УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 2 Физико-математические науки *2009*

УДК 519.174

ВЛОЖЕНИЯ В КЛАССЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ОГРАНИЧЕННОГО ИСКАЖЕНИЯ

А.А. Евдокимов

Аннотация

Рассматривается широкий класс отображений, определяющих вложения дискретных метрических пространств и графов. Доказывается теорема о локально изометрическом вложении цепных кодов в булевы гиперкубы.

Ключевые слова: вложение, дискретное метрическое пространство, граф, цепной код, булев гиперкуб.

1. Основные определения

Пусть X – конечное множество и $\rho_X : X \times X \to Z^+$ – функция расстояния, которая удовлетворяет обычным аксиомам расстояния.

• $\{X, \rho_X\}$ называем *дискретным метрическим пространством* (DMS).

Пусть $p > 0$ и $q > 0$ – некоторые числа из области значения метрики ρ_X. Элементы x_1 и x_2 множества X называем:

– соседними, если $\rho_X(x_1, x_2) = 1$;

– p-близкими, если $\rho_X(x_1, x_2) \le p$;

– q-отделимыми, если $\rho_X(x_1, x_2) \ge q$.

Пусть $f : X \to Y$ – однозначное отображение X в Y и $\{Y, \rho_Y\}$ – некоторое DMS.

• Отображение f сохраняет

– p-близость, если для любых p-близких элементов x_1 и x_2 из X справедливо неравенство

$$\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \le p$$

– q-отделимость, если для любых q-отделимых элементов x_1 и x_2 из X выполняется неравенство

$$\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \ge q.$$

• Отображение $f : X \to Y$ называется k-изометрическим, $k > 0$, если f сохраняет все расстояния, не превосходящие k, то есть

$$\rho_X(x_1, x_2) = \rho_Y(f(x_1), f(x_2))$$

для любых x_1, x_2, для которых $\rho_X(x_1, x_2) \le k$.

Поскольку $k > 0$, то k-изометрическое отображение переводит соседние в X элементы в соседние же в Y. Сохранение 1-отделимости отображением означает его обратимость, а сохранение 2-отделимости означает, что 1-близкими в Y образами являются только образы соседних в X элементов.

• Обратимое отображение $f : X \to Y$ называется $\langle p, q\rangle$-вложением пространства $\{X, \rho_X\}$ в $\{Y, \rho_Y\}$, если f сохраняет p-близость и q-отделимость.

Варьируя значения параметров p и q, мы получаем *параметрическое семейство отображений.* При $p = 1$, $q = 1$ это класс обратимых отображений, сохраняющих свойство элементов быть соседними. При $p \geq 1$ и $q = 2$ отображение связные части не разрывает, а раздельные не обращает в связные (в смысле целочисленных расстояний) и является дискретным аналогом непрерывного отображения. К этой аналогии мы вернемся ниже.

При $p = q = D(X)$, где $D(X)$ – диаметр множества X и $D(X) \leq D(Y)$, вложение $f : X \to Y$ является полностью изометрическим, сохраняя все расстояния.

2. Свойство продолжения метрики

Исследования вложений DMS, сохраняющих отношения близости и отделимости элементов, приводят к изучению таких свойств пространств, которые позволяют выделять «достаточно регулярные» пространства и графы и при этом не слишком сужать рассматриваемые классы.

Ниже приводятся два таких свойства пространств: свойство продолжения метрики (СПМ) и свойство разнообразия шаров и метрической правильности.

Пусть $S_i(x)$ – шар радиуса i с центром в $x \in X$.

• Для DMS $\{X, \rho_X\}$ выполняется свойство продолжения метрики, если для любых элементов x, $y \in X$

$$S_1(x) \nsubseteq S_i(y) \quad \text{или} \quad S_1(y) \nsubseteq S_i(x),$$

где $i = \rho_X(x, y)$ и $i < d$ для конечных пространств диаметра $d = d(X)$.

