ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
2. А. Ф. Тиман. Теория приближения функций действительного переменного. М., Физматгиз, 1960.
3. С. Б. Стечкин. О порядке наилучших приближений непрерывных функций. Изв. АН СССР, сер. мат., т. 15, № 3, 1951, 219—242.
4. И. П. Натансон. Конструктивная теория функций. М. — Л., Гостехиздат, 1949.
5. В. Л. Гончаров. Теория интерполирования и приближения функций. М., Гостехиздат, 1954.
6. В. В. Иванов. Методы приближенного решения сингулярных интегральных уравнений. Серия „Итоги науки“, М., Изд-во АН СССР, 1965, 125—177.
7. С. Г. Михлин. Сингулярные интегральные уравнения. УМН, том III, вып. 3 (25), 1948.
8. Б. Г. Габдулхаев. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и их некоторые применения. Сб. „Функциональный анализ и теория функций“, № 3, 7—17 Изд-во КГУ, Казань, 1965. (1966)
9. Б. Г. Габдулхаев. О приближенном решении сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур. Изв. вузов. Математика, № 5 (48), 43—51, 1965.
10. Б. Г. Габдулхаев. О приближенном решении сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур. Сб. „Доклады третьей Сибирской конференции по математике и механике.“ Томск, изд-во ТГУ. 92—94. 1964.

КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Том 127, кн. 1 *Ученые записки* *1967*

Б. Г. Габдулхаев

ОБ ОДНОМ ОБЩЕМ КВАДРАТУРНОМ ПРОЦЕССЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В данной работе для сингулярного интеграла с ядром типа Гильберта

$$Ix = (Ix)(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\, x(\sigma)\, d\sigma \tag{0.1}$$

предлагается один общий квадратурный процесс, основанный на интерполировании плотности $x(s)$ по корням уравнения

$$\sin(ns + \omega) = 0 \quad (n = 1,\ 2, \ldots), \tag{0.2}$$

где ω — произвольное вещественное число. Для рассматриваемого квадратурного процесса указываются эффективные оценки погрешности.

§ 1. Вывод квадратурных формул

1°. Сначала рассмотрим тригонометрическое интерполирование по корням уравнения (0.2), т. е. по узлам

$$s_j = s_j^{(n)} = \frac{j\pi}{n} - \frac{\omega}{n} \left(j = \overline{0,\ 2n-1} \right). \tag{1.1}$$

Известно [1], что тригонометрический полином степени n, совпадающий в точках (1.1) с непрерывной 2π-периодической функцией $x = x(s)$, имеет вид

$$Lx = L_n x = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} x_k D_n^*(s - s_k) + K\sin(ns + \omega), \tag{1.2}$$

где $x_j = x(s_j)$, K — произвольная постоянная и

$$D_n^*(s) = \frac{1}{2}\sin ns \operatorname{ctg}\frac{s}{2} - \tag{1.3}$$

так называемое видоизмененное ядро Дирихле.

Определяя в (1.2) постоянную K из каких-либо соображений, можно найти единственный тригонометрический полином с требуемым свойством. Эту постоянную можно определить, например, задавая значение $x(s)$ еще в одной, $2n+1$-точке или же понижая порядок интерполирующего полинома. Однако можно поступить и по-другому. А именно, из семейства полиномов (1.2) выделим тот, для которого функционал $f(Lx)=\|Lx\|_{L_2}$ минимален (при каждом фиксированном n). Известно [1], что минимум существует и достигается при $K=0$. Интерполяционную формулу, определяемую из этих условий, обозначим через

$$Px = P_n x = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} x_k D_n^*(s-s_k) \tag{1.4}$$

и в дальнейшем, говоря об интерполировании по корням уравнения (0.2), будем иметь в виду именно эту простую формулу.

Отметим, что формула (1.4) точна для любого тригонометрического полинома $T_m(s)$ порядка не выше $n-1$. Действительно, для такого полинома в силу формулы (1.2) справедливо тождество

$$T_m(s) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} T_m(s_k) D_n^*(s-s_k) + K\sin(ns+\omega). \tag{1.2'}$$

Так как $D_n^*(s)$ является четным полиномом порядка n, то полином $D_n^*(s-s_k)$ не содержит члена с $\sin n(s-s_k)$, т. е. члена с $\sin(ns+\omega)$. Поэтому в выражении (1.2′) последнее слагаемое равно нулю, и тем самым мы приходим к формуле (1.4) для полинома $T_m(s)$ $(m \leqslant n-1)$.

2°. Далее, поступая так же, как и в работе [2], за квадратурную формулу для интеграла (0.1) примем выражение

$$\tilde{I}x = IPx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} x_k ID_n^*(s-s_k). \tag{1.5}$$

Из конструктивной теории функций известно [3], что сингулярный интеграл IT_n для любого тригонометрического полинома $T_n(s)$ определяет с точностью до знака полином к нему сопряженный. Поэтому $(ID_n^*)(s) = -\tilde{D}_n^*(s)$, где $\tilde{D}_n^*(s)$ — измененное сопряженное ядро Дирихле. Тогда, учитывая соотношение $\tilde{D}_n^*(s) = (1-\cos ns)\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{s}{2}$ (см. [1]), из (1.5) получаем

следующую приближенную формулу

$$\tilde{I}x = -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} x_k[1-\cos n(s-s_k)]\operatorname{ctg}\frac{s-s_k}{2} = $$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} x_k \sin^2 n\frac{s-s_k}{2}\operatorname{ctg}\frac{s_k-s}{2}. \tag{1.6}$$

