ХАРАКТЕРИСТИКА НЕВАНЛИННЫ И ИНТЕГРАЛЫ С МЕРОМОРФНЫМИ ФУНКЦИЯМИ И РАЗНОСТЯМИ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Радиальный максимум функции, интеграл по мере, обхват и мера Хаусдорфа, интегрирование по фрактальным множествам, интегрирование по липшицевым кривым и поверхностям

Булат Н. Хабибуллин

Факультет математики и ИТ Башкирского государственного университета
Институт математики с вц Уфимского ФИЦ РАН
Уфа, Республика Башкоторстан, Российская Федерация

Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии
Казанский федеральный универститет, 22–28 августа 2021 г.

Характеристика Неванлинны

Пусть $f \neq \infty$ — мероморфная функция в открытом круге $D(R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с центром $0 \in \mathbb{C}$ радиуса $R \in \overline{\mathbb{R}}^{+} := \mathbb{R}^{+} \cup \{+\infty\}$, где $\mathbb{R}^{+} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ положительный луч на вещественной прямой $\mathbb{R}$.

Её характеристика Неванлинны — это сумма двух функций $T(r,f) := m(r,f) + N(r,f)$ на $[0,R) := \{r \in \mathbb{R}^{+} \mid r < R\}$, где

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^{+}\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi, \quad \ln^{+} x \underset{x\in\mathbb{R}^{+}}{:=} \max\{0, \ln x\},$$

$$N(r,f) := \int_0^{r} \frac{n(t,f) - n(0,f)}{t} dt + n(0,f)\ln r, \quad \ln 0 := -\infty,$$

а $n(r,f)$ — число полюсов функции f с учётом кратности в замкнутом круге $\overline{D}(r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$, $0 \cdot \ln 0 := 0$.

$T(\cdot, f)$ — непрерывная, возрастающая, положительная на $[1, +\infty)$, $x \underset{x\in(-\infty,\ln R)}{\longmapsto} T(e^{x}, f)$ выпуклая, $z \underset{z\in D(R)}{\longmapsto} T(|z|, f)$ субгармоническая.

Характеристика Неванлинны

Пусть $f \neq \infty$ — мероморфная функция в открытом круге $D(R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с центром $0 \in \mathbb{C}$ радиуса $R \in \overline{\mathbb{R}}^{+} := \mathbb{R}^{+} \cup \{+\infty\}$, где $\mathbb{R}^{+} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ положительный луч на вещественной прямой $\mathbb{R}$.

Её характеристика Неванлинны — это сумма двух функций $T(r, f) := m(r, f) + N(r, f)$ на $[0, R) := \{r \in \mathbb{R}^{+} \mid r < R\}$, где

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^{+}\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi, \quad \ln^{+} x \underset{x \in \mathbb{R}^{+}}{:=} \max\{0, \ln x\},$$

$$N(r, f) := \int_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, f) \ln r, \quad \ln 0 := -\infty,$$

а $n(r, f)$ — число полюсов функции f с учётом кратности в замкнутом круге $\overline{D}(r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$, $0 \cdot \ln 0 := 0$.

$T(\cdot, f)$ — непрерывная, возрастающая, положительная на $[1, +\infty)$,
$x \underset{x \in (-\infty, \ln R)}{\longmapsto} T(e^x, f)$ выпуклая, $z \underset{z \in D(R)}{\longmapsto} T(|z|, f)$ субгармоническая.

Характеристика Неванлинны

Пусть $f \neq \infty$ — мероморфная функция в открытом круге $D(R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с центром $0 \in \mathbb{C}$ радиуса $R \in \overline{\mathbb{R}}^{+} := \mathbb{R}^{+} \cup \{+\infty\}$, где $\mathbb{R}^{+} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ положительный луч на вещественной прямой $\mathbb{R}$.

Её характеристика Неванлинны — это сумма двух функций $T(r,f) := m(r,f) + N(r,f)$ на $[0,R) := \{r \in \mathbb{R}^{+} \mid r < R\}$, где

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^{+}\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi, \quad \ln^{+} x \underset{x\in\mathbb{R}^{+}}{:=} \max\{0, \ln x\},$$

$$N(r,f) := \int_0^r \frac{n(t,f) - n(0,f)}{t} dt + n(0,f)\ln r, \quad \ln 0 := -\infty,$$

а $n(r,f)$ — число полюсов функции f с учётом кратности в замкнутом круге $\overline{D}(r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$, $0 \cdot \ln 0 := 0$.

$T(\cdot,f)$ — непрерывная, возрастающая, положительная на $[1,+\infty)$, $x \underset{x\in(-\infty,\ln R)}{\longmapsto} T(e^x,f)$ выпуклая, $z \underset{z\in D(R)}{\longmapsto} T(|z|,f)$ субгармоническая.

Предмет исследования

В контрасте с характеристикой Неванлинны радиальная максимальная характеристика $M(r,f) \underset{r\in[0,R)}{:=} \sup\Bigl\{|f(z)| \Bigm| |z|=r\Bigr\}$ может вести себя очень патологично. Если f голоморфная на $\overline{D}(R)$ или целая, то всё ещё хорошо: характеристика $M(\cdot,f)$ обладает теми же самыми свойствами, что и $T(\cdot,f)$, а также тесно связана с ней:

$$T(r,f)=m(r,f)\leq \ln^+ M(r,f)\leq \frac{R+r}{R-r}T(R,f),\quad 0\leq r<R<+\infty.$$

Но принципиально невозможны такие прямые взаимосвязи между $T(\cdot,f)$ и $M(\cdot,f)$ для мероморфных функций, хотя интегральные неравенства, оценивающие сверху интегралы от $\ln^+ M(\cdot,f)$ или интегралы от $\ln|f|$ через $T(\cdot,f)$ встречаются.

Последнее и есть предмет нашего исследования.

Первая часть доклад касается оценок интегралов от $\ln^+ M(\cdot,f)$.

Предмет исследования

В контрасте с характеристикой Неванлинны радиальная максимальная характеристика $M(r,f) \underset{r\in[0,R)}{:=} \sup\Bigl\{|f(z)| \Bigm| |z|=r\Bigr\}$ может вести себя очень патологично. Если f голоморфная на $\overline{D}(R)$ или целая, то всё ещё хорошо: характеристика $M(\cdot,f)$ обладает теми же самыми свойствами, что и $T(\cdot,f)$, а также тесно связана с ней:

$$T(r,f)=m(r,f)\leq \ln^+ M(r,f)\leq \frac{R+r}{R-r}T(R,f),\quad 0\leq r<R<+\infty.$$

Но принципиально невозможны такие прямые взаимосвязи между $T(\cdot,f)$ и $M(\cdot,f)$ для мероморфных функций, хотя интегральные неравенства, оценивающие сверху интегралы от $\ln^+ M(\cdot,f)$ или интегралы от $\ln|f|$ через $T(\cdot,f)$ встречаются.

Последнее и есть предмет нашего исследования.

Первая часть доклад касается оценок интегралов от $\ln^+ M(\cdot,f)$.

Предмет исследования

В контрасте с характеристикой Неванлинны радиальная максимальная характеристика $M(r,f) \underset{r\in[0,R)}{:=} \sup\Bigl\{|f(z)| \Bigm| |z|=r\Bigr\}$ может вести себя очень патологично. Если f голоморфная на $\overline{D}(R)$ или целая, то всё ещё хорошо: характеристика $M(\cdot,f)$ обладает теми же самыми свойствами, что и $T(\cdot,f)$, а также тесно связана с ней:

$$T(r,f)=m(r,f)\leq \ln^+ M(r,f)\leq \frac{R+r}{R-r}T(R,f), \quad 0\leq r<R<+\infty.$$

Но принципиально невозможны такие прямые взаимосвязи между $T(\cdot,f)$ и $M(\cdot,f)$ для мероморфных функций, хотя интегральные неравенства, оценивающие сверху интегралы от $\ln^+ M(\cdot,f)$ или интегралы от $\ln|f|$ через $T(\cdot,f)$ встречаются.
Последнее и есть предмет нашего исследования.
Первая часть доклад касается оценок интегралов от $\ln^+ M(\cdot,f)$.

Rolf Nevanlinna Theorem [1929] In book: Le théoremè de Picard – Borel et la théorie des fonctions méromorphes. Paris: Gauthier-Villars, 1929.

Theorem (формулировка из [G-O] А. А. Гольдберг,И. В. Островский «Распределение значений мероморфных функций» [1970], in English [2008])

Пусть $f(z)$ — мероморфная функция, $k > 1$ — число. Тогда

$$\int_0^r \ln^+ M(t, f)dt \leq C(k)T(kr, f)\, r,$$

где постоянная $C(k) > 1$ зависит только от k.

Эта формулировка несколько некорректна, как показывает элементарный контрпример с функции $f(z) \underset{z\in\mathbb{C}}{=} 1/z$ с полюсом в нуле. Но даже требование отсутствия полюса в нуле не исправляет ситуацию. Необходимо требовать $r \geq r_0 > 0$, а $C(k)$ неминуемо будет зависеть и от близости $r_0 > 0$ к нулю. Этот казус был отмечен в

Rolf Nevanlinna Theorem [1929] In book: Le théoremè de Picard – Borel et la théorie des fonctions méromorphes. Paris: Gauthier-Villars, 1929.

Theorem (формулировка из [G-O] А. А. Гольдберг,И. В. Островский «Распределение значений мероморфных функций» [1970], in English [2008])

Пусть $f(z)$ — мероморфная функция, $k > 1$ — число. Тогда

$$\int_0^r \ln^+ M(t, f)dt \le C(k)T(kr, f)\, r,$$

где постоянная $C(k) > 1$ зависит только от k.

