УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 148, кн. 3 Физико-математические науки *2006*

УДК 530.12:531.51

СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕННО ПЛОСКОЙ ВСЕЛЕННОЙ

Р.К. Мухарлямов, А.А. Попов

Аннотация

Получено решение линеаризированных уравнений Эйнштейна для сферически симметричных возмущений идеальной жидкости в пространственно плоской Вселенной. Предполагается, что жидкость описывается линейным уравнением состояния. Обсуждаются граничные условия для рассматриваемых возмущений.

Введение

Описание возмущений метрики на космологическом фоне играет важную роль в теории создания крупномасштабной структуры Вселенной. Сферически симметричные возмущения являются важным и интересным классом таких возмущений.

Сферически симметричное возмущение может быть представлено как расходящаяся и сходящаяся к центру конфигурации волны. Из геометрических соображений ясно, что амплитуда сходящейся волны увеличивается при приближении к центру гораздо быстрее по сравнению с ее ростом, связанным с гравитационной неустойчивостью. Поэтому нелинейная стадия развития сферически симметричного возмущения может наступить гораздо быстрее по сравнению с рассмотренными Лифшицом [1] возмущениями плоских волн.

Сферически симметричные возмущения в ультрарелятивистской жидкости, заполняющей однородную и изотропную Вселенную, были рассмотрены в работе [2]. В данной работе рассматриваются сферически симметричные возмущения идеальной жидкости в пространственно плоской Вселенной, причем предполагается, что жидкость описывается линейным уравнением состояния $\varepsilon = \gamma p$, где ε – плотность, p – давление жидкости и $\gamma > 0$, в отличие от случая $\gamma = 3$, рассмотренного в [2].

1. Идеальная жидкость в сферически симметричном пространстве-времени. Точные уравнения и фоновое пространство-время

В пространстве-времени, обладающем сферической симметрией, координаты могут быть выбраны так, что

$$ds^2 = -e^{\nu} d\eta^2 + e^{\lambda} dr^2 + e^{\mu} r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\varphi^2\right),$$

где ν, μ и λ – функции временной η и радиальной r координат. Тензор энергии-импульса идеальной жидкости есть

$$T^{\mu}_{\nu} = (\varepsilon + p) u^{\mu} u_{\nu} + p \delta^{\mu}_{\nu},$$

где $u^{\mu}(u^{\eta}, u^{r}, 0, 0)$ – вектор скорости жидкости. С учетом уравнения состояния

$$\varepsilon = \gamma p \tag{1}$$

нетривиальные уравнения Эйнштейна в этих координатах имеют вид $(c = G = 1)$:

$$e^{-\lambda}\left(\mu'' + \frac{3\mu'^2}{4} + \frac{3\mu'}{r} - \frac{\mu'\lambda'}{2} - \frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{e^{-\mu}}{r^2} - e^{-\nu}\left(\frac{\dot\mu^2}{4} + \frac{\dot\mu\dot\lambda}{2}\right) = \\ = -8\pi p\left[\gamma + (1+\gamma)\upsilon^2\right], \quad (2)$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\mu'^2}{4} + \frac{\mu'\nu'}{2} + \frac{\mu'+\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{e^{-\mu}}{r^2} + e^{-\nu}\left(-\ddot\mu - \frac{3\dot\mu^2}{4} + \frac{\dot\mu\dot\nu}{2}\right) = \\ = 8\pi p\left[1 + (1+\gamma)\upsilon^2\right], \quad (3)$$

$$e^{-\lambda}\left[\frac{\mu''+\nu''}{2} + \frac{\mu'^2+\nu'^2+\mu'\nu'-\mu'\lambda'-\nu'\lambda'}{4} + \frac{2\mu'+\nu'-\lambda'}{2r}\right] + e^{-\nu}\left[-\frac{(\ddot\mu+\ddot\nu)}{2} + \right. \\ \left. + \frac{\dot\nu\dot\lambda + \dot\nu\dot\mu - \dot\mu^2 - \dot\mu\dot\lambda - \dot\lambda^2}{4}\right] = 8\pi p, \quad (4)$$

$$e^{-\nu}\left[\dot\mu' + \frac{\mu'\dot\mu}{2} - \frac{(\mu'\dot\lambda + \dot\mu\nu')}{2} + \frac{\dot\mu - \dot\lambda}{r}\right] = 8\pi e^{(\lambda-\nu)/2}(1+\gamma)p\upsilon\sqrt{1+\upsilon^2}, \quad (5)$$

где $\upsilon = u^r e^{\lambda/2}$, точка и штрих означают частные производные по координате η и r соответственно.

