УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 155, кн. 1 Физико-математические науки *2013*

УДК 535.14

УРАВНЕНИЕ ЛИНДБЛАДА СПОНТАННО ИЗЛУЧАЮЩЕГО АТОМНО-ФОТОННОГО КЛАСТЕРА В НЕЛАНЖЕВЕНОВСКОМ СЛУЧАЕ

А.М. Башаров

Аннотация

Получено неланжевеновское кинетическое уравнение для матрицы плотности атомно-фотонного кластера, спонтанно излучающего в вакуумном широкополосном электромагнитном поле с нулевой плотностью фотонов. Учтено штарковское взаимодействие кластера и вакуумного поля.

Ключевые слова: полиномиальная алгебра, марковское приближение, квантовое стохастическое дифференциальное уравнение, пуассоновский процесс, алгебра Хадсона – Партасарати.

Введение

В работах [1–4] введено и развито представление о локализованных в одномодовом резонаторе атомах и фотонах как едином элементарном излучателе – атомно-фотонном кластере. В условиях двухквантовых резонансов с участием классического и/или квантового внешних электромагнитных полей и фотонов микрорезонатора атомно-фотонный кластер выступает как единое целое в задачах указанного резонансного взаимодействия с внешним классическим когерентным полем, внешним квантованным (в том числе и широкополосным термостатным) электромагнитным полем, при наличии обоих типов полей. С точки зрения взаимодействия внешних полей с атомно-фотонным кластером реализуются условия одноквантового резонанса внешних полей с такого рода искусственным излучателем. При этом возможно проявление всего спектра эффектов нелинейной и квантовой оптики – радиационный распад и спонтанное излучение, сверхизлучение, оптическая нутация и все другие когерентные явления. С математической точки зрения на состояниях атомно-фотонного кластера реализуется неприводимое представление полиномиальной алгебры [5, 6] третьего порядка, и это послужило решающим обстоятельством в пользу введения понятия атомно-фотонного кластера как самостоятельного элементарного объекта, или элементарного излучателя.

При рассмотрении спонтанного излучения атомно-фотонного кластера первоначально [1–4] пренебрегалось штарковским взаимодействием атомно-фотонного кластера с внешним широкополосным квантованным электромагнитным полем (вакуумом). Между тем в [7] показано, что в ансамбле одинаковых атомов с ростом числа атомов ансамбля пропорционально числу атомов растет и штарковское взаимодействие ансамбля с вакуумным электромагнитным полем. А в работе [8] установлено, что сильное штарковское взаимодействие двухуровневой квантовой частицы с вакуумом стабилизирует квантовую частицу в возбужденном состоянии, подавляя ее спонтанный распад. В [7, 8] штарковское взаимодействие квантовых частиц с вакуумным электромагнитным полем с нулевой плотностью фотонов представлено квантовым пуассоновским процессом. В условиях штарковского взаимодействия спонтанный распад одиночной квантовой частицы и коллективный спонтанный распад ансамбля одинаковых квантовых частиц относятся к классу неланжевеновской динамики, отличительной чертой которой является наличие в стохастических дифференциальных уравнениях, описывающих такую динамику (открытой квантовой системы и окружения), пуассоновского процесса [9]. Кинетические уравнения, описывающие неланжевеновскую динамику, также принято называть неланжевеновскими уравнениями.

Настоящая статья посвящена выводу неланжевеновского кинетического уравнения для атомно-фотонного кластера, взаимодействующего с вакуумным электромагнитным полем с нулевой плотностью фотонов с учетом квантового эффекта Штарка, представлению этого уравнения в форме Линдблада и обсуждению условий, в которых штарковское взаимодействие для атомно-фотонного кластера может быть существенным.