Так как метрика целочисленна, то СПМ означает, что или существует $z \in S_1(x)$, для которого

$$\rho(z, y) = \rho(x, y) + 1,$$

или (симметрично!) существует $z' \in S_1(y)$, для которого

$$\rho(z', x) = \rho(x, y) + 1.$$

Если СПМ выполняется лишь для x и y таких, что $\rho_X(x, y) < k$, то будем говорить, что для $\{X, \rho_x\}$ выполняется свойство k-продолжения метрики (k-СПМ). В [1] доказана

Теорема 1. *Пусть $f : X \to Y$ сохраняет 1-близость и q-отделимость, $q \geq 2$. Тогда f сохраняет q'-отделимость для любого $q' < q$ (и, следовательно, обратимо) тогда и только тогда, когда X удовлетворяет q-СПМ.*

Пусть G и H – простые связные конечные графы с обычным расстоянием

$$\rho_G(u, v) = \min_C |C(u, v)|,$$

где минимум берется по всевозможным простым цепям $C(u, v)$ между вершинами u и v, а $|C|$ – длина цепи C. Для графов, как и для DMS, определяется $\langle p, q \rangle$-вложение $f : V(G) \to V(H)$, которое мы будем для краткости записывать в виде $f : G \to H$.

Заметим, что $\langle p, q \rangle$-вложение $f : G \to H$ при $p = q$ будет p-изометрическим в обе стороны вложением графов, если под f^{-1} иметь в виду отображение f^{-1} : $\operatorname{Im} f \to G$ области значений $\operatorname{Im} f \subseteq V(H)$ отображения f на множество $V(G)$ и метрику, индуцированную на $\operatorname{Im} f$ вложением.

Следующее предложение [2] характеризует свойство k-СПМ для связных графов.

Предложение. *Для произвольного связного графа G следующие утверждения эквивалентны:*

(i) G удовлетворяет k-СПМ;

(ii) любые две вершины $x, y \in V(G)$ такие, что $\rho_G(x,y) < k$, принадлежат некоторой кратчайшей цепи длины k;

(iii) в G нет ***тупиковых*** *цепей длины меньшей k (тупиковые – это кратчайшие цепи, максимальные по вложению, то есть не содержащиеся ни в какой кратчайшей цепи большей длины).*

Рассмотрим теперь определения отображением $f: G \to H$ сохранения близости и отделимости в несколько более общей форме на «языке ε и δ».

• Отображение $f: G \to H$ назовем *$\langle\varepsilon,\delta\rangle$-непрерывным*, если для любых $u, v \in \in V(G)$ из неравенства $\rho_G(x_1,x_2) \le \delta$ следует неравенство $\rho_H(f(x_1),f(x_2)) \le \varepsilon$, где ε и δ – натуральные числа из области определения метрик ρ_G и ρ_H.

Если $S_k(v)$ – шар с центром в точке $v \in V(G)$ и радиусом k, то свойство ограниченности искажения «близких» расстояний «в терминах окрестностей» запишем следующим образом:

$$f(S_\delta(v)) \subseteq (S_\varepsilon(f(v))$$

для любой вершины $v \in V(G)$.

Для свойства сохранения отображением отделимости с порогами ε и δ имеем

$$\operatorname{Im} f \cap S_\varepsilon(f(v)) \subseteq f(S_\delta(v)).$$

Тогда при $\varepsilon = \delta = k$ для свойства локальной изометричности вложения $f: G \to H$ с порогом k имеем

$$f(S_k(v)) = S_k(f(v)) \cap \operatorname{Im} f$$

для любой вершины $v \in V(G)$.

Так определяемое отображение, сохраняющее близость и отделимость, можно считать дискретным аналогом непрерывного «в обе стороны» отображения или гомеоморфного вложения $\{X, \rho_X\}$ в $\{Y, \rho_Y\}$.

