

УДК 534.2.532

## ОЦЕНКА ВОЗНИКНОВЕНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН В КАВИТАЦИОННОМ ПУЗЫРЬКЕ ПРИ ЕГО КОЛЛАПСЕ

*А.А. Аганин, Д.Ю. Топорков*

*Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, г. Казань, 420111, Россия*

### Аннотация

Проведена оценка возможности образования сходящихся ударных волн в полости кавитационного пузырька в ходе его коллапса в ацетоне и тетрадекане. Давление жидкости варьируется от 1 до 100 бар, ее температура – от 293 К до значений, близких к критическим, при которых давление насыщенных паров обеих жидкостей равно 10 бар (до 419 К в ацетоне и 663 К в тетрадекане). Радиус пузырька в начале коллапса равен 500 мкм. Использована упрощенная математическая формулировка без учета теплопроводности и испарения-конденсации. Распределение термодинамических параметров пара в пузырьке принимается однородным, его состояние описывается уравнением типа Ван-дер-Ваальса, учитывается слабая сжимаемость жидкости на большом удалении от пузырька. В рамках этих допущений динамика пузырька определяется путем решения обыкновенного дифференциального уравнения Рэлея–Плессета второго порядка. Для оценки возможности возникновения ударной волны в пузырьке при его коллапсе применяется критерий, в котором используются значения термодинамических параметров в паре только с границы кавитационного пузырька и характеристики движения межфазной поверхности. Данный критерий позволяет также предсказывать время и место образования ударной волны. Решение уравнения Рэлея–Плессета находится численно методом Рунге–Кутты высокого порядка точности. Вычислительные эксперименты показали, что при температуре жидкости 293 К ударные волны в полости кавитационного пузырька в ходе его коллапса в ацетоне возникают при давлениях жидкости начиная с 5 бар, тогда как в случае тетрадекана – во всем исследуемом диапазоне. При температуре ацетона 419 К и тетрадекана 663 К ударные волны в пузырьке образуются, начиная с давлений жидкости 80 и 15 бар соответственно.

**Ключевые слова:** акустическая кавитация, динамика пузырька, коллапс пузырька, сходящиеся ударные волны

### Введение

Особенностью радиальных колебаний пузырьков в жидкости является возможность сильной кумуляции энергии при их высокоскоростном коллапсе, в результате чего в пузырьках могут достигаться очень высокие давления, плотности и температуры. С этим, в частности, связано более интенсивное протекание химических реакций в полости пузырьков [1], их свечение [2, 3], образование наноалмазов при кавитации бензола [4], толуола [5], смеси этанол–анилин [6] и т. д. Сжатие парогазовой среды в пузырьке может происходить как с образованием в полости пузырька сходящихся ударных волн [7, 8], так и без их возникновения [9, 10]. Ударные волны в ходе сферического схождения вызывают наиболее сильный рост термодинамических параметров в полости пузырька [2, 8, 11]. Поэтому проблема прогнозирования сценария сжатия среды в пузырьке в ходе коллапса в конкретной жидкости при определенных условиях является актуальной.

Полученный в [12] критерий позволяет с использованием только данных с поверхности пузырька оценивать возможность возникновения ударной волны в пузырьке и предсказывать время и место ее образования. Выполненное в [12] сравнение с результатами прямого численного моделирования динамики коллапсирующего пузырька с использованием полной гидродинамической модели показало удовлетворительную точность полученных оценок. В [12] продемонстрирована также сильная зависимость сценария сжатия среды в пузырьке от молекулярной массы вещества и показателя адиабаты и от таких параметров коллапса пузырька, как давление жидкости, ее температура, начальный радиус пузырька. В [12, 13] показано, что для образования ударных волн в коллапсирующем кавитационном пузырьке ацетон является значительно более благоприятной средой по сравнению с водой.

В [14] показано, что при использовании критерия работы [12] значения термодинамических параметров для пара на границе кавитационного пузырька и характеристики движения границы можно определять, решая задачу коллапса пузырька в значительно более простой по сравнению с использованной в [12] математической постановке. В частности, согласно [14] изменение радиуса пузырька можно находить из уравнения Рэлея – Плессета, распределение термодинамических параметров пара в пузырьке можно принять однородным с описанием его состояния уравнением типа Ван-дер-Ваальса. В [14] приведены результаты оценки места возникновения ударных волн в воде, ацетоне и тетрадекане при вариации давления жидкости от 1 до 100 бар, а температуры – от 293 до 313 К.

Настоящая работа является продолжением работы [14]. Как и в [14], для ацетона и тетрадекана исследуется возможность возникновения ударных волн в коллапсирующем пузырьке при вариации давления жидкости от 1 до 100 бар. Однако в отличие от [14] рассматривается значительно более широкий диапазон температур жидкости – от 293 К до близких к критическим (до 419 К в ацетоне и 663 К в тетрадекане).

