Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Направление: 010301 – математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(бакалаврская работа)

Квадратурные формулы для вычисления дробных интегралов

Работа завершена:

“___”__________ 2015 г ____________________(Д.И.Мухаметзянов)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель

кандидат физ.-мат. наук,

доцент

“___”__________ 2015 г. ____________________(А.Ф Галимянов)

Заведующий кафедрой

доктор физико-математических наук, профессор

“___”__________ 2015 г ____________________(А.М.Елизаров)

Казань-2015

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В дипломной работе рассматривается приближенное вычисление дробных интегралов. Дробные интегралы возникли как обобщение обычных интегралов. Они нашли применение в физике и механике.

В работе рассматриваются приближенное вычисление дробных интегралов Вейля (для периодических функций) и Римана-Лиувилля (для непериодических функций).

Для их приближенного вычисления построены квадратурные формулы, принцип построения которых изложен в книгах Габдулхаева Б. Г. [2] и И. С. Березина, Жидкова Н.П. [5]. Получены эффективные оценки погрешности, зависящие от структурных свойств под интегральной функции.

1.ИНТЕГРАЛ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

1.1.Определение интеграла Римана-Лиувилля. Свойства

Пусть φ(x)єL_1(a,в)

Интегралы

$$(I_{a+}^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, x > a \quad (1.1)$$

$$(I_{b-}^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt, \qquad x < b, \alpha > 0 \ (1.2)$$

Называют интегралами дробного порядка α. Первый из них называют левосторонним, а второй – правосторонним интегралом. Операторы называют операторами дробного интегрирования.

Итак, интегралы (1.1)-(1.2) называют интегралами Римана-Лиувилля. Дробные интегралы (1.1)-(1.2) определены для функций φ(x)єL(a,в), существую почти всюду.

Между операторами I_{a+}^{α} и I_{b-}^{α} существует следующая связь

$$\mathrm{Q}\, I_{a+}^{\alpha} = Q\, I_{b-}^{\alpha} \quad (1.3)$$

$$Q\, I_{b-}^{\alpha} = \mathrm{Q}\, I_{a+}^{\alpha}$$

Где Q-оператор «отражения»

$$(\mathrm{Q}\varphi)(x)= \varphi(a+b-x)$$

Справедлива формула

$$\int_a^b \varphi(x)(I_{a+}^{\alpha}\psi)\,(x)dx = \int_a^b \psi(x)\,(\,I_{b-}^{\alpha}\varphi)(x)dx \quad (1.4)$$

Называемая иногда формулой дробного интегрирования по частям. Формула (1.4)справедлива, если $\varphi(x)\epsilon Lp$, φ(x) є Lq, 1/p+1/q$\ll 1+\alpha,\ p \gg 1$, $q \gg 1$ но p$\neq 1, q \neq 1$ в случае 1/p+1/q $= 1+\alpha$

Дробное интегрирование обладает свойством

$$I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}\varphi = I_{a+}^{\alpha+\beta}\varphi \ \ \alpha > 0$$

$$I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} \varphi = I_{b-}^{\alpha+b} \varphi \;\; \beta > 0 \qquad (1.5)$$

Тожества 1.5 выполняются в каждой точке, если , и почти всюду, если $\varphi(t)\epsilon C([a,b])$ и почти всюду, если $\varphi(t)\epsilon L([a,b])$

Свойство (1.5)называются полугрупповым свойством дробного интегрирования.

1.2 Определение интеграла Вейля, его свойства

Пусть *φ(x)* есть 2π- периодическая функция на R^1 и пусть

$$\varphi(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k \; e^{ikx} \; (1.6)$$

Где $\varphi^k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} \varphi(x)dx$- ее ряд Фурье.

Будем считать, что функция φ(x) имеет нулевое среднее значение по периоду:

$$2\pi\varphi_0 = \int_0^{2\pi} \varphi(x)dx = 0 \;\; (1.7)$$

т.е. мы «отсеиваем» постоянные, рассматривая дробные интегралы периодических функций. Так как

$$\varphi^{(n)}(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^n \varphi_k \; e^{ikx} \; (1.8)$$

то определяем, следую Вейлю, дробное интегрирование так, чтобы

$$I_{\pm}^{(\alpha)}(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\pm ik)^{\alpha} \varphi_k \; e^{ikx} \quad (1.9)$$

Свертка

$$(\mathrm{A}\varphi)(\mathrm{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(t)\varphi(x-t)dx \quad (1.10)$$

двух периодических функций имеет своим рядом Фурье сумму: $(A\varphi)(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, \varphi_k e^{ikx}$ (1.10′).

Согласно этому определение (1.9) можно истолковать в виде:

$$I_{\pm}^{(\alpha)}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \varphi(x-t)\psi_{\pm}^{\alpha}(t)dt, \alpha > 0 \quad (1.11)$$

$$\psi_{\pm}^{\alpha}(\mathrm{t}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{\pm ik^{\alpha}} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(2t \pm \frac{\alpha\pi}{2}\right)}{k^{\alpha}} \quad (1.12)$$

(штрих означает, что слагаемое с номером κ=0 пропускается)

Конструкцию (1.12) будем называть дробным интегралом Вейля порядка λ.

Известно, что ряд (1.12) сходится при α >0 для всех $t\epsilon[0,2\pi]$

При целых α = 1,2,3 функция

$$\psi_{\pm}^{\alpha}(\mathrm{t}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(\pm ik)^{\alpha}} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(2t \pm \frac{\alpha\pi}{2}\right)}{k^{\alpha}} \quad (1.12)$$

может быть записана в виде:

$$\psi_{\pm}^{\alpha}(t) = -\left(\frac{\pm 2\pi}{m!}\right)^{m} B_m\left(\frac{t}{2\pi}\right) \quad (1.13)$$

где B_m многочлен Бернулли.

Из (1.9) ясно, что

$$I_{\pm}^{\alpha} I_{\pm}^{\beta} \varphi = I_{\pm}^{(\alpha+\beta)} \varphi \quad (1.14)$$

при одинаковом выборе знаков.

