

УДК 532.546

УПРАВЛЕНИЕ ПОТОКОМ ЗАГРЯЗНЕННЫХ ПОДЗЕМНЫХ ВОД ЧЕРЕЗ СКВАЖИНЫ

Э.В. Скворцов, Д.Т. Суючева

Аннотация

Исследовано взаимодействие потока загрязненных подземных вод с течением, создаваемым скважинами. В условиях потенциальности течения определены зоны, защищенные от загрязнений, для ряда конфигураций размещения скважин. Определены величины критических расходов скважин, соответствующие прорывам загрязнений между скважинами.

Введение

Одна из острых современных экологических проблем – нехватка чистой питьевой воды. Поверхностные воды, как ресурс такой воды, обычно загрязнены, поэтому возрастает ценность менее загрязненных подземных вод.

Актуальность проблемы защиты подземных вод от загрязнений со временем лишь возрастает. В насыщенных водой пластах возможны естественные региональные потоки, которые способны переносить загрязнения на большие расстояния, в результате чего образуются крупные ареалы загрязнений. Поэтому проводят мероприятия по их локализации и ликвидации. Одним из способов защиты подземных вод является воздействие на поток через скважины путем закачки в пласт или откачки из пласта воды. В частности, таким образом на пути регионального потока можно создать гидродинамические барьеры, препятствующие продвижению загрязнений [1].

Местоположение ареала загрязнений, зону захвата жидкости скважинами (либо течения от скважин) и эффективность таких барьеров можно определить, используя численное моделирование процесса. Оно позволяет исследовать сложные системы, которые включают в себя неоднородности, неустановившийся поток, большое число эксплуатационных и нагнетательных скважин. Важным этапом анализа течения оказывается определение границы зоны захвата (либо барьера для загрязнения). В двумерном случае это линия раздела воды, текущей по градиенту давления мимо скважины, и воды, текущей к скважине (или от скважины). Будучи универсальными, численные методы вместе с тем не позволяют осуществить прямое вычисление координат огибающей зоны захвата [2].

Изучение различных ситуаций с использованием скважин для управления потоком показало, что практически достаточно лишь нескольких скважин для того, чтобы осуществить сдерживание загрязненного пятна жидкости [3]. Если реальная гидродинамическая обстановка в достаточной мере допускает схема-

тизацию и описание сравнительно небольшим числом расчетных параметров, то зоны захвата и области, защищаемые гидродинамическими барьерами, удастся определить аналитически.

Преимущество применения аналитических методов исследования взаимодействия потока со скважинами перед численными состоит в том, что они нацелены на построение границ зоны захвата и в ряде случаев позволяют детально исследовать переходы от одной схемы течения к другой. При этом их эффективность возрастает, когда окончательные результаты удается представить в явном виде либо свести их получение к стандартной численной процедуре.

Согласно распространенной схематизации процесса, принятой ниже, считается, что скважины расположены в однородном и изотропном пласте единичной толщины, где существует региональный поток, жидкость однородна и несжимаема, справедлив закон Дарси, фильтрация двумерна, скважины имитируются источниками и стоками.

Определение зоны захвата скважин, находящихся в региональном потоке, началось с решения задачи для случая одиночной скважины [4]. Впоследствии для анализа воздействия скважин на поток была привлечена теория функций комплексного переменного. В [5] исследовалась рециркуляция между нагнетательной и эксплуатационными скважинами, размещенными поперек направления набегающего потока. Для развития дальнейших исследований важную роль сыграла работа [6], где были определены огибающие зоны захвата в случаях двух, трех и четырех скважин в прямолинейных батареях, расположенных поперек потока. При этом варианты с прорывом течения между скважинами не рассматривались. В [2] представлено аналитическое решение задачи об определении границы зоны захвата в случае пары эксплуатационных скважин, расположенных произвольно в потоке. Прорыв потока между скважинами с разделением границы зоны захвата на две не исследовался. В [7] определены те значения безразмерного критического расхода скважины в батарее скважин (до ста), при которых происходит первый в числе возможных прорыв регионального потока между скважинами.

В [8] указан алгоритм определения первого и второго критических расходов для батареи четырех скважин, приведены их величины, построены границы – барьеры для загрязненного потока, соответствующие этим расходам. Там же и в [9] аналитически решены задачи о взаимодействии потока с одной и двумя галереями с постоянным давлением, расположенными перпендикулярно направлению потока. В [3] предложен полуаналитический метод для определения критического расхода в случае произвольно размещенных в потоке двух эксплуатационных скважин с различными расходами и подход к построению границы зоны захвата в случае произвольного числа скважин с различными расходами, на каждом этапе определения координат требующий решения трансцендентного уравнения.