### 1. Постановка задачи

Рассматривается коллапс одиночного сферического кавитационного пузырька в ацетоне и тетрадекане за счет перепада между начальными давлениями в пузырьке и окружающей жидкости. В начале коллапса (время  $t = 0$ ) температура  $T$  жидкости и пара всюду равна  $T_0$ , давление жидкости на большом удалении от пузырька равно  $p_0$ , давление пара  $p_b$  – давлению насыщения  $p_S(T)$  при  $T = T_0$ . Радиус пузырька  $R$  при  $t = 0$  равен 500 мкм, скорость пара в пузырьке и окружающей жидкости равна нулю. Давление жидкости  $p_0$  варьируется в диапазоне от 1 до 100 бар, а температура  $T_0$  – в диапазоне от 293 К до близких критическим значениям (до 419 К в ацетоне и 663 К в тетрадекане). Исследуется возможность возникновения ударных волн в полости кавитационного пузырька в ходе его коллапса.

Используется математическая модель, в которой жидкость предполагается слабосжимаемой, пар с однородным распределением термодинамических параметров – испытывающим адиабатическое сжатие. Изменение радиуса пузырька  $R$  описывается уравнением Рэлея – Плессета

$$\left(1 - \frac{\dot{R}}{c_l}\right) R\ddot{R} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\dot{R}}{3c_l}\right) \dot{R}^2 = \left(1 + \frac{\dot{R}}{c_l}\right) \frac{p_b - p_0}{\rho_l} + \frac{R}{c_l} \frac{\dot{p}_b - \dot{p}_0}{\rho_l}, \quad (1)$$

где  $c_l$  – скорость звука в жидкости,  $\rho_l$  – плотность жидкости.

Давление пара в пузырьке  $p_b$  описывается модифицированным уравнением состояния Ван-дер-Ваальса [14]

$$p_b = (p_{b,0} + A\rho_{b,0}^\alpha) \left( \frac{\rho_{b,0}^{-1} - B}{\rho_b^{-1} - B} \right)^\gamma - A\rho_b^\alpha, \quad (2)$$

где  $\rho_{b,0}$ ,  $\rho_b$  – начальная и текущая плотности пара в пузырьке,  $\gamma$  – показатель адиабаты,  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha$  – константы, определяемые следующими выражениями

$$A = \frac{V_{cr}^{\alpha+1} R_g T_{cr}}{\alpha(V_{cr} - B)^2}, \quad B = V_{cr} - \frac{2V_{cr}}{\alpha + 1},$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{4V_{cr} p_{cr}}{R_g T_{cr}} + \sqrt{\left( \frac{4V_{cr} p_{cr}}{R_g T_{cr}} \right)^2 + 4} \right), \quad V_{cr} = \frac{1}{\rho_{cr}}, \quad R_g = \frac{R_{ug}}{M}, \quad (3)$$

$T_{cr}$ ,  $p_{cr}$ ,  $\rho_{cr}$  – критические значения температуры, давления и плотности,  $R_{ug}$ ,  $R_g$  – универсальная и индивидуальная газовые постоянные,  $M$  – молекулярная масса пара.

Для решения системы уравнений (1)–(3) используется метод Рунге–Кутты высокого порядка точности с автоматическим выбором шага по времени [15].

## 2. Методика оценки возникновения ударных волн

Для оценки возникновения ударных волн в коллапсирующем пузырьке применяется критерий работы [12], согласно которому ударная волна образуется в случае ускоренного коллапса пузырька при выполнении условия

$$\min_t = \frac{\Delta R_{sh}^*}{R} < 1, \quad (4)$$

где  $\Delta R_{sh}^*$  – расстояние от межфазной границы до места возникновения в пузырьке ударной волны. Если  $\Delta R_{sh}^* < R$ , ударная волна успевает возникнуть в пузырьке в ходе его коллапса. В противном случае образования ударной волны не будет.

Величина  $\Delta R_{sh}^*$  определяется из выражения

$$\Delta R_{sh}^* \approx - \left( 1 - \frac{\dot{R}}{c} \right) \frac{c^2}{k\ddot{R}}, \quad k = 1 + \frac{\rho c'(\rho)}{c}, \quad (5)$$

где  $\rho$ ,  $c$  – плотность пара и скорость звука в паре вблизи поверхности пузырька,  $c'(\rho)$  – частная производная от скорости звука по плотности при постоянной энтропии. В ходе ускоренного коллапса пузырька радиальные скорость  $\dot{R}$  и ускорение  $\ddot{R}$  отрицательны ( $\dot{R} < 0$ ,  $\ddot{R} < 0$ ).