3. Свойство разнообразия шаров

Другое свойство, возникающее в связи с исследованием вложений DMS и графов, было названо свойством разнообразия шаров. Оно впервые введено в работе [2], в которой был предложен подход к изучению метрической структуры на основе рассмотрения разнообразия и пересекаемости шаров, содержащихся в графе, когда их радиусы последовательно возрастают от нуля до диаметра графа.

Пусть $\tau(G) = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_d)$, где τ_i – число различных шаров радиуса i в графе G диаметра $d = d(G)$. Тогда $\tau_0 = |V(G)|,\ \tau_i \ge \tau_{i+1},\ \tau_d = 1$.

Будем $\tau(G)$ называть вектором разнообразия шаров или просто τ-вектором.

• Граф G удовлетворяет свойству t-разнообразия шаров, если $\tau_i = |V(G)|$ для любого $i < t$.

• Граф G назовем *метрически правильным*, если он удовлетворяет свойству t-разнообразия для $t = d(G)$.

Таким образом, для метрически правильного графа $\tau(G) = (|V|, |V|, \ldots, |V|, 1)$.

Приведем примеры указанных выше графов:

1) граф Petersen'а, $d = 2$, $\tau(G) = (10, 10, 1)$;

2) n-мерный булев куб, $d = n$, $\tau(G) = (2^n, 2^n, \ldots, 2^n, 1)$;

3) все графы платоновых тел. Например, для додекаэдра $d = 5$, $\tau(G) = = (20, 20, 20, 20, 20, 1)$.

Задача состоит в описании множеств векторов разнообразия шаров в графах и их классах и выделении свойств τ-векторов, инвариантных относительно изоморфизма графов. Это является и одним из подходов к классификации графов и DMS на основе свойств структур пересечения шаров в них, когда радиусы шаров последовательно возрастают от единицы до диаметра.

Заметим, что в [2] доказано, что почти все n-вершинные графы удовлетворяют СПМ и являются метрически правильными.

В [3] получено описание векторов разнообразия шаров для класса деревьев, и с его помощью охарактеризованы деревья, обладающие свойством t-разнообразия шаров. Исследования векторов разнообразия шаров были продолжены в работах [4, 5].

4. Цепные коды

Пусть $X = \{0, 1, \ldots, l-1\}$, $\rho_X = |i-j|$, а пространством $\{Y, \rho_Y\}$ является множество всех двоичных слов длины n с метрикой Хемминга, то есть $Y = \{0,1\}^n$, $\rho_Y(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = |\{i,\ x_i \neq y_i\}|$ – расстояние между словами $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$, равное числу позиций, в которых эти слова различаются. Тогда $\langle p, 1\rangle$-вложение $f : X \to Y$ определяет *p-изометрическое кодирование* натуральных чисел отрезка $[0, l-1]$, и выполняется равенство

$$\rho_Y(f(i), f(j)) = |i-j|$$

для всех чисел $i, j \in [0, l-1]$, для которых $|i-j| \leq p$. При $l = 2^n$ имеем $|X| = |Y|$, и $\langle p, 1\rangle$-вложение $f:\ [0, 2^n - 1] \to \{0,1\}^n$ определяет код Грея, которому по свойству $q = 1$ соответствует гамильтонова цепь в графе булева гиперкуба.

Конечная последовательность $\widetilde{\alpha}_0, \widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_l$ двоичных слов длины n $\widetilde{\alpha}_i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \{0,1\}$, образует цепной код с расстоянием d, если:

1) $\rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{i+1}) = 1$ при $i = 0, 1, \ldots, l-1$;

2) из $|i-j| \geq d$ следует, что $\rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_j) \geq d$ для всех $0 \leq i, j \leq l$, где $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|$ – расстояние Хемминга между словами $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, и $l \geq d$, чтобы не рассматривать вырожденные случаи. Будем такой код называть (n, d)-цепью длины l.

Историю исследования цепных кодов и их приложения можно найти в [6–9].