Ниже при анализе взаимодействия потока со скважинами основное внимание направлено на определение безразмерных критических расходов скважин, при достижении которых происходит перестройка течения с переходом от одной его схемы к другой. Характерные линии тока построены во всем диапазоне изменения безразмерного параметра расхода.

Рассмотрены следующие задачи: для пары источников и пары стоков, произвольно расположенных в потоке, для четырех и пяти источников в прямолинейной батарее.

В соответствии с описанной выше схематизацией процесса фильтрации течение жидкости потенциально. Для его исследования вводится комплексная координата точки плоскости $Z = X + iY$ и комплексный потенциал $W(Z) = \Phi + i\Psi$. Комплексный потенциал течения, создаваемого прямолинейно-параллельным потоком со значением скорости v и расположенными в точках с координатами Z_j n источниками и стоками с расходами q_j ($j = 1, 2, \dots, n$), имеет вид

$$W(Z) = -vZ - \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{2\pi} \ln(Z - Z_j) + C.$$

Отсюда следует уравнение для определения координат точек в потоке, где значение скорости равно нулю

$$v + \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{2\pi(Z - Z_j)} = 0.$$

Эти соотношения служат основой для нахождения характерных границ областей движения жидкости и тех критических значений безразмерного расхода источников и стоков, при которых происходят прорывы потока сквозь создаваемые источниками и стоками гидродинамические барьеры.

1. Два источника в потоке

Пусть в региональном потоке в точках с координатами $x = \pm a$, $y = \pm b$ находятся источники с расходами q . Комплексный потенциал течения, создаваемого потоком и источниками, с точностью до постоянной описывается формулой

$$W(Z) = -vZ - \frac{q}{2\pi} \ln[(Z - a - ib)(Z + a + ib)]. \quad (1)$$

Далее вводятся безразмерные величины

$$z = \frac{Z}{c}, \quad w(z) = \frac{W(Z)}{c}, \quad \psi = \frac{\Psi}{vc}, \quad Q = \frac{q}{2\pi vc}, \quad c = (a^2 + b^2)^{1/2}, \quad k = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Здесь угол α характеризует расположение источников относительно направления потока. Из представления (1) следует выражение для функции тока ψ , а из условия $dw/dz = 0$ находятся координаты точек N_j , в которых скорость течения равна нулю. Линии тока, проходящие через эти точки, служат барьером для регионального потока.

При достаточно большой величине Q такую границу составляют две ветви линий тока, исходящие из точки N_2 , а точка N_1 находится в области течения от источников. При некотором критическом значении $Q = Q_0$ точка N_1 оказывается на указанной границе, причем последняя составляется из двух ветвей

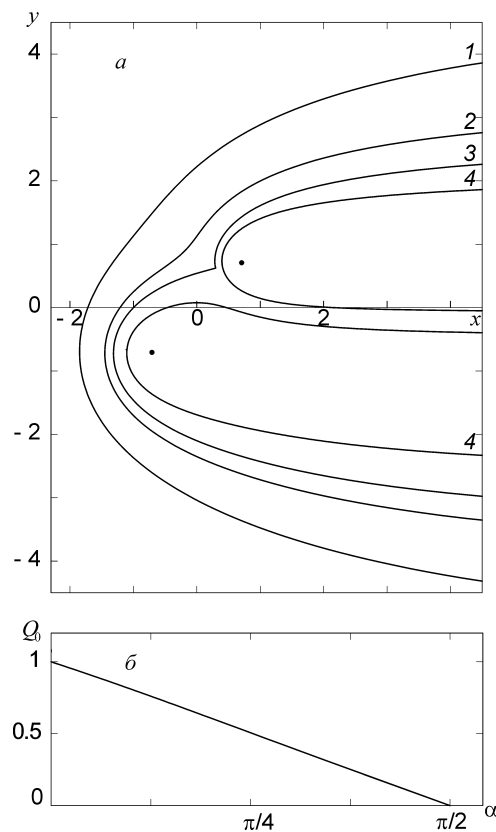


Рис. 1

линий тока, исходящих из точки N_2 , и одной ветви линии тока, исходящей из точки N_1 . При $Q < Q_0$ поток проходит между источниками, и барьер для него составляют границы течения от первого и от второго источников. При $Q = Q_0$ точки N_j находятся на одной и той же линии тока. Это условие позволяет получить уравнение для определения зависимости критического расхода Q_0 от угла α . Оно преобразовано к следующему виду

