G. asymptotic investigation of hydrodynamic forces acting on an oscillating cylinder at finite streaming Reynolds numbers. *Lobachevskii J. Math.*, 2019, vol. 40, no. 6, pp. 794–801. doi: 10.1134/S1995080219060180.
10. Nuriev A.N., Egorov A.G., Kamalutdinov A.M. Hydrodynamic forces acting on the elliptic cylinder performing high-frequency low-amplitude multi-harmonic oscillations in a viscous fluid. *J. Fluid Mech.*, 2021, vol. 91, art. A40, pp. 1–27. doi: 10.1017/jfm.2020.1180.
11. Saffman P.G. *Vortex Dynamics*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1993. xiv, 312 p. doi: 10.1017/CBO9780511624063.
12. Batchelor G.K. *Vvedenie v dinamiku zhidkosti* [An Introduction to Fluid Dynamics]. Moscow, Mir, 1973. 768 p. (In Russian)

Для цитирования: Нуриев А.Н., Камалудинов А.М., Зайцева О.Н. Определение гидродинамических сил, действующих на тело в нестационарном потоке, по характеристикам течения на удаленной контрольной поверхности // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2022. – Т. 164, кн. 4. – С. 302–315. – doi: 10.26907/2541-7746.2022.4.302-315.

For citation: Nuriev A.N., Kamalutdinov A.M., Zaitseva O.N. Determination of hydrodynamic forces acting on the body in an unsteady viscous flow using characteristics of the flow on the control surface. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2022, vol. 164, no. 4, pp. 302–315. doi: 10.26907/2541-7746.2022.4.302-315. (In Russian)