Особенностью описанной методики оценки возникновения ударных волн является то, что значения участвующих в (5) параметров берутся на поверхности пузырька. В работе [14] показано, что с использованием величин, входящих в (5), путем решения системы (1)–(3) можно получать удовлетворительное согласование поведения параметра  $\Delta R_{sh}^*/R$  с поведением, которое определяется с применением полной гидродинамической модели с реалистичными широкодиапазонными уравнениями состояния.

## 3. Результаты

Сравнение коллапса пузырьков в воде, ацетоне и тетрадекане, проведенное в [14] с использованием модели (1)–(5) для температур, близких к нормальным условиям

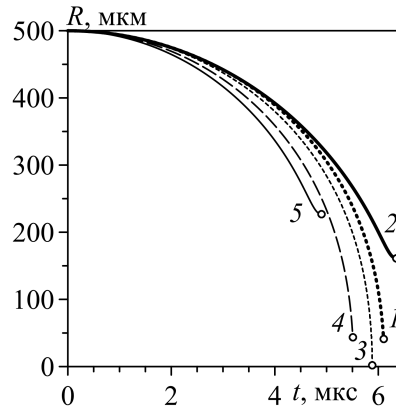


Рис. 1. Изменение в ходе коллапса кавитационного пузырька в ацетоне (кривые 1, 2) и тетрадекане (кривые 3–5) радиуса  $R$  при  $p_0 = 50$  бар и начальной температуре жидкости  $T_0 = 293$  (кривые 1, 3), 419 (кривая 2), 450 (кривая 4) и 663 К (кривая 5). Кружочками отмечены значения минимальных радиусов  $R_{\min}$

(при  $T_0 = 293$  и 313 К), показало, что при  $1 \leq p_0 \leq 100$  бар в воде ударные волны в кавитационном пузырьке не возникают. В кавитационном пузырьке в ходе его коллапса в ацетоне ударные волны возникают при  $p_0 > 5$  бар в случае  $T_0 = 293$  К и при  $p_0 \geq 10$  бар в случае  $T_0 = 313$  К. В тетрадекане же ударные волны образуются при всех  $p_0$ , то есть тетрадекан для возникновения ударных волн является наиболее благоприятной средой. Однако при таких температурах масса пара в пузырьке радиусом  $R_0 = 500$  мкм в тетрадекане в состоянии насыщения оказывается на несколько порядков меньше, чем в пузырьке в ацетоне. Так, при  $T_0 = 293$  К начальное давление и плотность пара в пузырьках в ацетоне и тетрадекане соответственно равны 0.24 бар,  $0.61 \text{ кг/м}^3$  и  $6.2 \cdot 10^{-6}$  бар,  $5.1 \cdot 10^{-5} \text{ кг/м}^3$ . Минимальный радиус пузырька в финале коллапса в тетрадекане оказывается также на порядки меньше, чем в ацетоне. Увеличения массы пара в пузырьке можно достичь повышением начальной температуры жидкости, что, в свою очередь, ухудшает условия возникновения ударных волн [12].

На рис. 1 приведены зависимости  $R(t)$  в ходе коллапса кавитационного пузырька в ацетоне и тетрадекане при давлении жидкости на значительном удалении от пузырька  $p_0 = 50$  бар при начальной температуре жидкости из диапазона от комнатных до близких к критической. Для сравнения ацетона и тетрадекана выбирается ряд характерных температур. При  $T_0 = 450$  К начальное давление и плотность пара в пузырьке в тетрадекане соответственно равны 0.11 бар и  $0.63 \text{ кг/м}^3$ , что является близким к соответствующим значениям для ацетона при  $T_0 = 293$  К. Минимальные радиусы пузырька в обоих случаях оказываются близкими (кружки на кривых 1 и 4).

При  $T_0 = 663$  К изменение давления пара тетрадекана с ростом плотности согласно уравнению состояния (2) в случае адиабатического сжатия монотонно возрастает. При этом начальное давление и плотность пара тетрадекана соответственно равны 10.4 бар и  $72.4 \text{ кг/м}^3$ . Близкое давление насыщения у пара ацетона имеет место при  $T_0 = 419$  К (давление и плотность равны 10.3 бар и  $23.9 \text{ кг/м}^3$ ). Минимальные радиусы пузырька в обоих случаях оказываются сравнимыми (кружки на кривых 2 и 5 на рис. 1).