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{2y_1}{Q_0} &= \frac{2Q_0 y_1}{\cos 2\alpha - 2y_1^2}, \\ y_1 &= \frac{1}{2^{1/2}} \left\{ \left[Q_0^4 - 2Q_0^2 \cos 2\alpha + 1 \right]^{1/2} - Q_0^2 + \cos 2\alpha \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Трансцендентное уравнение (2) допускает аналитическое решение. Если ввести параметр $t = \cos 2\alpha - 2y_1^2$, это решение можно представить в виде при $0 \leq t \leq 1$

$$Q_0 = \frac{(1-t^2)^{1/4}}{[g(t)]^{1/2}}, \quad \alpha = \frac{1}{2} \arccos \left[t + \frac{(1-t^2)^{1/2}}{2} g(t) \right],$$

при $-1 \leq t \leq 0$

$$Q_0 = \frac{(1-t^2)^{1/4}}{[\pi + g(t)]^{1/2}}, \quad \alpha = \frac{1}{2} \arccos \left[t + \frac{(1-t^2)^{1/2}}{2} \{\pi + g(t)\} \right],$$

где

$$g(t) = \operatorname{arctg} \left[(1-t^2)^{1/2} t^{-1} \right].$$

На рис. 1, *а* показаны границы, служащие барьерами для потока, при различных значениях расхода Q и $\alpha = \pi/4$. На рис. 1, *б* изображена кривая зависимости $Q_0 = Q_0(\alpha)$.

2. Источник и сток в потоке

Пусть в потоке в точке с координатами $x = a$, $y = b$ находится сток с расходом q , в точке с координатами $x = -a$, $y = -b$ – источник с расходом $-q$. Комплексный потенциал соответствующего течения имеет вид

$$W(Z) = -vZ - \frac{q}{2\pi} \ln \frac{Z + a + ib}{Z - a - ib}.$$

Отсюда следует выражение для функции тока ψ и находятся координаты точек нулевой скорости N_j ($j = 1, 2$) и зависимости абсцисс линий тока, проходящих через точки N_j , от их координат.

Если величина Q достаточно велика, источник и сток гидродинамически связаны. При некотором критическом значении $Q = Q_0$ одна из ветвей границы течения от источника проходит через начало координат, и на ней находятся обе точки N_j . Если $Q < Q_0$, то струя естественного потока проходит между источником и стоком, и гидродинамическая связь между ними прерывается.

Из условия того, что при $Q = Q_0$ $\psi(x_1, y_1) = \psi(0, 0)$, из выражения для функции тока следует уравнение для определения величины $Q_0 = Q_0(\alpha)$

$$\operatorname{tg} \frac{y_1}{Q_0} = \frac{2(ky_1 - x_1)}{(x_1^2 + y_1^2 - 1)(1 + k^2)^{1/2}}. \quad (3)$$

На рис. 2, *а* показаны границы течения от источника при различных значениях параметра Q и $\alpha = \pi/4$. На рис. 2, *б* изображена зависимость $Q_0 = Q_0(\alpha)$, построенная по численному решению уравнения (3).

3. Батарея источников в потоке

Пусть в загрязненном потоке на прямой $x = 0$ симметрично прямой $y = 0$ на равных расстояниях l один от другого расположены n источников одинакового расхода q . Далее вводятся безразмерные величины $Q = q/(2\pi vl)$

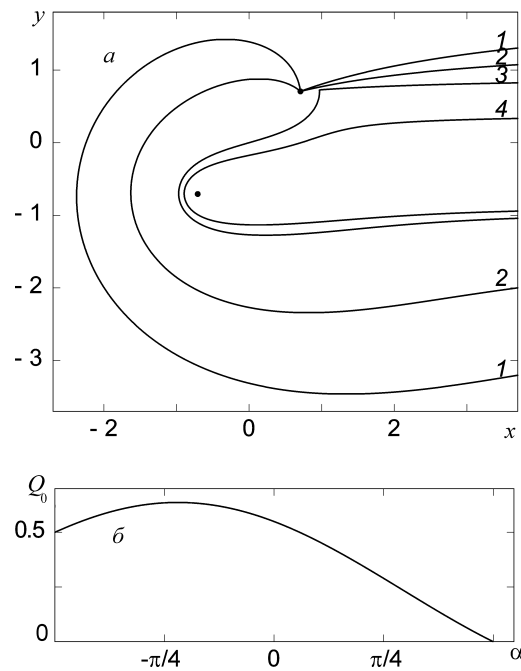


Рис. 2

и $w(z) = \varphi + i\psi = W(Z)/(vl)$, $\psi = \Psi/(vl)$, $z = Z/l$ при нечетном числе источников, $w(z) = 2W(Z)/(vl)$, $\psi = 2\Psi/(vl)$, $z = 2Z/l$ при их четном числе.