Теперь найдем значения $(\tilde{I}x)(s)$ в узловых точках (1.1). Имеем

$$(\tilde{I}x)(s_j) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} x_k[1-\cos n(s_j-s_k)]\operatorname{ctg}\frac{s_k-s_j}{2} = $$
$$= \frac{1}{2n}\sum_{k=0,\ k\neq j}^{2n-1} x_k[1-(-1)^{k-j}]\operatorname{ctg}\frac{s_k-s_j}{2} = $$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} x_k\operatorname{ctg}\dfrac{s_k-s_j}{2}, & \text{если } k-j \text{ — нечетно,} \\ 0, & \text{если } k-j \text{ — четно.} \end{cases}$$

Итак, получена следующая квадратурная формула

$$(\tilde{I}x)(s_j) = \frac{1}{n}\sideset{}{'}\sum_{k=0}^{2n-1} x_k\operatorname{ctg}\frac{s_k-s_j}{2} = \frac{1}{n}\sideset{}{'}\sum_{k=0}^{2n-1} x\left(\frac{k\pi-\omega}{n}\right)\operatorname{ctg}\frac{(k-j)\pi}{2n}, \tag{1.7}$$

где штрих означает, что суммирование ведется только по тем k, для которых разность $k-j$ нечетна.

Формулу (1.7) можно записать и в несколько другой форме. Действительно, полагая $k-j=2m+1$, из (1.7) легко находим

$$(\tilde{I}x)(s_j) = \frac{1}{n}\sideset{}{'}\sum_{k=0}^{2n-1} x_k\operatorname{ctg}\frac{s_k-s_j}{2} = \frac{1}{n}\sideset{}{'}\sum_{k=-n}^{n-1} x_k\operatorname{ctg}\frac{s_k-s_j}{2} = $$
$$= \frac{1}{2n}\sum_{m=-n}^{n-1} x_{j+2m+1}\operatorname{ctg}\frac{2m+1}{2n}\pi. \tag{1.7'}$$

Поскольку

$$\sum_{m=-n}^{-1} x_{j+2m+1}\operatorname{ctg}\frac{2m+1}{2n}\pi = -\sum_{k=0}^{n-1} x_{j-2k-1}\operatorname{ctg}\frac{2k+1}{2n}\pi,$$

то, в силу (1.7′), формула (1.7) принимает вид

$$(\tilde{I}x)(s_j) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{j+2k+1} - x_{j-2k-1})\operatorname{ctg}\frac{2k+1}{2n}\pi, \tag{1.8}$$

где

$$x_j = x(s_j) = x\left(\frac{j\pi - \omega}{n}\right), \quad j = 0, \pm 1, \ldots$$

Таким образом, для вычисления сингулярного интеграла (0.1) получены весьма простые квадратурные формулы (1.6)—(1.8). Отметим, что эти формулы точны для тригонометрических полиномов порядка не выше $n - 1$. Это следует из сказанного в конце пункта 1°.

3°. Пусть теперь в качестве узлов принимаются корни уравнения $\sin(2ns + \omega) = 0$, т. е. точки

$$s_j = s_j^{(n)} = \frac{j\pi}{2n} - \frac{\omega}{2n}\ (j = \overline{0, 4n-1}). \tag{1.9}$$

Тогда квадратурная формула (1.7) принимает вид

$$(\tilde{I}x)(s_j) = \frac{1}{2n}{\sum_{k=0}^{4n-1}}' x_k \operatorname{ctg}\frac{s_k - s_j}{2} = \frac{1}{2n}{\sum_{k=0}^{4n-1}}' x\left(\frac{k\pi - \omega}{2n}\right)\operatorname{ctg}\frac{(k-j)\pi}{4n}. \tag{1.10}$$

Отсюда аналогично (1.8) при $j = 0, \pm 1, \ldots$ находим

$$(\tilde{I}x)(s_j) = \frac{1}{4n}\sum_{k=0}^{2n-1}(x_{j+2k+1} - x_{j-2k-1})\operatorname{ctg}\frac{2k+1}{4n}\pi. \tag{1.11}$$

Эту формулу можно преобразовать также к более простому виду. В самом деле, полагая $k = 2n - m - 1$, имеем

$$\sum_{k=n}^{2n-1}(x_{j+2k+1} - x_{j-2k-1})\operatorname{ctg}\frac{2k+1}{4n}\pi =$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1}(x_{j-2m+4n-1} - x_{j+2m-4n+1})\operatorname{ctg}\frac{4n-2m-1}{4n}\pi =$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1}(x_{j+2k+1} - x_{j-2k-1})\operatorname{ctg}\frac{2k+1}{4n}\pi.$$

Поэтому для интеграла (0.1) находим следующую квадратурную формулу:

$$(\tilde{I}x)(s_j) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{j+2k+1} - x_{j-2k-1})\operatorname{ctg}\frac{2k+1}{4n}\pi, \tag{1.12}$$

где $j = 0, \pm 1, \ldots$ и $x_j = x\left(\frac{j\pi - \omega}{2n}\right)$.

Очевидно, что формулы (1.10) — (1.12) точны для всех тригонометрических полиномов порядка не выше $2n - 1$.