В ходе коллапса пузырька плотность пара  $\rho$  растет, а удельный объем  $v = 1/\rho$ , соответственно, падает. Из рис. 2 видно, что соответствующие (2) адиабатические

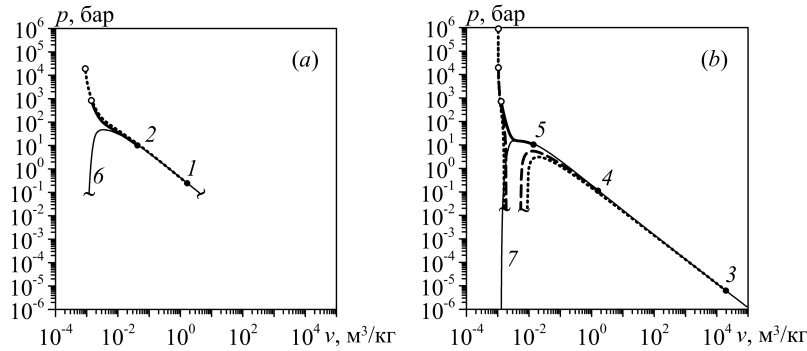


Рис. 2. Адиабаты  $p(v)$  в ацетоне (а) и тетрадекане (б) при  $p_0 = 50$  бар и начальной температуре жидкости  $T_0 = 293$  (кривые 1, 3), 419 (кривая 2), 450 (кривая 4), 663 К (кривая 5) и линии насыщения (кривые 6, 7). Точками и кружочками отмечены значения при  $R = R_0$  и  $R = R_{\min}$  соответственно

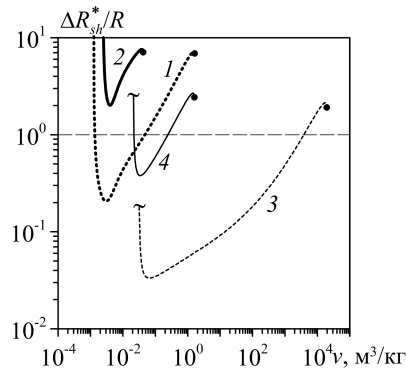


Рис. 3. Изменение в ходе коллапса кавитационного пузырька параметра  $\Delta R_{sh}^*/R$  в ацетоне (кривые 1, 2) и тетрадекане (кривые 3, 4) при  $p_0 = 50$  бар и  $T_0 = 293$  (кривые 1, 3), 419 К (кривая 2) и 450 К (кривая 4)

зависимости давления  $p$  от удельного объема  $v$  (или от плотности  $\rho$ ) в ацетоне имеют монотонный характер, поскольку не заходят в метастабильную двухфазную область. В тетрадекане же для температур  $T_0 = 293$  и 450 К адиабаты  $p(v)$  немонотонны в метастабильной двухфазной области. Только при температурах, близких к  $T_0 = 663$  К, адиабата  $p(v)$  становится монотонной (при  $T_0 = 643$  К при увеличении плотности пара уже имеет место «нефизичный» участок уменьшения давления в метастабильной двухфазной области). Отметим, что для каждой из температур зависимости  $p(v)$  при различных давлениях жидкости  $p_0$  отличаются от представленного на рис. 2 случая  $p_0 = 50$  бар только достигаемым максимальным значением.

Поскольку в критерии (4) используется скорость звука, его можно применять только на участке монотонного возрастания  $p(v)$ , то есть в рамках принятой математической модели в ацетоне в ходе всего коллапса пузырька, а в тетрадекане для  $T_0 = 293$  и 450 К только на начальной стадии коллапса до того момента, когда с уменьшением  $v$  давление  $p(v)$  начинает падать, и лишь при  $T_0 = 663$  К в ходе всего коллапса.

На рис. 3 для случая  $p_0 = 50$  бар представлены зависимости параметра  $\Delta R_{sh}^*/R$  от удельного объема  $v$  в ходе коллапса пузырька в ацетоне при  $T_0 = 293$  и 419 К и тетрадекане при  $T_0 = 293$  и 450 К. Как видно, в пузырьке в ацетоне при  $T_0 =$

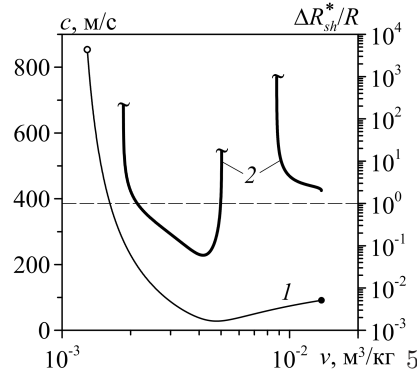


Рис. 4. Изменение в ходе коллапса кавитационного пузырька в тетрадекане скорости звука в паре  $c$  (кривая 1) и параметра  $\Delta R_{sh}^*/R$  (кривые 2) при  $p_0 = 50$  бар и  $T_0 = 663$  К

$= 293$  К ударная волна возникает, а при  $T_0 = 419$  К нет. В тетрадекане в обоих случаях ( $T_0 = 293$  и  $450$  К) ударные волны успевают сформироваться, причем на начальной стадии коллапса пузырька. Различие между случаями разных температур объясняется разным радиальным ускорением – для меньших температур коллапс более глубокий и, как следствие, более скоростной. Остальные параметры из (5) влияют несущественно.