Ниже исследуются характерные случаи течения для $n=4$ и $n=5$ при заданном расходе источника Q . Этот анализ служит иллюстрацией способа определения всех возможных значений критических расходов, соответствующих прорывам потока между источниками, когда число последних в батарее произвольно.

В случае четырех источников в потоке комплексный потенциал течения и уравнение для определения координат точек нулевой скорости в безразмерных переменных приобретают вид

$$w(z) = -z - 2Q \ln \left[(z^2 + 1)(z^2 + 9) \right], \quad (4)$$

$$f(z) = z^4 + 8Qz^3 + 10z^2 + 40z + 9 = 0. \quad (5)$$

Из представления (4) находится функция тока

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= -y - 2Q \operatorname{arctg} r(x, y), \\ r(x, y) &= \frac{4xy(x^2 - y^2 + 5)}{(x^2 - y^2 + 1)(x^2 - y^2 + 9) - 4x^2y^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть Q_1 и Q_2 здесь и далее – критические значения безразмерного расхода, при которых соответственно происходят первый и второй прорывы потока между источниками. В силу симметричности течения относительно оси x ни-

же рассматривается область $y \geq 0$. Когда $Q \geq Q_1$, точки нулевой скорости течения N_1 и N_3 располагаются на оси x , а точка N_2 – в области $y > 0$, чему соответствуют два действительных и один комплексный корень уравнения (5). При $Q = Q_1$ точки N_1 и N_3 сливаются, и из уравнения (5) находится значение $Q_1 = 0.412$, отвечающее критическому расходу перед первым прорывом гидродинамического барьера Γ потоком. Уравнение границы барьера Γ при $Q \geq Q_1$ имеет вид $\psi = -8\pi Q$. Из него и формул (6) следует алгебраическое уравнение четвертой степени относительно абсциссы границы x при заданной ординате y

$$r(x, y) = -\operatorname{tg}(y/2Q), \quad (7)$$

где $0 \leq y < 8\pi Q$. При $Q_2 \leq Q < Q_1$ возникает струйка загрязненной жидкости, примыкающая к оси x , точка N_1 с координатами x_1, y_1 располагается в области $y > 0$ на границе Γ , точка N_3 – в области $y < 0$ симметрично точке N_1 , а точка N_2 с координатами x_2, y_2 – внутри области течения от источников. Координаты границы Γ при $Q_2 \leq Q < Q_1$ удовлетворяют уравнению

$$r(x, y) = -\operatorname{tg}[(y + \psi_1)/(2Q)], \quad (8)$$

где $\psi_1 = \psi(x_1, y_1, Q)$, при этом область изменения ординаты y определяется автоматически из условия существования действительных корней уравнения (8).

При $Q = Q_2$ точка N_2 , как и точка N_1 , оказывается на границе Γ , поэтому значение Q_2 удовлетворяет системе уравнений

$$f(z_2, Q_2) = 0, \quad r(x_2, y_2) = -\operatorname{tg}[(y_2 + \psi_1)/(2Q_2)].$$

Отсюда находится значение $Q_2 = 0.363$. Наконец, при $0 < Q < Q_2$ поток прорывается также между первым и вторым источником, граница Γ распадается соответственно на две линии Γ_1 и Γ_2 , служащие границами течения от первого и второго источников. При этом точка N_1 оказывается на границе Γ_1 , а точка N_2 – на границе Γ_2 . Координаты границы Γ_1 находятся из уравнения (8), координаты границы Γ_2 – из уравнения $r(x, y) = -\operatorname{tg}[(y + \psi_2)/(2Q)]$.

На рис. 3 изображены границы Γ – барьеры для загрязненного потока при значениях безразмерного расхода источника, отвечающих различным схемам течения.