4°. Теперь легко найдем соответствующие формулы для интеграла с ядром типа Коши вида

$$S\varphi = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t}, \tag{1.13}$$

где γ — окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Пусть $t = e^{is}$, $\varphi_k = \varphi(t_k)$ и

$$t_k = t_k^{(n)} = e^{is_k}, \quad s_k = \frac{k\pi}{n} - \frac{\omega}{n}(k = \overline{0, 2n-1}). \tag{1.14}$$

Тогда с помощью соотношения (1.3) из второй части заметки [4] и формулы (1.6) получаем следующую квадратурную формулу

$$S\varphi \approx \tilde{S}\varphi = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\varphi_k\left[1 + 2i\sin^2 n\frac{s - s_k}{2}\operatorname{ctg}\frac{s_k - s}{2}\right]. \tag{1.15}$$

Полагая здесь $t = t_j = e^{is_j}$ $(j = \overline{0, 2n-1})$, в силу (1.7) находим

$$(\tilde{S}\varphi)(t_j) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\beta_{jk}\varphi_k, \tag{1.16}$$

$$\beta_{jk} = \begin{cases} 1 - 2i\operatorname{ctg}\dfrac{s_k - s_j}{2}, & \text{если } k - j \text{ — нечетно,} \\ 1, & \text{если } k - j \text{ — четно.} \end{cases}$$

§ 2. Связь с другими результатами

Рассмотренные выше квадратурные процессы в некотором смысле можно считать общими. Действительно, придавая ω произвольные вещественные значения, можно найти различные квадратурные формулы. В частности, варьируя ω, из наших результатов *единым способом* можно получить и некоторые ранее известные квадратурные формулы, например, соответствующие формулы работ [5, 6, 7]. Это тем более интересно, если иметь в виду то, что здесь мы пользовались методами, отличными от примененных в указанных работах. Остановимся на этом вопросе более подробно.

Сначала рассмотрим формулы раздела 2°. Полагая в них $\omega = 0$, получаем узлы

$$s_k = \frac{k\pi}{n}(k = \overline{0, 2n-1}) \tag{1.1′}$$

и соответствующие им формулы

$$\tilde{I}x = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} x\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin^2\frac{n}{2}\left(s-\frac{k\pi}{n}\right)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\left(s-\frac{k\pi}{n}\right), \qquad (1.6')$$

$$(\tilde{I}x)\left(\frac{j\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1}{}' x\left(\frac{k\pi}{n}\right)\operatorname{ctg}\frac{(k-j)\pi}{2n}. \qquad (1.7')$$

В связи с формулами (1.6′) и (1.7′) отметим, что квадратурные формулы по узлам (1.1′) раньше рассматривались в работах [6] — [9].

Так, например, в работе [6], аппроксимируя плотность $x(s)$ отрезком ее ряда Фурье и вычисляя коэффициенты Фурье по квадратурной формуле левых прямоугольников в узлах (1.1′), А. А. Корнейчук получил следующие формулы (в наших обозначениях):

$$\tilde{I}x = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} x\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin\frac{n-1}{2}\left(\frac{k\pi}{n}-s\right)\sin\frac{n}{2}\left(\frac{k\pi}{n}-s\right)\times$$

$$\times\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\left(\frac{k\pi}{n}-s\right), \qquad (2.1)$$

$$(\tilde{I}x)\left(\frac{j\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0,\ k\neq j}^{2n-1} x\left(\frac{k\pi}{n}\right)\frac{1-(-1)^{k-j}}{2}\operatorname{ctg}\frac{(k-j)\pi}{2n}. \qquad (2.2)$$

Отметим также, что последняя формула ранее была получена Г. А. Николаевой [7], причем тем же способом, что и в работе [6].

Далее, очевидно, что соотношение (2.2) совпадает с формулой (1.7′), т. е. следует из общего квадратурного процесса (1.7) — (1.8) при $\omega = 0$. Однако следует отметить, что формулы (1.6′) и (2.1) в других точках, кроме узловых (1.1′), не совпадают.

В указанной работе А. А. Корнейчук показал, что если ряд Фурье

$$x(s) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\cos ks + d_k\sin ks \qquad (2.3)$$

сходится абсолютно, то остаточный член формулы (2.1) $R_n(s)\to 0$ равномерно, причем справедлива оценка

$$|R_n(s)| \leqslant 2\sum_{k=n+1}^{\infty}|c_k| + |d_k|. \qquad (2.4)$$

Пользуясь формулой (2.4) и известными фактами из теории тригонометрических рядов [10], в [6] отмечены следующие достаточные условия для сходимости $R_n(s)$ к нулю: 1) $x(s)$

имеет суммируемую вторую производную; 2) $x(s)$ абсолютно непрерывна и имеет принадлежащую L_p первую производную; 3) $x(s)$ имеет ограниченное изменение и принадлежит H_α, где $\alpha > \frac{1}{2}$; в этом последнем случае справедлива оценка

$$|R_n(s)| \leqslant \frac{C_1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}\ (C_1 = \mathrm{const}); \qquad (2.5)$$

если $x(s)$ имеет суммируемую m-ю производную, то

$$|R_n(s)| \leqslant \frac{C_2}{n^{m-1}}\ (C_2 = \mathrm{const}). \qquad (2.6)$$

В соотношениях (2.5) и (2.6) постоянные C_1 и C_2 остаются неопределенными, что, очевидно, снижает практическую ценность формул, предложенных в [6]. С другой стороны, несколько забегая вперед отметим, что для более общих формул § 1 ниже мы получим более точные оценки как в смысле порядка, так и в смысле определения постоянных C_i.

