

УДК 539.3+629.7.01

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОХОЖДЕНИЯ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ СКВОЗЬ ДЕФОРМИРУЕМУЮ ПЛАСТИНУ, НАХОДЯЩУЮСЯ МЕЖДУ ДВУМЯ КАМЕРАМИ

*В.Н. Паймушин, Р.К. Газизуллин, А.А. Шарпов*

### Аннотация

Дано численное решение плоской задачи о прохождении звуковой волны, формирующейся источником звука в камере высокого давления, сквозь деформируемую тонкую пластину и о формировании в камере низкого давления излученной пластиной звуковой волны. Данная задача связана с математическим моделированием экспериментального определения звукоизолирующих свойств тонкостенных элементов конструкций методом смежных реверберационных камер в акустических испытательных лабораториях. На основе использования волновых уравнений в двумерном приближении исследуются две постановки задачи, различающиеся способом задания источника звука в камере высокого давления. Показано, что обе рассмотренные постановки приводят к практически одинаковым результатам при определении параметров звукоизоляции пластины. Результаты теоретических исследований сравниваются с данными экспериментальных исследований.

**Ключевые слова:** деформируемая пластина, модель Кирхгофа – Лява, внутреннее трение, модель Фойгта-Томпсона-Кельвина, звукоизоляция, волновое уравнение, численный метод, экспериментальные и теоретические исследования.

### Введение

Экспериментальное определение звукоизоляционных свойств тонкостенных элементов конструкций в соответствии с ГОСТ 26602.3-99 и СНИП 23-03-2003 [1] проводят в специальных акустических испытательных лабораториях. Такие лаборатории реверберационного типа состоят из двух смежных по горизонтали помещений (камер высокого и низкого уровней давления), в проем между которыми монтируют испытываемый образец. В камере высокого давления источником звука формируется моногармоническая звуковая волна, которая, взаимодействуя с испытываемым образцом, вызывает в нем установившиеся незатухающие колебания, формирующие в камере низкого давления излученные образцом звуковые волны. Разностью давлений, установившихся в камерах, и характеризуются звукоизоляционные свойства испытываемого образца. Для теоретического определения этих свойств и математического моделирования испытаний в статье [2] были рассмотрены две постановки соответствующей задачи, отличающиеся способом формирования звуковой волны в камере высокого давления. В ней с целью качественного изучения рассматриваемых процессов решения сформулированных задач были получены лишь в первом приближении, соответствующем разложению неизвестных задачи в ряды Фурье и удержанию в них нулевых гармоник. В развитие результатов статьи [2] ниже предлагается численный метод решения

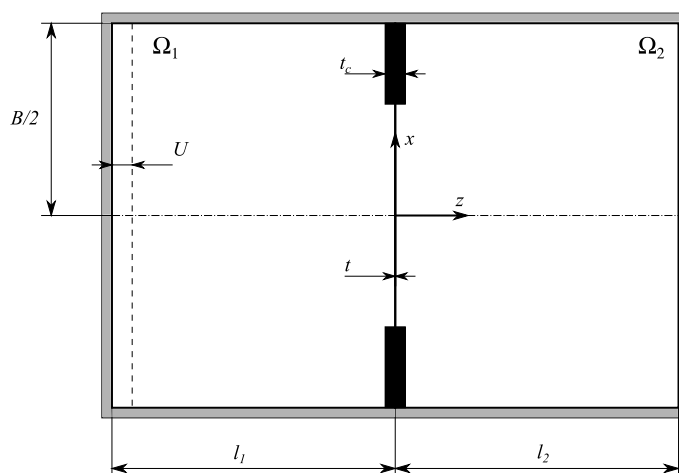


Рис. 1

плоской задачи о прохождении звуковой волны сквозь деформируемую пластину, расположенную между двумя камерами. Результаты теоретических исследований сравниваются с результатами экспериментальных исследований.