Пусть теперь в потоке расположена батарея пяти источников. В этом случае основные соотношения, описывающие течение, в безразмерных величинах таковы:

$$w(z) = -z - Q \ln [z(z^2 + 1)(z^2 + 4)], \quad (9)$$

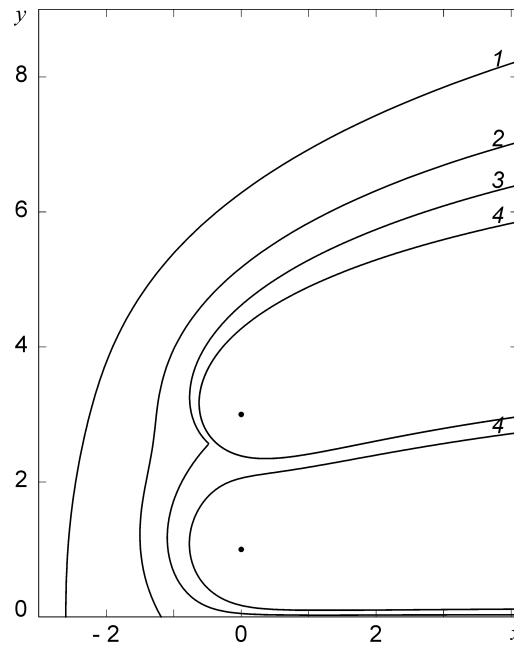


Рис. 3

$$g(z) = 1 + Q \left(\frac{1}{z} + \frac{2z}{z^2 + 1} + \frac{2z}{z^2 + 4} \right) = 0. \quad (10)$$

При $Q \geq Q_1$ в области течения $y \geq 0$ точка нулевой скорости N_1 находится на оси x , а точки N_2 и N_3 – внутри области течения от источников с границей Γ . При $Q = Q_1$ точка N_2 оказывается на границе Γ . При $Q_2 \leq Q < Q_1$ загрязненный поток прорывается между первым и вторым источниками, граница Γ распадается на две: границу Γ_1 области течения от первого источника и границу Γ_2 области течения от второго и третьего источников, причем точка N_2 принадлежит границе Γ_2 . При $Q = Q_2$ этой границе принадлежит и точка N_3 . Наконец, при $0 < Q < Q_2$ загрязненный поток прорывается также между вторым и третьим источниками, а точки N_1 , N_2 и N_3 оказываются соответственно на границах Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 областей течения от каждого источника в отдельности.

Изложенное геометрическое описание поведения характерных границ течения приводит к уравнениям этих границ и уравнениям для нахождения критических расходов Q_1 и Q_2 . Так, при $Q \geq Q_1$ уравнение линии Γ является алгебраическим пятой степени относительно абсциссы x :

$$s(x, y) = -\operatorname{tg}(y/Q),$$

$$s(x, y) = \frac{y(5x^4 + y^4 - 8x^2y^2 + 15x^2 - 5y^2 + 4)}{x(x^4 + 3y^4 - 10x^2y^2 + 5x^2 - 15y^2 + 4)}. \quad (11)$$

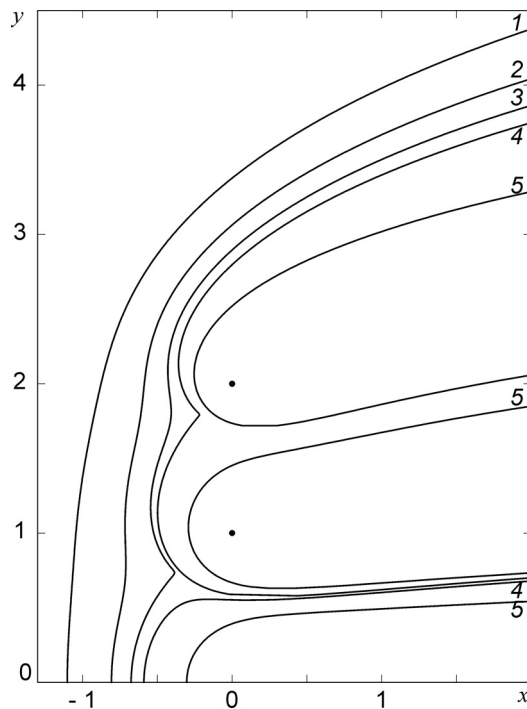


Рис. 4

При $y \geq 0$ и достаточно большом значении Q корень z_1 уравнения (10) – действительный, корни z_2 и z_3 – комплексные, причем $y_2 < y_3$. Из условия, что координаты x_2, y_2 удовлетворяют уравнению (11), находится значение $Q_1 = 0.369$.