Эта формулировка несколько некорректна, как показывает элементарный контрпример с функции $f(z) \underset{z\in\mathbb{C}}{=} 1/z$ с полюсом в нуле. Но даже требование отсутствия полюса в нуле не исправляет ситуацию. Необходимо требовать $r \ge r_0 > 0$, а $C(k)$ неминуемо будет зависеть и от близости $r_0 > 0$ к нулю. Этот казус был отмечен в

[2020] Khabibullin B. N. Integrals of subharmonic functions and their differences with weight over small sets on a ray // Matematychni Studiï, 54:2 (2020), 121–130.

Основная теорема из этой статьи содержит как частные случаи все предыдущие развития теоремы Неванлинны, среди которых лемма Гришина–Содина о малых интервалах

[1988] Гришин А. Ф., Содин М. Л. Рост по лучу, распределение корней по аргументам целой функции конечного порядка и одна теорема единственности // Респ. сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Харьков: Вища школа, 50 (1988), 47–61

[2020] Khabibullin B. N. Integrals of subharmonic functions and their differences with weight over small sets on a ray // Matematychni Studiї, 54:2 (2020), 121–130.

Основная теорема из этой статьи содержит как частные случаи все предыдущие развития теоремы Неванлинны, среди которых лемма Гришина – Содина о малых интервалах

[1988] Гришин А. Ф., Содин М. Л. Рост по лучу, распределение корней по аргументам целой функции конечного порядка и одна теорема единственности // Респ. сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Харьков: Вища школа, 50 (1988), 47–61 теорема Гришина–Малютиной о малых интервалах для субгармонических функций конечного порядка из

[2005] Гришин А. Ф., Малютина Т. И. Новые формулы для индикаторов субгармонических функций // Матем. физ., анал., геом. 12:1 (2005), 25–72

наша с Л.А. Габдрахмановой теорема о малых интервалах

[2020] Габдрахманова Л. А., Хабибуллин Б. Н. Одна теорема о малых интервалах для субгармонических функций // Известия вузов. Математика, 2020, № 9, 15–24; Gabdrakhmanova L. A., Khabibullin B. N. A Small Intervals Theorem for Subharmonic Functions // Russian Mathematics, 64:9 (2020), 12–20

распространившая упомянутую теорему Гришина–Малютиной на произвольные субгармонические функции.

теорема Гришина–Малютиной о малых интервалах для субгармонических функций конечного порядка из

[2005] Гришин А. Ф., Малютина Т. И. Новые формулы для индикаторов субгармонических функций // Матем. физ., анал., геом. 12:1 (2005), 25–72

наша с Л.А. Габдрахмановой теорема о малых интервалах

[2020] Габдрахманова Л. А., Хабибуллин Б. Н. Одна теорема о малых интервалах для субгармонических функций // Известия вузов. Математика, 2020, № 9, 15–24; Gabdrakhmanova L. A., Khabibullin B. N. A Small Intervals Theorem for Subharmonic Functions // Russian Mathematics, 64:9 (2020), 12–20

распространившая упомянутую теорему Гришина–Малютиной на произвольные субгармонические функции.

Характеристика Неванлинны для δ-субгармонических функций

Definition

Пусть $U = u - v \not\equiv \pm\infty$ — разность субгармонических функций $u \not\equiv -\infty$ и $v \not\equiv -\infty$ на окрестности $\overline{D}(R)$. Другими словами, U — δ-субгармоническая функция на $\overline{D}(R)$, с зарядом Рисса $\varDelta_U := \frac{1}{2\pi} \triangle(u - v)$, где $\triangle$ оператор Лапласа. Её характеристика Неванлинны U — это функция

$$\widehat{T}_U(r, R) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U^+(Re^{i\theta})d\theta + \int_r^R \frac{\varDelta_U^-(\overline{D}(t))}{t}dt, \quad 0 \leq r < R,$$

$\varDelta_U^- := \sup\{0, -\varDelta_U\} \geq 0$ — нижняя вариация заряда Рисса $\varDelta_U$.

Если $f \not\equiv 0, \infty$ мероморфная на $\overline{D}(R)$, то $U := \ln|f| \not\equiv \pm\infty$ δ-субгармоническая, а $\widehat{T}_{\ln|f|}(r, R) = T(R, f) - N(r, f)$, $0 \leq r < R < +\infty$.

Характеристика Неванлинны для δ-субгармонических функций

Definition

Пусть $U = u - v \not\equiv \pm\infty$ — разность субгармонических функций $u \not\equiv -\infty$ и $v \not\equiv -\infty$ на окрестности $\overline{D}(R)$. Другими словами, U — δ-субгармоническая функция на $\overline{D}(R)$, с зарядом Рисса $\varDelta_U := \frac{1}{2\pi}\triangle(u-v)$, где $\triangle$ оператор Лапласа. Её характеристика Неванлинны U — это функция

$$\widehat{T}_U(r,R) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U^+(Re^{i\theta})d\theta + \int_r^R \frac{\varDelta_U^-\big(\overline{D}(t)\big)}{t}dt, \quad 0 \leq r < R,$$

$\varDelta_U^- := \sup\{0, -\varDelta_U\} \geq 0$ — нижняя вариация заряда Рисса $\varDelta_U$.

Если $f \not\equiv 0, \infty$ мероморфная на $\overline{D}(R)$, то $U := \ln|f| \not\equiv \pm\infty$ δ-субгармоническая, а $\widehat{T}_{\ln|f|}(r,R) = T(R,f) - N(r,f)$, $0 \leq r < R < +\infty$.

Характеристика Неванлинны для δ-субгармонических функций

Definition

Пусть $U = u - v \not\equiv \pm\infty$ — разность субгармонических функций $u \not\equiv -\infty$ и $v \not\equiv -\infty$ на окрестности $\overline{D}(R)$. Другими словами, U — δ-субгармоническая функция на $\overline{D}(R)$, с зарядом Рисса $\varDelta_U := \frac{1}{2\pi} \triangle(u - v)$, где $\triangle$ оператор Лапласа. Её характеристика Неванлинны U — это функция

$$\widehat{T}_U(r, R) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U^+(Re^{i\theta})d\theta + \int_r^R \frac{\varDelta_U^-(\overline{D}(t))}{t} dt, \quad 0 \leq r < R,$$

$\varDelta_U^- := \sup\{0, -\varDelta_U\} \geq 0$ — нижняя вариация заряда Рисса $\varDelta_U$.

Если $f \not\equiv 0, \infty$ мероморфная на $\overline{D}(R)$, то $U := \ln|f| \not\equiv \pm\infty$ δ-субгармоническая, а $\widehat{T}_{\ln|f|}(r, R) = T(R, f) - N(r, f)$, $0 \leq r < R < +\infty$.

Теорема о малых интервалах с весом

Theorem (Kh. [2020])

Пусть $0 \le r < +\infty$, $k > 1$, $E \subset [0, r]$ — mes-измеримое по линейной мере Лебега mes на $\mathbb{R}$, $g \in L^p(E)$, где $1 < p \le \infty$ и $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $U \not\equiv \pm\infty$ — δ-субгармоническая функция на $\mathbb{C}$. Тогда

$$\int_E M_U^+(t)g(t)dt \le \frac{4qk}{k-1}\widehat{T}_U(r, kr)\|g\|_{L^p(E)} \sqrt[q]{\mathrm{mes}(E)} \ln \frac{4r}{\mathrm{mes}(E)}.$$

В случаях $p := +\infty$ и $q := 1$получаем
1) для $g \equiv 1$ и $E := [0, r]$— это корректная форма теоремы Неванлинны с $C(k) := \frac{6k}{k-1}$;
2) для $r \ge 1$, $g \equiv 1$ и $E \subset [1, r]$ — это лемма Гришина–Содина;
3) для $U := 0 - v = -v$, где $v \not\equiv -\infty$ —субгармоническая функция, получаем теорему Гришина–Малютиной при $g \equiv 1$, а для $g \in L^\infty(E)$, — это наша С Л. А. Габдрахмановой теорема о малых интервалах для субгармонических функций v.

Теорема о малых интервалах с весом

Theorem (Kh. [2020])

Пусть $0 \le r < +\infty$, $k > 1$, $E \subset [0,r]$ — mes-измеримое по линейной мере Лебега mes на $\mathbb{R}$, $g \in L^p(E)$, где $1 < p \le \infty$ и $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $U \not\equiv \pm\infty$ — δ-субгармоническая функция на $\mathbb{C}$. Тогда

$$\int_E M_U^+(t)g(t)dt \le \frac{4qk}{k-1}\widehat{T}_U(r,kr)\|g\|_{L^p(E)} \sqrt[q]{\mathrm{mes}(E)} \ln \frac{4r}{\mathrm{mes}(E)}.$$

В случаях $p := +\infty$ и $q := 1$получаем
1) для $g \equiv 1$ и $E := [0,r]$— это корректная форма теоремы Неванлинны с $C(k) := \frac{6k}{k-1}$;
2) для $r \ge 1$, $g \equiv 1$ и $E \subset [1,r]$ — это лемма Гришина–Содина;
3) для $U := 0 - v = -v$, где $v \not\equiv -\infty$ —субгармоническая функция, получаем теорему Гришина–Малютиной при $g \equiv 1$, а для $g \in L^\infty(E)$, — это наша С Л. А. Габдрахмановой теорема о малых интервалах для субгармонических функций v.