Заметим, что случаи целых $\alpha = 1,2 \ldots$ соответствует обычному интегрированию (при котором из всех первообразных выбирается та, у которой среднее значение по периоду равно 0: это позволяет сохранить периодичность при интегрировании) поскольку ряд Фурье допускает почленное интегрирование. Поэтому в дальнейшем достаточно исследовать случай 0<α<1.

Для функции $\psi_+^\alpha(t)$

известно следующее представление (заметим, что $\psi_+^\alpha = \psi_-^\alpha$):

Лемма 1:

функция ψ_+^α имеет при 0< α<1 вид

$$\psi_+^\alpha(t) = \frac{2\pi}{\Gamma(\alpha)} t_+^{\alpha-1} + r_\alpha(t),\ -2\pi<t<2\pi \quad (1.15)$$

где функция

$$r_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{n\to\infty} \left[2\pi \sum_{m=1}^{n} (t + 2\pi m)^{\alpha-1} - \frac{(2\pi m)^\alpha}{\alpha} \right] \quad (1.16)$$

дифференцируема при t ϵ(-2π,2π).

Следствие:

Функция $\psi_+^\alpha(t)$ и их производные допускают при $|t| \ll \pi$ оценку

$$\left| \frac{d^j}{dt^j} \psi_+^\alpha(t) \right| \le C|t|^{\alpha-1-j},\ j=0,1,2.. \quad (1.17)$$

В силу леммы 1 и следствия из нее определение дробного интеграла Вейля равенством (1.11) корректно в том смысле, что оно применимо к любой интегрируемой функции, интеграл существует почти всюду и дает так же интегрируемую функцию.

Ввиду (1.15) получаем

$$I_+^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_\alpha(x-t)\varphi(t),\ 0<x\le 2\pi \quad (1.19)$$

Здесь второе слагаемое бесконечно дифференцируемо при 0< x< 2π.

2 КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ.

2.1Квадратурные формулы для интегралов Римана-Лиувилля.

Рассмотрим интегралы Римана-Лиувилля (1.1.), (1.2)

I. Будем аппроксимировать функцию *φ(t)* сплайном I степени $S_n^1(\varphi, t)$**.** Берем отрезок *[a, в] a, bЄR* и введем сетку узлов В

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \dots x_0 < x_n = b \ (2.1)$$

$$||\Delta|| = \max_{1 \le x \le n} |x_k - x_{k-1}|$$

Возьмем произвольные натуральные числа *n, к.* Обозначим через

$$S_n^1(\varphi, t) = S_n^1(x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi(x_k)\, \varphi_k^1(t) \quad t, x \in [a, b] \ (2.2)$$

интерполяционный сплайн I степени.

Здесь $\varphi_k^1(k)$ – соответствующий фундаментальный сплайн I степени.

$$\varphi_k^1(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < x_{k-1} \\ \dfrac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \text{ при } x_{k-1} \le t \le x_k \\ \dfrac{x_{kn} - x}{x_{kn} - x_k} \text{ при } x_{k-1} \le t \le x_k \\ 0 \text{ при } t < x_{k+1} \end{cases} \qquad (2.3)$$

Тогда ясно, что аппроксимация функции *φ(t)* сплайном (2.2) приводит *к* квадратурной формулы вида

$$I_{a+}^{\propto}\varphi \approx \sum_{n=1}^{n} \varphi(x_k)\, A_k(x) \ \ (2.4), \text{где}$$

$$A_k(x) = \frac{1}{\Gamma(\propto)} \int_a^x \frac{\varphi_k^1(t)dt}{(x - t^{1-\alpha})} \ (2.5)$$

Коэффициенты $A_к$ посчитаем в явном виде. Берем равноотстоящие узлы

$$x_k = a + \frac{x-a}{n}k, k = \overline{0,n}$$

Тогда

$$A_k(x) = \frac{1}{\Gamma(\propto)}\int_a^x \frac{\varphi_k^1(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha})}dt = \int_{x_{k-1}}^{x_k} + \int_{x_k}^{x_{k+1}} = (J_1 + J_2)\frac{1}{\Gamma(\propto)}$$

$$J_1 = \int_{x_{k-1}}^{k} \frac{t - x_{k-1}dt}{(x_k - x_{k+1})(x-t)^{1-\propto}} \ (2.5)$$

$$J_2 = \int_{x_k}^{k+1} \frac{x_{k-1} - t \quad dt}{(x_{k+1} - x_k)(x-t)^{1-\propto}}$$

Обозначим

$$\frac{x-a}{n} = h$$

$$J_1 = \int_{x_{k-1}}^{k} \frac{t - x + x - x_{k-1} \quad dt}{h(x-t)^{1-\propto}} = \frac{1}{h}\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{t-x}{(x-t)^{1-\propto}}dt + (\frac{x - x_{k-1}}{h})$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x-t)^{\alpha-1}\,dt = -\frac{1}{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x-t)^{\alpha}\,dt + \frac{x - x_{k-1}}{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x-t)^{\alpha-1}\,dt =$$

$$\frac{x - x_{k-1}}{\alpha n}[(x - x_{k-1})^{\alpha} - (x - x_k)^{\alpha}] + \frac{1}{(\alpha+1)h}[(x - x_k)^{\alpha+1} - (x - x_{k-1})^{\alpha+1}]$$

