Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2011, № 8, с. 3–8 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421100123\0077*

А.Н. АБЫЗОВ

ВПОЛНЕ ИДЕМПОТЕНТНОСТЬ Hom

Аннотация. Для произвольных модулей A и B вводится и изучается понятие вполне идемпотентного $\mathrm{Hom}\,(A, B)$. Из полученных результатов в качестве следствий выводятся ряд хорошо известных фактов, связанных с вполне идемпотентными кольцами и модулями.

Ключевые слова: вполне идемпотентное кольцо, вполне идемпотентный модуль, квазипроективный модуль, квазиинъективный модуль.

УДК: 512.55

Abstract. For arbitrary modules A and B we introduce and study the notion of a fully idempotent $\mathrm{Hom}\,(A, B)$. As a corollary we obtain some well-known properties of fully idempotent rings and modules.

Keywords: fully idempotent ring, fully idempotent module, quasi-projective module, quasi-injective module.

1. Введение

В данной работе через R будем обозначать кольцо с единицей. Все рассматриваемые модули являются правыми и унитарными. Если A, B — правые R-модули, то через $\mathrm{Hom}(A, B)$ будем обозначать множество всех R-гомоморфизмов из A в B.

Кольцо R называется *вполне идемпотентным справа* (*слева*), если $I^2 = I$ для каждого правого (левого) идеала I кольца R. Если в кольце R равенство $I^2 = I$ выполняется для каждого идеала I кольца R, то кольцо R называется *вполне идемпотентным*. Несложно заметить, что для кольца R следующие условия равносильны:

1) R — вполне идемпотентное справа кольцо,

2) для каждого элемента r кольца R найдутся такие элементы $r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n \in R$, что $r = \sum\limits_{i=1}^{n} r r_i r s_i$.

Вполне идемпотентные кольца изучались в [1]–[3] и других работах. Ряд свойств вполне идемпотентных колец были отражены в монографиях [4], [5] и в обзоре [6].

Пусть M — произвольный правый R-модуль и $S = \mathrm{End}_R(M)$. Через M^* будем обозначать левый R-модуль $\mathrm{Hom}_R(M, R_R)$. Через $[m, f]$ обозначим эндоморфизм модуля M, при котором $[m, f](n) = mf(n)$ для каждого $n \in M$. Правый R-модуль M называется *вполне*

Поступила 19.05.2010

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 10-01-00431-а, и Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009 и 2013 годы (гос. контракт П267).

идемпотентным справа (*слева*), если $m \in [m, M^*]mR$ ($m \in \mathrm{End}_R(M)[m, M^*]m$) для каждого $m \in M$. Если $m \in \mathrm{End}_R(M)[m, M^*]mR$ для каждого $m \in M$, то модуль M называется *вполне идемпотентным*. Вполне идемпотентные модули изучались в работах [7]–[11].

Правый R-модуль M называется *регулярным по Зельмановичу* [12], если для каждого $m \in M$ существует такой гомоморфизм $f : M \to R$, что $m = mf(m)$. Модули, регулярные по Зельмановичу, изучались в [7], [8], [12], [13].

Пусть A и B — правые R-модули. Гомоморфизм $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ называется *регулярным*, если существует такой гомоморфизм $g \in \mathrm{Hom}(B, A)$, что $f = fgf$. $\mathrm{Hom}(A, B)$ называется *регулярным*, если каждый элемент из $\mathrm{Hom}(A, B)$ регулярен. Регулярные морфизмы изучались в работах [14]–[16]. Заметим, что правый R-модуль M регулярен по Зельмановичу тогда и только тогда, когда регулярен канонически изоморфный ему модуль $\mathrm{Hom}(R, M)$.