Теорема о малых интервалах с весом

Theorem (Kh. [2020])

Пусть $0 \le r < +\infty$, $k > 1$, $E \subset [0, r]$ — mes-измеримое по линейной мере Лебега mes на $\mathbb{R}$, $g \in L^p(E)$, где $1 < p \le \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $U \not\equiv \pm\infty$ — δ-субгармоническая функция на $\mathbb{C}$. Тогда

$$\int_E M_U^+(t) g(t) dt \le \frac{4qk}{k-1} \widehat{T}_U(r, kr) \|g\|_{L^p(E)} \sqrt[q]{\mathrm{mes}(E)} \ln \frac{4r}{\mathrm{mes}(E)}.$$

В случаях $p := +\infty$ и $q := 1$получаем

1) для $g \equiv 1$ и $E := [0, r]$— это корректная форма теоремы Неванлинны с $C(k) := \frac{6k}{k-1}$;

2) для $r \ge 1$, $g \equiv 1$ и $E \subset [1, r]$ — это лемма Гришина–Содина;

3) для $U := 0 - v = -v$, где $v \not\equiv -\infty$ —субгармоническая функция, получаем теорему Гришина–Малютиной при $g \equiv 1$, а для $g \in L^\infty(E)$, — это наша С Л. А. Габдрахмановой теорема о малых интервалах для субгармонических функций v.

Теорема о малых интервалах с весом

Theorem (Kh. [2020])

Пусть $0 \le r < +\infty$, $k > 1$, $E \subset [0, r]$ — mes-измеримое по линейной мере Лебега mes на $\mathbb{R}$, $g \in L^p(E)$, где $1 < p \le \infty$ и $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $U \not\equiv \pm\infty$ — δ-субгармоническая функция на $\mathbb{C}$. Тогда

$$\int_E M_U^+(t) g(t) dt \le \frac{4qk}{k-1} \widehat{T}_U(r, kr) \|g\|_{L^p(E)} \sqrt[q]{\mathrm{mes}(E)} \ln \frac{4r}{\mathrm{mes}(E)}.$$

В случаях $p := +\infty$ и $q := 1$получаем
1) для $g \equiv 1$ и $E := [0, r]$— это корректная форма теоремы Неванлинны с $C(k) := \frac{6k}{k-1}$;
2) для $r \ge 1$, $g \equiv 1$ и $E \subset [1, r]$ — это лемма Гришина–Содина;
3) для $U := 0 - v = -v$, где $v \not\equiv -\infty$ —субгармоническая функция, получаем теорему Гришина–Малютиной при $g \equiv 1$, а для $g \in L^\infty(E)$, — это наша С Л. А. Габдрахмановой теорема о малых интервалах для субгармонических функций v.

Теорема о малых интервалах с весом

Theorem (Kh. [2020])

Пусть $0 \le r < +\infty$, $k > 1$, $E \subset [0, r]$ — mes-измеримое по линейной мере Лебега mes на $\mathbb{R}$, $g \in L^p(E)$, где $1 < p \le \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $U \not\equiv \pm\infty$ — δ-субгармоническая функция на $\mathbb{C}$. Тогда

$$\int_E M_U^+(t)g(t)dt \le \frac{4qk}{k-1}\widehat{T}_U(r, kr)\|g\|_{L^p(E)} \sqrt[q]{\operatorname{mes}(E)} \ln \frac{4r}{\operatorname{mes}(E)}.$$

В случаях $p := +\infty$ и $q := 1$получаем
1) для $g \equiv 1$ и $E := [0, r]$— это корректная форма теоремы Неванлинны с $C(k) := \frac{6k}{k-1}$;
2) для $r \ge 1$, $g \equiv 1$ и $E \subset [1, r]$ — это лемма Гришина–Содина;
3) для $U := 0 - v = -v$, где $v \not\equiv -\infty$ —субгармоническая функция, получаем теорему Гришина–Малютиной при $g \equiv 1$, а для $g \in L^\infty(E)$, — это наша С Л. А. Габдрахмановой теорема о малых интервалах для субгармонических функций v.

Теорема о малых интервалах с весом

Theorem (Kh. [2020])

Пусть $0 \le r < +\infty$, $k > 1$, $E \subset [0, r]$ — mes-измеримое по линейной мере Лебега mes на $\mathbb{R}$, $g \in L^p(E)$, где $1 < p \le \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $U \not\equiv \pm\infty$ — δ-субгармоническая функция на $\mathbb{C}$. Тогда

$$\int_E M_U^+(t)g(t)dt \le \frac{4qk}{k-1}\widehat{T}_U(r, kr)\|g\|_{L^p(E)} \sqrt[q]{\operatorname{mes}(E)} \ln \frac{4r}{\operatorname{mes}(E)}.$$

В случаях $p := +\infty$ и $q := 1$получаем
1) для $g \equiv 1$ и $E := [0, r]$— это корректная форма теоремы Неванлинны с $C(k) := \frac{6k}{k-1}$;
2) для $r \ge 1$, $g \equiv 1$ и $E \subset [1, r]$ — это лемма Гришина–Содина;
3) для $U := 0 - v = -v$, где $v \not\equiv -\infty$ —субгармоническая функция, получаем теорему Гришина–Малютиной при $g \equiv 1$, а для $g \in L^\infty(E)$, — это наша С Л. А. Габдрахмановой теорема о малых интервалах для субгармонических функций v.

Definition

Рассмотрим возрастающую функцию $m\colon [0,r] \to \mathbb{R}$ полной вариации $M_m := m(r) - m(0) \in \mathbb{R}^+$, с модулем непрерывности

$$\omega_m(t) \underset{t\in\mathbb{R}^+}{=} \sup\{m(x) - m(x') \mid x - x' \leq t,\ 0 \leq x' \leq x \leq r\} \subset [0, M_m],$$

и диаметром стабилизации

$$d_m := \inf\{t \in \mathbb{R}^+ \mid \omega_m(t) = M_m\} = \inf \omega_m^{-1}(M_m) \leq r,$$

а также с постоянным вне отрезка $[0,r]$ продолжением $m(x) \underset{x\leq 0}{\equiv} m(0)$ и $m(x) \underset{x\geq r}{\equiv} m(r)$ on $\mathbb{R}$, на основе чего определяем носитель непостоянства $\operatorname{supp} m'$ — дополнение$\mathbb{R} \setminus O$, где $O \subset [0,r]$ — наибольшее открытое множества на котором существует $m'(x) = 0$ для всех $x \in O$.

Новые результаты — 2021

Definition

Рассмотрим возрастающую функцию $m\colon [0,r] \to \mathbb{R}$ полной вариации $M_m := m(r) - m(0) \in \mathbb{R}^+$, с модулем непрерывности

$$\omega_m(t) \underset{t\in\mathbb{R}^+}{=} \sup\bigl\{m(x) - m(x') \bigm| x - x' \leq t,\ 0 \leq x' \leq x \leq r\bigr\} \subset [0, M_m],$$

и диаметром стабилизации

$$d_m := \inf\bigl\{t \in \mathbb{R}^+ \bigm| \omega_m(t) = M_m\bigr\} = \inf \omega_m^{-1}(M_m) \leq r,$$

а также с постоянным вне отрезка $[0,r]$ продолжением $m(x) \underset{x\leq 0}{\equiv} m(0)$ и $m(x) \underset{x\geq r}{\equiv} m(r)$ on $\mathbb{R}$, на основе чего определяем носитель непостоянства $\operatorname{supp} m'$ — дополнение$\mathbb{R} \setminus O$, где $O \subset [0,r]$ — наибольшее открытое множества на котором существует $m'(x) = 0$ для всех $x \in O$.

Новые результаты — 2021

Definition

Рассмотрим возрастающую функцию $m\colon [0,r] \to \mathbb{R}$ полной вариации $M_m := m(r) - m(0) \in \mathbb{R}^+$, с модулем непрерывности

$$\omega_m(t) \underset{t\in\mathbb{R}^+}{=} \sup\bigl\{m(x) - m(x') \bigm| x - x' \le t,\ 0 \le x' \le x \le r\bigr\} \subset [0, M_m],$$

и диаметром стабилизации

$$d_m := \inf\bigl\{t \in \mathbb{R}^+ \bigm| \omega_m(t) = M_m\bigr\} = \inf \omega_m^{-1}(M_m) \le r,$$

а также с постоянным вне отрезка $[0,r]$ продолжением $m(x) \underset{x\le 0}{\equiv} m(0)$ и $m(x) \underset{x\ge r}{\equiv} m(r)$ on $\mathbb{R}$, на основе чего определяем носитель непостоянства $\operatorname{supp} m'$ — дополнение$\mathbb{R} \setminus O$, где $O \subset [0,r]$ — наибольшее открытое множества на котором существует $m'(x) = 0$ для всех $x \in O$.

Новые результаты — 2021

Definition

Рассмотрим возрастающую функцию $m\colon [0,r]\to\mathbb{R}$ полной вариации $M_m := m(r)-m(0)\in\mathbb{R}^+$, с модулем непрерывности

$$\omega_m(t) \underset{t\in\mathbb{R}^+}{=} \sup\bigl\{m(x)-m(x') \bigm| x-x'\le t,\ 0\le x'\le x\le r\bigr\}\subset[0,M_m],$$

и диаметром стабилизации

$$d_m := \inf\bigl\{t\in\mathbb{R}^+ \bigm| \omega_m(t)=M_m\bigr\} = \inf\omega_m^{-1}(M_m)\le r,$$

а также с постоянным вне отрезка $[0,r]$ продолжением $m(x)\underset{x\le 0}{\equiv} m(0)$ и $m(x)\underset{x\ge r}{\equiv} m(r)$ on $\mathbb{R}$, на основе чего определяем носитель непостоянства $\operatorname{supp} m'$ — дополнение$\mathbb{R}\setminus O$, где $O\subset[0,r]$ — наибольшее открытое множества на котором существует $m'(x)=0$ для всех $x\in O$.