Далее, для приближенного вычисления интеграла (0.1) в работах [8], [9] были предложены следующие формулы:

$$\tilde{I}x = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} x\left(\frac{k\pi}{n}\right)\frac{1-\cos n\left(\frac{k\pi}{n}-s\right)}{2}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\left(\frac{k\pi}{n}-s\right), \qquad (2.7)$$

$$(\tilde{I}x)\left(\frac{j\pi}{n}\right) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}{}' x\left(\frac{k\pi}{n}\right)\operatorname{ctg}\frac{(k-j)\pi}{2n} \qquad (2.8)$$

Однако при выводе соотношений (2.7) — (2.8) допущена ошибка. Дело в том, что при этом необоснованно отождествлены тригонометрические интерполяционные полиномы, построенные соответственно для узлов (1.1′) и $s_k = \frac{2k\pi}{2n+1}$ $(k = \overline{0,\ 2n})$. Поэтому формулы (2.7) и (2.8) получены неверно.

Теперь остановимся на формулах раздела 3°. Полагая в них $\omega = 0$, находим узлы

$$s_k = \frac{k\pi}{2n}\ (k = \overline{0,\ 4n-1}) \qquad (1.9')$$

и соответствующую им квадратурную формулу

$$(\tilde{I}x)\left(\frac{j\pi}{2n}\right) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[x\left(\frac{j+2k+1}{2n}\pi\right) - \right.$$

$$\left. - x\left(\frac{j-2k-1}{2n}\pi\right)\right]\operatorname{ctg}\frac{2k+1}{4n}\pi. \qquad (1.12')$$

Приближенное вычисление интеграла (0.1) в узлах (1.9′) другим методом, чем здесь, раньше рассматривалось в работе Б. А. Вертгейма [5]. Точнее, представляя интеграл (0.1) в виде

$$Ix = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [x(s+\sigma) - x(s-\sigma) \operatorname{ctg}\frac{\sigma}{2}\, d\sigma \tag{0.1'}$$

и применяя к нему как к регулярному интегралу квадратурную формулу средних прямоугольников, Б. А. Вертгейм получил следующую формулу:

$$(Ix)\left(\frac{j\pi}{2n}\right) \approx \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[x\left(\frac{j+2k+1}{2n}\pi\right) - x\left(\frac{j-2k-1}{2n}\pi\right)\right] \operatorname{ctg}\frac{2k+1}{4n}\pi. \tag{2.9}$$

Таким образом, квадратурный процесс (2.9) совпадает с формулой (1.12′), т. е. является частным случаем формулы (1.7) при $\omega = 0$ и четном n.

Далее, в работе [5] Б. А. Вертгейм оценил также погрешность формулы (2.9) в классе трижды непрерывно дифференцируемых функций $C^{(3)}$ и указал оценку

$$|R_{2n}(s)| < \frac{\pi^2}{24n^2}\left[\max|x'(s)| + \left(\frac{\pi^2}{2}+\frac{8}{3}\right)\max_s |x'''(s)|\right]. \tag{2.10}$$

Следует сказать, что оценка (2.10) является грубой. Это будет вытекать из результатов следующего параграфа, где, пользуясь средствами, отличными от примененных в других работах, в частности, в работах [5] — [9], мы докажем равномерную сходимость общих квадратурных процессов § 1 для плотностей из класса Гельдера с любым положительным показателем и укажем эффективные оценки остаточного члена для плотностей из некоторых классов.

§ 3. Вопросы обоснования

Ниже мы предлагаем два способа эффективной оценки погрешности предложенных в § 1 квадратурных процессов. При этом для простоты рассуждений будем рассматривать формулы лишь для интеграла с ядром Гильберта. Однако все сказанное будет справедливо с точностью до постоянных в оценках и для квадратурных формул (1.15) — (1.16).

В дальнейшем будем пользоваться результатами и обозначениями нашей работы [4].

П. 1. Сходимость в среднем и следствия из нее

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть плотность интеграла* (0.1) *является непрерывной комплекснозначной* 2π-*периодической функцией.*

Тогда приближенные значения этого интеграла, вычисленные по формулам § 1, *сходятся к точному значению в среднем, причем для формул* (1.6) — (1.8) *справедлива оценка:*

$$\|R_n(x;\, s)\|_{L_2} \leqslant (1+\sqrt{2})\, E_{n-1}(x) \quad (x \in C,\ n = 1, 2, \ldots), \tag{3.1}$$

где $E_{n-1}(x)$ — *наилучшее равномерное приближение* $x(s)$ *полиномами степени**) $n-1$.