1. Эффективный гамильтониан атомно-фотонного кластера с учетом штарковского взаимодействия с электромагнитным вакуумом

Пусть атомно-фотонный кластер, описанный в [1–3], резонансно взаимодействует с внешним широкополосным электромагнитным полем с центральной частотой ω_Γ, совпадающей с частотой ω_{Cl} квантового перехода кластера: $\omega_\Gamma \approx \omega_{Cl}$. Выражение для эффективного гамильтониана такой системы следует из [2, 3], он может быть представлен в виде

$$H = H_{Cl} + H_F + H_{Cl}^{Tr} + H_{Cl}^{St}.$$

Гамильтониан состоит из эффективного гамильтониана атомно-фотонного кластера (здесь пренебрегаем несущественным взаимодействием между атомной и фотонной подсистемами кластера)

$$H_{Cl} = \hbar\omega_{Cl} X_0,$$

гамильтониана электромагнитного поля (с обычными коммутационными соотношениями для операторов уничтожения и рождения фотонов с волновыми векторами $\mathbf{q}$ и $\mathbf{q}'$, $[b_\mathbf{q}, b_{\mathbf{q}'}^+] = \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}$ и обычным дисперсионным соотношением $\omega_q = qc$)

$$H_F = \sum_\mathbf{q} \hbar\omega_\mathbf{q} b_\mathbf{q}^+ b_\mathbf{q},$$

и операторов взаимодействия атомно-фотонного кластера с квантованным полем H_{Cl}^{Tr} и H_{Cl}^{St}:

$$H_{Cl}^{Tr} = \sum_\mathbf{q} \Gamma_\mathbf{q} b_\mathbf{q} D_{21} X_+ + H.c.,$$

$$H_{Cl}^{St} = \sum_\mathbf{q}\sum_{\mathbf{q}'} \Gamma_\mathbf{q}\Gamma_{\mathbf{q}'} b_\mathbf{q}^+ b_{\mathbf{q}'} \{\Pi_+(\omega_\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}'}) r + \Pi_-(\omega_\mathbf{q}, \omega_{\mathbf{q}'})(X_0 - (X - r)/2)\},$$

причем H_{Cl}^{Tr} описывает квантовые переходы в атомно-фотонном кластере, сопровождающиеся излучением фотонов, а H_{Cl}^{St} – штарковское взаимодействие атомно-фотонного кластера с внешним квантованным электромагнитным полем. Как отмечено в [1–3], гамильтониан атомно-фотонного кластера во внешнем электромагнитном поле (без учета штарковского взаимодействия с этим полем) получается из эффективного гамильтониана двухуровневой квантовой частицы в том же внешнем поле путем замены образующих алгебры углового момента R_-, R_+ и R_3, описывающих двухуровневую квантовую систему, на образующие X_-, X_+ и X_0 полиномиальной алгебры третьего порядка, описывающих квантовые состояния атомно-фотонного кластера и удовлетворяющих коммутационным соотношениям

$$[X_0, X_\pm] = \pm X_\pm, \quad [X_-, X_+] = p_n(X_0+1) - p_n(X_0)$$

с характеристическим полиномом

$$X_+X_- = p_n(X_0) = c_0 \prod_{i=1}^{n} (X_0 - q_i)$$

третьего порядка ($n = 3$) с параметрами

$$c_0 = -1, \quad q_1 = (r - X)/2, \quad q_2 = (X - 3r)/2, \quad q_3 = (X + r)/2 + 1.$$

Операторы

$$X = N - R_3 + r, \quad R^2 = R_+R_- + R_3^2 - R_3 = R_-R_+ + R_3^2 + R_3$$

являются операторами Казимира рассматриваемой полиномиальной алгебры (N – число фотонов микрорезонаторной моды), причем на неприводимом представлении собственные значения оператора X неотрицательны, а оператора R^3 равны $r(r+1)$. При этом считаем состояние атомной подсистемы полностью симметричным относительно перестановки атомов. Число атомов N_a атомной подсистемы атомно-фотонного кластера связано с параметром r обычным образом: $N_a = 2r$.