На рис. 4 для коллапса пузырька в тетрадекане при  $p_0 = 50$  бар и  $T_0 = 663$  К представлены зависимости скорости звука  $c$  и параметра  $\Delta R_{sh}^*/R$  от удельного объема  $v$ . На начальной стадии коллапса значение  $c$  падает, производная  $c'(\rho)$  отрицательна. Как следствие, в (5) параметр  $\kappa$  уменьшается до нуля и  $\Delta R_{sh}^*$  неограниченно возрастает, несмотря на рост модуля радиального ускорения. Когда параметр  $\kappa$  и, как следствие, значение  $\Delta R_{sh}^*$  становятся отрицательными, ударная волна в принципе не может возникнуть (наблюдается волна разряжения). Вблизи момента достижения параметром  $c$  минимума значение  $c'(\rho)$ , оставаясь отрицательным, возрастает настолько, что параметры  $\kappa$  и, как следствие,  $\Delta R_{sh}^*$  снова становятся положительными. К этой стадии модуль радиального ускорения  $\ddot{R}$  уже достигает больших значений. На финальной стадии понижения скорости звука  $c$  и на самой начальной стадии ее возрастания значение  $\Delta R_{sh}^*$ , как видно, резко уменьшается. При достаточном росте значения  $c$  величина  $\Delta R_{sh}^*$  тоже начинает увеличиваться. При этом минимальное значение  $\Delta R_{sh}^*$  оказывается существенно меньше единицы, что согласно критерию (4) свидетельствует о возникновении условий для образования ударной волны в пузырьке вблизи его границы.

На рис. 5 показаны зависимости от давления жидкости  $p_0$  минимальных значений параметра  $\Delta R_{sh}^*/R$  в ацетоне и тетрадекане. Из рис. 5 следует, что согласно критерию (4) ударная волна в кавитационном пузырьке в ацетоне возникает при  $p_0 \geq 5$  бар для  $T_0 = 293$  К и лишь при  $p_0 \geq 80$  бар для  $T_0 = 419$  К. В кавитационном пузырьке в тетрадекане ударные волны при  $T_0 = 293$  К образуются при любом  $p_0$ , а при  $T_0 = 450$  и  $663$  К – при  $p_0 \geq 10$  бар и  $p_0 \geq 15$  бар. При этом следует помнить, что минимальные значения параметра  $\Delta R_{sh}^*/R$ , полученные с применением математической модели (1)–(3) для коллапса пузырька в тетрадекане при  $T_0 = 450$  К, относятся только к начальной стадии коллапса, когда зависимость  $p(v)$  возрастает с уменьшением  $v$ . Это означает, что применение уравнения состояния (3) не позволяет оценить возможность возникновения ударной волны при изменении  $p(v)$  в большей части метастабильной двухфазной области. Поэтому, строго говоря, из критерия (4) не следует, что ударная волна в пузырьке в тетрадекане при  $T_0 = 450$  К обязательно не возникнет при  $p_0 < 10$  бар.

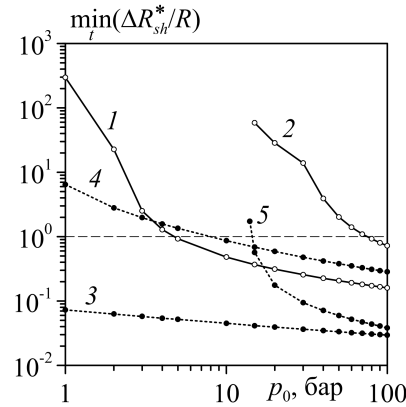


Рис. 5. Минимальные значения параметра  $\Delta R_{sh}^*/R$ , достигаемые при коллапсе кавитационного пузырька в ацетоне (кривые 1, 2) и тетрадекане (кривые 3–5), в зависимости от давления жидкости  $p_0$  при ее температуре  $T_0 = 293$  (кривые 1, 3), 419 (кривая 2), 450 (кривая 4) и 663 К (кривая 5). Штриховая линия показывает значение  $\Delta R_{sh}^*/R$ , равное единице