Доказательство. Сначала найдем норму оператора P как оператора, действующего из пространства C в пространство L_2. С этой целью, записывая видоизмененное ядро Дирихле (1.3) в форме

$$D_n^*(s) = \frac{1}{2}[D_n(s) + D_{n-1}(s)], \tag{3.2}$$

где $D_n(s)$ — обычное ядро Дирихле, для полинома (1.4) находим представление

$$Px = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} a_m \cos ms + b_m \sin ms, \tag{3.3}$$

где

$$a_m = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} x_k \cos ms_k \ (m = \overline{0,\ n-1}),$$

$$b_m = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1} x_k \sin ms_k \ (m = \overline{1,\ n-1}),$$

$$a_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} x_k \cos ns_k, \quad b_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} x_k \sin ns_k. \tag{3.4}$$

Теперь из соотношений (3.3) — (3.4) с помощью формулы Парсеваля находим

$$\|Px\|^2 = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{m=1}^{n} |a_m|^2 + |b_m|^2 =$$

$$= \left|\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{2n-1}\sum_{j=0}^{2n-1} x_k \bar{x}_j\left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n-1}(\cos ms_k \cos ms_j + \sin ms_k \sin ms_j)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4n^2}\sum_{k=0}^{2n-1}\sum_{j=0}^{2n-1} x_k \bar{x}_j (\cos ns_k \cos ns_j + \sin ns_k \sin ns_j)\right| =$$

*) В оценках для формул (1.10) — (1.12) вместо n всюду достаточно подставить $2n$.

$$= \left| \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{2n-1} \sum_{j=0}^{2n-1} x_k \bar{x}_j D_{n-1}(s_k - s_j) + \frac{1}{4n^2} \sum_{k=0}^{2n-1} \sum_{j=0}^{2n-1} x_k \bar{x}_j \cos n (s_k - s_j) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2n^2} \sum_{k=0}^{2n-1} \sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^{k-j-1} x_k \bar{x}_j + \frac{1}{4n^2} \sum_{k=0}^{2n-1} \sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^{k-j} x_k \bar{x}_j \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{4n^2} \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k x_k \sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j \bar{x}_j \right| \leqslant \max_{0 \leqslant k \leqslant 2n-1} |x_k|^2 \leqslant \|x\|_C^2 .$$

Таким образом, при любом $n = 1, 2, \ldots$

$$\|P_n x\|_{L_2} \leqslant \|x\|_C \quad (x \in C). \tag{3.5}$$

Поскольку для операторов проектирования $P^2 = P$, то отсюда и из (3.5) находим окончательную оценку

$\|P_n\|_{C\to L_2} = \sqrt{2}\ (n=1,2,\ldots)$

$$\|P_n\|_{C \to L_2} \cancel{= 1 \, (n = 1, 2, \ldots).} \tag{3.6}$$

Далее, так как $\|x\|_{L_2} \leqslant \sqrt{2}\, \|x\|_C$, то, обозначая через $T_{n-1}(s)$ полином наилучшего равномерного приближения степени $n - 1$ для плотности $x(s)$, имеем

$$\|x - P_n x\|_{L_2} = \|x - T_{n-1} - P_n (x - T_{n-1})\|_{L_2} \leqslant$$
$$\leqslant (1 + \sqrt{2}) \|x - T_{n-1}\|_C = (1 + \sqrt{2})\, E_{n-1}(x).$$

Другими словами, для любого $x \in C$ справедлива оценка

$$\|x - P_n x\|_{L_2} \leqslant (1 + \sqrt{2})\, E_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3.7}$$

Отсюда и из соотношения $\|R_n(s)\|_{L_2} \leqslant \|x - P_n x\|_{L_2}$ (см. [4]) следует неравенство (3.1).

С помощью оценки (3.1) для более гладких функций можно доказать равномерную сходимость квадратурных формул и получить ряд эффективных оценок.

Справедлива следующая

Т е о р е м а 2. *Если плотность интеграла* (0.1) *удовлетворяет соответственно условиям*

$$x(s) \in H_\alpha^{(m)} \, (m \geqslant 0, \ 0 < \alpha \leqslant 1), \tag{3.8}$$

$$x(s) \in C^{(m)} \quad (m \geqslant 1), \tag{3.9}$$

то погрешность квадратурных формул (1.5)—(1.8) *в равномерной метрике может быть оценена соответственно неравенствами:*

$$\|R_n(x; s)\|_C \leqslant \frac{6(1 + \sqrt{2})(1 + 2^{-m-\alpha})}{1 - 2^{-m-\alpha+\frac{1}{2}}} \times$$

$$\times \frac{H(x^{(m)}; \alpha)}{n^{m+\alpha-\frac{1}{2}}} \left(m + \alpha > \frac{1}{2}, \ n = 1, 2, \ldots \right). \tag{3.10}$$

$$\|R_n(x; s)\|_C \leqslant \frac{2\pi (1 + \sqrt{2})(1 + 2^{-m})}{1 - 2^{-m+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{M(x^{(m)})}{n^{m-\frac{1}{2}}} \, (n = 1, 2, \ldots). \tag{3.11}$$

Действительно, в условиях (3.8) и (3.9)

$E_{n-1}(x) \leqslant 3H(x^{(m)}; \alpha)\, n^{-m-\alpha}$ и $E_{n-1}(x) \leqslant \frac{\pi}{2} M(x^{(m)}) n^{-m}$ (см. [3, 4]).

Поэтому, в силу (3.1), соответственно имеем:

$$\|R_n(x; s)\|_{L_2} \leqslant \frac{3(1 + \sqrt{2})\, H(x^{(m)}; \alpha)}{n^{m+\alpha}}, \tag{3.12}$$

$$\|R_n(x; s)\|_{L_2} \leqslant \frac{\pi (1 + \sqrt{2})\, M(x^{(m)})}{2n^m}. \tag{3.13}$$

Отсюда и из леммы 8 работы [4] следуют оценки (3.10) и (3.11).

Отметим, что теоремы 1 и 2 верны также для формул (1.14) — (1.15) с учетом того, что вместо функции $x = x(s)$ нужно подставить $\psi = \psi(s) = \varphi(e^{is})$ (см. [4]).