$J_2 = \int_{x_k}^{k+1} \frac{x_{k-1} - x + x + t}{(x-t)^{1-\propto}}\ dt = \frac{x_{k-1} - x}{h} \quad \int_{x_k}^{k+1} (x-t)^{1-\propto}\,dt + \frac{1}{h}\int_{x_k}^{x_k+1} (x - t)^{\alpha}dt = \frac{x_{k-1}-x}{h\alpha}[(x - x_k)^{\alpha} - (x - x_{k+1})^{\alpha}] + \frac{1}{(\alpha+1)h}[(x - x_k)^{\alpha+1} - (x - x_{k+1})^{\alpha+1}]$

$$A_k(x) = \frac{1}{\Gamma(\propto)}[\frac{1}{\alpha h}(x - x_{k+1})^{\alpha+1} + (x - x_{k-1})^{\alpha+1} - 2(x - x_k)^{\alpha+1}$$

$$+ \frac{1}{(\alpha+1)h}\Big[(x - x_{k+1})^{\alpha+1} - (x - x_{k-1})^{\alpha+1} - 2(x - x_k)^{\alpha+1}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\alpha(\alpha+1)h}((x - x_{k+1})^{\alpha+1} - (x - x_{k-1})^{\alpha+1}$$

$$- 2(x - x_k)^{\alpha+1})\Big] \quad (2{,}5")$$

Итак, квадратурная формула (2.4) примет вид:

$$I_{a+}^{\propto}\varphi \approx \frac{1}{\Gamma(\alpha)\alpha(\alpha+1)h}\left[\sum_{л=1}^{n-1}\varphi(x_k)\,(x - x_{k+1})^{\alpha+1} - (x - x_{k-1})^{\alpha+1}\right.$$

$$- 2(x - x_k)^{\alpha+1} + \varphi(x)(x - x_{n+1})^{\alpha+1} - \varphi(a)(x - x_1)^{\alpha+1}$$

$$\left. - (x-a)^{\alpha+1} + h(\alpha+1)(x-a)^{\alpha}\right] \quad (2.4)$$

II. функцию *φ(t)* будем приближать интерполяционным номиналом *n*-го порядка.

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \approx L(\varphi) \quad (2.6)$$

где

$$L(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} p_k\,\varphi(x_k)$$

Узлы интерполирования a=$x_0 < x_1$<$x_2 \ldots < x_n$=*x, а* p_k= $\int_a^x \frac{l_n^k(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$,

где $l_n^k(t)$ – полином *n*-ой степени,

$$l_n^k(t) = \frac{L_n(t)}{\varphi(x_k)}$$

$\varphi(t)$= $L_n(t) + R_n(t)$*, где* $R_n(t)$ – погрешность интерполяции.

Таким образом, получилось формула для приближенного вычисления данного интеграла:

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = \sum_{k=0}^{n} \varphi(t_k) \int_a^x \frac{l_n^k(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt + \int_a^x \frac{R_n^k(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad (2.7)$$

Рассмотрим 2 способа задания интерполяционного полинома $L_n(t)$ **:**

1) $L_n(t)$ – интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$L_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \varphi(x_k) l_n^k(t)$$

$$l_n^k(t) = \frac{(t-x_0)(t-x_1)\ldots(t-x_{k-1})(t-x_{k+1})\ldots(t-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$$

Рассмотрим 2 частных случая:

I) Узлов интерполирования только 2: $x_0 = a_1$ $\quad x_1 = x$ $\int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \approx$ $\varphi(a) \int_a^x \frac{(t-x)dt}{(a-x)(x-t)^{1-\alpha}} + \varphi(x) \int_a^x \frac{(t-a)dt}{(x-a)(x-t)^{1-\alpha}} = \frac{(x-a)^{\alpha}}{\alpha^{\alpha+1}} (\alpha\varphi(a) + \varphi(x))$

На практике применяется большая квадратурная формула, так как малая квадратурная формула (2.9) дает очень большую погрешность. Для этого берут равноотстоящие узлы. Делят отрезок *[a, x]* на *n+1* равных частей и каждому отрезку (малому) применяют малую квадратурную формулу. Эта формула совпадает со сплошной квадратурной формулой (2.4.)

II) Узлов интерполирования -3. $\mathrm{x}_0 = \mathrm{a}, x_1 = \frac{a+x}{2}, \mathrm{x}_0 = \mathrm{x}$

Получаем аналог квадратурной формулы трапеций:

$$\int_a^x (x-a)^{\alpha-1} \varphi(t)dt \approx$$

$$\frac{\varphi(a)}{(a-x)\left(a-\frac{a+x}{2}\right)} \int_a^x \frac{(t-x)\left(t-\frac{a+x}{2}\right)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt +$$

$$\frac{\varphi(\frac{a+x}{2})}{(\frac{a+x}{2}-x)(\frac{a+x}{2}-a)} \int_a^x \frac{(t-a)(t-x)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt + \frac{\varphi(x)}{(x-a)(x-\frac{a+x}{2})} \int_a^x \frac{(t-a)\left(t-\frac{a+x}{2}\right)}{(x-t)^{1-\alpha}} = \frac{-2\varphi(a)}{(x-a)^2} \int_a^x (t - x +$$

$$\frac{x-a}{2})(x-t)^{\alpha}\,dt+\frac{4\varphi(\frac{a+x}{2})}{(x-a)^2}\int_a^x(t-a)(x-a)^{\alpha-1}\,dt=\frac{2\varphi(x)}{(x-a)^2}\int_a^x\frac{(t-a)\left(t-\frac{a+x}{2}\right)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt=$$

$$\varphi(a)\frac{\alpha(x-a)^{\alpha}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}+\frac{4\varphi(\frac{a+x}{2})}{(\alpha+1)(\alpha+2)}(x-a)^{\alpha}+\frac{\varphi(x)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}(1-\alpha)(x-a)^{\alpha+1} \quad (2.10)$$

2.2 Квадратурная формула для вычисления интеграла Вейля

Возьмем произвольные числа *N (N = 1,2…), n (n=0,1, …)* и *r (r=0,1…)* и рассмотрим равноотстоящие узлы

$$s_k = s_k^{(N)} = \frac{2k\pi}{N}, k = \overline{1,N}, N = 1,2 \dots \quad (2.13)$$

и некоторую треугольную матрицу чисел

$$\lambda_{m,r}^{(n)}, m = \overline{1,n}\,, \lambda_{0,r}^{(n)} = 1, n = 1,2 \dots, r = 0,1 \dots \quad (2.14)$$

зависящих от параметром r и n.