Новые результаты — 2021

Definition

Рассмотрим возрастающую функцию $\mathrm{m}\colon [0,\mathrm{r}] \to \mathbb{R}$ полной вариации $\mathrm{M_m} := \mathrm{m}(\mathrm{r}) - \mathrm{m}(0) \in \mathbb{R}^+$, с модулем непрерывности

$$\omega_{\mathrm{m}}(\mathrm{t}) \underset{\mathrm{t}\in\mathbb{R}^+}{=} \sup\bigl\{\mathrm{m}(\mathrm{x}) - \mathrm{m}(\mathrm{x}') \bigm| \mathrm{x} - \mathrm{x}' \leq \mathrm{t},\ 0 \leq \mathrm{x}' \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{r}\bigr\} \subset [0, \mathrm{M_m}],$$

и диаметром стабилизации

$$\mathrm{d_m} := \inf\bigl\{\mathrm{t} \in \mathbb{R}^+ \bigm| \omega_{\mathrm{m}}(\mathrm{t}) = \mathrm{M_m}\bigr\} = \inf \omega_{\mathrm{m}}^{-1}(\mathrm{M_m}) \leq \mathrm{r},$$

а также с постоянным вне отрезка $[0,\mathrm{r}]$ продолжением $\mathrm{m}(\mathrm{x}) \underset{\mathrm{x}\leq 0}{\equiv} \mathrm{m}(0)$ и $\mathrm{m}(\mathrm{x}) \underset{\mathrm{x}\geq \mathrm{r}}{\equiv} \mathrm{m}(\mathrm{r})$ on $\mathbb{R}$, на основе чего определяем носитель непостоянства $\operatorname{supp}\mathrm{m}'$ — дополнение$\mathbb{R} \setminus \mathrm{O}$, где $\mathrm{O} \subset [0,\mathrm{r}]$ — наибольшее открытое множества на котором существует $\mathrm{m}'(\mathrm{x}) = 0$ для всех $\mathrm{x} \in \mathrm{O}$.

Основная теорема для M_U^+

Theorem

Пусть $0 < r \in \mathbb{R}^+$. Если модуль непрерывности возрастающей функции $m\colon [0,r] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Дини

$$\int_0 \frac{\omega_m(t)}{t}dt < +\infty,$$

то для каждой δ-субгармонической функции $U \not\equiv \pm\infty$ на круге $\overline{D}(R)$ радиуса $R > r$ существует интеграл Лебега–Стилтьеса

$$\int_0^r M_U^+(t)dm(t) \leq \frac{9R}{R-r}\widehat{T}_U(r,R)\left(M_m + \int_0^{d_m} \ln\frac{r}{t}d\omega_m(t)\right) < +\infty.$$

Remark

Если условие Дини не выполнено, то удаётся строить контрпримеры, показывающие, что оценка интеграла из левой части через характеристику Неванлинны невозможна.

Основная теорема для M_U^+

Theorem

Пусть $0 < r \in \mathbb{R}^+$. Если модуль непрерывности возрастающей функции $m\colon [0,r] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Дини

$$\int_0 \frac{\omega_m(t)}{t} dt < +\infty,$$

то для каждой δ-субгармонической функции $U \not\equiv \pm\infty$ на круге $\overline{D}(R)$ радиуса $R > r$ существует интеграл Лебега – Стилтьеса

$$\int_0^r M_U^+(t) dm(t) \leq \frac{9R}{R-r} \widehat{T}_U(r,R) \left(M_m + \int_0^{d_m} \ln \frac{r}{t} d\omega_m(t) \right) < +\infty.$$

Remark

Если условие Дини не выполнено, то удаётся строить контрпримеры, показывающие, что оценка интеграла из левой части через характеристику Неванлинны невозможна.

Основная теорема для M_U^+

Theorem

Пусть $0 < r \in \mathbb{R}^+$. Если модуль непрерывности возрастающей функции $m\colon [0,r] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Дини

$$\int_0 \frac{\omega_m(t)}{t} dt < +\infty,$$

то для каждой δ-субгармонической функции $U \not\equiv \pm\infty$ на круге $\overline{D}(R)$ радиуса $R > r$ существует интеграл Лебега – Стилтьеса

$$\int_0^r M_U^+(t) dm(t) \leq \frac{9R}{R-r} \widehat{T}_U(r,R) \left(M_m + \int_0^{d_m} \ln \frac{r}{t} d\omega_m(t) \right) < +\infty.$$

Remark

Если условие Дини не выполнено, то удаётся строить контрпримеры, показывающие, что оценка интеграла из левой части через характеристику Неванлинны невозможна.

h-мера и h-обхват Хаусдорфа диаметра ℓ

Definition

Для $h\colon [0,r]\to \overline{\mathbb{R}}^+$ и $0<\ell\in \overline{\mathbb{R}}^+$ функция

$$\mathfrak{m}_h^{\ell}\colon S \underset{S\subset[0,r]}{\longmapsto} \inf\left\{\sum_{j\in N} h(b_j-a_j)\,\middle|\, N\subset\mathbb{N},\, S\subset\bigcup_{j\in N}[a_j,b_j], \begin{cases}[a_j,b_j]\subset[0,r]\\ 0\leq b_j-a_j<\ell\end{cases}\right\}$$

на $2^{[0,r]}$со значениями в $\overline{\mathbb{R}}^+$ — h-обхват Хаусдорфа диаметра ℓ на $[0,r]$, но h-обхват Хаусдорфа диаметра 0 на $[0,r]$ — это функция $\mathfrak{m}_h^{0}\colon S \underset{S\subset[0,r]}{\longmapsto} \sup\limits_{\ell>0}\mathfrak{m}_h^{\ell}(S)$ на $2^{[0,r]}$ со значениями в $\overline{\mathbb{R}}^+$. Если $p\in\mathbb{R}^+$ и $h_p\colon t \underset{t\in\mathbb{R}^+}{\longmapsto} c_p t^p$, где $c_p := \pi^{p/2} \Big/ 2^p\Gamma(p/2+1)$, то h_p-обхват диаметра $\ell\in\overline{\mathbb{R}}^+$ на $[0,r]$ называем p-мерным обхватом Хаусдорфа диаметра ℓ на $[0,r]$ с обозначением $p\text{-}\mathfrak{m}^{\ell} := \mathfrak{m}_{h_p}^{\ell}$.

h-мера и h-обхват Хаусдорфа диаметра ℓ

Definition

Для $h\colon [0,r] \to \overline{\mathbb{R}}^+$ и $0 < \ell \in \overline{\mathbb{R}}^+$ функция

$$\mathfrak{m}_h^\ell \colon S \underset{S\subset[0,r]}{\longmapsto} \inf\left\{ \sum_{j\in N} h(b_j - a_j) \;\middle|\; N \subset \mathbb{N},\, S \subset \bigcup_{j\in N} [a_j, b_j],\, \begin{cases} [a_j, b_j] \subset [0,r] \\ 0 \le b_j - a_j < \ell \end{cases} \right\}$$

на $2^{[0,r]}$со значениями в $\overline{\mathbb{R}}^+$ — h-обхват Хаусдорфа диаметра ℓ на $[0,r]$, но h-обхват Хаусдорфа диаметра 0 на $[0,r]$ — это функция $\mathfrak{m}_h^0 \colon S \underset{S\subset[0,r]}{\longmapsto} \sup_{\ell>0} \mathfrak{m}_h^\ell(S)$ на $2^{[0,r]}$ со значениями в $\overline{\mathbb{R}}^+$. Если $p \in \mathbb{R}^+$ и $h_p \colon t \underset{t\in\mathbb{R}^+}{\longmapsto} c_p t^p$, где $c_p := \pi^{p/2} \Big/ 2^p \Gamma(p/2+1)$, то h_p-обхват диаметра $\ell \in \overline{\mathbb{R}}^+$ на $[0,r]$ называем p-мерным обхватом Хаусдорфа диаметра ℓ на $[0,r]$ с обозначением $p\text{-}\mathfrak{m}^\ell := \mathfrak{m}_{h_p}^\ell$.

h-мера и h-обхват Хаусдорфа диаметра ℓ

Definition

Для $h\colon [0,r]\to \overline{\mathbb{R}}^+$ и $0<\ell\in\overline{\mathbb{R}}^+$ функция

$$\mathfrak{m}_h^\ell\colon S \underset{S\subset[0,r]}{\longmapsto} \inf\left\{\sum_{j\in N} h(b_j-a_j)\;\middle|\; N\subset\mathbb{N},\, S\subset\bigcup_{j\in N}[a_j,b_j],\, \begin{cases}[a_j,b_j]\subset[0,r]\\ 0\leq b_j-a_j<\ell\end{cases}\right\}$$

на $2^{[0,r]}$со значениями в $\overline{\mathbb{R}}^+$ — h-обхват Хаусдорфа диаметра ℓ на $[0,r]$, но h-обхват Хаусдорфа диаметра 0 на $[0,r]$ — это функция $\mathfrak{m}_h^0\colon S \underset{S\subset[0,r]}{\longmapsto} \sup\limits_{\ell>0}\mathfrak{m}_h^\ell(S)$ на $2^{[0,r]}$ со значениями в $\overline{\mathbb{R}}^+$. Если $p\in\mathbb{R}^+$ и $h_p\colon t \underset{t\in\mathbb{R}^+}{\longmapsto} c_p t^p$, где $c_p:=\pi^{p/2}\Big/\,2^p\Gamma(p/2+1)$, то h_p-обхват диаметра $\ell\in\overline{\mathbb{R}}^+$ на $[0,r]$ называем p-мерным обхватом Хаусдорфа диаметра ℓ на $[0,r]$ с обозначением $p\text{-}\mathfrak{m}^\ell:=\mathfrak{m}_{h_p}^\ell$.