Заметим, что как штарковское взаимодействие между атомной и фотонной подсистемами атомно-фотонного кластера, так и штарковское взаимодействие атомно-фотонного кластера с внешним электромагнитным полем, не получаются указанной выше заменой образующих одной алгебры на образующие другой, поскольку штарковское взаимодействие в полях разной частоты есть сумма штарковских операторов в каждом поле [10]. В формировании оператора штарковского взаимодействия H_{Cl}^{St} участвует только атомная подсистема атомно-фотонного кластера, а штарковское взаимодействие между атомной и фотонной подсистемами кластера не связано с внешними полями. Тем не менее все указанные операторы выражаются через образующие полиномиальной алгебры, и атомно-фотонный кластер с учетом штарковского взаимодействия с внешними полями выступает как единый искусственный элементарный излучатель.

Другие величины, входящие в определение гамильтониана атомно-фотонного кластера и операторов его резонансного взаимодействия с внешним квантованным электромагнитным полем, связаны с основными параметрами $\Pi_{21}(\omega)$, $\Pi_1(\omega)$ и $\Pi_2(\omega)$ теории двухфотонного резонанса [10]:

$$D_{21} = -g\Pi_{21}(-\omega_c), \quad \Pi_\pm(\omega, \omega') = \frac{1}{2}(\Pi_2(\omega) + \Pi_2(\omega')) \pm \frac{1}{2}(\Pi_1(\omega) + \Pi_1(\omega')).$$

Через g обозначена константа связи атомов и микрорезонаторной фотонной моды частоты ω_c, а через $\Gamma_{\mathbf{q}}$ – параметр связи атомов с внешним широкополосным электромагнитным полем (см. [1–3]). Для трехмерного внешнего электромагнитного поля $\Gamma_{\mathbf{q}} = (2\pi\hbar qc/\ell^3)^{1/2}$, где ℓ – характерный размер объема квантования.

2. Квантовое стохастическое дифференциальное уравнение для оператора эволюции атомно-фотонного кластера

Рассмотренный в предыдущем разделе эффективный гамильтониан определяет эволюцию волновой функции $|\Psi(t)\rangle$ системы в представлении взаимодействия:

$$i\hbar\frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = (H_{Cl}^{Tr}(t) + H_{Cl}^{St}(t))|\Psi(t)\rangle, \tag{1}$$

где

$$|\Psi(t)\rangle = \exp(i(H_{Cl} + H_F)t/\hbar)|\Psi\rangle,$$
$$H_{Cl}^{Tr}(t) = \exp(i(H_{Cl} + H_F)t/\hbar)H_{Cl}^{Tr}\ \exp(-i(H_{Cl} + H_F)t/\hbar),$$
$$H_{Cl}^{St}(t) = \exp(i(H_{Cl} + H_F)t/\hbar)H_{Cl}^{St}\ \exp(-i(H_{Cl} + H_F)t/\hbar),$$

а временной аргумент различает одну и ту же величину в представлении взаимодействия от представления Шредингера.

Решение уравнения Шредингера выразим через оператор эволюции $U(t)$ (I – единичный оператор):

$$|\Psi(t)\rangle = U(t)|\Psi_0\rangle, \quad U(0) = I,$$

а уравнение для оператора эволюции запишем в безразмерном виде

$$i\frac{dU(\tau)}{d\tau} = (H_{Cl}^{Tr}(\tau) + H_{Cl}^{St}(\tau))U(\tau), \tag{2}$$

где в качестве безразмерного времени взято $\tau = \omega_{Cl}t$, а в качестве безразмерных частот – $\nu = \omega_{\mathbf{q}}/\omega_{Cl}$ и $\nu' = \omega_{\mathbf{q}'}/\omega_{Cl}$, $\omega_{Cl} \approx \omega_\Gamma$. При этом

$$H_{Cl}^{Tr}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty d\nu\, b_\nu^+ e^{i(\nu-1)\tau}\chi(\nu)X_- + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty d\nu\, b_\nu e^{-i(\nu-1)\tau}\chi(\nu)X_+,$$

$$H_{Cl}^{St}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty d\nu\, b_\nu^+ e^{i\nu\tau}\int_0^\infty d\nu'\, b_{\nu'} e^{-i\nu'\tau}\{\eta_+(\nu,\nu')r + \eta_-(\nu,\nu')(X_0 - (X-r)/2)\}.$$