### 1. Первый вариант постановки задачи и численный метод ее решения

Рассмотрим на плоскости  $xOz$  прямоугольную область  $\Omega$ , ограниченную координатными линиями  $x = -B/2$ ,  $x = B/2$ ,  $z = -l_1$ ,  $z = l_2$  и разделенную на две подобласти  $\Omega_1$  (камера “1”),  $\Omega_2$  (камера “2”) деформируемой преградой, имеющей кусочно-постоянную толщину  $t$  и расположенной в координатной плоскости  $z = 0$  (рис. 1).

Пусть подобласти  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  заполнены акустическими средами, характеризующимися плотностями  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  и скоростями звука  $c_1$ ,  $c_2$ . Считается, что в камере “1” в точках отрезка  $\partial\Omega_p$  координатной линии  $z = 0$ , соответствующей  $-a/2 \leq x \leq a/2$ , имеется генератор звуковых волн, поддерживающий стационарное звуковое давление  $p_0 = \tilde{p}e^{i\omega\tau}$  с круговой частотой  $\omega$  ( $i = \sqrt{-1}$  – мнимая единица,  $\tau$  – время). Такая падающая на пластину звуковая волна в плоском приближении относительно потенциала скоростей  $\Phi_*$  описывается волновым уравнением ( $x, z$  – декартовы координаты)

$$\frac{\partial^2 \Phi_*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_*}{\partial z^2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Phi_*}{\partial \tau^2}, \quad -B/2 \leq x \leq B/2, \quad -l_1 \leq z \leq 0, \quad (1.1)$$

Решение уравнения (1.1) при  $x = 0$  должно удовлетворять условию симметрии

$$\Phi_*|_x = \Phi_*|_{-x} \quad \forall x \in [-B/2, B/2] \quad (1.2)$$

и граничным условиям:

$$\text{при } x = B/2: \quad \frac{\partial \Phi_*}{\partial x} = 0, \quad (1.3)$$

$$\text{при } z = -l_1 \text{ и } z = 0, \text{ когда } x \notin \Omega_p: \quad \frac{\partial \Phi_*}{\partial z} = 0, \quad (1.4)$$

$$\text{при } z = 0, \text{ когда } x \in \Omega_p: \quad -\rho_1 \frac{\partial \Phi_*}{\partial \tau} = p_0. \quad (1.5)$$

Отметим, что через функцию  $\Phi_*$  по известным соотношениям

$$p_* = -\rho_* \frac{\partial \Phi_*}{\partial \tau}, \quad V_x^* = \frac{\partial \Phi_*}{\partial x}, \quad V_z^* = \frac{\partial \Phi_*}{\partial z} \quad (1.6)$$

определяются давление  $p_*$  и компоненты вектора скорости падающей звуковой волны  $V_x^*$ ,  $V_z^*$  во всех точках подобласти  $\Omega_1$ , причем принимаемое для уравнения (1.1) условие (1.4), соответствующее  $V_z^*|_{z=0} = 0$ , может быть реализовано лишь при  $t \ll t_c$  (рис. 1).

При воздействии на пластину падающей звуковой волны в первой камере формируются отраженные и излученные пластиной звуковые волны с потенциалом скоростей  $\Phi_1$ , а во второй камере – излученные пластиной звуковые волны с потенциалом скоростей  $\Phi_2$ .