Теорема с явными оценками

Theorem

Пусть $h\colon [0,r]\to\mathbb{R}^+$ непрерывная и $h(0)=0$. Если h дифференцируема на $(0,r)$ и $s_h := \sup\limits_{0<t<r}\dfrac{h(t)}{th'(t)}<+\infty$, то для каждой возрастающей функции $m\colon[0,r]\to\mathbb{R}$ с модулем непрерывности $\omega_m(t) \underset{t\in[0,r]}{\leq} h(t)$, для каждой δ-субгармонической функции $U\not\equiv\pm\infty$ на круге $\overline{D}(R)$ радиуса $R>r$, существует интеграл Лебега–Стилтьеса

$$\int_0^r M_U^+(t)\,dm(t)\leq\frac{9R}{R-r}\widehat{T}_U(r,R)\,M_m\ln\frac{e^{1+s_h}r}{h^{-1}(M_m)}$$
$$\leq\frac{9R}{R-r}\widehat{T}_U(r,R)\,\mathfrak{m}_h^{\ell}(\operatorname{supp}m')\ln\frac{e^{1+s_h}r}{h^{-1}(\mathfrak{m}_h^{\ell}(\operatorname{supp}m'))}<+\infty.$$

Теорема с явными оценками

Theorem

Пусть $h\colon [0,r]\to\mathbb{R}^+$ непрерывная и $h(0)=0$. Если h дифференцируема на $(0,r)$ и $s_h:=\sup\limits_{0<t<r}\dfrac{h(t)}{th'(t)}<+\infty$, то для каждой возрастающей функции $m\colon [0,r]\to\mathbb{R}$ с модулем непрерывности $\omega_m(t)\underset{t\in[0,r]}{\leq} h(t)$, для каждой δ-субгармонической функции $U\not\equiv\pm\infty$ на круге $\overline{D}(R)$ радиуса $R>r$, существует интеграл Лебега–Стилтьеса

$$\int_0^r M_U^+(t)dm(t)\leq\frac{9R}{R-r}\widehat{T}_U(r,R)\,M_m\ln\frac{e^{1+s_h}r}{h^{-1}(M_m)}$$

$$\leq\frac{9R}{R-r}\widehat{T}_U(r,R)\,\mathfrak{m}_h^{\ell}(\operatorname{supp}m')\ln\frac{e^{1+s_h}r}{h^{-1}(\mathfrak{m}_h^{\ell}(\operatorname{supp}m'))}<+\infty.$$

Теорема с явными оценками

Theorem

Пусть $h\colon [0,r] \to \mathbb{R}^+$ непрерывная и $h(0)=0$. Если h дифференцируема на $(0,r)$ и $s_h := \sup\limits_{0<t<r} \dfrac{h(t)}{th'(t)} < +\infty$, то для каждой возрастающей функции $m\colon [0,r] \to \mathbb{R}$ с модулем непрерывности $\omega_m(t) \underset{t\in[0,r]}{\leq} h(t)$, для каждой δ-субгармонической функции $U \not\equiv \pm\infty$ на круге $\overline{D}(R)$ радиуса $R>r$, существует интеграл Лебега–Стилтьеса

$$\int_0^r M_U^+(t)\,dm(t) \leq \frac{9R}{R-r}\widehat{T}_U(r,R)\,M_m \ln \frac{e^{1+s_h}r}{h^{-1}(M_m)}$$
$$\leq \frac{9R}{R-r}\widehat{T}_U(r,R)\,\mathfrak{m}_h^{\ell}(\operatorname{supp} m') \ln \frac{e^{1+s_h}r}{h^{-1}(\mathfrak{m}_h^{\ell}(\operatorname{supp} m'))} < +\infty.$$

Теорема с явными оценками

Theorem

Пусть $h\colon [0,r] \to \mathbb{R}^+$ непрерывная и $h(0)=0$. Если h дифференцируема на $(0,r)$ и $s_h := \sup\limits_{0<t<r} \dfrac{h(t)}{th'(t)} < +\infty$, то для каждой возрастающей функции $m\colon [0,r] \to \mathbb{R}$ с модулем непрерывности $\omega_m(t) \underset{t\in[0,r]}{\leq} h(t)$, для каждой δ-субгармонической функции $U \not\equiv \pm\infty$ на круге $\overline{D}(R)$ радиуса $R>r$, существует интеграл Лебега – Стилтьеса

$$\int_0^r M_U^+(t)\,dm(t) \leq \frac{9R}{R-r}\widehat{T}_U(r,R)\, M_m \ln \frac{e^{1+s_h} r}{h^{-1}(M_m)}$$

$$\leq \frac{9R}{R-r}\widehat{T}_U(r,R)\, \mathfrak{m}_h^{\ell}(\operatorname{supp} m') \ln \frac{e^{1+s_h} r}{h^{-1}(\mathfrak{m}_h^{\ell}(\operatorname{supp} m'))} < +\infty.$$

Теорема с явными оценками

Theorem

Пусть $h\colon [0,r]\to\mathbb{R}^+$ непрерывная и $h(0)=0$. Если h дифференцируема на $(0,r)$ и $s_h := \sup\limits_{0<t<r}\dfrac{h(t)}{th'(t)} < +\infty$, то для каждой возрастающей функции $m\colon [0,r]\to\mathbb{R}$ с модулем непрерывности $\omega_m(t) \underset{t\in[0,r]}{\leq} h(t)$, для каждой δ-субгармонической функции $U\not\equiv\pm\infty$ на круге $\overline{D}(R)$ радиуса $R>r$, существует интеграл Лебега – Стилтьеса

$$\int_0^r M_U^+(t)dm(t) \leq \frac{9R}{R-r}\widehat{T}_U(r,R)\,M_m \ln\frac{e^{1+s_h}r}{h^{-1}(M_m)}$$
$$\leq \frac{9R}{R-r}\widehat{T}_U(r,R)\,\mathfrak{m}_h^{\ell}(\operatorname{supp} m')\ln\frac{e^{1+s_h}r}{h^{-1}(\mathfrak{m}_h^{\ell}(\operatorname{supp} m'))} < +\infty.$$

Следствие с p-мерной мерой Хаусдорфа

Remark

Если $p > 1$, то $p\text{-}\mathfrak{m}^\ell = 0$, а $0\text{-}\mathfrak{m}^\ell(S) = \#S$, $1\text{-}\mathfrak{m}^\ell = \text{mes}$. If $0 < p < 1$ and $p\text{-}\mathfrak{m}^\ell(S) < +\infty$, then S is a fractal set of fractal dimension $\dim S \leq p$.

Corollary

Пусть $0 < p \leq 1$. для каждой возрастающей функции $m\colon [0, r] \to \mathbb{R}$ с модулем непрерывности $\omega_m(t) \underset{t\in[0,r]}{\leq} bt^p$ и с модулем непостоянства $\operatorname{supp} m' \subset E \subset [0, r]$, для каждой δ-субгармонической функции $U \not\equiv \pm\infty$ на круге $\overline{D}(R)$ радиуса $R > r$ существует интеграл Лебега – Стилтьеса

$$\int_0^r M_U^+(t)\,dm(t) \leq \frac{18b}{p}\,\frac{R}{R-r}\,T_U(r,R)\,p\text{-}\mathfrak{m}(E)\ln\frac{e^{1+p}r^p}{p\text{-}\mathfrak{m}(E)}$$

Следствие с p-мерной мерой Хаусдорфа

Remark

Если $p > 1$, то $p\text{-}\mathfrak{m}^{\ell} = 0$, а $0\text{-}\mathfrak{m}^{\ell}(S) = \#S$, $1\text{-}\mathfrak{m}^{\ell} = \operatorname{mes}$. If $0 < p < 1$ and $p\text{-}\mathfrak{m}^{\ell}(S) < +\infty$, then S is a fractal set of fractal dimension $\dim S \leq p$.

Corollary

Пусть $0 < p \leq 1$. для каждой возрастающей функции $m \colon [0, r] \to \mathbb{R}$ с модулем непрерывности $\omega_m(t) \underset{t\in[0,r]}{\leq} bt^p$ и с модулем непостоянства $\operatorname{supp} m' \subset E \subset [0, r]$, для каждой δ-субгармонической функции $U \not\equiv \pm\infty$ на круге $\overline{D}(R)$ радиуса $R > r$ существует интеграл Лебега – Стилтьеса

$$\int_0^r M_U^+(t)\,dm(t) \leq \frac{18b}{p}\,\frac{R}{R-r} T_U(r, R)\, p\text{-}\mathfrak{m}(E) \ln \frac{e^{1+p} r^p}{p\text{-}\mathfrak{m}(E)}$$

Следствие с p-мерной мерой Хаусдорфа

Remark

Если $p > 1$, то $p\text{-}\mathfrak{m}^\ell = 0$, а $0\text{-}\mathfrak{m}^\ell(S) = \#S$, $1\text{-}\mathfrak{m}^\ell = \operatorname{mes}$. If $0 < p < 1$ and $p\text{-}\mathfrak{m}^\ell(S) < +\infty$, then S is a fractal set of fractal dimension $\dim S \leq p$.

Corollary

Пусть $0 < p \leq 1$. для каждой возрастающей функции $m\colon [0, r] \to \mathbb{R}$ с модулем непрерывности $\omega_m(t) \underset{t\in[0,r]}{\leq} bt^p$ и с модулем непостоянства $\operatorname{supp} m' \subset E \subset [0, r]$, для каждой δ-субгармонической функции $U \not\equiv \pm\infty$ на круге $\overline{D}(R)$ радиуса $R > r$ существует интеграл Лебега – Стилтьеса

$$\int_0^r M_U^+(t)dm(t) \leq \frac{18b}{p}\,\frac{R}{R-r}T_U(r, R)\,p\text{-}\mathfrak{m}(E)\ln\frac{e^{1+p}r^p}{p\text{-}\mathfrak{m}(E)}$$

Заключительные замечания к неравенствам с M_{U^+}

I. Все прешествующие результаты — версии этого очень частного случая с $p := 1$ и $m(t) := \int_{E\cap[0,t]} g(x)dx$, $t \in [0,r]$.