В графе единичного n-мерного куба (n, d)-цепи соответствует путь по ребрам этого куба, который в силу свойства 2) не подходит сам к себе ближе, чем на расстояние d.

Известно, что существует 3-изометрическое вложение $(n, 2)$-цепи длины $l \asymp 2^n$, которое сохраняет 2-различимость, то есть имеет параметры $\langle 3, 2\rangle$-вложения. Это вложение $(n, 2)$-цепи в гиперкуб принято называть «змея в ящике».

Как и в [6, 7], мы следуем «словарной» интерпретации задач вложения цепей в гиперкуб, определяя их переходными последовательностями в n-буквенном алфавите (буквам сопоставлены орты гиперкуба).

Дадим определения и введем обозначения.

Пусть X – слово в алфавите $\langle x\rangle = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, $l(X)$ – длина слова X. Если $\langle x'\rangle \subset \langle x\rangle$, то $X_{\langle x'\rangle}$ – ***проекция*** слова X на алфавит $\langle x'\rangle$, то есть $X_{\langle x'\rangle}$ получается в результате вычеркивания из X всех тех букв, которые не входят в $\langle x'\rangle$. Букву назовем *существенной* в X, если она входит в X нечетное число раз, и несущественной в противном случае.

$\widetilde{\gamma}(X) = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, где $\gamma_i = 1$, если x_i существенна в X, и $\gamma_i = 0$, если x_i несущественна.

$\oplus$ – операция поразрядного сложения векторов по $\mod 2$.

$\delta(X) = \|\widetilde{\gamma}(X)\| = \Sigma_{i=1}^{n}(\gamma_i)$ – число существенных букв в X.

i последовательных букв слова X образуют подслово длины i, $i = 1, 2, \ldots, l(X)$.

• X есть d-слово, если для любого его подслова X' такого, что $l(X') \geq d$, справедливо $\delta(X') \geq d$.

Повторение r раз слова X обозначаем X^r, $r \geq 2$.

В этих определениях и обозначениях переходной последовательности (n, d)-цепи соответствует такое слово в n-буквенном алфавите, в котором:

– любые его $d+1$ последовательных букв все различны ($d+1$-изометричность вложения цепи);

– в любом подслове длины не менее d число существенных букв не меньше d (свойство d-отделимости, поскольку число существенных букв подслова равно расстоянию Хемминга между концами отрезка цепи).

Поэтому, (n, d)-цепи соответствует $\langle d+1, d\rangle$-вложение $f : \{0, 1, \ldots, l-1\} \to Y$, а ее переходная последовательность записывается d-словом в n-буквенном алфавите. Очевидно и обратное – любое d-слово в в n-буквенном алфавите определяет переходную последовательность (n, d)-цепи и, следовательно, $\langle d+1, d\rangle$-вложение $f : \{0, 1, \ldots, l-1\} \to Y$.

Ниже приводится конструкция d-слова для любого $d = 2t+1$, $t \geq 1$. В [6] был рассмотрен только случай $t = 1$.

Пусть $X = x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_l}$ – произвольное 1-слово в алфавите $\langle x\rangle = \langle x_1, \ldots, x_s\rangle$ и пусть определено соответствие

$$x_k \to Y_k, \quad k = 1, \ldots, s, \tag{1}$$

где Y_k – d-слова в алфавите $\langle y\rangle = \langle y_1, \ldots, y_m\rangle$ такие, что для любых p из них $Y_{j_1}, \ldots, Y_{j_p}$ выполнено неравенство

$$\|\bigoplus_{s=1}^{p} \widetilde{\gamma}(Y_{j_s})\| \geq d - p \tag{2}$$

при всех $p = 2, 3, \ldots, d-1$.