Пусть $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$. Введем следующие обозначения:

$$H_r(f) := \Big\{ \sum_i g_i f s_i \mid g_i \in \mathrm{Hom}(B, A),\ s_i \in \mathrm{Hom}(A, A) \ \text{ для каждого } i \Big\},$$
$$H_l(f) := \Big\{ \sum_i s_i f g_i | g_i \in \mathrm{Hom}(B, A),\ s_i \in \mathrm{Hom}(B, B) \ \text{ для каждого } i \Big\}.$$

Легко видеть, что если $f \in \mathrm{Hom}(B, C)$, $g \in \mathrm{Hom}(A, B)$, то $H_r(fg) \subset H_r(g)$. Назовем $\mathrm{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентным справа* (*слева*), если для каждого гомоморфизма $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ выполнено условие $f \in fH_r(f)(f \in H_l(f)f)$. $\mathrm{Hom}(A, B)$ называется *вполне идемпотентным*, если $f \in \mathrm{Hom}(B, B)fH_r(f)$ для каждого $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$. Легко видеть, что правый R-модуль M вполне идемпотентен (соответственно справа, слева) тогда и только тогда, когда вполне идемпотентен (соответственно справа, слева) канонически изоморфный ему модуль $\mathrm{Hom}(R, M)$.

В данной работе изучаются свойства вполне идемпотентных $\mathrm{Hom}(A, B)$, где A, B — произвольные правые R-модули. В качестве следствий приводятся ранее известные факты, связанные с вполне идемпотентными кольцами и модулями.

2. Основные результаты

Лемма 1. (1) *Пусть* $\mathrm{Hom}(A, C_1), \dots, \mathrm{Hom}(A, C_m)$ *вполне идемпотентны справа. Тогда для каждого семейства гомоморфизмов* $f_1 \in \mathrm{Hom}(B, C_1), \dots, f_m \in \mathrm{Hom}(B, C_m)$ *и каждого гомоморфизма* $s \in \mathrm{Hom}(A, B)$ *существует такой гомоморфизм* $h \in H_r(s)$, *что для каждого* $1 \le i \le m$ *имеет место равенство* $f_i s = f_i sh$.

(2) *Пусть* $\mathrm{Hom}(C_1, A), \dots, \mathrm{Hom}(C_m, A)$ *вполне идемпотентны слева. Тогда для каждого семейства гомоморфизмов* $f_1 \in \mathrm{Hom}(C_1, B), \dots, f_m \in \mathrm{Hom}(C_m, B)$ *и каждого гомоморфизма* $s \in \mathrm{Hom}(B, A)$ *существует такой гомоморфизм* $h \in H_l(s)$, *что для каждого* $1 \le i \le m$ *имеет место равенство* $sf_i = hsf_i$.

Доказательство (1) проведем с помощью математической индукции. Докажем утверждение при $m = 1$. Так как множество $\mathrm{Hom}(A, C_1)$ вполне идемпотентно справа, то $f_1 s \in f_1 s H_r(f_1 s) \subset f_1 s H_r(s)$. Допустим, что утверждение верно для $m = k$. Пусть $\mathrm{Hom}(A, C_1), \dots, \mathrm{Hom}(A, C_{k+1})$ вполне идемпотентны справа, $f_1 \in \mathrm{Hom}(B, C_1), \dots, f_{k+1} \in \mathrm{Hom}(B, C_{k+1})$ и $s \in \mathrm{Hom}(A, B)$. По предположению индукции найдется такой гомоморфизм $h \in H_r(s)$, что для каждого $1 \le i \le k$ имеет место равенство $f_i s = f_i sh$. Так как $\mathrm{Hom}(A, C_{k+1})$ вполне идемпотентно справа, то для некоторого гомоморфизма $h' \in H_r(f_{k+1}s - f_{k+1}sh) \subset H_r(s)$ имеет место равенство $(f_{k+1}s - f_{k+1}sh) = (f_{k+1}s - f_{k+1}sh)h'$. Тогда для каждого $1 \le i \le k$ имеем $f_i s(h + h' - hh') = f_i sh + f_i s(1_A - h)h' = f_i s$ и $f_{k+1}s(h + h' - hh') = f_{k+1}s$. При этом, очевидно, $h + h' - hh' \in H_r(s)$.

Доказательство (2) двойственно доказательству предыдущего пункта. $\square$

Лемма 2. *Пусть* $B = B_1 \oplus B_2$. *Тогда*

(1) *если* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно справа, то* $\mathrm{Hom}(A, B_1)$ *вполне идемпотентно справа,*
(2) *если* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно слева, то* $\mathrm{Hom}(A, B_1)$ *вполне идемпотентно слева,*
(3) *если* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно, то* $\mathrm{Hom}(A, B_1)$ *вполне идемпотентно.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{Hom}(A, B_1)$, i — вложение модуля B_1 в модуль B и π — проекция модуля B на модуль B_1 относительно разложения $B = B_1 \oplus B_2$.