II. Для каждой возрастающей функции $h\colon [0,r] \to \mathbb{R}^+$ с $h(0) = 0$ и $h(r) > 0$ существует возрастающая функция $m\colon [0,r] \to \mathbb{R}^+$ с $m(r) > m(0)$ и с модулем непрерывности $\omega_m(t) \le h(t)$, удовлетворяющим условию Дини.

III. Используя теорему Фростмана, можно показать, что оценки с модулем непрерывности и оценки с h-обхватом Хаусдорфа в некотором смысле эквивалентны.

IV. Многомерные аналоги наших результатов для разностей субгармонических функций на $\mathbb{R}^m$ при $m > 2$ и для мероморфных функций на $\mathbb{C}^n$ при $n > 1$ невозможны, так как существую функции с радиальной максимальной характеристикой $\equiv +\infty$, и их много.

Заключительные замечания к неравенствам с M_{U^+}

I. Все прешествующие результаты — версии этого очень частного случая с $p := 1$ и $m(t) := \int_{E\cap[0,t]} g(x)dx$, $t \in [0, r]$.

II. Для каждой возрастающей функции $h\colon [0, r] \to \mathbb{R}^+$ с $h(0) = 0$ и $h(r) > 0$ существует возрастающая функция $m\colon [0, r] \to \mathbb{R}^+$ с $m(r) > m(0)$ и с модулем непрерывности $\omega_m(t) \le h(t)$, удовлетворяющим условию Дини.

III. Используя теорему Фростмана, можно показать, что оценки с модулем непрерывности и оценки с h-обхватом Хаусдорфа в некотором смысле эквивалентны.

IV. Многомерные аналоги наших результатов для разностей субгармонических функций на $\mathbb{R}^m$ при $m > 2$ и для мероморфных функций на $\mathbb{C}^n$ при $n > 1$ невозможны, так как существую функции с радиальной максимальной характеристикой $\equiv +\infty$, и их много.

Заключительные замечания к неравенствам с M_{U^+}

I. Все прешествующие результаты — версии этого очень частного случая с $p := 1$ и $m(t) := \int_{E\cap[0,t]} g(x)dx$, $t \in [0,r]$.

II. Для каждой возрастающей функции $h\colon [0,r] \to \mathbb{R}^+$ с $h(0) = 0$ и $h(r) > 0$ существует возрастающая функция $m\colon [0,r] \to \mathbb{R}^+$ с $m(r) > m(0)$ и с модулем непрерывности $\omega_m(t) \le h(t)$, удовлетворяющим условию Дини.

III. Используя теорему Фростмана, можно показать, что оценки с модулем непрерывности и оценки с h-обхватом Хаусдорфа в некотором смысле эквивалентны.

IV. Многомерные аналоги наших результатов для разностей субгармонических функций на $\mathbb{R}^m$ при $m > 2$ и для мероморфных функций на $\mathbb{C}^n$ при $n > 1$ невозможны, так как существую функции с радиальной максимальной характеристикой $\equiv +\infty$, и их много.

Заключительные замечания к неравенствам с $\mathrm{M}_{\mathrm{U}^+}$

I. Все прешествующие результаты — версии этого очень частного случая с $p := 1$ и $m(t) := \int_{E\cap[0,t]} g(x)dx$, $t \in [0, r]$.

II. Для каждой возрастающей функции $h\colon [0, r] \to \mathbb{R}^+$ с $h(0) = 0$ и $h(r) > 0$ существует возрастающая функция $m\colon [0, r] \to \mathbb{R}^+$ с $m(r) > m(0)$ и с модулем непрерывности $\omega_m(t) \leq h(t)$, удовлетворяющим условию Дини.

III. Используя теорему Фростмана, можно показать, что оценки с модулем непрерывности и оценки с h-обхватом Хаусдорфа в некотором смысле эквивалентны.

IV. Многомерные аналоги наших результатов для разностей субгармонических функций на $\mathbb{R}^m$ при $m > 2$ и для мероморфных функций на $\mathbb{C}^n$ при $n > 1$ невозможны, так как существую функции с радиальной максимальной характеристикой $\equiv +\infty$, и их много.

Ссылки к части I

[I] Khabibullin B. N. Meromorphic functions and differ ences of subharmonic functions in integrals and the difference characteristic of Nevanlinna. I. Radial maximum growth characteristics // 2021, 15 pages, Apr 13, 2021 (in Russian) https://arxiv.org/abs/2104.07439

[II] Khabibullin B. N. Meromorphic functions and differences of subharmonic functions in integrals and the difference characteristic of Nevanlinna. II. Explicit estimates of the integral of the radial maximum growth characteristic // 2021, 7 pages, Apr 16, 2021 (in Russian) https://arxiv.org/abs/2104.11086

[III] Khabibullin B. N. Meromorphic functions and differences of subharmonic functions in integrals and the difference characteristic of Nevanlinna. III. Estimates of integrals over fractal sets in terms of the Hausdorff measure and content // 2021, 9 pages, Apr 24, 2021 (in Russian) https://arxiv.org/abs/2104.13229

Часть II. Интегральные неравенства без радиальной максимальной функции

Исходная точка этой части

Theorem (Лемма Эрдея – Фукса о малых дугах [1962])

Пусть f мероморфная функция и $1 < k \in \mathbb{R}^+$. Если $E \subset [0, 2\pi]$ mes-измеримое, то

$$\int_E \ln^+ \left| f(re^{i\varphi}) \right| d\varphi \leq \frac{6k}{k-1} T(kr, f) \operatorname{mes}(E) \ln \frac{2\pi e}{\operatorname{mes}(E)},$$

Теорема о малых плоских множествах

Theorem ([2021] Khabibullin B.N. Integrals with a Meromorphic Function or the Difference of Subharmonic Functions over Discs and Planar Small Sets // Lobachevskii Journal of Mathematics, 42:6 (2021), 1175–1182)

Пусть $0 < r \in \mathbb{R}^+$, $1 < k \in \mathbb{R}^+$, $E \subset \overline{D}(r)$ измеримо по плоской мере Лебега $\lambda_{\mathbb{C}}$ на $\mathbb{C}$, $U \not\equiv \pm\infty$ — δ-субгармоническая на $\mathbb{C}$. Тогда

$$\int_E U^+ d\lambda_{\mathbb{C}} \leq \frac{2k}{k-1} \widehat{T}_U(r, kr) \lambda_{\mathbb{C}}(E) \ln \frac{100kr^2}{\lambda_{\mathbb{C}}(E)}.$$

Недавно был получен критерий для интегральных неравенствах подобного рода (июнь 2021 г.), включая многомерные результаты. Мы формулируем всё только на кругах в $\mathbb{C}$.

Теорема о малых плоских множествах

Theorem ([2021] Khabibullin B.N. Integrals with a Meromorphic Function or the Difference of Subharmonic Functions over Discs and Planar Small Sets // Lobachevskii Journal of Mathematics, 42:6 (2021), 1175–1182)

Пусть $0 < r \in \mathbb{R}^+$, $1 < k \in \mathbb{R}^+$, $E \subset \overline{D}(r)$ измеримо по плоской мере Лебега $\lambda_{\mathbb{C}}$ на $\mathbb{C}$, $U \not\equiv \pm\infty$ — δ-субгармоническая на $\mathbb{C}$. Тогда

$$\int_E U^+ d\lambda_{\mathbb{C}} \leq \frac{2k}{k-1}\widehat{T}_U(r, kr)\lambda_{\mathbb{C}}(E) \ln \frac{100kr^2}{\lambda_{\mathbb{C}}(E)}.$$

Недавно был получен критерий для интегральных неравенствах подобного рода (июнь 2021 г.), включая многомерные результаты. Мы формулируем всё только на кругах в $\mathbb{C}$.

Критерий с произвольной мерой Бореля μ

Theorem

Пусть $0 < \mathrm{r} \in \mathbb{R}^+$, μ конечная мера Бореля на $\overline{\mathrm{D}}(\mathrm{r})$, $\overline{\mathrm{D}}_{\mathrm{z}}(\mathrm{t}) := \mathrm{z} + \overline{\mathrm{D}}(\mathrm{t})$.
Следующие 4 утверждения эквивалентны:

I. Существует $\mathrm{r}_0 > 0$, для которого

$$\sup_{\mathrm{z}\in\overline{\mathrm{D}}(\mathrm{r})} \mathrm{N}_{\mathrm{z}}^{\mu}(\mathrm{r}_0) < +\infty \quad \text{где } \mathrm{N}_{\mathrm{z}}^{\mu}(\mathrm{r}_0) := \int_0^{\mathrm{r}_0} \frac{\mu(\overline{\mathrm{D}}_{\mathrm{z}}(\mathrm{t}))}{\mathrm{t}}\mathrm{dt}.$$

II. Для каждой δ-субгармонической функции U на $\overline{\mathrm{D}}(\mathrm{R})$ с $\mathrm{R} > \mathrm{r}$

$$\int_{\overline{\mathrm{D}}(\mathrm{r})} \mathrm{U}^+ \mathrm{d}\mu \leq 5\frac{\mathrm{R}+\mathrm{r}}{\mathrm{R}-\mathrm{r}} \widehat{\mathrm{T}}_{\mathrm{U}}(\mathrm{r},\mathrm{R}) \Bigl(\mu(\overline{\mathrm{D}}(\mathrm{r})) + \sup_{\mathrm{z}\in\overline{\mathrm{D}}(\mathrm{r})} \mathrm{N}_{\mathrm{z}}^{\mu}(\mathrm{r})\Bigr) < +\infty.$$