### Заключение

Проведена оценка возможности возникновения сходящихся ударных волн в кавитационном пузырьке с начальным радиусом 500 мкм при его коллапсе в ацетоне и тетрадекане при вариации давления жидкости  $p_0$  от 1 до 100 бар и ее температуры  $T_0$  от 293 К до близких к критическим (до 419 К в ацетоне и 663 К в тетрадекане). Движение межфазной границы находится из численного решения уравнения Рэлея–Плессета, полученного в предположении, что эффекты теплопроводности и испарения-конденсации несущественны, пар в пузырьке имеет однородное распределение термодинамических параметров, изменение которых описывается уравнением состояния типа Ван-дер-Ваальса. Вычислительные эксперименты с использованием данной упрощенной модели показали, что при коллапсе кавитационного пузырька в ацетоне ударные волны в его полости при  $T_0 = 293$  К возникают при  $p_0 > 5$  бар, а при  $T_0 = 419$  К – при  $p_0 \geq 80$  бар. В тетрадекане при  $T_0 = 293$ , 450 и 663 К в ходе коллапса пузырька ударные волны в его полости образуются при всех  $p_0$ , при  $p_0 \geq 10$  бар и при  $p_0 \geq 15$  бар соответственно. Таким образом, можно ожидать, что даже при очень высоких температурах (при которых масса пара в пузырьке оказывается очень большой) ударные волны в пузырьке в тетрадекане будут возникать при значительно меньших давлениях жидкости, чем в пузырьке в ацетоне.

**Благодарности.** Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01135).

### Литература

1. *Colmenares J.C., Chatel G.* Sonochemistry. From Basic Principles to Innovative Applications. – Springer, 2017. – 281 p.
2. *Moss W.C., Clarke D.B., Young D.A.* Calculated pulse widths and spectra of a single sonoluminescing bubble // Science. – 1997. – V. 276. – P. 1398–1401. – doi: 10.1126/science.276.5317.1398.
3. *Маргулис М.А.* Сонолюминесценция // Усп. физ. наук – 2000. – Т. 170, № 3. – С. 263–287.

4. Галимов Э.М., Кудин А.М., Скоробогатский В.Н., Плотниченко В.Г., Бондрев О.Л., Зарубин Б.Г., Страздовский В.В., Аронин А.С., Фисенко А.В., Быков И.В., Баринов А.Ю. Экспериментальное подтверждение синтеза алмаза в процессе кавитации // Докл. РАН. – 2004. – Т. 395, № 2. – С. 187–191.
5. Воропаев С.А., Шкинев В.М., Днестровский А.Ю., Пономарева Е.А., Аронин А.С., Бондарев О.Л., Страздовский В.В., Скоробогатский В.Н., Елисеев А.А., Спиваков Б.Я., Галимов Э.М. Особенности синтеза алмазоподобных наночастиц в толуоле при кавитации // Докл. РАН. – 2012. – Т. 446, № 4. – С. 388–392.
6. Воропаев С.А., Днестровский А.Ю., Скоробогатский В.Н., Аронин А.С., Шкинев В.М., Бондарев О.Л., Страздовский В.В., Елисеев А.А., Пономарева Е.А., Душенко Н.В., Галимов Э.М. Экспериментальное изучение процессов образования наноалмазов и фуллеренов при кавитации в смеси этанол–анилин // Докл. РАН. – 2014. – Т. 459, № 2. – С. 162–165.
7. Taleyarkhan R.P., West C.D., Cho J.S., Lahey R.T. (Jr.), Nigmatulin R.I., Block R.C. Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation // Science. – 2002. – V. 295. – P. 1868–1873. – doi: 10.1126/science.1067589.
8. Nigmatulin R.I., Akhatov I.Sh., Topolnikov A.S., Bolotnova R.Kh., Vakhitova N.K., Lahey R.T. (Jr.), Taleyarkhan R.P. The theory of supercompression of vapor bubbles and nano-scale thermonuclear fusion // Phys. Fluids. – 2005. – V. 17, No 10. – Art. 107106, P. 1–31. – doi: 10.1063/1.2104556.
9. Хабеев Н.С. К вопросу об использовании гомобаричности в динамике пузырьков // Механика жидкости и газа. – 2010. – № 2. – С. 47–50.
10. Shaw S.J., Spelt P.D.M. Shock emission from collapsing gas bubbles // J. Fluid Mech. – 2010. – V. 646. – P. 363–373. – doi: 10.1017/S0022112009993338.
11. Bass A., Ruuth S.J., Camara C., Merriman B., Putterman, S. Molecular dynamics of extreme mass segregation in a rapidly collapsing bubble // Phys. Rev. Lett. – 2008. – V. 101, No 23. – Art. 234301, P. 1–4. – doi: 10.1103/PhysRevLett.101.234301.
12. Нигматулин Р.И., Аганин А.А., Топорков Д.Ю., Ильгамов М.А. Образование сходящихся ударных волн в пузырьке при его сжатии // Докл. РАН. – 2014. – Т. 458, № 3. – С. 282–286.
13. Аганин А.А., Ильгамов М.А., Топорков Д.Ю. Зависимость сжатия пара в кавитационных пузырьках в воде и ацетоне от давления жидкости // Вестн. Башкир. ун-та. – 2015. – Т. 20, № 3. – С. 807–812.
14. Khalitova T.F., Toporkov D.Yu. Numerical investigation of strong compression of vapor inside spherical cavitation bubbles // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2016. – V.158, No 1. – Art. 012052, P. 1–5. – doi: 10.1088/1757-899X/158/1/012052.
15. Хайпер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.