Здесь произведена замена суммирования на интегрирование

$$\sum_{\mathbf{q}} \to \left(\frac{\ell\omega_\Gamma}{2\pi c}\right)^3 \int_0^\infty 4\pi\nu^2\, d\nu \int \frac{d\Omega_{\mathbf{n}}}{4\pi},$$

где волновой вектор представлен при помощи единичного вектора $\mathbf{n}$, $\mathbf{q} = \mathbf{n}\nu\omega_\Gamma/c$, а интеграл $\int\frac{d\Omega_{\mathbf{n}}}{4\pi} = \int\frac{d\Omega_{\mathbf{q}}}{4\pi}$ означает интегрирование по различным ориентациям волнового вектора. При этом

$$b_\nu = \mu\frac{\sqrt{\ell^3}}{\pi\sqrt{2}}\left(\frac{\omega_\Gamma}{c}\right)^{3/2}\nu\int\frac{d\Omega_{\mathbf{n}}}{4\pi}\, b_{\mathbf{n}\nu\omega_\Gamma/c}, \quad U(\tau) \equiv U(\tau/\omega_{Cl}),$$

$$\chi(\nu) = \frac{\sqrt{2}\omega_{Cl}D_{21}}{\mu c^{3/2}\sqrt{\hbar}}\nu, \quad \eta_\pm(\nu,\nu') = \gamma\,\frac{\Pi_\pm(\omega_{Cl}\nu, \omega_{Cl}\nu')}{d_\Gamma^2/(\hbar\omega_\Gamma)}\nu\nu', \quad \gamma = \frac{2\omega_\Gamma^2 d_\Gamma^2}{\mu^2 c^3\hbar}.$$

Введенные операторы уничтожения b_ν и рождения b_ν^+ также удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры осцилляторов $[b_\nu, b_{\nu'}^+] = \delta(\nu - \nu')$. Величина $\gamma\omega_\Gamma$ характеризует естественную ширину линии квазирезонансного атомного уровня, как если бы он спонтанно распадался одноквантовым образом на резонансный уровень атомной подсистемы атомно-фотонного кластера в рассматриваемом внешнем квантованном широкополосном электромагнитном поле (d_Γ – дипольный момент такого перехода). Поправочный коэффициент μ учитывает геометрию внешнего квантованного поля и в трехмерном случае равен $\sqrt{3}$ (поляризацией поля пренебрегаем).

Представленная форма выражения для $\eta_\pm$ удобна для оценки оптимального значения этих штарковских параметров. Известные выражения для параметров Π_1 и Π_2 [10] дают оценки $\Pi_\pm \sim d_\Gamma^2/\hbar\Delta$, где Δ – частотная отстройка от квазирезонансного уровня. Таким образом, $\eta_\pm \sim (\gamma\omega_\Gamma)/\Delta$. Обычно $(\gamma\omega_\Gamma) \ll \Delta$ чтобы не было резонанса с квазирезонансным уровнем.