При $Q_2 \leq Q < Q_1$ уравнение границы Γ_1 дается формулой (11), уравнение границы Γ_2 таково:

$$s(x, y) = -\operatorname{tg}[(y + \psi_2)/Q], \quad (12)$$

а критический расход Q_2 удовлетворяет системе уравнений $g(z_3, Q_2) = 0$, $s(x_3, y_3) = -\operatorname{tg}[(y_3 + \psi_2)/Q_2]$. Из последней находится значение $Q_2 = 0.352$.

При $0 < Q < Q_2$ уравнения границ Γ_1 и Γ_2 сохраняют прежний вид, а кривая Γ_3 описывается уравнением

$$s(x, y) = -\operatorname{tg}[(y + \psi_3)/Q]. \quad (13)$$

При построении искомых кривых из совокупности линий тока, на которых функция тока кратна величине πQ , выделяются необходимые, а области изменения ординаты y в уравнениях (11)–(13) определяются в процессе расчета из условия существования действительных корней уравнений.

На рис. 4 показаны границы Γ – барьеры для загрязненного потока при значениях расхода, соответствующих различным схемам течения.

Описанный выше способ определения критических расходов и расположения барьеров, создаваемых для загрязненного потока батареями четырех и пяти источников, может быть реализован аналогичным образом и при произвольном числе источников в батарее.

Заключение

Выполненное моделирование воздействия на поток загрязненных подземных вод закачкой или откачкой жидкости через скважины позволило для ряда случаев их размещения аналитически определить конфигурации границ областей течения, защищенных от потока, и найти значения критических безразмерных расходов, при которых происходят прорывы потока между скважинами. Сравнение заданных безразмерных расходов скважин с критическими отвечает на вопросы, какая из возможных схем течения при этом реализуется и будет эффективным создаваемый скважинами гидродинамический барьер для загрязнений или нет.

Summary

E.V. Skvortsov, D.T. Suyucheva. The controlling of the contaminated groundwater stream by the wells.

The interaction of the contaminated groundwater stream with the flow created by the wells has been investigated. The zones protected from the contaminations have been determined for several positions of wells in the case of the potential flow. The values of the critical well rates corresponding to the break through of contaminations between the wells have been defined.

Литература

1. *Christ J.A., Goltz M.N., Huang J.* Development and application of an analytical model to aid design and implementation of in situ remediation technologies // *J. of Contaminant Hydrology*. – 1999. – № 37. – P. 295–317.
2. *Shan C.* An analytical solution for the capture zone of two arbitrarily located wells // *J. of Hydrology*. – 1999. – No 222. – P. 123–128.
3. *Christ J.A., Goltz M.N.* Hydraulic contaminant: analytical and semi-analytical models for capture zone curve delineation // *J. of Hydrology*. – 2002. – No 262. – P. 224–244.
4. *Jacob C.E.* Flow of groundwater // *Engineering Hydraulics*, ed. Rose H. – N.-Y.: John Wiley and Sons, 1950. – P. 321–386.
5. *Dacosta J.A., Bennet R.R.* The pattern of flow in the vicinity of a recharging and discharging pair of wells in an aquifer having arial parallel flow // *Int. Association of Scientific Hydrology. IUGG General Assembly of Helsinki*. – 1960. – Publication No 52. – P. 524–536.
6. *Javandel I., Tsang C.-F.* Capture zone type curves: a tool for aquifer cleanup // *Ground Water*. – 1986. – V. 24, No 5. – P. 616–625.
7. *Erdmann J.B.* On capture width and capture zone gaps in multiple-well systems // *Ground Water*. – 2000. – V. 38, No 4. – P. 497–504.
8. *Кузьмин П.С., Скворцов Э.В.* Влияние скважин и галерей на поток подземных вод // *Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 3. Краевые задачи и их приложения*. – Казань: «Унипресс», 1999. – С. 78–84.

-
9. Кузьмин Р.С., Скворцов Э.В. Управление потоком подземных вод через галереи // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 7. Краевые задачи аэрогидромеханики и их применения. – Казань: «ДАС», 2000. – С. 196–262.

Поступила в редакцию
19.05.05

Скворцов Эдуард Викторович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой моделирования экологических систем Казанского государственного университета.

E-mail: Eduard.Scvortsov@ksu.ru

Суючева Диляра Таировна – аспирант кафедры моделирования экологических систем Казанского государственного университета.