Каждой функции $x(s)\epsilon C_{2\pi}$ поставим в соответствие тригонометрический полином вида

$$L_{n,r}^{(N)}(s) = L_{n,r}^{(N)}(x,s) =$$

$$= \frac{a_0^{(N)}}{2} + \sum_{m=1}^{n} \lambda_{m,r}^{(n)} * \left(a_m^{(N)} \cos mx + b_m^{(N)} \sin ms\right) \text{ где } (2.15)$$

$$a_m^{(N)} = \frac{2}{N} \sum_{m=1}^{n} x(S_k^{(N)})\, cos\, mS_k^N, m = \overline{0,n}$$

$$b_m^{(N)} = \frac{2}{N} \sum_{m=1}^{n} x(S_k^{(N)})\, sin\, mS_k^N, m = \overline{1,n} \quad (2.16)$$

Теперь интегралу

$$I\varphi = I(\varphi,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x-t)\,\psi_I^{\propto}(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,\psi_I^{\propto}(x-t)dt, \propto > 0$$

$$\psi_I^{\propto}(x-t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} cos\,\frac{k(x-t) \pm 2\pi\alpha}{k^{\alpha}},$$

поставим в соответствие интеграл

$$L_{n,r}^{(N)}(x) = IL_{n,r}^{(N)}(x,t) \quad (2.17)$$

Тогда получаем следующую квадратурную формулу:

$$I(x,S) \approx I_{n,r}^{(N)}(x,S)$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \lambda_{m,r}^{(n)}$$

$$* m^{-\propto} \left(a_m^{(N)} \cos m(S-\delta) \frac{-\alpha\pi}{2} + b_m^{(N)} \sin m(S-\delta) \frac{-\alpha\pi}{2} \right)$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \lambda_{m,r}^{(n)} * m^{-\propto} * \left(\frac{2}{N} \sum_{m=1}^{n} x(S_k^{(N)}) \cos mS_k^N * \cos m(S-\delta) \frac{-\alpha\pi}{2} \right)$$

$$+ \left(\frac{2}{N} \sum_{m=1}^{n} x(S_k^{(N)}) \sin mS_k^N * \sin m(S-\delta) \frac{-\alpha\pi}{2} \right)$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \lambda_{m,r}^{(n)} * m^{-\propto} * \left(\frac{2}{N} \sum_{m=1}^{n} x(S_k^{(N)}) \cos mS_k^N * \cos m(S-\delta) \frac{-\alpha\pi}{2} \right)$$

$$+ \sin mS_k^N * \cos m(S-\delta) \frac{-\alpha\pi}{2} =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \lambda_{m,r}^{(n)} * m^{-\propto} * \left(\frac{2}{N} \sum_{m=1}^{n} x(S_k^{(N)}) \cos(mS_k^N + S - \delta) + \frac{\alpha\pi}{2} \right)$$

$$+ \left(\frac{2}{N} \sum_{m=1}^{n} x(S_k^{(N)}) \cos(mS_k^N + S - \delta) + \frac{\alpha\pi}{2} \right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \psi_{k,N}^{(\propto)}(S) \quad (2.18)$$

$$\psi_{k,N}^{(\propto)}(S) = \frac{2}{N} \sum_{m=1}^{n} \lambda_{m,r}^{(n)} \frac{\cos(mS_k^N + S - \delta) + \frac{\alpha\pi}{2}}{m_{\propto}}$$

$$\psi_{k,N}^{(\propto)}(S) = \varphi_{k,r,n}(S) \ (2.19)$$

Параметры *N, n u* матрицу $\lambda_{m,r}^{(N)}$ будем выбирать (в зависимости от *r u x)*, исходя из способа задания информации о функции *x(s)*, но так, чтобы полином $L_{n,r}^{(N)}(S)$ (тем самым и интеграл $I(L_{n,r}^{(N)}; S)$ в определенном смысле хорошо аппроксимировал бы функцию *x(s)* (тем самым и интеграл *I (x,s))*

Укажем некоторые частные случаи квадратурной формулы (2.18) - (2.19)

1) Пусть $N = \infty$ и $\lambda_{m,r}^{(N)} = 1$ $(m = \overline{1,n})$

Тогда из (2.18) (2.19) следует квадратурная формула

$$J(x,S) \approx \sum_{k=1}^{n} k^{-\propto} \left[a_k \cos\left(ks - \frac{\propto \pi}{2}\right) + b_k\, sin\left(ks - \frac{\propto \pi}{2}\right)\right]$$

получаемая путем аппроксимации плотностей *x(s)* *n-м* отрезком ряда Фурье

$$J_n\, x = J_n(x,S) \approx \frac{a_0}{2} \sum_{k=1}^{n} k^{-\propto} [a_k\, cos(ks) + b_k\, sin(ks)] \quad (2.20)$$

$$N = 2n+1, \text{где } \ a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(s) \cos(ks)\, ds \quad (2.21) \text{ т. е}$$

$$J(\sin ks) = k^{-\propto}\, sin\left(ks - \frac{\propto \pi}{2}\right)$$

$$J(\cos ks) = k^{-\propto}\, cos\left(ks - \frac{\propto \pi}{2}\right)$$

$$J(1) = 0$$

$$J(x,S) \approx J\big(S_n(x,S)\big) = J\left(\frac{a_0}{2}\right) + \sum_{k=1}^{n} [a_k\, J cos(ks) + b_k\, sin\, J(ks)]$$

$$= 0 + \sum_{k=1}^{n} k^{-\propto} \left[a_k\, cos\left(ks - \frac{\propto \pi}{2}\right) + b_k\, sin\left(ks - \frac{\propto \pi}{2}\right)\right]$$

2) Пусть

$$N = \infty, \lambda_{k,r}^{(n)} = \cos\frac{k\pi}{2n+1} \quad k = \overline{1,n}$$

Тогда из (2.18) (2.19) следует квадратурная формула

$$J(x,S) \approx \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi}{2n+1}\left[a_k\,cos\left(ks-\frac{\propto\pi}{2}\right)+b_k\,sin\left(ks-\frac{\propto\pi}{2}\right)\right]$$

основанная на аппроксимации плотности *x(s)* суммами Бернштейна-Рогозинского порядка *n*.

3)Пусть

$$N=\infty, \lambda_{k,r}^{(n)}=1-\frac{k}{n+1}\quad k=\overline{1,n}$$

Тогда справедлива квадратурная формула

$$J(x,S) \approx \sum_{k=1}^{n} 1-\frac{k}{n+1}\left[a_k\,cos\left(ks-\frac{\propto\pi}{2}\right)+b_k\,sin\left(ks-\frac{\propto\pi}{2}\right)\right] \quad (2.23)$$

основанная на аппроксимации *x(s)* суммами Фейера порядка *n*.