П. 2. Второй способ оценки погрешности

Этот способ основан на рассмотрении погрешности с самого начала в равномерной метрике. При этом существенным образом будем пользоваться леммой 9 из нашей работы [4], из которой для изучаемых здесь квадратурных процессов следует оценка

$$|R_n(s)| \leqslant (1 + 2 \ln n)\, M(\rho x) + \frac{2^\alpha}{\alpha n^\alpha} H(\rho x; \alpha) + 2E_{n-1}(x), \tag{3.14}$$

где $x(s) \in H_\alpha \, (0 < \alpha \leqslant 1)$, $\rho x = x - P_n x$ $(n \geqslant 3)$.

Таким образом, задача сводится к оценке погрешности аппроксимации плотности интеграла (0.1) полиномами вида (1.4). Имея в виду приложения и при приближенном решении сингулярных интегральных уравнений, докажем несколько предложений об интерполировании по корням уравнения (0.2) *.

Л е м м а 1. *Для любого натурального* $n = 1, 2, \ldots$ *и узлов* (1.1) *справедливо неравенство*

$$\|P\| = \|P_n\|_C = \sup_{\|x\|_C \leqslant 1, \ x \in C} \|Px\|_C \leqslant (1 + \pi)(1 + \ln 2n). \tag{3.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соотношения (1.4) нетрудно вивидеть, что

$$\|P\| = \max_s \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} |D_n^*(s - s_k)|. \tag{3.16}$$

* Ряд весьма общих результатов в этом направлении в метрике C имеется в книге [1]. Однако в них отсутствуют оценки погрешности, и поэтому для наших целей они неприемлемы.

Покажем, что

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{2n-1}|D_n^*(s-s_k)| \leqslant \frac{1+\pi}{\pi}\int_0^{2\pi}|D_n^*(\sigma)|\,d\sigma. \tag{3.17}$$

Положим $y(s)=D_n^*(s)$. Поскольку $s_{k+1}-s_k=\pi n^{-1}$, то, в силу периодичности и теоремы о среднем интегрального исчисления, находим

$$\int_0^{2\pi}|y(\sigma)|\,d\sigma = \int_{-\frac{\omega}{n}}^{2\pi-\frac{\omega}{n}}|y|\,d\sigma = \sum_{k=0}^{2n-1}\int_{s_k}^{s_{k+1}}|y|\,d\sigma = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{2n-1}|y(\xi_k)|, \tag{3.18}$$

где $s_k\leqslant\xi_k\leqslant s_{k+1}$. Далее имеем

$$\sum_{k=0}^{2n-1}|y(s_k)| - \sum_{k=0}^{2n-1}|y(\xi_k)| \leqslant \sum_{k=0}^{2n-1}|y(\xi_k)-y(s_k)| =$$

$$= \sum_{k=0}^{2n-1}\left|\int_{s_k}^{\xi_k} y'(\sigma)\,d\sigma\right| \leqslant \sum_{k=0}^{2n-1}\int_{s_k}^{s_{k+1}}|y'(\sigma)|\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\left|\frac{dD_n^*(\sigma)}{d\sigma}\right|d\sigma. \tag{3.19}$$

Так как $D_n^*(s)$ является тригонометрическим полиномом степени n, то, используя интегральное неравенство С. Н. Бернштейна для производной тригонометрического полинома, из соотношений (3.18) и (3.19) получаем

$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{2n-1}|y(s_k)| \leqslant (1+\pi)\int_0^{2\pi}|y(\sigma)|\,d\sigma.$$

Заменив $y(\sigma)$ на $y(s-\sigma)$ из последнего соотношения с учетом периодичности легко находим неравенство (3.17).

Далее, в связи с (3.16), (3.17) и (1.3) имеем

$$\|P\| \leqslant \frac{1+\pi}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sin ns\,\operatorname{ctg}\frac{s}{2}\right|ds = \frac{1+\pi}{\pi}(I_1+I_2), \tag{3.20}$$

где

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\sin ns\,\operatorname{ctg}\frac{s}{2}\,ds \quad \text{и} \quad I_2=\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\pi}|\sin ns|\,\operatorname{ctg}\frac{s}{2}\,ds.$$

Применяя к интегралам I_1 и I_2 соответственно известные неравенства

$$|\sin ns|\leqslant n|\sin s|\ (|s|<\infty), \qquad \sin s\geqslant\frac{2}{\pi}s\ \left(0\leqslant s\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

находим оценку

$$I_1+I_2 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2n}} n\sin s\,\operatorname{ctg}\frac{s}{2}\,ds + \pi\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\pi}\frac{ds}{s} \leqslant \pi(1+\ln 2n).$$

Отсюда и из (3.20) следует неравенство (3.15).

Следствие. Для достаточно больших n справедлива оценка

$$\|P_n\|_C < 2\ln n. \tag{3.21}$$

Действительно, в силу (3.2) и (3.20) имеем

$$\|P_n\| \leqslant \frac{1+\pi}{2\pi}\int_0^{2\pi}|D_n(s)+D_{n-1}(s)|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1+\pi}{\pi}\left(\int_0^{\pi}|D_n(s)|\,ds + \int_0^{\pi}|D_{n-1}(s)|\,ds\right).$$

Отсюда и из формулы (см. [3])

$$\int_0^{\pi}|D_n(s)|\,ds = \frac{2}{\pi}\ln n + O(1)$$

следует оценка (3.21).