Решение уравнения (2) для оператора эволюции представим через $\overleftarrow{T}$-экспоненту:

$$U(\tau) = \overleftarrow{T} \exp\left(-i\int\limits_0^\infty \left(H_{Cl}^{Tr}(\tau') + H_{Cl}^{St}(\tau')\right)\, d\tau'\right). \tag{3}$$

Начальным условием для уравнения Шредингера (1) служит факторизованное состояние атомно-фотонного кластера и внешнего электромагнитного поля $|\Psi_0\rangle = |\Psi_0^{Cl}\rangle \bigotimes |\Psi_0^F\rangle$, где $|\Psi_0^{Cl}\rangle$ – волновая функция атомно-фотонного кластера, а $|\Psi_0^F\rangle$ – волновая функция состояния электромагнитного поля, причем

$$\begin{gathered}\left\langle\Psi_0^F|b_\nu b_{\nu'}^+|\Psi_0^F\right\rangle = \delta(\nu-\nu'),\\ \left\langle\Psi_0^F|b_\nu^+ b_{\nu'}|\Psi_0^F\right\rangle = \left\langle\Psi_0^F|b_\nu b_{\nu'}|\Psi_0^F\right\rangle = \left\langle\Psi_0^F|b_\nu^+ b_{\nu'}^+|\Psi_0^F\right\rangle = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Это отвечает вакуумному широкополосному электромагнитному полю без фотонов.

Нижеследующие предположения соответствуют марковскому приближению [10, 11]:

$$b(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\nu\, e^{-i(\nu-1)\tau} b_\nu, \quad b^+(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\nu\, e^{i(\nu-1)\tau} b_\nu^+,$$

$$\chi(\nu) = \mathrm{const} = \chi(1) \equiv \chi, \quad \eta_\pm(\nu,\nu') = \mathrm{const} = \eta_\pm(1,1) \equiv \eta_\pm,$$

$$H_{Cl}^{Tr} d\tau = \chi X_+ dB(\tau) + \chi X_- dB^+(\tau), \quad H_{Cl}^{St} d\tau = (\eta_+ r + \eta_-(X_0 - (X-r)/2)) d\Lambda(\tau),$$

где

$$\begin{gathered}dB(\tau) = B(\tau + d\tau) - B(\tau), \quad dB^+(\tau) = B^+(\tau + d\tau) - B^+(\tau),\\ d\Lambda(\tau) = \Lambda(\tau + d\tau) - \Lambda(\tau),\end{gathered} \tag{5}$$

$$B(\tau) = \int\limits_0^\tau d\tau'\, b(\tau'), \quad B^+(\tau) = \int\limits_0^\tau d\tau'\, b^+(\tau'), \quad \Lambda(\tau) = \int\limits_0^\tau d\tau'\, b^+(\tau') b(\tau'), \tag{6}$$

причем

$$[b(\tau), b^+(\tau)] = \delta(\tau - \tau'), \quad [B(\tau_1), B^+(\tau_2)] = \min(\tau_1, \tau_2).$$

Интегралы в (3) следует понимать в смысле Ито [10, 11]. Дифференциалы (5) представляют собой, по сути, инкременты Ито квантовых винеровского и пуассоновского процессов (точнее, они определяют квантовые винеровский и пуассоновский процессы по формулам [9]). Инкременты $dB(\tau)$ и $d\Lambda(\tau)$ подчиняются алгебре

Хадсона – Партасарати [12]:

$$d\Lambda(\tau)d\Lambda(\tau) = d\Lambda(\tau), \quad d\Lambda(\tau)dB^+(\tau) = dB^+(\tau),$$
$$dB(\tau)d\Lambda(\tau) = dB(\tau), \quad dB(\tau)dB^+(\tau) = d\tau, \quad (7)$$

а остальные произведения инкрементов Ито (5) стохастических процессов между собой и с дифференциалом безразмерного времени $d\tau$ равны нулю.