4)Пусть

$$N=\infty, \lambda_{k,r}^{(n)}=\frac{k\pi}{2n+2}ctg\frac{k}{2n+2}\quad k=\overline{1,n}$$

Тогда из (2.18)- (2.19) следует квадратурная формула

$$J(x,S) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{k^{-\alpha}\pi}{2n+2}\;ctg\frac{k}{2n+2}\left[a_k\,cos\left(ks-\frac{\propto\pi}{2}\right)\right.$$
$$\left.+\,b_k\,sin\left(ks-\frac{\propto\pi}{2}\right)\right] \quad (2.24)$$

основанная на аппроксимации *x(s)* суммами Фавара порядка *n*.

5) В общем случае $N=\infty$

$$x(S)=\frac{\lambda_0 a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k[a_k\,cos(ks)+b_k\,sin(ks)]$$

$$J(x) \approx \sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{k^{\propto}}\left[a_k\,cos\left(ks-\frac{\propto\pi}{2}\right)+b_k\,sin\left(ks-\frac{\propto\pi}{2}\right)\right] =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{k^{\propto}} \int_0^{2\pi} x(S) cos(ks) ds + b_k\, sin\left(ks - \frac{\propto \pi}{2}\right) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(S) \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{k^{\propto}} \Big(cos\left(kt - \frac{\propto \pi}{2}\right) \cos ks + sin\left(kt - \frac{\propto \pi}{2}\right) sin\, ks \Big)\, ds$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(S) \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{k^{\propto}} \left[cos\left(k(t-s) - \frac{\propto \pi}{2}\right)\right] ds \quad (2.25)$$

3 ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

3.1 Оценка погрешности квадратурных формул для вычисления интеграла Римана-Лиувилля

Пусть даны интегралы Римана-Лиувилля $I_a^{\propto}, I_b^{\propto}$ и некоторая сплайновая квадратурная формула для вычисления

$$I_n(x) = I_n(x; t) = I(S_n^1\, x; t) \qquad (3.1)$$

Тогда для погрешности квадратурной формулы (3.1) справедлива следующая оценка

$$|R_n(\varphi, x)| \leq \|I_a^{\propto}\| \omega\left(\varphi, \frac{b-a}{n}\right) \leq \frac{\mu(b-a)^{\propto+\beta}}{n^{\beta} * \alpha|\Gamma(\alpha)|} * \|\varphi\| \qquad (3.2)$$

Доказательство:

$$\|I_a^{\propto}\alpha - I_a^{\propto} S_n^1 \varphi\| = \|I_a^{\propto}\| \|\varphi - I_a^{\propto} S_n^1 \varphi\| \leq \omega\left(\varphi, \frac{b-a}{n}\right) * \|I_a^{\propto}\|$$

Оценим

$$\|I_a^{\propto}\| = \left\| \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|} \int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \right\| \leq \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|} \int_a^x \left| \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \right| dt$$
$$\leq \frac{\|\varphi(t)\|}{|\Gamma(\alpha)|} * \int_a^x |x-t|^{-1+\alpha}\, dt \leq \frac{\|\varphi(t)\|}{|\Gamma(\alpha)|} * \int_a^x |x-t|^{\alpha-1}\, dt$$
$$= \frac{\|\varphi(t)\|}{\alpha|\Gamma(\alpha)|} * |x-t|^{\alpha-1} \leq \frac{\|\varphi(t)\|}{\alpha|\Gamma(\alpha)|} * |b-a|^{\alpha}$$

Следствие 1:

Если $\varphi \in Lip_{\rho}\, \beta$, то

$$\omega\left(\varphi; \tfrac{b-a}{n}\right) \|I_a^{\propto}\| * \tfrac{\|\varphi(t)\|}{\alpha|\Gamma(\alpha)|} * |b-a|^{\alpha} M \|\Delta_n\|^{\beta} \text{ (3.3) } 0 < \beta < 1$$

Следствие 2:

Если сетка узлов равномерная, то

$$\omega\left(\varphi;\frac{b-a}{n}\right)\|I_a^{\propto}\| \le \frac{M(b-a)^{\propto+\beta}}{n^{\beta} * \alpha|\Gamma(\alpha)|} * \|\varphi\| \quad (3.4)$$

Следствие 3:

Если существует φ^1 , т. что, то $|\varphi'(x)| \le \mu$ $\|I_a^{\propto}\| \le \frac{\|\varphi'\|}{\alpha|\Gamma(\alpha)|} * |b-a|^{\alpha} M_1\|\Delta_n\|$

[Из следствия 1 и из существования φ^1, $\|\varphi\| \le M_1$ следует, что $\varphi \in Lip_M 1$].

Оценим погрешность интегрирования в случае аппроксимации функции $\varphi(t)$ полиномом Лагранжа

$$I_{\varphi} = I_n(\varphi, t) = I(L_n\, \varphi; t) \qquad (3.5)$$

Пусть $\varphi(t) \in W^r(M, a.x)$тогда

$$R_n(\varphi) \in \frac{M}{(n+1)'}\int_a^x \frac{(t-x_0)(t-x_1)\dots(t-x_n)}{(t-x_1)^{1-\propto}}dt \quad (3.6)$$

3.2 Сходимость приближенного вычисления дробного интеграла Вейля

Пусть дан интеграл Вейля

$$I_{\pm}^{(\propto)}\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x-t)\,\psi_{\pm}^{\propto}(t)dt \quad \propto > 0 \;\; (3.7)$$

$$\psi_{\pm}^{\propto}(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} cos\frac{kt \pm 2\pi/\alpha}{k^{\alpha}}, \quad (3.8)$$

и некоторая квадратурная формула для его вычисления

$$I_N(\varphi) = I_N(\varphi, S) = I(P_n\varphi, S)$$

$$P_n\colon C_{2\pi}, \dim x_n = N \qquad (3.9)$$

При оценке погрешности квадратурной формулы (3.9) потребуется следующая

Лемма 1: Пусть

$$f(x) = \left(I_{\pm}^{(\propto)}\varphi\right)(x)$$

где φ – непрерывная, 2 π – периодическая функция $0 < \propto < 1$.