Фоновое пространство-время пространственно плоской Вселенной можно описать метрикой вида

$$ds^2 = a^2\left\{-d\eta^2 + dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)\right\},$$

где $a(\eta)$ удовлетворяет уравнению

$$2\gamma\frac{\ddot a}{a} = (\gamma - 3)\frac{\dot a^2}{a^2}. \quad (6)$$

Невозмущенная плотность энергии ε_0, давление p_0 и радиальная скорость жидкости v_0, соответственно, равны

$$\varepsilon_0 = \frac{3\dot a^2}{8\pi a^4}, \quad \varepsilon_0 = \gamma p_0, \quad v_0 = 0.$$

2. Уравнения на возмущения

Будем рассматривать только сферически симметричные возмущения в пространственно плоской Вселенной, так что

$$\nu = \ln\left(a^2\right) + \delta\nu,\ \lambda = \ln\left(a^2\right) + \delta\lambda,\ \mu = \ln\left(a^2\right) + \delta\mu,$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon,\ p = p_0 + \delta p,$$

где $\delta\nu$, $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\varepsilon$ δp – функции координат η и r, удовлетворяющие условиям

$$|\delta\nu|, |\delta\lambda|, |\delta\mu| \ll 1,\ \delta\varepsilon \ll \varepsilon_0, \quad \delta p \ll p_0.$$

Функция $\upsilon(\eta, r)$ описывает возмущение радиальной скорости жидкости.

Отметим, что преобразование координат

$$r = \tilde{r} + \delta r, \quad \delta r \ll \tilde{r},$$

приводит к преобразованию метрических коэффициентов, а следовательно, и величин $\delta\nu$, $\delta\lambda$, $\delta\mu$

$$e^{\tilde{\lambda}} d\tilde{r}^2 = e^{\lambda} \left(\frac{dr}{d\tilde{r}}\right)^2 d\tilde{r}^2 \approx a^2 \left(1 + \delta\lambda + 2\frac{d(\delta r)}{d\tilde{r}}\right) d\tilde{r}^2 \Rightarrow \delta\tilde{\lambda} = \delta\lambda + 2\frac{d(\delta r)}{d\tilde{r}},$$

$$e^{\mu} r^2 = e^{\tilde{\mu}} \tilde{r}^2 \Rightarrow \delta\tilde{\mu} = \delta\mu + 2\frac{\delta r}{\tilde{r}}, \ \delta\tilde{\nu} = \delta\nu.$$

Выбирая $\delta r(\tilde{r})$ так, чтобы

$$\frac{d(\delta r)}{d\tilde{r}} - \frac{\delta r}{\tilde{r}} = \frac{\delta\mu - \delta\lambda}{2},$$

можно добиться равенства $\delta\tilde{\lambda} = \delta\tilde{\mu}$. Опуская волну над функциями $\delta\lambda$ и $\delta\mu$, в дальнейшем будем считать

$$\delta\lambda = \delta\mu. \tag{7}$$

Это позволяет записать метрику (с точностью до линейных по возмущениям членов) в виде

$$ds^2 = -a^2(\eta) \left\{(1 + \delta\nu)\, d\eta^2 + (1 + \delta\lambda) \left[dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta \ d\varphi^2\right)\right]\right\}, \tag{8}$$

что соответствует выбору изотропных координат.

