УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 4 Физико-математические науки *2009*

УДК 514.76

СКАЛЯРНАЯ КРИВИЗНА КАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ СО СПЕЦИАЛЬНОЙ МЕТРИКОЙ ПОЧТИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

О.В. Сухова

Аннотация

Изучается класс римановых метрик $\widetilde{g}$ на касательном расслоении TM риманова многообразия (M, g), содержащий, в частности, метрики Сасаки и Чигера – Громола. В случае, когда (M, g) – риманово многообразие постоянной секционной кривизны k, найдены условия, при которых скалярная кривизна $\widetilde{S}$ касательного расслоения $(TM, \widetilde{g})$ является постоянной.

Ключевые слова: (структура почти произведения, касательное расслоение, риманова метрика, секционная кривизна, скалярная кривизна.)

---

1. Пусть M – гладкое n-мерное многообразие, g – риманова метрика на M, ∇ – связность Леви – Чивита, $\pi : TM \to M$ – касательное расслоение над M. Связность ∇ определяет горизонтальное распределение $H : y \in TM \to H_y \subset T_y(TM)$ и, следовательно, структуру почти произведения на TM: $T_y(TM) = H_y \oplus V_y$, где $V : y \in TM \to V_y \subset T_y(TM)$ – вертикальное распределение, касающееся слоев. Определим на TM риманову метрику $\widetilde{g}$ следующим образом. Достаточно определить значения метрики $\widetilde{g}$ от векторных полей на TM, являющихся вертикальными и горизонтальными лифтами векторных полей на базе M:

$$\widetilde{g}_y(X^h_y, Y^h_y) = g_{\pi(y)}(X_{\pi(y)}, Y_{\pi(y)}), \quad \widetilde{g}(X^h_y, Y^v_y) = \widetilde{g}(X^v_y, Y^h_y) = 0,$$

$$\widetilde{g}_y(X^v_y, Y^v_y) = \varphi(z) g_{\pi(y)}(X_{\pi(y)}, Y_{\pi(y)}) + \psi(z) g_{\pi(y)}(X, y) g_{\pi(y)}(Y, y),$$

где φ и ψ – некоторые вещественные функции аргумента $z = \dfrac{1}{2}\|y\|^2 = \dfrac{1}{2} g_{\pi(y)}(y, y)$ такие, что $\varphi(z) > 0$ и $\varphi(z) + 2z\psi(z) > 0$; X^h, Y^h и X^v, Y^v - соответственно горизонтальные и вертикальные лифты векторных полей X, Y с базы на касательное расслоение в связности ∇. Очевидно, что метрика $\widetilde{g}$ является римановой метрикой структуры почти произведения.

Далее для отличия объектов, заданных на базе, от объектов, заданных на касательном расслоении, будем использовать для последних символ «$\sim$». Будем также обозначать символом $\langle , \rangle$ метрику g или метрику $\widetilde{g}$ в зависимости от того, векторные поля базы или касательного расслоения указаны в качестве аргументов.

2. Секционная кривизна касательного расслоения TM с метрикой $\widetilde{g}$ в 2-мерном направлении, определяемом в каждой точке значениями векторных полей $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$, вычисляется по известной формуле:

$$\widetilde{K}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = \frac{\langle \widetilde{R}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})\widetilde{Y}, \widetilde{X} \rangle}{\widetilde{Q}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})}, \tag{1}$$

где $\widetilde{R}$ – тензор кривизны пространства $(TM, \widetilde{g})$, $\widetilde{Q}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = \langle \widetilde{X}, \widetilde{X}\rangle\langle \widetilde{Y}, \widetilde{Y}\rangle - \langle \widetilde{X}, \widetilde{Y}\rangle^2$ – определитель Грама.

Вычисляя связность Леви–Чивита и тензор кривизны метрики $\widetilde{g}$, из (1) находим:

$$\widetilde{K}(X^h, Y^h) = K(X,Y)^v - \frac{3\varphi}{4} \cdot \frac{\|R(X,Y)y\|^2}{Q(X,Y)^v}, \tag{2}$$

$$\widetilde{K}(X^h, Y^v) = \frac{\varphi^2}{4} \cdot \frac{\|R(y,Y)X\|^2}{\|X\|^2(\varphi\|Y\|^2 + \psi\langle Y, y\rangle^2)}, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{K}(X^v, Y^v) = {} & \frac{3\varphi'^2 - 2\varphi\varphi''}{4\varphi^2\psi} - \frac{(2\varphi'\psi - \varphi\psi')(\varphi + z\varphi')}{2\varphi^2\psi(\varphi + 2z\psi)} + \\ & + \Big(\frac{2\varphi\varphi'' - 3\varphi'^2}{4\psi} + \frac{\varphi(2\psi^2 - \varphi\psi' - z\varphi'\psi') + z\varphi'^2\psi}{2\psi(\varphi + 2z\psi)}\Big)\times \\ & \times \frac{Q(X,Y)^v}{\varphi^2 Q(X,Y)^v + \varphi\psi(\|X\|^2\langle Y,y\rangle^2 - 2\langle X,Y\rangle\langle X,y\rangle\langle Y,y\rangle + \|Y\|^2\langle X,y\rangle^2)}.\end{aligned} \tag{4}$$