Справедливы оценки:

$$|f(x+h) - f(x)| = ch\int_h^{\pi}\frac{\omega(\varphi;t)}{t^{2-\alpha}}dt \quad (3.10)$$

$$|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \le ch^2\int_h^{\pi}\frac{\omega(\varphi;t)}{t^{3-\alpha}}dt \; (3.11)$$

Доказательство:

Представим разность $f(x+h) - f(x)$ в виде

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x-t) - \varphi(x)] * [\psi_{+}^{\alpha}(t+h) - \psi_{+}^{\alpha}(t)]dt \quad (3.12)$$

С учетом периодичности функций $\varphi(x)$и равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi_{+}^{\alpha}(t)dt = 0$$

получим:

$$|f(x+h) - f(x)| = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq 2h} + \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq 2h} = A + B$$

можно считать, что $0 < h < \frac{\pi}{2}$.Для первого слагаемого имеем:

$$|A| < C\int_{-2\alpha}^{2\alpha} \omega(\varphi(t))(\psi_{+}^{\alpha}(t+h) - \psi_{+}^{\alpha}(t))dt \quad (3.13)$$

Так как здесь $\omega\big(\varphi(t)\big) = \omega(\varphi, 2\alpha) \leq 2\omega(\varphi, h)$, то с учетом (1.17) *(cj =0)* имеем:

$$|A| < C\omega(\varphi, \alpha)\int_{-2\alpha}^{2\alpha} \psi_{+}^{\alpha}(t)dt \leq C\omega(\varphi, \alpha) * t^{\alpha-1} \leq C_2 h^2 \omega(\varphi, \alpha) \quad (3.14)$$

Для B на основании теоремы о среднем м. того же неравенства (1.17)

(cj =0) получаем $|B| - ch\int_{2\alpha}^{\pi} \omega(\varphi|t|)\left(\frac{d}{dt}\varphi^2\right)(t + Qt)dt \leq c_1 h \quad 2h < |t| < \pi$()

Здесь$|t| - h \geq |t|/2$,поэтому

$$|B| - ch\int_{2\alpha}^{\pi} \omega(\varphi, t)t^{\alpha-2}dt \quad (3.15)$$

Так как $L^{\alpha}\omega(\varphi, h) \leq ch\int_{2\alpha}^{\pi} \omega(\varphi, t)t^{\alpha-2}dt$

то из (3.14) и (3.15) следует оценка (3.10)

Для получения (3.11) подобно вышеследующим выкладкам имеем: $f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x-t) - \varphi(x)] * [\varphi_{+}^{\alpha}(t+h) - 2\psi_{+}^{\alpha}(t) + \psi_{+}^{\alpha}(t+h)]dt = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq 2h} + \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq 2h} = A_1 + B_1$

Точно так же, как и выше, получаем:

$$|A_1| < ch^{\propto}\omega(\varphi, h)(3.16)$$

Оценим B1 из (1.17) при j=2 из представления конечных разностей:

$$|\psi_+^{\alpha}(t+\alpha) - 2\psi_+^{\alpha}(t) + \psi_+^{\alpha}(t-\alpha)| \le ch^2 t^{\alpha-3} \text{ при } |t| \ge 2h$$

Из леммы выводится следующая теорема:

Теорема 1

Пусть $x - P_n x \in H^{\alpha}$ Тогда для погрешности квадратурной формулы (3.9) равномерно относительно s справедлива оценка:

$$|R_n(x; S)| \le (1 + \|R_n\|_c) * C \int_0^{\pi} \frac{\omega(x;t)}{t^{2-\alpha}} dt$$

Доказательство:

$$\|R_n(x; S)\| = \|Ix - Ix_n\| = \|Ix - IR_n x\| = \|Ix - R_n Ix\|$$
$$< (1 + \|R_n\|_c) * E_n(x) \in (1 + \|R_n\|_c) * \omega\left(Ix * \frac{\pi}{n+1}\right)$$
$$\le (1 + \|R_n\|_c) C \int_0^{\pi/n+1} \int_0^{\pi} \frac{\omega(x;t)}{t^{2-\alpha}} dt \quad (3.17)$$

3.3 Способы оценки погрешности общих квадратурных формул для приближенного вычисления интеграла Вейля

Пусть дан интеграл Вейля

$$\|I_a^{\propto}\| = \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|} \int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_{\alpha}(x-t)\varphi(t)dt \qquad (3.18)$$

0< *x*<2 π, 0< λ<1.

и некоторая квадратурная формула для его вычисления

$$I_{N+}^{(\propto)}\varphi = I_{N+}^{(\propto)}(\varphi, S) = I(P_n\varphi, S) \quad (3.19)$$

$$P_n: C_{2\pi} \to x_n, dim\, x_n = N$$

В дальнейшем при оценке погрешности квадратурной формулы (3.18) значительную роль играет следующая:

Лемма 2: Пусть $\varphi \in C_{2\pi}$ и интеграл

$$\int_h^\pi (\frac{h}{t})^{1-\alpha} \frac{\omega(t)}{t} dt \quad (3.20)$$

сходится

Тогда при любых $\delta = const \geq 1$ справедлива следующая оценка

$$\|I(\varphi, t)\| \leq \frac{8}{|\Gamma(\alpha)|} \int_0^{\pi/2\delta} \frac{\omega(\varphi t)}{(2u)^{1-\alpha}} du + \frac{2\|\varphi\|}{\alpha|\Gamma(\alpha)|} \left(\frac{\delta^\alpha - 1}{\delta^\alpha}\right) (3.21)$$

где ω $(\varphi,$ $u)$ – модуль непрерывности функции φ (u) с шагом

$$\omega(\varphi, u) \ \ \|\varphi\| = \|\varphi\|_{C_{2\pi}}$$

Доказательство:

Перепишем интеграл (3.18) в виде

$$\|I_a^\propto\| = \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|} \int_a^{2\pi} \frac{\varphi(x-t)dt}{(t)^{1-\alpha}} + r_\alpha(t) \quad (3.22)$$

Преобразуем I слагаемое. Введем замену t=2u и учитывая периодичность функции $\varphi(x\text{-}t)$ сделаем несложные преобразования

$$\frac{1}{|\Gamma(\alpha)|} \int_a^{2\pi} \frac{\varphi(x-t)}{(t)^{1-\alpha}} dt = \frac{2}{|\Gamma(\alpha)|} \int_a^{\pi} \frac{\varphi(x-2u)}{(2u)^{1-\alpha}} du = \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|} \int_a^{2\pi} \frac{\varphi(x-t)}{(t)^{1-\alpha}} dt$$

$$= \frac{2}{|\Gamma(\alpha)|} \int_a^{\pi} \frac{\varphi(x-2u)}{(2u)^{1-\alpha}} du = \frac{2}{|\Gamma(\alpha)|} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\varphi(x-2u)}{(2u)^{1-\alpha}} du$$

$$= \frac{2}{|\Gamma(\alpha)|} \int_0^{\pi/2} \frac{\varphi(x+2u)}{(=2u)^{1-\alpha}} du + \frac{2}{|\Gamma(\alpha)|} \int_0^{\pi/2} \frac{\varphi(x-2u)}{(2u)^{1-\alpha}} du$$

$$= \frac{2}{|\Gamma(\alpha)|} \int_0^{\pi/2} \frac{\varphi(x-2u) - \varphi(x+2u)}{(2u)^{1-\alpha}} du$$

т.е. интеграл (3.18) представим в виде

$$I(\varphi;x)=\frac{2}{|\Gamma(\alpha)|}\int_0^{\pi/2}[\varphi(x-2u)-\varphi(x+2u)]\frac{1}{(2u)^{1-\alpha}}du$$

$$=\frac{2}{|\Gamma(\alpha)|}(I_1+I_2)\ (3.23)$$

$$I_1=\int_0^{\pi/2}[\varphi(x-2u)-\varphi(x+2u)]\frac{1}{(2u)^{1-\alpha}}du$$

$$I_2=\int_{\pi/2\delta}^{\pi/2}[\varphi(x-2u)-\varphi(x+2u)]\frac{1}{(2u)^{1-\alpha}}du$$

Оценим каждый из интегралов $I_1 = I_1(x)$ и $I_2 = I_2(x)$

Так как

$$|\varphi(x-2u)-\varphi(x+2u)|\le\omega(\varphi,4u)\le 4\omega(\varphi,u)\ (3.24)$$

$0\le u\le\pi$**,** при $0\le 4\le \pi/2$ для I_1 находим:

$$|I_1|\le 4\int_0^{\pi/2\delta}\frac{\omega(\varphi,u)}{(2u)^{1-\alpha}}du\ \ (3.25)$$

С другой стороны,

$$\varphi(x-2u)-\varphi(x+2u)\le 2\|\varphi\|$$

для I_2:

$$|I_2|\le 2\int_0^{\pi/2\delta}\frac{\omega(\varphi,u)}{(2u)^{1-\alpha}}du=\frac{\|\varphi\|}{\alpha}\left[\pi^\alpha-\frac{\pi^\alpha}{\delta^\alpha}\right]=\frac{\|\varphi\|}{\alpha}\left[\frac{\delta^\alpha-1}{\delta^\alpha}\right]\ \ (3.26)$$

Из (3.23), (3.25), (3.26) следует оценка (3.21)

Следствие 1

Если $\varphi\epsilon H^\alpha$, то для любых $0<\delta<1$ справедлива оценка $\delta>1\quad 0<\beta\le\ \gamma\le 1$

$$\|I(\varphi,S)\| \leq \frac{2}{|\Gamma(\alpha)|}\|\varphi\|\left[\frac{\delta^{\alpha}-1}{\delta^{\alpha}}\right]\pi^{2}+\frac{8\pi^{\beta+\alpha}}{|\Gamma(\alpha)|2^{1+\beta}}+\frac{\delta^{-\beta-\alpha}}{\beta+\alpha}H(\varphi,\beta) \quad (3.27)$$

Где H (*φ;β)* – наименьшая постоянная условия Гельдера функции $\varphi \in H^{\beta}$ при данном β*:*

$$H(\varphi,\beta) = sup\frac{|\varphi(t')-\varphi(t'')|}{|t'-t''|^{\beta}}$$

Доказательство:

Если $\varphi < H^{\delta}$ то , $\omega(\varphi,u) \leq H(\varphi,\delta) * u^{\delta}, u > 0$ то из леммы 2 находим оценку:

$$\frac{8}{|\Gamma(\alpha)|2^{1+\beta}}\int_{0}^{\pi/2\delta}\frac{H(\varphi,\beta)}{(u)^{1-\alpha}}du = \frac{8}{|\Gamma(\alpha)|2^{1+\beta}}H(\varphi,\beta)\int_{0}^{\pi/2\delta}(u)^{\beta+\alpha-1}du$$

$$= \frac{8}{|\Gamma(\alpha)|2^{1+\beta}}H(\varphi,\beta)\frac{(u)^{\beta+\alpha}}{\beta+\alpha} = \frac{8}{|\Gamma(\alpha)|2^{1+\beta}}\frac{H(\varphi,\beta)}{\beta+\alpha}\left(\frac{\pi}{2\delta}\right)^{\beta+\alpha}$$

$$= \frac{8\pi^{\beta+\alpha}}{|\Gamma(\alpha)|2^{1+\beta}}\frac{(\delta)^{-\beta-\alpha}}{\beta+\alpha}H(\varphi,\beta)$$

Следствие 2:

Пусть *$\varphi(t)$*∈*$W(M)$* или *$\varphi(t)$*∈*$Z(M)$* тогда при $\delta \geq 1$ справедливы неравенства соответственно:

$$\varphi\|I(\varphi,S)\| \leq \frac{2}{|\Gamma(\alpha)|}\|\varphi\|\left[\frac{\delta^{\alpha}-1}{\delta^{\alpha}}\right]\pi^{2}+\frac{8M}{|\Gamma(\alpha)|2^{1-\alpha}}\int_{0}^{\pi/2\delta}\frac{(1+l_{n}u)}{(u)^{-\alpha}}du \quad (3.28)$$

$$\|I(\varphi,S)\| \leq \frac{2}{|\Gamma(\alpha)|}\|\varphi\|\left[\frac{\delta^{\alpha}-1}{\delta^{\alpha}}\right]\pi^{2}+\frac{8Mk}{|\Gamma(\alpha)|2^{1-\alpha}}\int_{0}^{\pi/2\delta}\frac{(1+l_{n}u)}{(u)^{-\alpha}}du \quad (3.29)$$

Где к – положительная константа, не зависящая от δ и φ. Параметр

$\delta \geq 1$ может быть выбран исходя из минимальности правых частей (3.28) (3.29)

Доказательство:

Первое неравенство легко выводится из оценки леммы 2 и с учетом того факта, что для всякой функции $\varphi \in \omega(M)$

$$\omega(\varphi;\delta) \le M\delta(1+|l_n u|), \qquad M = cons$$

Поэтому

$$\frac{8}{|\Gamma(\alpha)|}\int_0^{\pi/2\delta}\frac{\omega(\varphi,u)}{(2u)^{1-\alpha}}du$$
$$= \frac{8}{|\Gamma(\alpha)|}\int_0^{\pi/2\delta}\frac{Mu}{(2u)^{1-\alpha}}(1+l_n u)du$$
$$= \frac{8}{|\Gamma(\alpha)|(2)^{1-\alpha}}(\int_0^{\pi/2\delta}u^{\alpha}du$$
$$+\int_0^{\pi/2\delta}u^{\alpha}(l_n u)du) \quad = \frac{2M}{(\alpha+1)|\Gamma(\alpha)|}(\frac{\pi}{\delta})^{\alpha+1}$$
$$= \frac{8}{|\Gamma(\alpha)|(2)^{1-\alpha}}\int_0^{\pi/2\delta}\frac{(l_n u)}{u^{-\alpha}}du$$

Второе неравенство следует из первого с учетом того, что для всякой функции *$\varphi(s)\in z(M)$* выполняется неравенство $\varphi(S) = L(M)$

$\omega(\varphi\delta) \le MK\delta(1+|ln\delta|)$,*т.е.* $\varphi(\delta)\epsilon W(KM)$

3.4 Общие равномерные оценки погрешности интерполяционных квадратурных формул

Пусть $C_{2\pi}$-класс непрерывных,
2π периодических функций, удовлетворяющий условию

$$\int_L^{\pi}(\frac{L}{t})^{1-\alpha}\frac{\omega(t)}{t}dt \le c\omega(L) \quad (3.35)$$

Справедлива следующая

Теорема 4:

Для любой плотности $\varphi(t)\epsilon C_{2\pi}$ интерполяционный квадратурный процесс (3,19)равномерно сходится при неограниченном возрастании числа N узлов интерполяции. При этом для любых n=[N/2] справедлива следующая оценка

$$\|R_n\varphi\| \le C(\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\omega(\varphi,u)}{(2u)^{1-\alpha}}du + \omega\left(\varphi,\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{1}{N^\alpha}\right))$$

Доказательство:

Условие (3.35) обеспечивает существование сингулярного интеграла (3.18) и тем самым ограниченность остаточного члена $R_n(\varphi,S)$, $\varphi\epsilon C_{2\pi}$ при каждом диксированном .

Поэтому для справедливости теоремы достаточно доказать справедливость неравенства (3.36).

Пусть

$T_m(S)$тригонометрический полином наилучшего равномерного приближения порядка не выше m функции$\varphi(S)$, a $E_m(\varphi)$ соответствующее наилучшее приближение.

Тогда остаточный член представим в виде

$$R_n(\varphi,S)=I(\varphi - P_n\varphi,S) \quad (3.37)$$

Положим $P_n \equiv I_m(S)$

Тогда с учетом леммы 2(при $\delta = n$) имеем

$$\|R_n(\varphi,S)\| \le \frac{8}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\omega(\varphi - I_m,u)}{(2u)^{1-\alpha}}du + \frac{2}{\alpha\Gamma(\alpha)}\|\varphi - I_m(\varphi)\|\left(\frac{\delta^\alpha - 1}{\delta^\alpha}\right)(\pi-\alpha)$$

$$= \frac{8}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\omega(\varphi - I_m,u)}{(2u)^{1-\alpha}}du + \frac{2}{\alpha\Gamma(\alpha)}E_m(\varphi)c\left(\frac{n^\alpha - 1}{n^\alpha}\right) \qquad (3.38)$$

В силу известного результата Корнейчука [3]

$$E_m(\varphi)c \leq \omega(\varphi, \frac{\pi}{m+1}) \ \ m=0,1 \ (3.39)$$

Тогда из одного результата Стечкина [4] следует, что $\omega(I_m, u) \leq$ $С_1\omega(\varphi, u)$,

Поэтому $\omega(\varphi - I_m, u) \leq (1 + С_1)\ \omega(\varphi, u)$, и из (3.37), (3.38)следует неравество

$$\|R_n\varphi\| \leq С_2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\omega(\varphi, u)}{(2u)^{1-\alpha}} du + С_3\omega\left(\varphi, \frac{\pi}{n}\right)\left(\frac{n^\alpha - 1}{n^\alpha}\right) \qquad (3.40)$$

Из (3.40) находим оценку (3.36)

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Самко С.Г. Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения // Издательство «Науки и техника», 1987 г.
2. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач // Издательство Казанского университета, г.Казань, 1980 г.
3. Корнейчук А.А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов // Дополнение к ЖВМ и М.Ф. т.4. 1964 г.
4. Стечкин С.Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изд. АН СССР сер. Матем. Т.15. 1951 г.
5. И.С. Березин и Н.И. Жидков Методы вычислений // Государственное издательство физ.-мат. Литературы Москва, 1962.
6. Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко Методы сплайн-функций // М., «Наука», главная редакция физ.мат литературы, 1980