Лемма 2. *Если* $x(s)\in H_\alpha^{(m)}$ $(m\geqslant 0,\ 0<\alpha\leqslant 1)$, *то равномерно относительно* s *справедливы оценки:*

$$|x(s)-Px(s)| \leqslant 3H(x^{(m)};\alpha)\,\frac{1+(1+\pi)(1+\ln 2n)}{n^{m+\alpha}}\quad (n=1,2,\ldots) \tag{3.22}$$

$$|x(s)-Px(s)| \leqslant 6H(x^{(m)};\alpha)\,\frac{\ln n}{n^{m+\alpha}}\quad (n\geqslant n_0). \tag{3.23}$$

Если число β *таково, что* $0<\beta\leqslant\alpha\leqslant 1$, *то*

$$H(x-Px;\beta) \leqslant 3H(x^{(m)};\alpha)\,B_1\cdot\frac{1+(1+\pi)(1+\ln 2n)}{n^{m+\alpha-\beta}}\quad (n=1,2,\ldots) \tag{3.24}$$

$$H(x-Px;\beta) \leqslant 6H(x^{(m)};\alpha)\,B_1\cdot\frac{\ln n}{n^{m+\alpha-\beta}}\quad (n\geqslant n_0), \tag{3.25}$$

где

$$B_1=B_1(m+\alpha)\leqslant\begin{cases} 4, & \text{если } m=0,\\ \dfrac{2\,(1+2^{-m-\alpha})}{1-2^{1-m-\alpha}}, & \text{если } m\geqslant 1.\end{cases} \tag{3.26}$$

Доказательство. Обозначая через $T_{n-1}(s)$ полином наилучшего равномерного приближения степени $n-1$ для $x(s)$, легко находим

$$|x - P_n x| = |(E - P_n)(x - T_{n-1})| \leqslant (1 + \|P_n\|_C) E_{n-1}(x). \quad (3.27)$$

Поэтому при $x(s) \in H_\alpha^{(m)}$ имеем

$$|x - Px| \leqslant \frac{3(1 + \|P\|)}{n^{m+\alpha}} \cdot H(x^{(m)}; \alpha) \quad (n = 1, 2, \ldots). \quad (3.28)$$

Отсюда и из леммы 1 получаем неравенства (3.22) и (3.23), а из них с помощью результатов работы [4] находим оценки (3.24) и (3.25).

Теперь из оценки (3.14) и из леммы 2 вытекает следующая

Теорема 3. *Пусть плотность $x(s)$ удовлетворяет условию*

$$x(s) \in H_\alpha^{(m)} \; (m \geqslant 0, \quad 0 < \alpha \leqslant 1). \quad (3.29)$$

Тогда приближенные значения сингулярного интеграла (0.1), *вычисленные по формулам* (1.6) — (1.8), *равномерно сходятся к соответствующим точным значениям при неограниченном возрастании числа узлов интерполяции. Для остаточного члена справедливы оценки:*

$$|R_n(s)| \leqslant \frac{6H(x^{(m)}; \alpha)}{n^{m+\alpha}} \times$$

$$\times \left\{1 + [(2 + \pi) + (1 + \pi) \ln 2n] \left(1 + \frac{B_1}{\alpha} + \ln n\right)\right\}, \quad (3.30)$$

$$(n = 3, 4, \ldots)$$

$$|R_n(s)| \leqslant \frac{12H(x^{(m)}; \alpha)}{n^{m+\alpha}} \left(1 + \ln n + \frac{B_1}{\alpha}\right) \ln n \quad (n \geqslant n_0), \quad (3.31)$$

где постоянная $B_1 = B_1(m + \alpha)$ *определена в* (3.26).

П. 3. Некоторые замечания

1°. Если $x(s) \in C^{(m)}$ $(m \geqslant 1)$, то непосредственно из (3.30) видим, что

$$|R_n(s)| \leqslant \frac{6M(x^{(m)})}{n^m} \times$$

$$\times \{1 + [(2 + \pi) + (1 + \pi) \ln 2n] (1 + B_1(m) + \ln n)\}. \quad (3.32)$$

Однако эта оценка, учитывая лемму 2 из работы [4], может быть и несколько улучшена.

2°. Если $x(s)$ является аналитической, то из (3.27) и из работы [2] получаем оценку

$$|R_n(s)| \leqslant Qq^n \; (Q = \text{const}, \; 0 < q = \text{const} < 1). \quad (3.33)$$

3°. Ряд оценок, полученных выше для плотностей из класса $H_\alpha^{(m)}$, остается справедливым и в случае, когда $x^{(m)}(s) \in L_2$, причем интегральный (в L_2) модуль непрерывности функции $x^{(m)}(s)$ удовлетворяет условию

$$\omega(x^{(m)}; \delta)_{L_2} \leqslant H_{m\alpha} \delta^\alpha \quad (H_{m\alpha} = \text{const}), \quad (3.34)$$

или же интегральный модуль гладкости второго порядка удовлетворяет неравенству

$$\omega_2(x^{(m)}; \delta)_{L_2} \leqslant H_{m\alpha} \delta^\alpha \quad (H_{m\alpha} = \text{const}). \quad (3.34')$$

Тогда вместо $H(x^{(m)}; \alpha)$ достаточно подставить постоянную $H_{m\alpha}$.