3. Построим в точке $y \in TM$ ортонормированный относительно метрики $\widetilde{g}$ репер $\{\widetilde{e}_I\} = \{\widetilde{e}_i, \widetilde{e}_{i^*}\}$, состоящий из лифтов векторов репера $\left\{e_1 = \dfrac{y}{\|y\|}, e_2, \ldots, e_n\right\}$, заданного в точке $x = \pi(y) \in M$ и ортонормированного относительно метрики g. Положим

$$\widetilde{e}_i = e_i^h, \quad \widetilde{e}_{1^*} = \frac{e_1^v}{\sqrt{\varphi + 2z\psi}}, \quad \widetilde{e}_{p^*} = \frac{e_p^v}{\sqrt{\varphi}}, \quad p = 2, \ldots, n.$$

Используя полученные равенства (2)–(4), вычислим секционные кривизны $\widetilde{K}_{IJ}$ вдоль 2-мерных направлений, определяемых парами векторов репера $\{\widetilde{e}_I\}$. Имеем:

$$\widetilde{K}_{ij} = K_{ij} - \frac{3\varphi}{4}\|R(e_i, e_j)y\|^2, \quad i \neq j, \tag{5}$$

$$\widetilde{K}_{i1^*} = 0, \quad \widetilde{K}_{ip^*} = \frac{\varphi}{4}\|R(y, e_p)e_i\|^2, \tag{6}$$

$$\widetilde{K}_{1^*p^*} = -\frac{\varphi''z + \varphi'}{\varphi(\varphi + 2z\psi)} + \frac{z\varphi'^2(\varphi + z\psi) + z\varphi\psi'(\varphi + z\varphi') + \varphi^2\psi}{\varphi^2(\varphi + 2z\psi)^2}, \tag{7}$$

$$\widetilde{K}_{p^*q^*} = \frac{2\varphi\psi - 2\varphi\varphi' - z\varphi'^2}{2\varphi^2(\varphi + 2z\psi)}, \quad p \neq q, \tag{8}$$

где K_{ij} – секционная кривизна базы (M, g) вдоль 2-мерного направления, определяемого векторами e_i, e_j ортонормированного базиса $\{e_i\}$ касательного пространства T_xM. Анализируя полученные равенства (5)–(8), приходим к следующему результату:

Теорема 1. *Среди пространств $(TM, \widetilde{g})$ нет пространств постоянной ненулевой секционной кривизны.*

Скалярная кривизна $\widetilde{S}$ многообразия TM в точке $y \in TM$ может быть вычислена как сумма секционных кривизн $\widetilde{K}_{IJ}$:

$$\widetilde{S} = 2\sum_{i<j}\widetilde{K}_{ij} + \sum_{i,j^*}\widetilde{K}_{ij^*} + 2\sum_{i^*<j^*}\widetilde{K}_{i^*j^*}.$$

В соответствии с (5)–(8) находим:

$$\widetilde{S}(y) = S(\pi(y)) - \frac{3\varphi}{2}\sum_{i<j}\|R(e_i,e_j)y\|^2 + \frac{\varphi}{2}\sum_{i,p}\|R(y,e_p)e_i\|^2 +$$

$$+ 2(n-1)\Bigg\{ -\frac{\varphi'' z + \varphi'}{\varphi(\varphi+2z\psi)} + \frac{z\varphi'^2(\varphi+z\psi) + z\varphi\psi'(\varphi+z\varphi') + \varphi^2\psi}{\varphi^2(\varphi+2z\psi)^2} +$$

$$+ (n-2)\frac{2\varphi\psi - 2\varphi\varphi' - z\varphi'^2}{4\varphi^2(\varphi+2z\psi)}\Bigg\}, \quad (9)$$

где S – скалярная кривизна риманова многообразия (M,g).