Чтобы получить квантовое стохастическое дифференциальное уравнение (в смысле Ито) для оператора эволюции вместо уравнения (2), которое в условиях марковского приближения является неопределенным, следует рассмотреть инкремент $dU(\tau)$, определяемый как $dU(\tau) = U(\tau + d\tau) - U(\tau)$. С учетом представления (3) через $\overleftarrow{T}$-экспоненту имеем

$$dU(\tau) = \{\exp[-i(\chi X_+ dB(\tau) + \chi X_- dB^+(\tau) + $$
$$+ (\eta_+ r + \eta_-(X_0 - (X - r)/2))d\Lambda(\tau))] - 1\}U(\tau).$$

Разложение экспоненты в ряд с использование алгебры Хадсона – Партасарати (7) позволяет получить квантовое стохастическое дифференциальное уравнение для оператора эволюции системы, состоящей из атомно-фотонного кластера и внешнего квантованного электромагнитного поля, в следующем виде:

$$dU(\tau) = A_0 d\tau U(\tau) + A_+ dB(\tau)U(\tau) + A_- dB^+(\tau)U(\tau) + A_\Lambda d\Lambda(\tau)U(\tau), \quad (8)$$

где введены операторные функции

$$A_- = \frac{e^{-iX_0^{St}} - 1}{X_0^{St}}\chi X_-, \quad A_+ = \chi X_+ \frac{e^{-iX_0^{St}} - 1}{X_0^{St}},$$

$$A_0 = \chi^2 X_+ \frac{e^{-iX_0^{St}} - 1 + iX_0^{St}}{(X_0^{St})^2} X_-, \quad A_\Lambda = e^{-iX_0^{St}} - 1.$$

операторного аргумента

$$X_0^{St} = \eta_+ r + \eta_-(X_0 - (X - r)/2).$$

3. Кинетическое уравнение для матрицы плотности атомно-фотонного кластера

Уравнение для матрицы плотности рассматриваемой системы из атомно-фотонного кластера и внешнего широкополосного электромагнитного поля $\rho(\tau) = U(\tau)|\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|U^+(\tau)$ получается вычислением инкремента $d\rho(\tau) = \rho(\tau + d\tau) - \rho(\tau)$. Использование (8) и алгебры Хадсона – Партасарати (7) дает

$$d\rho(\tau) = A_0 d\tau\rho(\tau) + A_+ dB(\tau)\rho(\tau) + A_- dB^+(\tau)\rho(\tau) + A_\Lambda d\Lambda(\tau)\rho(\tau) +$$
$$+ \rho(\tau)A_0^+ d\tau + \rho(\tau)dB^+(\tau)A_+^+ + \rho(\tau)dB(\tau)A_-^+ + \rho(\tau)d\Lambda(\tau)A_\Lambda^+ +$$
$$+ A_+ dB(\tau)\rho(\tau)dB^+(\tau)A_+^+ + A_+ dB(\tau)\rho(\tau)dB(\tau)A_-^+ + A_+ dB(\tau)\rho(\tau)d\Lambda(\tau)A_\Lambda^+ +$$
$$+ A_- dB^+(\tau)\rho(\tau)dB^+(\tau)A_+^+ + A_- dB^+(\tau)\rho(\tau)dB(\tau)A_-^+ + A_- dB^+(\tau)\rho(\tau)d\Lambda(\tau)A_\Lambda^+ +$$
$$+ A_\Lambda d\Lambda(\tau)\rho(\tau)dB^+(\tau)A_+^+ + A_\Lambda d\Lambda(\tau)\rho(\tau)dB(\tau)A_-^+ + A_\Lambda d\Lambda(\tau)\rho(\tau)d\Lambda(\tau)A_\Lambda^+.$$

Отсюда матрица плотности атомно-фотонного кластера получается взятием шпура по полевым переменным $\rho^{Cl}(\tau) = Tr_F \rho(\tau)$:

$$\frac{d\rho^{Cl}}{d\tau} = \chi^2 a_-^{NL}(\eta_+, \eta_-, X_0^{St}) X_- \rho^{Cl}(\tau) X_+ a_+^{NL}(\eta_+, \eta_-, X_0^{St}) - \\ - \frac{\chi^2}{2}\{X_+\{a_0^{NL}(\eta_+, \eta_-, X_0^{St}) - i a_s^{NL}(\eta_+, \eta_-, X_0^{St})\} X_- \rho^{Cl} + \\ + \rho^{Cl} X_+ \{a_0^{NL}(\eta_+, \eta_-, X_0^{St}) + i a_s^{NL}(\eta_+, \eta_-, X_0^{St})\} X_-\}. \quad (9)$$