Аналогичное утверждение верно также в случае, когда плотность интеграла (0.1) удовлетворяет условию

$$x(s) \in W_*^{(m)} M \text{ или } x^{(m)}(s) \in L_2. \quad (3.35)$$

В этом случае в оценках, приведенных для классов $C^{(m)}$, вместо постоянной $M(x^{(m)})$ следует писать соответственно M и $\|x^{(m)}\|_{L_2}$.

Эти утверждения следуют из оценок Н. И. Ахиезера — М. Г. Крейна — Ж. Фавара для наилучших приближений в различных метриках (см. [3]) и из результатов пунктов 1 и 2.

4°. Пусть $Px = P_n x$ означает тригонометрический полином, интерполирующий плотность интеграла (0.1) в определенном смысле. Тогда, принимая во внимание определение сопряженных функций и, в частности, сопряженных тригонометрических полиномов [3] и их связь с сингулярными интегралами, на основании соответствующих исследований из книги Зигмунда [1] можно получить ряд интересных результатов о сходимости квадратурных процессов, определенных в § 1, а также в работах [2], [4]. В частности, можно утверждать, что $IP_n x \to Ix$ равномерно, если ряд Фурье (2.3) для $x(s)$ сходится абсолютно, или, более общо, модуль непрерывности $x(s)$ удовлетворяет условию $\omega(x; \delta) = 0\{(\ln \delta^{-1})^{-1}\}$. Однако следует особо подчеркнуть, что отсутствие какой-либо оценки для остаточного члена, кроме факта его стремления к нулю (что, впрочем, характерно для всех указанных исследований из [1]), затрудняет непосредственное практическое применение этих результатов в квадратурных процессах.

В связи с этим отметим, что предложенные нами способы обоснования и полученные при этом результаты являются, на наш взгляд, практически весьма эффективными.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, том 2. Издательство „Мир", М., 1965.

2. Б. Г. Габдулхаев. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и их некоторые применения. Ученые записки Казанск. университета, том 125, кн. 2, 7—17. Изд-во КГУ, 1965 (1966).
3. А. Ф. Тиман. Теория приближения функций действительного переменного. М., Физматгиз, 1960.
4. Б. Г. Габдулхаев. Об аппроксимации тригонометрическими полиномами и погрешности квадратурных формул для сингулярных интегралов. Настоящий сборник.
5. Б. А. Вертгейм. Приближенное вычисление некоторых сингулярных интегралов. Сб. „Исследования по современным проблемам ТФКП". М., Физматгиз, 1961, 450—454.
6. А. А. Корнейчук. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов. Дополнение к ЖВМ и МФ, том 4, № 4, 64—74, 1964.
7. Г. А. Николаева. О приближенном построении конформного преобразования методом сопряженных тригонометрических рядов. ДАН СССР, 1956, т. 110, № 2, 180—183.
8. И. Д. Софронов. К приближенному решению сингулярных интегральных уравнений. ДАН СССР, том 111, № 1, 37—39, 1956.
9. И. Д. Софронов. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений. Автореферат кандидатской диссертации, МГУ, 1955.
10. Н. К. Бари. Тригонометрические ряды. М., Физматгиз, 1961.

КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Том 127, кн. 1 *Ученые записки* *1967*

Ф. Д. Гахов, В. А. Какичев

СЛУЧАИ ВЫРОЖДЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЯДРАМИ КОШИ И ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1°. Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение

$$a_0\varphi + a_1S_1\varphi + a_2S_2\varphi + a_{12}S_{12}\varphi = f(t_1,\ t_2),\ (t_1, t_2)\in C, \qquad (1)$$

где a_0, a_1, a_2, a_{12} — постоянные, $f(t_1,\ t_2)$ — известная функция, удовлетворяющая условию Гельдера на $C = C_1 \times C_2$ (короче $f\in H(C)$), C_1 и C_2 — простые гладкие замкнутые контуры, лежащие соответственно в плоскостях комплексных переменных z_1 и z_2,

$$S_1\varphi = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{C_1} \frac{\varphi(\tau_1,\ t_2)}{\tau_1 - t_1}\,d\tau_1, \qquad (2)$$

$$S_{12}\varphi = -\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{C} \frac{\varphi(\tau_1,\ \tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)}, \qquad (3)$$

сингулярный оператор S_2 определяется аналогично S_1, и решение $\varphi(t_1,\ t_2)$ ищется в классе $H(C)$.

Применяя к обеим частям (1) последовательно операторы S_1, S_2 и S_{12} и пользуясь тем, что (см. [1], § 9)

$$S_iS_j = S_jS_i,\quad S_j^2 = I,\quad i,\ j, = 1,\ 2, \qquad (4)$$

где I — тождественный оператор, получим линейную систему алгебраических уравнений относительно φ, $S_1\varphi$, $S_2\varphi$ и $S_{12}\varphi$ с определителем

$$\Delta = \Delta_0\cdot\Delta_1\cdot\Delta_2\cdot\Delta_{12} = (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_{12}^2)^2 - 4\,(a_0a_{12} - a_1a_2)^2,$$

где

$$a_0 \pm a_1 \pm a_2 + a_{12} = \begin{cases}\Delta_0\\ \Delta_{12}\end{cases},\quad a_0 \mp a_1 \pm a_2 - a_{12} = \begin{cases}\Delta_1\\ \Delta_2\end{cases}. \qquad (5)$$

Если $\Delta \neq 0$, то из этой системы находим единственное решение уравнения (1) (см. [2], а также [3]).