Пусть $\{Z_k\}$ – множество слов-копий для $\{Y_k\}$ $(k = 1, \ldots, s)$ в новом алфавите $\langle z\rangle = \langle z_1, \ldots, z_m\rangle$, то есть каждое Z_k получается из Y_k заменой всех букв $y_i \to z_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Пусть $\langle a\rangle = \langle a_1, \ldots, a_t\rangle$, $\langle b\rangle = \langle b_1, \ldots, b_t\rangle$, $\langle c\rangle = \langle c_1, \ldots, c_{d-2}\rangle$ – алфавиты, не пересекающиеся с алфавитами $\langle x\rangle, \langle y\rangle, \langle z\rangle$, и $A = a_1, \ldots, a_t$, $B = b_1, \ldots, b_t$, $C = c_1, \ldots, c_{d-2}$ – слова в этих алфавитах, каждое из которых образовано просто выписыванием подряд всех букв этих алфавитов.

Образуем алфавит

$$\langle w\rangle = \langle x\rangle \cup \langle y\rangle \cup \langle z\rangle \cup \langle a\rangle \cup \langle b\rangle \cup \langle c\rangle$$

и слово

$$W = Y_{i_1} A x_{i_1} B Z_{i_1} C ... Y_{i_j} A x_{i_j} B Z_{i_j} C ... Y_{i_l} A x_{i_l} B Z_{i_l} C$$

в этом алфавите. По построению мощность алфавита $\langle w\rangle$ равна $s + 2m + 3$ и

$$W_{\langle x\rangle} = X, \quad W_{\langle y\rangle} = Y_{i_1} \ldots Y_{i_l}, \quad W_{\langle z\rangle} = Z_{i_1} \ldots Z_{i_l}, \quad W_{\langle a\rangle \cup \langle b\rangle \cup \langle c\rangle} = (ABC)^l.$$

Заметим, что если x_{i_k} – некоторая буква слова X, то в W слева и справа от x_{i_k} стоят те слова Y_{i_k} и Z_{i_k}, которые отвечают x_{i_k} по соответствию (1).

Теорема 2. *W есть d-слово.*

Доказательство. Убедимся, что для любого подслова W' слова W такого, что $l(W') \geq d$, выполнено неравенство

$$\delta(W') \geq d, \tag{3}$$

где $\delta(X)$ – число букв, входящих в слово X нечетное число раз.

Пусть

$$\delta(W'_{\langle x \rangle}) = p. \tag{4}$$

Если $p \geq d$, то (3) верно, поскольку $\delta(W') \geq \delta(W'_{\langle x \rangle})$.

Если $p = 0$, то, так как $W_{\langle x \rangle}$ есть 1-слово, то W' не содержит букв из $\langle x \rangle$, и, следовательно, W' есть подслово слова $BZ_{i_k}CY_{i_{k+l}}A$ для некоторого k, а поскольку Z_{i_k} и $Y_{i_{k+1}}$ есть d-слова, то (3) справедливо.

Рассмотрим теперь основной случай $0 < p \leq d-1$. Пусть $W'_{\langle x \rangle} = x_{i_k}, \dots, x_{i_{k+r}}$, и $x_{j_1}, \dots, x_{j_p}$ – буквы, существенные в $W'_{\langle x \rangle}$. Все возможные расположения подслова W' в слове W изобразим схематически

$$\dots x_{i_{k-1}} \overset{1}{\downarrow} B \overset{2}{\downarrow} Z_{i_{k-1}} \overset{3}{\downarrow} C \overset{4}{\downarrow} Y_{i_k} \overset{5}{\downarrow} A\, x_{i_k} \dots x_{i_{k+r}} \overset{5'}{\downarrow} B \overset{4'}{\downarrow} Z_{i_{k+r}} \overset{3'}{\downarrow} C \overset{2'}{\downarrow} Y_{i_{k+r+1}} \overset{1'}{\downarrow} A\, x_{i_{k+r+1}} \dots,$$

где сечения слова W, определяющие возможный выбор левого конца W', есть $1, 2, 3, 4, 5$, а правого – $1', 2', 3', 4', 5'$.