При выводе (9) учтено соотношение

$$Tr_F(\rho(\tau) dB(\tau)) = Tr_F(\rho(\tau) dB^+(\tau)) = Tr_F(\rho(\tau) d\Lambda(\tau))$$

и введены неланжевеновские операторы

$$a_0^{NL}(\eta_+, \eta_-, X_0^{St}) = 2\frac{1 - \cos(X_0^{St})}{(X_0^{St})^2}, \quad a_s^{NL}(\eta_+, \eta_-, X_0^{St}) = 2\frac{X_0^{St} - \sin(X_0^{St})}{(X_0^{St})^2},$$

$$a_\pm^{NL}(\eta_+, \eta_-, X_0^{St}) = \frac{\cos(X_0^{St}) - 1}{X_0^{St}} \pm \frac{\sin(X_0^{St})}{X_0^{St}},$$

удовлетворяющие тождеству $a_+^{NL}(\eta_+, \eta_-, X_0^{St}) a_-^{NL}(\eta_+, \eta_-, X_0^{St}) = a_0^{NL}(\eta_+, \eta_-, X_0^{St})$.

Уравнение (9) описывает динамику атомно-фотонного кластера во внешнем (вакуумном) широкополосном электромагнитном поле с нулевой плотностью фотонов. Из-за наличия в нем неланжевеновских операторов, отражающих учет штарковского взаимодействия атомно-фотонного кластера с внешним вакуумным полем, это уравнение назовем неланжевеновским кинетическим уравнением, поскольку штарковское взаимодействие представляется «неланжевеновским» квантовым пуассоновским процессом.

Уравнение (9) можно также записать в форме Линдблада

$$\frac{d\rho^{Cl}(\tau)}{d\tau} = \chi^2 L_- \rho^{Cl}(\tau) L_+ - \frac{\chi^2}{2}(L_+ L_- \rho^{Cl}(\tau) + \rho^{Cl}(\tau) L_+ L_-) - i[H^{NL-ST}, \rho^{Cl}(\tau)]$$

при помощи операторов

$$L_- = a_-^{NL}(\eta_+, \eta_-, X_0^{St}) X_-, \quad L_+ = X_+ a_-^{NL}(\eta_+, \eta_-, X_0^{St}),$$

$$L_+ L_- = X_+ a_0^{NL}(\eta_+, \eta_-, X_0^{St}) X_+, \quad H^{NL-ST} = -\frac{\chi^2}{2} X_+ a_s^{NL}(\eta_+, \eta_-, X_0^{St}) X_+.$$

В случае однократно возбужденного атомно-фотонного кластера $X = N = 1$ с большим числом атомов $r \gg 1$ имеем следующее представление для полиномиальной алгебры [3]:

$$X_\pm = \sqrt{2r}\mathrm{R}_\pm, \quad X_0 = \mathrm{R}_3 + r/2, \quad X_0^{St} = (\eta_+ + \eta_-) r + \eta_- \mathrm{R}_3 \approx (\eta_+ + \eta_-) r.$$

Здесь операторы $\mathrm{R}_\pm$ и R_3 реализуют двумерное представление $su(2)$-алгебры.

Из приведенных уравнений нетрудно получить, что возбужденное состояние $\rho_{ee}^{Cl}(\tau)$ однократно возбужденного атомно-фотонного кластера распадается экспоненциально