Таким образом, четыре неизвестные функции $\delta\nu$, $\delta\lambda$, $\delta\varepsilon$, υ (мы учли, что $\delta p = \delta\varepsilon/\gamma$) удовлетворяют четырем уравнениям, следующим из (2)–(5) в линейном по возмущениям приближении

$$\delta\lambda'' + 2\frac{\delta\lambda'}{r} - 3\frac{\dot{a}}{a}\delta\dot{\lambda} + 3\frac{\dot{a}^2}{a^2}\delta\nu = -8\pi a^2 \delta\varepsilon, \tag{9}$$

$$\frac{\delta\nu' + \delta\lambda'}{r} - \delta\ddot{\lambda} - 2\frac{\dot{a}}{a}\delta\dot{\lambda} + \frac{\dot{a}}{a}\delta\dot{\nu} + \left(2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\delta\nu = 8\pi a^2 \frac{\delta\varepsilon}{\gamma}, \tag{10}$$

$$\frac{\delta\nu'' + \delta\lambda''}{2} + \frac{\delta\nu' + \delta\lambda'}{2r} - \delta\ddot{\lambda} - 2\frac{\dot{a}}{a}\delta\dot{\lambda} + \frac{\dot{a}}{a}\delta\dot{\nu} + \left(2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\delta\nu = 8\pi a^2 \frac{\delta\varepsilon}{\gamma}, \tag{11}$$

$$\delta\dot{\lambda}' - \frac{\dot{a}}{a}\delta\nu' = 8\pi\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) a^2 \varepsilon_0 \upsilon. \tag{12}$$

Отметим, что сферически симметричные возмущения, вследствие симметрии задачи, относятся к классу скалярных возмущений. Калибровочно-инвариантная амплитуда возмущения плотности энергии в обозначениях работы [3] есть

$$\epsilon_g = \delta - 3(1 + \mathrm{w})\frac{1}{\mathrm{k}}\frac{\dot{S}}{S}\left(B^{(0)} - \frac{1}{\mathrm{k}}\dot{H}_T^{(0)}\right).$$

Выбор изотропных координат (8) соответствует выбору продольной калибровки, что в обозначениях статьи [3] дает

$$B^{(0)} = H_T^{(0)} = 0.$$

Сравнивая соответствующие выражения этой работы и статьи [3], получим

$$\epsilon_g Q^{(0)} = \delta Q^{(0)} = \delta\varepsilon/\varepsilon_0.$$

Соотношения между другими величинами могут быть вычислены аналогично:

$$v_s^{(0)} Q^{(0)} = \left[v^{(0)} - \frac{1}{\mathrm{k}} \dot{H}_T^{(0)} \right] Q^{(0)} = v^{(0)} Q^{(0)} = \upsilon,$$

$$\Phi_A Q^{(0)} = \left[A + \frac{1}{\mathrm{k}} \dot{B}^{(0)} + \frac{1}{\mathrm{k}} \frac{\dot{S}}{S} B^{(0)} - \frac{1}{\mathrm{k}^2} \left(\ddot{H}_T^{(0)} + \frac{\dot{S}}{S} \dot{H}_T^{(0)} \right) \right] Q^{(0)} = A Q^{(0)} = \frac{\delta\nu}{2},$$

$$\Phi_H Q^{(0)} = \left[H_L + \frac{1}{3} H^{(0)} + \frac{1}{\mathrm{k}} \frac{\dot{S}}{S} B^{(0)} - \frac{1}{\mathrm{k}^2} \frac{\dot{S}}{S} \dot{H}_T^{(0)} \right] Q^{(0)} = H_L Q^{(0)} = \frac{\delta\lambda}{2}.$$

Таким образом, введенные в работе величины являются физически ясными, как и калибровочно-инвариантные величины $\epsilon_g Q^{(0)}$, $v_s^{(0)} Q^{(0)}$, $\Phi_A Q^{(0)}$, $\Phi_H Q^{(0)}$.

Вычитая из (10) соотношение (11), получим уравнение

$$(\delta\lambda'' + \delta\nu'') = \frac{1}{r} (\delta\lambda' + \delta\nu'),$$

решение которого имеет вид

$$\delta\lambda + \delta\nu = C_1 + C_2 r.$$

Будем искать решение, асимптотически переходящее в однородное изотропное пространство-время

$$\delta\lambda = \delta\nu = 0 \quad \text{при } r \to \infty,$$

требуя поэтому $C_1 = C_2 = 0$, и, следовательно,

$$\delta\nu = -\delta\lambda. \tag{13}$$

Считая выражения (9) и (12) определениями для $\delta\varepsilon$ и υ

$$8\pi\delta\varepsilon = 8\pi\gamma\delta p = \frac{3}{a^3} \dot{a} \left(\delta\, \dot{\lambda} + \frac{\dot{a}}{a} \delta\lambda \right) - \frac{1}{a^2} \left[\delta\lambda'' + \frac{2}{r} \delta\lambda' \right], \tag{14}$$

$$8\pi\upsilon = \frac{\gamma}{a^2(1+\gamma)\varepsilon_0} \left(\delta\, \dot{\lambda}' + \frac{\dot{a}}{a} \delta\lambda' \right), \tag{15}$$