Сечения, попадающие на стык слов, например $\dots B \overset{1}{\downarrow} Z_{i_{k-1}} \dots$, будем относить к сечениям с нечетными номерами.

Левый и правый концы сечения обозначим L и R соответственно. Покажем, что при любом варианте выбора концов подслова W' справедливо неравенство (3).

Из конструкции слова W непосредственно следует, что случай $L = \xi, R = \eta'$ при любых $\xi, \eta \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $\xi \neq \eta$ симметричен случаю $L = \eta,\ R = \xi'$, и поэтому в их доказательстве достаточно произвести замену:

$$A \longleftrightarrow B, \quad Y_{i_k} \longleftrightarrow Z_{i_{k+R}}, \quad Z_{i_{k-1}} \longleftrightarrow Y_{i_{k+r+1}}.$$

Учитывая это замечание, рассмотрим оставшиеся случаи.

а) $L \in \{1, 2, 3\},\ R \in \{3', 4', 5'\}$.

В каждом из этих 9 случаев $W'_{\langle y \rangle} = Y_{i_k} \dots Y_{i_{k+r}}$, и потому $\widetilde{\gamma}(W'_{\langle y \rangle}) = \bigoplus_{s=1}^{p} \widetilde{\gamma}(Y_{j_s})$, а по свойству (2) $\delta(W'_{\langle y \rangle}) \geq d - p$, что вместе с (4) влечет (3).

б) $L = 1,\ R = 1'$.

Теперь

$$\widetilde{\gamma}(W'_{\langle z \rangle}) = \widetilde{\gamma}(Z_{i_{k-1}}) \oplus \bigoplus_{s=1}^{p} \widetilde{\gamma}(Z_{j_s}),$$

$$\widetilde{\gamma}(W'_{\langle y \rangle}) = \widetilde{\gamma}(Y_{i_{k+r+1}}) \oplus \bigoplus_{s=1}^{p} \widetilde{\gamma}(Y_{j_s}).$$

При $p \leq d-2$ по свойству (2)

$$\delta(W'_{\langle z \rangle}) + \delta(W'_{\langle y \rangle}) = \|\widetilde{\gamma}(W'_{\langle z \rangle})\| + \|\widetilde{\gamma}(W'_{\langle y \rangle})\| \geq 2(d-p-1),$$

что вместе с (4) дает

$$\delta(W') \geq 2d - p - 2 \geq d.$$

Если $p = d-1$, то p – четно, следовательно, $l(W'_{\langle x \rangle}) = r+1$ – четно, и поскольку $W'_{\langle c \rangle} = C^{r+2}$, то $\delta(W'_{\langle z \rangle}) = d - 2$, что вместе с (4) влечет (3).

в) $L = 2,\ R = 2'$ или $L = 4,\ R = 4'$.

Если p – четно, то, как и в случае б), $\delta(W'_{\langle c\rangle}) = d - 2$, что влечет (3).

Если p – нечетно, то $W'_{\langle a\rangle\cup\langle b\rangle} = (AB)^{r+1}$, $r+1$ – нечетно, откуда

$$\delta(W'_{\langle a\rangle}) + \delta(W'_{\langle b\rangle}) = d - 1,$$

что влечет (3).

г) $L = 5\ \ R = 5'$.

Здесь

$$\widetilde{\gamma}(W'_{\langle y\rangle}) = \bigoplus_{s=k+1}^{k+r} \widetilde{\gamma}(Y_{j_s}) = \widetilde{\gamma}(Y_{i_k}) \oplus \bigoplus_{s=k}^{k+r} \widetilde{\gamma}(Y_{i_s}),$$

и, следовательно,

$$\delta(W'_{\langle y\rangle}) = \|\widetilde{\gamma}(Y_{i_k}) \oplus \bigoplus_{s=1}^{p} \widetilde{\gamma}(Y_{j_s})\|.$$

Аналогично для алфавита $\langle z\rangle$

$$\delta(W'_{\langle z\rangle}) = \|\widetilde{\gamma}(Z_{i_{k+r}}) \oplus \bigoplus_{s=1}^{p} \widetilde{\gamma}(Z_{j_s})\|$$

и, как и в случае б), при $p \le d - 2$

$$\delta(W'_{\langle y\rangle}) + \delta(W'_{\langle z\rangle}) \ge 2(d - p - 2),$$

что вместе с (4) дает (3).