(1) Ввиду вполне идемпотентности справа $\mathrm{Hom}(A, B)$ имеем $if = ifg$, где $g \in H_r(if) \subset H_r(f)$. Из последнего равенства следует $f = fg$.

(2) Ввиду вполне идемпотентности слева $\mathrm{Hom}(A, B)$ имеем $gif = if$, где $g \in H_l(if)$. Из последнего равенства следует $\pi gif = f$ и $\pi gi \in H_l(f)$.

(3) Ввиду вполне идемпотентности $\mathrm{Hom}(A, B)$ имеем $if = \sum\limits_{k=1}^{m} h_k ifg_k$, где $g_k \in H_r(if)$, а $h_k \in \mathrm{Hom}(B, B)$ для каждого k. Тогда $f = \sum\limits_{k=1}^{m} \pi h_k ifg_k \in \mathrm{Hom}(B_1, B_1) f H_r(f)$. □

Доказательство следующего утверждения аналогично доказательству предыдущей леммы.

Лемма 3. *Пусть* $A = A_1 \oplus A_2$. *Тогда*

(1) *если* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно справа, то* $\mathrm{Hom}(A_1, B)$ *вполне идемпотентно справа,*
(2) *если* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно слева, то* $\mathrm{Hom}(A_1, B)$ *вполне идемпотентно слева,*
(3) *если* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно, то* $\mathrm{Hom}(A_1, B)$ *вполне идемпотентно.*

Лемма 4. *Пусть* $B = B_1 \oplus B_2$. *Тогда*

(1) *если* $\mathrm{Hom}(A, B_1)$ *и* $\mathrm{Hom}(A, B_2)$ *вполне идемпотентны справа, то* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно справа,*
(2) *если* $\mathrm{Hom}(A, B_1)$ *и* $\mathrm{Hom}(A, B_2)$ *вполне идемпотентны слева, то* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно слева,*
(3) *если* $\mathrm{Hom}(A, B_1)$ *и* $\mathrm{Hom}(A, B_2)$ *вполне идемпотентны, то* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$, π_1 и π_2 — проекции модуля B на первое и соответственно на второе прямое слагаемое относительно разложения $B = B_1 \oplus B_2$, i_1 и i_2 — вложения модуля B_1 и соответственно модуля B_2 в модуль B.

(1) Из леммы 1 (1) следует, что существует гомоморфизм $h \in H_r(f)$, для которого имеют место равнства $\pi_1 f = \pi_1 fh$, $\pi_2 f = \pi_2 fh$. Тогда $f = i_1\pi_1 f + i_2\pi_2 f = i_1\pi_1 fh + i_2\pi_2 fh = fh$.

(2) В силу вполне идемпотентности слева $\mathrm{Hom}(A, B_1)$ и $\mathrm{Hom}(A, B_2)$ имеем $\pi_1 f = h_1\pi_1 f$ и $\pi_2 f = h_2\pi_2 f$ соответственно, где $h_1 \in H_l(\pi_1 f)$, $h_2 \in H_l(\pi_2 f)$. Тогда $f = i_1\pi_1 f + i_2\pi_2 f = i_1 h_1\pi_1 f + i_2 h_2\pi_2 f$ и поскольку $i_1 h_1\pi_1, i_2 h_2\pi_2 \in H_l(f)$, то $f \in H_l(f)f$.

(3) Из вполне идемпотентности $\mathrm{Hom}(A, B_1)$ и $\mathrm{Hom}(A, B_2)$ следует $\pi_1 f = \sum\limits_{k=1}^{m} g_k\pi_1 fh_k$ и $\pi_2 f = \sum\limits_{k=1}^{n} s_k\pi_2 ft_k$, где $g_k \in \mathrm{Hom}(B_1, B_1)$, $h_k \in H_r(\pi_1 f)$ для каждого $1 \le k \le m$ и $s_k \in \mathrm{Hom}(B_2, B_2)$, $t_k \in H_r(\pi_2 f)$ для каждого $1 \le k \le n$. Тогда $f = i_1\pi_1 f + i_2\pi_2 f = \sum\limits_{k=1}^{m} i_1 g_k\pi_1 fh_k +$

$\sum\limits_{k=1}^{n} i_2 s_k \pi_2 f t_k$. Так как $i_1 g_k \pi_1 f h_k$, $i_2 s_k \pi_2 f t_k \in \mathrm{Hom}(B,B) f H_r(f)$ для каждого k, то $f \in \mathrm{Hom}(B,B) f H_r(f)$. □

Доказательство следующей леммы двойственно доказательству предыдущей леммы.