в качестве единственного уравнения, определяющего $\delta\lambda$, возьмем следующую комбинацию выражений (9)–(11):

$$\delta\lambda'' + \frac{2}{r} \delta\lambda' = \gamma\delta\ddot{\lambda} + 3(1+\gamma) \frac{\dot{a}}{a} \delta\dot{\lambda}. \tag{16}$$

3. Частные решения

В первую очередь следует отметить, что уравнение (16) допускает решение, соответствующее ньютоновскому потенциалу [4]

$$\delta\lambda = -\delta\nu = \frac{2m}{ar},$$

создаваемому частицей, помещенной в космологическую жидкость и имеющей массу
$$m(\eta) = C_3 a + C_4 a^{-3(1+\gamma)/(2\gamma)}.$$

Если идеальная жидкость является пылью, уравнение состояния которой есть

$$p = 0,$$

что соответствует $1/\gamma = 0$, то возмущения метрики описываются уравнением

$$\delta\ddot{\lambda} + 3\frac{\dot{a}}{a}\delta\dot{\lambda} = 0$$

или, учитывая (6),
$$\frac{\partial^2(\delta\lambda)}{\partial a^2} + \frac{7}{2a}\frac{\partial(\delta\lambda)}{\partial a} = 0.$$
Это уравнение имеет следующее решение:

$$\delta\lambda = \frac{F_1(r)}{a^{5/2}} + F_2(r),$$

где $F_1(r)$ и $F_2(r)$ – произвольные функции своего аргумента.

Случай ультрарелятивистской жидкости ($\varepsilon = 3p$) был рассмотрен в работе [2]. Соответствующее решение имеет вид

$$\delta\lambda = \frac{1}{ar}\frac{\sqrt{3}\partial}{\partial\eta}\left\{\frac{1}{a}\left[\Phi_+\left(\frac{\eta}{\sqrt{3}} + r\right) + \Phi_-\left(\frac{\eta}{\sqrt{3}} - r\right)\right]\right\},$$

где $\Phi_+(x)$ и $\Phi_-(x)$ – произвольные функции.

4. Граничные условия и решение вблизи звукового горизонта

Так как скалярные возмущения, к классу которых относятся сферически симметричные возмущения, распространяются со скоростью звука, граничные условия для возмущения, заключенного в сфере «радиуса» r_0 в момент «времени» η_0, следует наложить в следующем виде

$$\delta\lambda|_{r-r_0-\tau+\tau_0=0} = \left.\frac{\partial(\delta\lambda)}{\partial r}\right|_{r-r_0-\tau+\tau_0=0} = \left.\frac{\partial(\delta\lambda)}{\partial\eta}\right|_{r-r_0-\tau+\tau_0=0} = 0, \tag{17}$$

где $\tau = \eta/\sqrt{\gamma}$.

Следуя работе [2], будем искать решение уравнения (16) в виде ряда

$$\delta\lambda(\tau, r) = \Theta(\tau - r + r_0 - \tau_0)\sum_n \lambda_n(\tau, r)(\tau - r + r_0 - \tau_0)^n, \tag{18}$$

полагая функции $\lambda_n(\tau, r)$ и их две первые производные конечными на звуковом горизонте $\tau - r + r_0 - \tau_0 = 0$. Θ-функция

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

введена в выражение (18) для обрезания возмущения вне звукового горизонта. Граничные условия (16) приводят к

$$\lambda_n(\tau, r) = 0 \quad \text{при } n \leq 1,$$

а подстановка (18) в уравнение (16) дает уравнение для $\lambda_2(\tau, r)$

$$\frac{\partial \lambda_2}{\partial \tau} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial r} + \left[\frac{\beta}{a}\frac{da}{d\tau} + \frac{1}{r}\right]\lambda_2 = 0 \qquad (19)$$