$$\rho_{ee}^{Cl}(\tau = \exp(-\chi^2 2r\gamma^{NL}\tau)$$

с неланжевеновским фактором $\gamma^{NL} = 2(1 - \cos((\eta_+ r + \eta_- r)/(\eta_+ r + \eta_- r)^2$. Этот неланжевеновский фактор равен единице при пренебрежении штарковским взаимодействием. Если число атомов атомно-фотонного кластера удовлетворяет условию $(\eta_+ + \eta_-) r = 2\pi n$, $n = 1, 2, \ldots$, то неланжевеновский фактор обращается в нуль и спонтанный распад атомно-фотонного кластера оказывается подавленным штарковским взаимодействием кластера с вакуумным электромагнитным полем. Полученный результат не зависит от учета или неучета штарковского взаимодействия между атомной и фотонной подсистемами атомно-фотонного кластера. Таким образом, однократно возбужденный атомно-фотонный кластер с большим числом атомов дает важный пример элементарного двухуровневого искусственного излучателя с неланжевеновским типом спонтанного распада [7, 8].

Автор выражает благодарность профессору В.В. Самарцеву за приглашение прочитать лекцию на XIV Международной молодежной научной школе «Когерентная оптика и оптическая спектроскопия», часть содержания которой легла в основу настоящей статьи.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-02-00199-а).

Summary

A.M. Basharov. The Lindblad Equation of a Spontaneously Radiating Atom-Photon Cluster for the Non-Langevin Case.

The non-Langevin master equation was obtained for the density matrix of an atom-photon cluster spontaneously emitted in a vacuum broadband photon-free electromagnetic field. The Stark interaction between the atom-photon cluster and the vacuum field was taken into account.

Keywords: polynomial algebra, Markovian approximation, quantum stochastic differential equation, Poisson process, Hudson – Parthasarathy algebra.

Литература

1. *Башаров А.М.* Уравнение Линдблада в образующих полиномиальной алгебры для описания излучения атомно-фотонного кластера // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2009. – Т. 151, кн. 1. – С. 33–42.
2. *Башаров А.М.* Эффективный гамильтониан атомно-фотонного кластера в резонансном когерентном поле // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2010. – Т. 152, кн. 3. – С. 43–52.
3. *Башаров А.М.* Атомно-фотонный кластер как элементарный излучатель // Журн. эксперим. и теорет. физики. – 2010. – Т. 137, Вып. 6. – С. 1090–1106.
4. *Башаров А.М.* Атомно-фотонный кластер, локализованный в микрорезонаторе // Изв. РАН. Сер. физ. – 2011. – Т. 75, № 2. – С. 176–179.
5. *Карасев В.П.* Полиномиальные деформации алгебры Ли $sl(2)$ в задачах квантовой оптики // Теорет. и матем. физика. – 1993. – Т. 95, № 1. – С. 3–19.
6. *Karassiov V.P.* G-invariant polynomial extensions of Lie algebras in quantum many-body physics // J. Phys. A: Math. Gen. – 1994. – V. 27, No 1. – P. 153–165.
7. *Башаров А.М.* Невинеровский тип спонтанного излучения // Журн. эксперим. и теорет. физики. – 2011. – Т. 140, Вып. 3. – С. 431–449.
8. *Basharov A.M.* Spontaneous emission of a quantum particle under strong Stark interaction with resonant vacuum field // Phys. Lett. A. – 2011. – V. 375, No 3. – P. 784–787.
9. *Белавкин В.П.* О генераторах квантовых стохастических эволюционных уравнений // Теорет. и матем. физика. – 1997. – Т. 110, № 1. – С. 46–60.
10. *Maimistov A.I., Basharov A.M.* Nonlinear optical waves. – Dordrecht: Kluwer Acad., 1999. – XIII + 650 p.

11. *Gardiner C.W., Zoller P.* Quantum noise. – Berlin: Springer-Verlag, 2000. – XXI + 453 p.
12. *Hudson R.L., Parthasarathy K.R.* Quantum Ito's formula and stochastic evolutions // Comm. Math. Phys. – 1984. – V. 93, No 3. – P. 301–323.

Поступила в редакцию
16.01.13

Башаров Асхат Масходович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Научно-исследовательский центр «Курчатовский институт», г. Москва, Россия.

E-mail: *basharov@gmail.com*