Лемма 5. *Пусть* $A = A_1 \oplus A_2$. *Тогда*

(1) *если* $\mathrm{Hom}(A_1, B)$ *и* $\mathrm{Hom}(A_2, B)$ *вполне идемпотентны справа, то* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно справа,*
(2) *если* $\mathrm{Hom}(A_1, B)$ *и* $\mathrm{Hom}(A_2, B)$ *вполне идемпотентны слева, то* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно слева,*
(3) *если* $\mathrm{Hom}(A_1, B)$ *и* $\mathrm{Hom}(A_2, B)$ *вполне идемпотентны, то* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно.*

Лемма 6. *Пусть* $(A_i)_{i \in I}$ *— семейство правых* R*-модулей и* N *— конечно порожденный правый* R*-модуль. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) $\mathrm{Hom}(N, A_i)$ *вполне идемпотентно* (*соответственно справа, слева*) *для каждого* $i \in I$,
(2) $\mathrm{Hom}(N, \bigoplus\limits_{i \in I} A_i)$ *вполне идемпотентно* (*соответственно справа, слева*).

Доказательство. 1)⇒2) Предположим, что $\mathrm{Hom}(N, A_i)$ вполне идемпотентно для каждого $i \in I$. Пусть $f \in \mathrm{Hom}(N, \bigoplus\limits_{i \in I} A_i)$. Так как модуль N конечно порожден, то для некоторого конечного набора попарно различных индексов $i_1, \ldots, i_k$ из I имеем $f(N) \subset A_{i_1} \oplus \cdots \oplus A_{i_k}$. Пусть π — проекция модуля $\bigoplus\limits_{i \in I} A_i$ на модуль $A_{i_1} \oplus \cdots \oplus A_{i_k}$, i — вложение модуля $A_{i_1} \oplus \cdots \oplus A_{i_k}$ в модуль $\bigoplus\limits_{i \in I} A_i$. Из леммы 4 следует, что множество $\mathrm{Hom}(N, A_{i_1} \oplus \cdots \oplus A_{i_k})$ вполне идемпотентно. Следовательно, $\pi f \in \mathrm{Hom}(A_{i_1} \oplus \cdots \oplus A_{i_k}, A_{i_1} \oplus \cdots \oplus A_{i_k}) \pi f H_r(\pi f) \subset \mathrm{Hom}(A_{i_1} \oplus \cdots \oplus A_{i_k}, A_{i_1} \oplus \cdots \oplus A_{i_k}) \pi f H_r(f)$. Так как $i\pi f = f$, то $f \in \mathrm{Hom}\left(\bigoplus\limits_{i \in I} A_i, \bigoplus\limits_{i \in I} A_i\right) f H_r(f)$.

Случаи вполне идемпотентных справа и вполне идемпотентных слева множеств гомоморфизмов рассматриваются аналогично.

2)⇒1) Импликация следует из леммы 2. □

Теорема 1. *Пусть* $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ *и* $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m$. *Тогда следующие условия равносильны*:

(1) $\mathrm{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно* (*соответственно справа, слева*),
(2) *для каждого* $1 \le i \le n$ *и для каждого* $1 \le j \le m$ $\mathrm{Hom}(A_i, B_j)$ *вполне идемпотентно* (*соответственно справа, слева*).

Доказательство. 1)⇒2) Импликация следует из лемм 2 и 3.

2)⇒1) Импликация следует из лемм 4 и 5. □

Следствие 1. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — попарно ортогональные идемпотенты кольца R и $1 = e_1 + \cdots + e_n$. Тогда следующие условия равносильны:

(1) R вполне идемпотентно справа,
(2) для каждых $1 \le j, i \le n$ и каждого $r \in e_i R e_j$ найдутся такие элементы

$s_1, \ldots, s_m \in e_j R e_i$ и $t_1, \ldots, t_m \in e_j R e_j$, что $r = r \sum\limits_{k=1}^{m} s_k r t_k$.