и рекуррентные соотношения для определения остальных функций $\lambda_n(\tau, r)$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\beta}{a}\frac{da}{d\tau} + \frac{1}{r}\right]\lambda_n = \frac{1}{2n}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2\beta}{a}\frac{da}{d\tau}\frac{\partial}{\partial \tau}\right]\lambda_{n-1}, \qquad (20)$$

где

$$\beta = \frac{3(1+\gamma)}{2\gamma}.$$

Первые два коэффициента разложения (18) имеют вид

$$\lambda_2 = \frac{\Psi_2}{ra^\beta},$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{ra^\beta}\left[\Psi_3 + \frac{\beta}{2\gamma}\Psi_2\int d\tau\left(\frac{da}{ad\tau}\right)^2\right],$$

где Ψ_2 и Ψ_3 – константы интегрирования. Следовательно,

$$\delta\lambda = \frac{\Theta(\tau - r + r_0 - \tau_0)}{ra^\beta}\left\{\Psi_2(\tau - r + r_0 - \tau_0)^2 + \right.$$
$$\left. + \left[\Psi_3 + \Psi_2\frac{3(1+\gamma)}{4\gamma^2}\int d\tau\left(\frac{da}{ad\tau}\right)^2\right](\tau - r + r_0 - \tau_0)^3 + \ldots\right\}. \qquad (21)$$

В частном случае

$$\gamma = 3, \quad \Psi_2 = 3C, \quad \Psi_3 = r_0 = \tau_0 = 0$$

это решение соответствует представленному в работе [5]:

$$\delta\lambda = C\frac{2\tau^2}{a^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2\tau} + \frac{r^2}{2\tau^3}\right)\Theta(t - r).$$

Заключение

В работе рассмотрены сферически симметричные возмущения в однородной и изотропной Вселенной, заполненной идеальной жидкостью. Предполагается, что уравнение состояния жидкости является линейным (1). Показано, что возмущения плотности энергии, давления, радиальной скорости жидкости (14), (15) и метрических коэффициентов (7), (13) определяются одной функцией, удовлетворяющей уравнению (16). Граничные условия (17) наложены на звуковом горизонте возмущения, заключенного в сфере «радиуса» r_0 в момент «времени» η_0. Решение представлено в виде ряда (18), для коэффициентов которого получены уравнения (19), (20). Первые два члена ряда выписаны явно в виде (21), а соответствующее им решение совпадает с ранее известным в случае, когда жидкость описывается ультрарелятивистским ($\varepsilon = 3p$) уравнением состояния.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 05-02-17344, 05-02-39023 и 06-01-00765).

Summary

R.K. Muharljamov, A.A. Popov. Spherically symmetric perturbations in a spatially flat universe.

A solution of the linearized Einstein's equations for a spherically symmetric perturbation of the ultrarelativistic fluid in the homogeneous and isotropic universe is obtained. Conditions on the boundary of the perturbation are discussed. The examples of particle-like and wave-like solutions are given.

Литература

1. *Lifschitz E.M., Khalatnikov I.M.* Investigations In relativistic cosmology // Adv. Phys. – 1963. – V. 12. – P. 185–249.
2. *Ignat'ev Yu.G., Popov A.A.* Spherically symmetric perturbation of an ultrarelativistic fluid in a homogeneous and isotropic universe // Phys. Lett. A. – 1996. – V. 220, No 1–3. – P. 22–29.
3. *Bardeen J.M.* Gauge-invariant cosmological perturbations // Phys. Rev. D. – 1980. – V. 22. – P. 1882–1905.
4. *McVittie G.C.* The mass-particle in an expanding universe // Mon. Not. R. Astron. Soc. – 1933. – V. 93. – P. 325–339.
5. *Ignat'ev Yu.G., Popov A.A.* Kinetic equations for ultrarelativistic particles in a Robertson – Walker universe and isotropization of relict radiation by gravitational interactions // Astrophysics and Space Science. – 1990. – V. 163. – P. 153–174.

Поступила в редакцию
21.09.06

Мухарлямов Руслан Камилевич – ассистент кафедры теории относительности и гравитации физического факультета Казанского государственного университета.

Попов Аркадий Александрович – доцент кафедры геометрии Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета (г. Казань), ведущий научный сотрудник кафедры теории относительности и гравитации физического факультета Казанского государственного университета.

E-mail: *apopov@kzn.ru*