Критерий с произвольной мерой Бореля μ

Theorem

Пусть $0 < r \in \mathbb{R}^+$, μ конечная мера Бореля на $\overline{D}(r)$, $\overline{D}_z(t) := z + \overline{D}(t)$. Следующие 4 утверждения эквивалентны:

I. Существует $r_0 > 0$, для которого

$$\sup_{z \in \overline{D}(r)} N_z^{\mu}(r_0) < +\infty \quad \text{где } N_z^{\mu}(r_0) := \int_0^{r_0} \frac{\mu(\overline{D}_z(t))}{t} dt.$$

II. Для каждой δ-субгармонической функции U на $\overline{D}(R)$ с $R > r$

$$\int_{\overline{D}(r)} U^+ d\mu \leq 5 \frac{R+r}{R-r} \widehat{T}_U(r, R) \Bigl(\mu(\overline{D}(r)) + \sup_{z \in \overline{D}(r)} N_z^{\mu}(r) \Bigr) < +\infty.$$

Критерий с произвольной мерой Бореля μ

Theorem

Пусть $0 < r \in \mathbb{R}^+$, μ конечная мера Бореля на $\overline{D}(r)$, $\overline{D}_z(t) := z + \overline{D}(t)$. Следующие 4 утверждения эквивалентны:

I. Существует $r_0 > 0$, для которого

$$\sup_{z \in \overline{D}(r)} N_z^{\mu}(r_0) < +\infty \quad \text{где } N_z^{\mu}(r_0) := \int_0^{r_0} \frac{\mu(\overline{D}_z(t))}{t} dt.$$

II. Для каждой δ-субгармонической функции U на $\overline{D}(R)$ с $R > r$

$$\int_{\overline{D}(r)} U^+ d\mu \leq 5 \frac{R+r}{R-r} \widehat{T}_U(r, R) \Bigl(\mu(\overline{D}(r)) + \sup_{z \in \overline{D}(r)} N_z^{\mu}(r) \Bigr) < +\infty.$$

III. Существует $R > r$, для которого все δ-субгармонические функции $U \not\equiv \pm\infty$ on $\overline{D}(R)$ μ-интегрируемы и существует число $T > 0$, для которого конечна величина

$$\sup\left\{ \int_{\overline{D}(r)} U^+ d\mu \;\middle|\; \widehat{T}_U(r,R) \leq T,\; U - \delta\text{-субгармоническая на } \overline{D}(R) \right\}.$$

IV.

$$\inf_{z \in \operatorname{supp}\mu} \int_{\mathbb{C}} \ln|z' - z| \, d\mu(z') > -\infty.$$

Критерий Теорема (продолжение)

III. Существует $R > r$, для которого все δ-субгармонические функции $U \not\equiv \pm\infty$ on $\overline{D}(R)$ μ-интегрируемы и существует число $T > 0$, для которого конечна величина

$$\sup\left\{ \int_{\overline{D}(r)} U^+ d\mu \;\middle|\; \widehat{T}_U(r,R) \leq T,\ U \text{ — } \delta\text{-субгармоническая на } \overline{D}(R) \right\}.$$

IV.

$$\inf_{z \in \operatorname{supp} \mu} \int_{\mathbb{C}} \ln |z' - z| d\mu(z') > -\infty.$$

Явные оценки интеграла от U^+

Theorem

Пусть $0 < r \in \mathbb{R}^+$ и $h\colon [0,r] \to \mathbb{R}^+$ — непрерывная функция с $h(0) = 0$, дифференцируемая на $(0,r)$, для которой $s_h := \sup\limits_{t\in(0,r)} \frac{h(t)}{th'(t)} < +\infty$. Тогда для любой меры Бореля μ на $\overline{D}(r)$ полной меры $M := \mu(\overline{D}(r))$ и с модулем непрерывности $h_\mu \colon t \underset{t\in\mathbb{R}^+}{\longmapsto} \sup\limits_{z\in\mathbb{R}^d} \mu(\overline{D}_z(t))$ удовлетворяющим неравенству $h_\mu(t) \le h(t)$ при всех $t \in [0,r]$, любая δ-субгармоническая функция $U \not\equiv \pm\infty$ на круге $\overline{D}(R)$ радиуса $R > r$ μ-суммируема и

$$\int U^+ \, d\mu \le 5\frac{R+r}{R-r}\widehat{T}_U(r,R)\, M \ln \frac{e^{1+s_h} r}{h^{-1}(M)}. \tag{1}$$

Явные оценки интеграла от U^+

Theorem

Пусть $0 < r \in \mathbb{R}^+$ и $h\colon [0,r] \to \mathbb{R}^+$ — непрерывная функция с $h(0) = 0$, дифференцируемая на $(0,r)$, для которой $s_h := \sup\limits_{t\in(0,r)} \dfrac{h(t)}{th'(t)} < +\infty$. Тогда для любой меры Бореля μ на $\overline{D}(r)$ полной меры $M := \mu\bigl(\overline{D}(r)\bigr)$ и с модулем непрерывности $h_\mu\colon t \underset{t\in\mathbb{R}^+}{\longmapsto} \sup\limits_{z\in\mathbb{R}^d} \mu\bigl(\overline{D}_z(t)\bigr)$ удовлетворяющим неравенству $h_\mu(t) \leq h(t)$ при всех $t \in [0,r]$, любая δ-субгармоническая функция $U \not\equiv \pm\infty$ на круге $\overline{D}(R)$ радиуса $R > r$ μ-суммируема и

$$\int U^+ \,d\mu \leq 5\frac{R+r}{R-r}\widehat{T}_U(r,R)\,M \ln \frac{e^{1+s_h} r}{h^{-1}(M)}. \tag{1}$$

Явные оценки интеграла от U^+

Theorem

Пусть $0 < r \in \mathbb{R}^+$ и $h\colon [0,r] \to \mathbb{R}^+$ — непрерывная функция с $h(0) = 0$, дифференцируемая на $(0,r)$, для которой $s_h := \sup\limits_{t\in(0,r)} \frac{h(t)}{th'(t)} < +\infty$. Тогда для любой меры Бореля μ на $\overline{D}(r)$ полной меры $M := \mu\bigl(\overline{D}(r)\bigr)$ и с модулем непрерывности $h_\mu\colon t \underset{t\in\mathbb{R}^+}{\longmapsto} \sup\limits_{z\in\mathbb{R}^d} \mu\bigl(\overline{D}_z(t)\bigr)$ удовлетворяющим неравенству $h_\mu(t) \leq h(t)$ при всех $t \in [0,r]$, любая δ-субгармоническая функция $U \not\equiv \pm\infty$ на круге $\overline{D}(R)$ радиуса $R > r$ μ-суммируема и

$$\int U^+ \, d\mu \leq 5\frac{R+r}{R-r}\widehat{T}_U(r,R)\, M \ln \frac{e^{1+s_h} r}{h^{-1}(M)}. \tag{1}$$

h-мера и h-обхват Хаусдорфа радиуса t

Definition

Для функции $h\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ и величины $t \in \overline{\mathbb{R}}^+ \setminus 0$

$$\mathfrak{m}_h^t : S \underset{S\subset\mathbb{R}^d}{\longmapsto} \inf\left\{ \sum_{j\in N} h(r_j) \;\middle|\; N \subset \mathbb{N},\, S \subset \bigcup_{j\in N} \overline{D}_{z_j}(r_j),\, z_j \in \mathbb{C},\, r_j \underset{j\in N}{<} t \right\}$$

— h-обхват Хаусдорфа радиуса t, и

$\mathfrak{m}_h^0(S) := \lim_{0<t\to 0} \mathfrak{m}_h^t(S) \geq \mathfrak{m}_h^t(S) \geq \mathfrak{m}_h^\infty(S)$ для любого $S \subset \mathbb{R}^d$, При $h(0) = 0$ все обхваты $\mathfrak{m}_h^t$ — внешние меры, а $\mathfrak{m}_h^0$ определяет h-меру Хаусдорфа $\mathfrak{m}_h^0$, являющуюся регулярной мерой Бореля.

Theorem

В (1) справа M можно заменить на $\mathfrak{m}_h^t(\operatorname{supp}\mu)$ для любого $t \in \overline{\mathbb{R}}^+$.

h-мера и h-обхват Хаусдорфа радиуса t

Definition

Для функции $h\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ и величины $t \in \overline{\mathbb{R}}^+ \setminus 0$

$$\mathfrak{m}_h^t : S \underset{S\subset\mathbb{R}^d}{\longmapsto} \inf\left\{ \sum_{j\in N} h(r_j) \;\middle|\; N \subset \mathbb{N},\, S \subset \bigcup_{j\in N} \overline{D}_{z_j}(r_j),\, z_j \in \mathbb{C},\, r_j \underset{j\in N}{<} t \right\}$$

— h-обхват Хаусдорфа радиуса t, и
$\mathfrak{m}_h^0(S) := \lim\limits_{0<t\to 0} \mathfrak{m}_h^t(S) \geq \mathfrak{m}_h^t(S) \geq \mathfrak{m}_h^\infty(S)$ для любого $S \subset \mathbb{R}^d$, При $h(0) = 0$ все обхваты $\mathfrak{m}_h^t$ — внешние меры, а $\mathfrak{m}_h^0$ определяет h-меру Хаусдорфа $\mathfrak{m}_h^0$, являющуюся регулярной мерой Бореля.