Следствие 2. Если кольцо R вполне идемпотентно (справа, слева), то для каждого натурального n кольцо $M_n(R)$ вполне идемпотентно (справа, слева).

Следствие 3 ([10], теорема 3.2, теорема 4.2; [11], предложение 3)**.** Для модуля $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$ следующие условия равносильны:

(1) A вполне идемпотентен (соответственно справа, слева),

(2) A_i вполне идемпотентен (соответственно справа, слева) для каждого $i \in I$.

Доказательство. Так как $A \cong \mathrm{Hom}(R, A)$ для каждого правого R - модуля, то утверждение непосредственно следует из леммы 6. □

Следствие 4. Каждый проективный модуль над вполне идемпотентным (соответственно справа, слева) кольцом является вполне идемпотентным (соответственно справа, слева).

Для произвольных правых R-модулей через $\Psi_{A,B}$ будем обозначать естественный $\mathrm{Hom}(A,A) - \mathrm{Hom}(A,A)$-бимодульный гомоморфизм из $\mathrm{Hom}(B,A) \bigotimes_{\mathrm{Hom}(B,B)} \mathrm{Hom}(A,B)$ в $\mathrm{Hom}(A,A)$, действующий по правилу $\Psi_{A,B}(f \bigotimes g) = fg$. Модуль B назовем конечно порожденным (соответственно копорожденным) модулем A, если существует эпиморфизм $\varphi : \bigoplus_{k=1}^{m} A_k \to B$ (соответственно мономорфизм $\varphi : B \to \bigoplus_{k=1}^{m} A_k$), где $A = A_k$ для каждого $1 \le k \le m$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно слева. Тогда*

(1) *если гомоморфизм* $\Psi_{A,B}$ *является эпиморфизмом, то* $\mathrm{Hom}(A, A)$ *вполне идемпотентно слева,*

(2) *если* A *квазипроективен и* B *конечно порождается модулем* A*, то* $\mathrm{Hom}(B, B)$ *вполне идемпотентно слева.*

Доказательство. (1) Пусть $f \in \mathrm{Hom}(A, A)$. Так как $\Psi_{A,B}$ является эпиморфизмом, то $1_A = \sum_{k=1}^{m} g_k h_k$, где $g_1, \ldots, g_m \in \mathrm{Hom}(B, A)$ и $h_1, \ldots, h_m \in \mathrm{Hom}(A, B)$. Тогда $f = 1_A f = \sum_{k=1}^{m} g_k h_k f$. Поскольку $\mathrm{Hom}(A, B)$ вполне идемпотентно слева, то для каждого $1 \le k \le m$ имеет место равенство $h_k f = s_k h_k f$, где $s_k \in H_l(h_k f)$. Так как $g_k s_k h_k \in H_l(f)$ для каждого $1 \le k \le m$, то $f \in H_l(f) f$.

(2) Согласно предположению существует эпиморфизм $\varphi : \bigoplus_{k=1}^{m} A_k \to B$, где $A = A_k$ для каждого $1 \le k \le m$. Рассмотрим произвольный гомоморфизм f из $\mathrm{Hom}(A, B)$. Так как A квазипроективен, то из ([17], 18.2) следует, что для некоторого гомоморфизма $g : A \to \bigoplus_{k=1}^{m} A_k$ имеет место равенство $f = \varphi g$. Из этого равенства вытекает $f \in \sum_{k=1}^{m} \varphi i_k \mathrm{Hom}(A, A)$, где $i_1, \ldots, i_m$ — естественные вложения модуля A в модуль $\bigoplus_{k=1}^{m} A_k$. Таким образом, $\mathrm{Hom}(A, B)$, как правый $\mathrm{Hom}(A, A)$-модуль, порождается гомоморфизмами $\varphi i_1, \ldots, \varphi i_m$. Пусть $s \in \mathrm{Hom}(B, B)$. Из леммы 1 (2) следует, что для некоторого гомоморфизма $h \in H_l(s)$ имеют место равенства $s\varphi i_1 = hs\varphi i_1, \ldots, s\varphi i_m = hs\varphi i_m$. Тогда $(s - sh)\,\mathrm{Hom}(A, B) = 0$. Поскольку A порождает B, то из ([17], 13.2) имеем $s = sh$. □

Доказательство следующего утверждения двойственно доказательству предыдущей теоремы.

