О некоторых приложениях и связях функционального анализа

Б. С. Кашин

Математический институт им. В. А. Стеклова

Российской академии наук, г. Москва

kashin@mi-ras.ru

Некоторые определения и обозначения

1. Поперечник по Колмогорову:

X – нормированное пространство, $\qquad B \subset X, \quad n = 1, 2, \ldots,$

$$d_n(B, X) = \inf_{\substack{L \subset X \\ \dim L \leqslant n}} \sup_{y \in B} \rho_X(y, L),$$

где L – линейное подпространство,

$$\rho_X(y, L) = \inf_{x \in L} \|x - y\|_X$$

2. Жесткий фрейм в $\mathbb{R}^n$:

$$U = \{u_i\}_{i=1}^{N} \subset \mathbb{R}^n, \quad N \geqslant n :$$

$$|x|^2 \equiv \|x\|_{l_2^n}^2 = \sum_{i=1}^{N} |(x, u_i)|^2.$$

При $N > n$ U – переполненная система, при этом

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n \qquad x = \sum_{i=1}^{N} (x, u_i) u_i.$$

Это представление не единственно.

3. m-членные приближения, Greedy-алгоритм:

$\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ – полная система в нормированном пространстве X, $f \in X$,$m = 1, 2, \dots,$

$$e_m(f, \Phi, X) = \inf_{P_m} \|f - P_m\|_X,$$

где inf берется по всем полиномам по системе Φ с $\leqslant m$ нулевых коэффициентов, т.е.

$$P_m = \sum_{k=1}^{m} a_k \varphi_{i_k}.$$

Один из основных способов построения приближающих m-членных полиномов – Greedy-алгоритм:

$$X = H, \qquad f \in H$$

1 шаг алгоритма: находим i_1 такое, что

$$|(f, \varphi_{i_1})| = \sup_i |(f, \varphi_i)|$$

и полагаем

$$P_1 = (f, \varphi_{i_1})\varphi_{i_1}, \qquad \Delta_1 = f - P_1.$$

Затем применяем шаг алгоритма к Δ_1 и т.д.
После m шагов имеем представление

$$f = P_m + \Delta_m; \qquad P_m = \sum_{k=1}^{m} a_k \varphi_{i_k}.$$

4. Операторные нормы матриц и подматриц:

$$A \text{ – } M \times N\text{-матрица, } A\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M,$$

$$\|A\|_{(p,q)} = \sup_{\|x\|_{l_p^N} \leqslant 1} \|Ax\|_{l_p^M}, \qquad 1 \leqslant p, q \leqslant \infty.$$

Пусть $\Omega \subset \{1, 2, \ldots, M\}$.

$A(\Omega)$ – матрица, образованная строками с номерами из Ω.

5. Жесткость матриц, ε-ранг:

A – $N \times N$-матрица,
$v(A)$ – число ее ненулевых элементов.

Для $r = 1, 2, \ldots, N-1$

$$R_A(r) = \inf_B \{v(A-B), \operatorname{rank} B \leqslant r\}$$

– функция устойчивости.

ε-ранг матрицы A – это следующая величина:

$$\operatorname{rank}_\varepsilon(A) = \min\{\operatorname{rank} B, \|A-B\|_\infty \leqslant \varepsilon\},$$

где для $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N$ $\|A\|_\infty = \max_{i,j} |a_{ij}|$