Theorem

В (1) справа M можно заменить на $\mathfrak{m}_h^t(\operatorname{supp}\mu)$ для любого $t \in \overline{\mathbb{R}}^+$.

h-мера и h-обхват Хаусдорфа радиуса t

Definition

Для функции $h\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ и величины $t \in \overline{\mathbb{R}}^+ \setminus 0$

$$\mathfrak{m}_h^t \colon S \underset{S\subset\mathbb{R}^d}{\longmapsto} \inf\left\{ \sum_{j\in N} h(r_j) \,\middle|\, N \subset \mathbb{N},\, S \subset \bigcup_{j\in N} \overline{D}_{z_j}(r_j),\, z_j \in \mathbb{C},\, r_j \underset{j\in N}{<} t \right\}$$

— h-обхват Хаусдорфа радиуса t, и
$\mathfrak{m}_h^0(S) := \lim\limits_{0<t\to 0} \mathfrak{m}_h^t(S) \geq \mathfrak{m}_h^t(S) \geq \mathfrak{m}_h^\infty(S)$ для любого $S \subset \mathbb{R}^d$, При $h(0) = 0$ все обхваты $\mathfrak{m}_h^t$ — внешние меры, а $\mathfrak{m}_h^0$ определяет h-меру Хаусдорфа $\mathfrak{m}_h^0$, являющуюся регулярной мерой Бореля.

Theorem

В (1) справа M можно заменить на $\mathfrak{m}_h^t(\operatorname{supp}\mu)$ для любого $t \in \overline{\mathbb{R}}^+$.

p-мерные мера и обхват Хаусдорфа

Definition

Для степенной функции $\mathrm{h_p}$ степени $\mathrm{p} \in \mathbb{R}^+$ с нормирующим множителем вида

$$\mathrm{h_p} \colon \mathrm{x} \underset{\mathrm{t}\in\mathbb{R}^+}{\longmapsto} \mathrm{c_p x^p}, \quad \text{где } \mathrm{c_p} := \frac{\pi^{\mathrm{p}/2}}{\Gamma(\mathrm{p}/2+1)}, \quad \Gamma \text{ — гамма-функция,}$$

$\mathrm{h_p}$-обхват радиуса t и $\mathrm{h_p}$-меру Хаусдорфа называем соответственно p-мерными обхватом радиуса t и мерой Хаусдорфа, которые обозначаем как $\mathrm{p}\text{-}\mathfrak{m}^{\mathrm{t}} := \mathfrak{m}^{\mathrm{t}}_{\mathrm{h_p}}, \quad \mathrm{p}\text{-}\mathfrak{m}^{0} := \mathfrak{m}^{0}_{\mathrm{h_p}}$.

Неравенства с p-мерным обхватом или мерой Хаусдорфа

Theorem

Пусть $0 < r \leq t \in \overline{\mathbb{R}}^+$, $p \in (0, 2]$, $b \in \mathbb{R}^+$. Для любой меры Бореля μ на $\overline{D}(r)$ с носителем $\mathrm{supp}\mu \subset S \subset \overline{D}(r)$ и модулем непрерывности $h_\mu(x) \leq bx^p$ при всех $x \in [0, r]$ каждая δ-субгармоническая функция $U \not\equiv \pm\infty$ на круге $\overline{D}(R)$ радиуса $R > r$ μ-суммируема и

$$\int_{\overline{D}(r)} U^+ d\mu \leq \frac{5b}{p} \frac{R+r}{R-r} \widehat{T}_U(r, R)\, p\text{-}\mathfrak{m}^t(S) \ln \frac{\pi e^{p+1} r^p}{p\text{-}\mathfrak{m}^t(S)}.$$

Remark

Лемма Эдрея–Фукса — частный случай последней теоремы, когда μ — мера длины на окружности $\partial D(r)$, суженная на измеримое подмножество $S := re^{iE} \subset \partial D(r)$, $p = 1$, $b = \pi$, $t := 0$.

Неравенства с p-мерным обхватом или мерой Хаусдорфа

Theorem

Пусть $0 < r \le t \in \overline{\mathbb{R}}^+$, $p \in (0,2]$, $b \in \mathbb{R}^+$. Для любой меры Бореля μ на $\overline{D}(r)$ с носителем $\operatorname{supp}\mu \subset S \subset \overline{D}(r)$ и модулем непрерывности $h_\mu(x) \le bx^p$ при всех $x \in [0,r]$ каждая δ-субгармоническая функция $U \not\equiv \pm\infty$ на круге $\overline{D}(R)$ радиуса $R > r$ μ-суммируема и

$$\int_{\overline{D}(r)} U^+ d\mu \le \frac{5b}{p}\,\frac{R+r}{R-r}\,\widehat{T}_U(r,R)\,p\text{-}\mathfrak{m}^t(S)\ln\frac{\pi e^{p+1} r^p}{p\text{-}\mathfrak{m}^t(S)}.$$

Remark

Лемма Эдрея–Фукса — частный случай последней теоремы, когда μ — мера длины на окружности $\partial D(r)$, суженная на измеримое подмножество $S := re^{iE} \subset \partial D(r)$, $p = 1$, $b = \pi$, $t := 0$.

Неравенства с p-мерным обхватом или мерой Хаусдорфа

Theorem

Пусть $0 < r \leq t \in \overline{\mathbb{R}}^+$, $p \in (0, 2]$, $b \in \mathbb{R}^+$. Для любой меры Бореля μ на $\overline{D}(r)$ с носителем $\operatorname{supp}\mu \subset S \subset \overline{D}(r)$ и модулем непрерывности $h_\mu(x) \leq bx^p$ при всех $x \in [0, r]$ каждая δ-субгармоническая функция $U \not\equiv \pm\infty$ на круге $\overline{D}(R)$ радиуса $R > r$ μ-суммируема и

$$\int_{\overline{D}(r)} U^+ d\mu \leq \frac{5b}{p} \frac{R + r}{R - r} \widehat{T}_U(r, R)\, p\text{-}\mathfrak{m}^t(S) \ln \frac{\pi e^{p+1} r^p}{p\text{-}\mathfrak{m}^t(S)}.$$

Remark

Лемма Эдрея – Фукса — частный случай последней теоремы, когда μ — мера длины на окружности $\partial D(r)$, суженная на измеримое подмножество $S := re^{iE} \subset \partial D(r)$, $p = 1$, $b = \pi$, $t := 0$.

Неравенства с p-мерным обхватом или мерой Хаусдорфа

Theorem

Пусть $0 < r \leq t \in \overline{\mathbb{R}}^+$, $p \in (0,2]$, $b \in \mathbb{R}^+$. Для любой меры Бореля μ на $\overline{D}(r)$ с носителем $\operatorname{supp}\mu \subset S \subset \overline{D}(r)$ и модулем непрерывности $h_\mu(x) \leq bx^p$ при всех $x \in [0,r]$ каждая δ-субгармоническая функция $U \not\equiv \pm\infty$ на круге $\overline{D}(R)$ радиуса $R > r$ μ-суммируема и

$$\int_{\overline{D}(r)} U^+ d\mu \leq \frac{5b}{p}\frac{R+r}{R-r}\widehat{T}_U(r,R)\, p\text{-}\mathfrak{m}^t(S) \ln \frac{\pi e^{p+1} r^p}{p\text{-}\mathfrak{m}^t(S)}.$$

Remark

Лемма Эдрея – Фукса — частный случай последней теоремы, когда μ — мера длины на окружности $\partial D(r)$, суженная на измеримое подмножество $S := re^{iE} \subset \partial D(r)$, $p = 1$, $b = \pi$, $t := 0$.

Интегрирование по липшицевой кривой: $p = 1$

Theorem

Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — интервал и $L \colon I \to \mathbb{C}$ — билипшицева кривая с $L(I) \subset \overline{D}(r)$ для некоторого $r \in \mathbb{R}^+$. Тогда каждая δ-субгармоническая функция $U \not\equiv \pm\infty$ на круге $\overline{D}(R)$ радиуса $R > r$ суммируема по мере длины σ на $L(I)$ и для любого борелевского подмножества $E \subset L(I)$ выполнено неравенство

$$\int_E U^+ d\sigma \leq 15 \,\mathrm{Lip}(L)\,\mathrm{Lip}(L^{-1})\,\frac{R+r}{R-r}\,\widehat{T}_U(r,R)\,\sigma(E) \ln \frac{\pi e^2 r}{\sigma(E)} < +\infty.$$

Интегрирование по липшицевой кривой: $p = 1$

Theorem

Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — интервал и $L\colon I \to \mathbb{C}$ — билипшицева кривая с $L(I) \subset \overline{D}(r)$ для некоторого $r \in \mathbb{R}^+$. Тогда каждая δ-субгармоническая функция $U \not\equiv \pm\infty$ на круге $\overline{D}(R)$ радиуса $R > r$ суммируема по мере длины σ на $L(I)$ и для любого борелевского подмножества $E \subset L(I)$ выполнено неравенство

$$\int_E U^+ d\sigma \leq 15 \operatorname{Lip}(L) \operatorname{Lip}(L^{-1}) \frac{R+r}{R-r} \widehat{T}_U(r,R)\, \sigma(E) \ln \frac{\pi e^2 r}{\sigma(E)} < +\infty.$$

Предварительные публикации по части II

[I] Khabibullin B. N. Integrals of differences of subharmonic functions. I. An integral inequality with Nevanlinna characteristic and modulus of continuity of measure // 2021, 14 pages, May 25 — Jun 25, 2021 (in Russian) https://arxiv.org/abs/2106.08947v2

[II] Khabibullin B. N. Integrals of differences of subharmonic functions. II. A criterion // 2021, 12 pages, Jul 4 — Jul 12, 2021 (in Russian) https://arxiv.org/abs/2107.02883v2

[III] Khabibullin B. N. Integrals of differences of subharmonic functions. III. Hausdorff measure and content, integration over Lipschitz curves and surfaces // 2021, 16 pages, Jul 15, 2021 (in Russian) https://arxiv.org/abs/2107.08825v1

Большое спасибо за Ваше внимание!

Thank you for your attention!