Наконец, при $p = d-1$ имеем $W'_{\langle c\rangle} = C^n$, $\delta(W'_{\langle c\rangle}) = d-2$, что опять влечет (3).

д) $L = 1,\ R = 2'$ или $L = 4,\ R = 5'$.

Если p – четно, то, как и в случае в), $\delta(W'_{\langle c\rangle}) = d - 2$, и (3) выполнено.

Если p – нечетно, то $W'_{\langle a\rangle} = A^{r+1}$, $\delta(W'_{\langle a\rangle}) = t$, и по алфавиту $\langle z\rangle$ будем иметь для $L = 1,\ R = 2'$ так же, как в случае б), а для $L = 4,\ R = 5'$ так же, как в случае г):

$$\delta(W'_{\langle z\rangle}) \ge d - p - 1.$$

Окончательно имеем

$$\delta(W') \ge \delta(W'_{\langle x\rangle}) + \delta(W'_{\langle z\rangle}) + \delta(W'_{\langle a\rangle}) \ge p + d - p - 1 + t \ge d.$$

Теорема доказана. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 08-01-00671, 09-01-00070) и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН (проект «Новые методы дискретного анализа и комбинаторной оптимизации»).

Summary

A.A. Evdokimov. Embeddings from the Class of Parametric Mappings of Bounded Distortion.

The paper considers a wide class of the mappings defining the embedding of discrete metric spaces and graphs. The theorem on local isometric embedding of circuit codes into Boolean hypercubes is proved.

Key words: embedding, discrete metric space, graph, circuit code, Boolean hypercube.

Литература

1. *Евдокимов А.А.* Метрические свойства вложений и коды, сохраняющие расстояния // Труды Ин-та матем. СО АН СССР. – Новосибирск: Наука, 1988. – Т. 10. – С. 116–132.
2. *Евдокимов А.А.* Локально изометрические вложения графов и свойство продолжения метрики // Сиб. журн. исслед. операций. – 1994. – Т. 1, № 1.– С. 5-12.
3. *Федоряева Т.И.* Разнообразие шаров в метрических пространствах деревьев // Дискр. анализ и исслед. операций. Сер. 1. – 2005. – Т. 12, № 3. – С. 74–84.
4. *Fedoryaeva T.I.* Diversity Vectors of Balls in Graphs and Estimates of the Components of the Vectors // J. Appl. Industr. Math. – 2008. – V. 2. – P. 341–357.
5. *Рычков К.Л.* Об условиях существования графа с заданным диаметром, числом вершинной связности и вектором разнообразия шаров // Дискр. анализ и исслед. операций. Сер. 1. – 2007. – Т. 14, № 4. – С. 43–56.
6. *Евдокимов А.А.* Цепные коды с произвольным расстоянием // Докл. АН СССР. – 1976. – Т. 228, № 6. – С. 1273–1276.
7. *Евдокимов А.А.* Вложения графов в n-мерный булев куб и интервальное кодирование табло // Вестн. Томск. гос. ун-та. Приложение. – 2006. – № 17. – С. 15–19.
8. *Klee V.* A method for Constructing Circuit Codes // J. Assoc. Comp. Mach. – 1967. – V. 14, No 3. – P. 520–528.
9. *Preparata F.P., Nievergelt J.* Difference-preserving codes // IEEE Trans. Inform. Theory. – 1974. – V. IT-20, No 5. – P. 643–649.

Поступила в редакцию
02.03.09

Евдокимов Александр Андреевич – кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск.

E-mail: *evdok@math.nsc.ru*