Поступила в редакцию  
25.05.17

---

**Аганин Александр Алексеевич**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН  
ул. Лобачевского, д. 2/31, г. Казань, 420111, Россия  
E-mail: [aganin@kfti.knc.ru](mailto:aganin@kfti.knc.ru)



**Топорков Дмитрий Юрьевич**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН  
ул. Лобачевского, д. 2/31, г. Казань, 420111, Россия  
E-mail: *top.dmr@gmail.com*

---

---

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.  
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI  
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2017, vol. 159, no. 3, pp. 271–281

---

---

### Estimating the Appearance of Shock Waves in the Cavitation Bubble during Its Collapse

*A.A. Aganin\**, *D.Yu. Toporkov\*\**

*Institute of Mechanics and Engineering,  
Kazan Science Center, Russian Academy of Sciences, Kazan, 420111 Russia  
E-mail: \*aganin@kfti.knc.ru, \*\*top.dmr@gmail.com*

Received May 25, 2017

#### Abstract

The possibility of appearance of convergent shock waves inside a cavitation bubble during its collapse in acetone and tetradecane has been estimated. The liquid pressure varied from 1 to 100 bar, its temperature changed from 293 K to the values of 419 K for acetone and 663 K for tetradecane, respectively, which are close to the critical ones. With these values, the saturated pressure of vapor of both liquids was equal to 10 bar. The initial radius of the bubble was 500  $\mu\text{m}$ . A simplified mathematical formulation without taking into account thermal conductivity and evaporation-condensation has been used. The distribution of thermodynamic parameters of vapor in the bubble has been assumed to be homogeneous, the state of vapor has been described by the Van der Waals type equation, the weak compressibility of the liquid at a large distance from the bubble has been taken into consideration. Under these assumptions, the bubble dynamics has been determined by solving the second-order ordinary differential Rayleigh–Plesset equation. The possibility of appearance of a shock wave in the bubble during its collapse has been estimated by a criterion including only the vapor thermodynamic parameters from the bubble boundary and some characteristics of its motion. That criterion also makes it possible to predict the time and place of shock wave formation. The solution to the Rayleigh–Plesset equation has been obtained numerically by the highly accurate Runge–Kutta method. According to the numerical experiments, if the liquid temperature is 293 K, shock waves inside the cavitation bubble arise at the liquid pressures starting from 5 bar in the case of acetone or appear in the entire investigated range in the case of tetradecane. At the acetone temperature of 419 K and the tetradecane temperature of 663 K, shock waves are formed at the liquid pressures starting from 80 and 15 bar, respectively.

**Keywords:** acoustic cavitation, bubble dynamics, bubble collapse, converging shock waves

**Acknowledgments.** This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 17-11-01135).

### Figure Captions

Fig. 1. Variation in the radius  $R$  during the collapse of the cavitation bubble in acetone (curves 1, 2) and tetradecane (curves 3–5) at  $p_0 = 50$  bar and the initial liquid temperature  $T_0 = 293$  K (curves 1, 3), 419 (curve 2), 450 (curve 4), and 663 K (curve 5). The circles indicate the values of the minimum radii  $R_{\min}$ .

Fig. 2. The adiabats  $p(v)$  in acetone (a) and tetradecane (b) at  $p_0 = 50$  bar and the initial liquid temperature  $T_0 = 293$  (curves 1, 3), 419 (curve 2), 450 (curve 4), and 663 K (curve 5) and the saturation lines (curves 6, 7). The points and circles indicate the values for  $R = R_0$  and  $R = R_{\min}$ , respectively.

Fig. 3. Variation in the parameter  $\Delta R_{\text{sh}}^*/R$  during the collapse of the cavitation bubble in acetone (curves 1, 2) and tetradecane (curves 3, 4) at  $p_0 = 50$  bar and  $T_0 = 293$  (curves 1, 3), 419 (curve 2) and 450 K (curve 4).

Fig. 4. Variation in the speed of sound in the vapor  $c$  (curve 1) and the parameter  $\Delta R_{\text{sh}}^*/R$  (curve 2) during the collapse of the cavitation bubble in tetradecane at  $p_0 = 50$  bar and  $T_0 = 663$  K.

Fig. 5. The minimum values of the parameter  $\Delta R_{\text{sh}}^*/R$  obtained during the collapse of the cavitation bubble in acetone (curves 1, 2) and tetradecane (curves 3–5), depending on the liquid pressure  $p_0$  at the liquid temperature  $T_0 = 293$  (curves 1, 3), 419 (curve 2), 450 (curve 4), and 663 K (curve 5). The dashed line shows the value of  $\Delta R_{\text{sh}}^*/R$ , equal to one.