4. Пусть риманово многообразие (M,g) имеет постоянную секционную кривизну k. Тогда

$$R(X,Y)Z = k(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y), \quad S = k\cdot n(n-1).$$

Вычисляя в этом случае все суммы правой части равенства (9), получаем формулу, выражающую зависимость скалярной кривизны $\widetilde{S}$ касательного расслоения с метрикой $\widetilde{g}$ от кривизны k, размерности n базы и функций φ и ψ:

$$\widetilde{S}(y) = n(n-1)k - \varphi z(n-1)\cdot k^2 +$$

$$+ 2(n-1)\{\frac{z\varphi'^2(\varphi+z\psi) + z\varphi\psi'(\varphi+z\varphi') + \varphi^2\psi}{\varphi^2(\varphi+2z\psi)^2} - \frac{\varphi'' z + \varphi'}{\varphi(\varphi+2z\psi)}\} +$$

$$+ (n-1)(n-2)\frac{2\varphi\psi - 2\varphi\varphi' - z\varphi'^2}{2\varphi^2(\varphi+2z\psi)}. \quad (10)$$

Выясним, в каком случае $\widetilde{S} = \mathrm{const}$. Из (10) следует, что для того чтобы скалярная кривизна касательного расслоения с метрикой $\widetilde{g}$ была величиной постоянной, достаточно выполнения условий:

$$\varphi(z)\cdot z = c_1, \quad (11)$$

$$\frac{z\varphi'^2(\varphi+z\psi) + z\varphi\psi'(\varphi+z\varphi') + \varphi^2\psi}{\varphi^2(\varphi+2z\psi)^2} - \frac{\varphi'' z + \varphi'}{\varphi(\varphi+2z\psi)} = c_2, \quad (12)$$

$$\frac{2\varphi\psi - 2\varphi\varphi' - z\varphi'^2}{2\varphi^2(\varphi+2z\psi)} = c_3. \quad (13)$$

где c_1, c_2, c_3 – некоторые постоянные, $c_1 \neq 0$. Из требования (11), учитывая, что $\varphi > 0$, находим: $\varphi(z) = a^2/z$, где $a = \mathrm{const} \neq 0$. Нетрудно проверить, что условия (12), (13) в этом случае также выполняются, поэтому имеет место

Теорема 2. *Если риманово многообразие (M,g) является пространством постоянной секционной кривизны k, а функции φ и ψ таковы, что $\varphi(z) = a^2/z$ $(a = \mathrm{const} \neq 0)$, $\varphi(z) + 2z\psi(z) > 0$, то касательное расслоение TM с метрикой $\widetilde{g}$ имеет постоянную скалярную кривизну*

$$\widetilde{S} = (n-1)\left(-a^2k^2 + nk + \frac{1}{2a^2}(n-2)\right).$$

5. Пусть (M,g) – риманово многообразие постоянной секционной кривизны k. Рассмотрим промежутки знакопостоянства скалярной кривизны касательного расслоения $\widetilde{S}$ для некоторых частных случаев метрик $\widetilde{g}$ исследуемого класса.

Пусть $\widetilde{g}$ – метрика Сасаки ($\varphi = 1,\ \psi = 0$) [1].

Согласно (10) скалярная кривизна $\widetilde{S}$ пространства $(TM,\widetilde{g})$ определяется равенством

$$\widetilde{S} = n(n-1)k - z(n-1)k^2.$$

Исследуя знак скалярной кривизны $\widetilde{S}$ как функции аргументов $(z,k) \in D = (0,+\infty) \times R$, приходим к следующему результату.

Если (M,g) – риманово многообразие постоянной секционной кривизны k, $\widetilde{g}$ – метрика Сасаки, то скалярная кривизна $\widetilde{S}$ касательного расслоения $(TM,\widetilde{g})$ отрицательна при $k<0$, равна нулю при $k=0$ и знакопеременна при $k>0$.

При $\varphi(z) = \psi(z) = \dfrac{1}{1+2z}$ получаем метрику Чигера–Громола. Кривизны касательного расслоения с данной метрикой исследовались в работах [2, 3]. Скалярная кривизна $\widetilde{S}$ отрицательна при $k \in (-\infty,-3]$, положительна при $k \in (n - \sqrt{n^2+2n-4}, n+\sqrt{n^2+2n-4})$ и знакопеременна в остальных случаях.

При $\varphi(z) \equiv 1$, $\psi(z) = a^2/2z$ ($a = \mathrm{const} \neq 0$) получаем метрику типа Чигера–Громола, рассмотренную в работе [4]. Доказано, что если $n=2$, то скалярная кривизна касательного расслоения $\widetilde{S}$ отрицательна при $k<0$, равна нулю при $k=0$ и знакопеременна при $k>0$. Если $n \geq 3$, то скалярная кривизна $\widetilde{S}$ положительна при $k=0$ и знакопеременна в остальных случаях.

Пусть $\varphi(z) = a^2/z$, $\psi(z) \neq c^2/z^2$, где a, c – отличные от нуля константы. В этом случае, как было показано в п. 4, касательное расслоение с метрикой $\widetilde{g}$ имеет постоянную скалярную кривизну. Из (10) находим:

$$\widetilde{S} = (n-1)\left(-a^2k^2 + nk + \frac{1}{2a^2}(n-2)\right).$$

Исследуя знак скалярной кривизны $\widetilde{S}$ как функции аргумента $k \in R$, приходим к следующему результату.