Теорема 3. *Пусть* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно справа. Тогда*

(1) *если гомоморфизм* $\Psi_{B,A}$ *является эпиморфизмом, то* $\mathrm{Hom}(B, B)$ *вполне идемпотентно справа,*

(2) *если* B *квазиинъективен и* A *конечно копорождается модулем* B*, то* $\mathrm{Hom}(A, A)$ *вполне идемпотентно справа.*

Теорема 4. *Пусть* $\mathrm{Hom}(A,B)$ *вполне идемпотентно. Тогда*

(1) *если гомоморфизм* $\Psi_{A,B}$ *является эпиморфизмом, то* $\mathrm{Hom}(A,A)$ *вполне идемпотентно,*

(2) *если гомоморфизм* $\Psi_{B,A}$ *является эпиморфизмом, то* $\mathrm{Hom}(B,B)$ *вполне идемпотентно.*

Доказательство аналогично доказательству п. (1) теоремы 2. □

Следствие 5 ([10], теоремы 5.4, 5.5)**.** Пусть P — конечно порожденный проективный правый R-модуль. Если P вполне идемпотентен (справа), то кольцо $S = \mathrm{End}_R(P)$ вполне идемпотентно (справа).

Доказательство. Согласно ([17], 18.6) правый R-модуль является конечно порожденным и проективным тогда и только тогда, когда $\Psi_{P,R}$ является эпиморфизмом. Поэтому утверждение следует из теорем 3 и 4. □

Непосредственно из теоремы 2 (2) вытекает

Следствие 6 ([11], теорема 8)**.** Пусть A — конечно порожденный правый R-модуль. Если A — вполне идемпотентный слева модуль, то кольцо $\mathrm{End}(A)$ является вполне идемпотентным слева.

Литература

[1] Camillo V., Xiao Y.F. *Weakly regular rings*, Commun. Algebra **22** (10), 4095–4112 (1994).
[2] Andruszkiewicz R.R., Puczyłowski E.R. *Right fully idempotent rings need not be left fully idempotent*, Glasgow Math. J. **37** (2), 155–157 (1995).
[3] Ramamurthi V.S. *Weakly regular rings*, Canad. Math. Bull. **16**, 317–321 (1973).
[4] Туганбаев А.А. *Теория колец. Арифметические модули и кольца* (МЦНМО, М., 2009).
[5] Tuganbaev A.A. *Rings close to regular* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002).
[6] Tuganbaev A.A. *Semiregular, weakly regular, and* π*-regular rings*, J. Math. Sci. (New York) **109** (3), 1509–1588 (2002).
[7] Hirano Y. *Regular modules and* V*-modules*, Hiroshima Math. J. **11** (1), 125–142 (1981).
[8] Hirano Y. *Regular modules and* V*-modules*. II, Math. J. Okayama Univ. **23** (2), 131–135 (1981).
[9] Ramamurthi V.S. *A note on regular modules*, Bull. Austral. Math. Soc. **11** (3), 359–364 (1974).
[10] Jayaraman M., Vanaja N. *Generalization of regular modules*, Commun. Algebra **35** (11), 3331–3345 (2007).
[11] Mabuchi T. *Weakly regular modules*, Osaka J. Math. **17** (1), 35–40 (1980).
[12] Zelmanowitz J. *Regular modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **163**, 341–355 (1972).
[13] Azumaya G. *Some characterizations of regular modules*, Publ. Matem. Barc. **34** (2), 241–248 (1990).
[14] Nicholson W.K., Zhou Y. *Semiregular morphisms*, Commun. Algebra **34** (1), 219–233 (2006).
[15] Kasch F., Mader A. *Regularity and substructures of* Hom, Commun. Algebra **34** (4), 1459–1478 (2006).
[16] Kasch F. *Regular substructures of* Hom, Appl. Categ. Structur. **16** (1–2), 159–166 (2008).
[17] Wisbauer R. *Foundations of module and ring theory. A handbook for study and research.* Revised and updated by Engl. ed. (Gordon and Breach Science Publishers, Philadelphia, 1991).

А.Н. Абызов

доцент, кафедра алгебры и математической логики,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008,

`e-mail:` aabyzov@ksu.ru

A.N. Abyzov

Associate Professor, Chair of Algebra and Mathematical Logics,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` aabyzov@ksu.ru