### References

1. Colmenares J.C., Chatel G. Sonochemistry. From Basic Principles to Innovative Applications. Springer. 2017. 281 p.
2. Moss W.C., Clarke D.B., Young D.A. Calculated pulse widths and spectra of a single sonoluminescing bubble. *Science*, 1997, vol. 276, pp. 1398–1401. doi: 10.1126/science.276.5317.1398.
3. Margulis M.A. Sonoluminescence. *Phys.-Usp.*, 2000, vol. 43, no. 3, pp. 259–282.
4. Galimov E.M., Kudin A.M., Skorobogatskii V.N., Plotnichenko V.G., Bondarev O.L., Zarubin B.G., Strazdovskii V.V., Aronin A.S., Fisenko A.V., Bykov I.V., Barinov A.Yu. Experimental corroboration of the synthesis of diamond in the cavitation process. *Dokl. Phys.*, 2004, vol. 49, no. 3, pp. 150–153. doi: 10.1134/1.1710678.
5. Voropaev S.A., Shkinev V.M., Dnestrovskii A.Yu., Ponomareva E.A., Aronin A.S., Bondarev O.L., Strazdovskii V.V., Skorobogatskii V.N., Eliseev A.A., Spivakov B.Ya., Galimov E.M. Synthesis of diamondlike nanoparticles under cavitation in toluene. *Dokl. Phys.*, 2012, vol. 57, no. 10, pp. 373–377. doi: 10.1134/S1028335812100047.
6. Voropaev S.A., Dnestrovskii A.Yu., Skorobogatskii V.N., Aronin A.S., Shkinev V.M., Bondarev O.L., Strazdovskii V.V., Eliseev A.A., Ponomareva E.A., Dushenko N.V., Galimov E.M. Experimental study into the formation of nanodiamonds and fullerenes during cavitation in an ethanol-aniline mixture. *Dokl. Phys.*, 2014, vol. 59, no. 11, pp. 503–506. doi: 10.1134/S102833581411007X.
7. Taleyarkhan R.P., West C.D., Cho J.S., Lahey R.T.Jr., Nigmatulin R.I., Block R.C. Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation. *Science*, 2002, vol. 295, no. 5561, pp. 1868–1873. doi: 10.1126/science.1067589.
8. Nigmatulin R.I., Akhatov I.Sh., Topolnikov A.S., Bolotnova R.Kh., Vakhitova N.K., Lahey R.T.Jr., Taleyarkhan R.P. Theory of supercompression of vapor bubbles and nano-scale thermonuclear fusion. *Phys. Fluids*, 2005, vol. 17, art. 107106. doi: 10.1063/1.2104556.
9. Khabeev N.S. The question of the uniform-pressure condition in bubble dynamics. *Fluid Dyn.*, 2010, vol. 45, no. 2, pp. 208–210. doi: 10.1134/S0015462810020055.

10. Shaw S.J., Spelt P.D.M. Shock emission from collapsing gas bubbles. *J. Fluid Mech.*, 2010, vol. 646, pp. 363–373. doi: 10.1017/S0022112009993338.
11. Bass A., Ruuth S.J., Camara C., Merriman B., Putterman S. Molecular dynamics of extreme mass segregation in a rapidly collapsing bubble. *Phys. Rev. Lett.*, 2008, vol. 101, no. 23, art. 234301. doi: 10.1103/PhysRevLett.101.234301.
12. Nigmatulin R.I., Aganin A.A., Toporkov D.Yu., Il'gamov M.A. Formation of convergent shock waves in a bubble upon its collapse. *Dokl. Phys.*, 2014, vol. 59, no. 9, pp. 431–435. doi: 10.1134/S1028335814090109.
13. Aganin A.A., Il'gamov M.A., Toporkov D.Yu. Dependence of vapor compression inside cavitation bubbles in water and acetone on the pressure of liquid. *Vestn. Bashk. Univ.*, 2015, vol. 20, no. 3, pp. 807–812. (In Russian)
14. Khalitova T.F., Toporkov D.Yu. Numerical investigation of strong compression of vapor inside spherical cavitation bubbles. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 2016, vol. 158, no. 1, no. 012052, pp. 1–5, doi: 10.1088/1757-899X/158/1/012052.
15. Hairer E., Norsett S., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations. Nonstiff Problems. Springer, Berlin. 1993. p. 528.

---

⟨ **Для цитирования:** Аганин А.А., Топорков Д.Ю. Оценка возникновения ударных волн в кавитационном пузырьке при его коллапсе // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 3. – С. 271–281. ⟩

⟨ **For citation:** Aganin A.A., Toporkov D.Yu. Estimating the appearance of shock waves in the cavitation bubble during its collapse. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 3, pp. 271–281. (In Russian) ⟩