Теорема 3. *Пусть (M,g) – риманово многообразие размерности $n \geq 2$, имеющее постоянную секционную кривизну k. Если функции φ и ψ таковы, что $\varphi(z) = a^2/z$, ($a = \mathrm{const} \neq 0$), $\varphi(z) + 2z\psi(z) > 0$, то для скалярной кривизны $\widetilde{S}$ пространства $(TM,\widetilde{g})$ справедливы следующие утверждения:*

1) $\widetilde{S} > 0$ *при* $k \in \left(\dfrac{n-\sqrt{n^2+2(n-2)}}{2a^2}, \dfrac{n+\sqrt{n^2+2(n-2)}}{2a^2}\right)$;

2) $\widetilde{S} = 0$ *при* $k = \dfrac{n \pm \sqrt{n^2+2(n-2)}}{2a^2}$;

3) $\widetilde{S} < 0$ *при* $k \in \left(-\infty, \dfrac{n-\sqrt{n^2+2(n-2)}}{2a^2}\right) \bigcup \left(\dfrac{n+\sqrt{n^2+2(n-2)}}{2a^2}, +\infty\right)$.

Пусть $\varphi \equiv 1$, $\psi \equiv c$, где $c = \mathrm{const} > 0$. В этом случае, согласно (10), скалярная кривизна $\widetilde{S}$ пространства $(TM,\widetilde{g})$ определяется равенством

$$\widetilde{S} = n(n-1)k - z(n-1)k^2 + 2(n-1)\frac{c}{(1+2zc)^2} + (n-1)(n-2)\frac{c}{1+2zc}.$$

Для $n \geq 2$ исследуем знак скалярной кривизны $\widetilde{S}$ как функции аргументов $(z,k) \in D = (0,+\infty) \times R$. График уравнения $\widetilde{S}(z,k) = 0$ определяется в плоскости

(z,k) уравнением второго порядка относительно k:

$$-k^2z+kn+\frac{c(n+2nzc-4zc)}{(1+2zc)^2}=0,$$

дискриминант которого всегда положителен. Разрешая его относительно k, находим:

$$k_{1,2}=\frac{n(1+2zc)\pm\sqrt{n^2(1+2zc)^2+4zc(n+2nzc-4zc)}}{2z(1+2zc)}.$$

Анализируя поведение решений $k_1(z)$ и $k_2(z)$, заключаем, что $\widetilde{S}<0$ при $k\in(-\infty,-c]$ и знакопеременна при других значениях k. Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Пусть (M,g) – риманово многообразие постоянной секционной кривизны k, $\varphi\equiv 1$, $\psi\equiv c$, где $c=\mathrm{const}>0$. Тогда скалярная кривизна $\widetilde{S}$ касательного расслоения $(TM,\widetilde{g})$ отрицательна при $k\in(-\infty,-c]$, положительна при $k=0$ и знакопеременна в остальных случаях.*

Summary

O.V. Sukhova. The Scalar Curvature of the Tangent Bundle with Special Almost Product Metric.

We study a class of Riemannian metrics $\widetilde{g}$ on the tangent bundle TM of a Riemannian manifold (M,g) which contains, in particular, the Sasaki and the Cheeger – Gromoll metrics. In the case when (M,g) is a space of constant section curvature k, we find conditions under which the scalar curvature $\widetilde{S}$ of $(TM,\widetilde{g})$ is constant.

Key words: almost product structure, tangent bundle, Riemannian metric, sectional curvature, scalar curvature.

Литература

1. *Sasaki S.* On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds // Tohoku Math. J. – 1958. – V. 10, No 3. – P. 338–354.
2. *Sekizawa M.* Curvatures of Tangent Bundle with the Cheeger – Gromoll Metric // Tokyo J. Math. – 1991. – V. 14, No 2. – P. 407–417.
3. *Gudmundsson S., Kappos E.* On the geometry of the Tangent Bundle with the Cheeger – Gromoll Metric // Tokyo J. Math. – 2002. – V.25, No 1. – P. 75-83.
4. *Ширяев К.Б.* Связность и кривизна метрики типа Чигера – Громола на касательном расслоении гладкого многообразия // Движения в обобщенных пространствах: межвуз. сб. науч. тр. – Пенза: Пенз. гос. пед. ун-т, 2000. – С. 182–186.

Поступила в редакцию
28.08.09

Сухова Ольга Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии Пензенского государственного педагогического университета имени В.Г. Белинского.

E-mail: *Suhova_o@list.ru*