Для определения установившихся в камерах полей звуковых давлений  $p_k$  и скоростей движения акустических сред  $V_x^k$ ,  $V_z^k$  имеют место аналогичные (1.6) зависимости

$$p_k = -\rho_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial \tau}, \quad V_x^k = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x}, \quad V_z^k = \frac{\partial \Phi_k}{\partial z}, \quad k = 1, 2, \quad (1.7)$$

в которых потенциалы скоростей  $\Phi_k$  будем определять в плоском приближении решениями волновых уравнений

$$\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial z^2} = \frac{1}{c_k^2} \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial \tau^2}, \quad x, z \in \Omega_k, \quad k = 1, 2, \quad (1.8)$$

подчиняя их при  $x = 0$  условиям симметрии

$$\Phi_k|_x = \Phi_k|_{-x} \quad \forall x \in [-B/2, B/2], \quad k = 1, 2, \quad (1.9)$$

граничным условиям

$$\text{при } x = B/2: \quad \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} = 0, \quad k = 1, 2, \quad (1.10)$$

$$\text{при } z = -l_1: \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0, \quad (1.11)$$

$$\text{при } z = l_2: \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0, \quad (1.12)$$

и условиям равенства скоростей движения пластины и акустических сред при  $z = 0$

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_*}{\partial z}, \quad \frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}. \quad (1.13)$$

Здесь  $w$  – функция прогиба в направлении оси  $0z$  точек срединной плоскости пластины. Для ее определения к составленным уравнениям присоединим уравнение движения пластины

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \rho_n t \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - q = 0, \quad \nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \quad (1.14)$$

которое основано на использовании для описания динамического процесса деформирования пластины классической модели Кирхгофа – Лява. При учете вязкоупругих свойств материала пластины, имеющего модуль упругости  $E$ , коэффициент Пуассона  $\nu$  и логарифмический декремент колебаний  $\delta$ , для определения изгибной

жесткости  $D$ , входящей в уравнение (1.14), в рамках модели Фойгта–Томпсона–Кельвина [3, 4] имеет место представление

$$D = \frac{E t^3}{12(1 - \nu^2)} \left( 1 + \frac{\delta}{\pi \omega} \frac{\partial}{\partial \tau} \right), \quad (1.15)$$

а действующая на пластину аэрогидродинамическая поперечная нагрузка  $q$ , обусловленная ее взаимодействием с окружающими с двух сторон акустическими средами, определяется по формуле

$$q = p_*^0 + p_1^0 - p_2^0, \quad (1.16)$$

где  $p_*^0 = p_*|_{z=0}$ ,  $p_1^0 = p_1|_{z=0}$ ,  $p_2^0 = p_2|_{z=0}$ .

Как видно из приведенных соотношений (1.1)–(1.16), решение сформулированной задачи по теоретическому определению параметра звукоизоляции пластины

$$R_{pt} = -20 \lg \left| \frac{p_2}{p_* + p_1} \right| \quad (1.17)$$

требует последовательного построения решений двух задач:

1) задачи о генерации монограммической звуковой волны, падающей на пластину, решение которой необходимо для нахождения входящей в условие (1.13) величины  $V_z^{*0} = (\partial \Phi_* / \partial z)|_{z=0} = 0$ ;

2) задачи о прохождении звуковой волны сквозь пластину, решением которой определяются давления  $p_1$ ,  $p_2$ , и по формуле (1.17) вычисляется параметр звукоизоляции пластины.

Заметим, что решение волнового уравнения (1.1) будет отличаться от решения уравнения (1.8), записываемого для камеры “1”, только в силу различия формулируемых условий при  $z = 0$ . Поэтому ниже будем рассматривать только алгоритм численного решения задачи (1.8)–(1.16) относительно функций  $\Phi_k$  и  $w$ . В рассматриваемом случае они представимы в виде

$$\Phi_k = \tilde{\Phi}_k(x, z) e^{i\omega\tau}, \quad w = \tilde{w}(x) e^{i\omega\tau}. \quad (1.18)$$

Тогда в силу (1.18) приходим к уравнениям

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_k}{\partial z^2} + \varkappa_k^2 \tilde{\Phi}_k = 0, \quad \varkappa_k = \frac{\omega}{c_k}, \quad k = 1, 2, \quad (1.19)$$

для которых условия (1.2)–(1.4) и (1.9)–(1.12) примут вид:

$$\text{при } x = 0: \quad \tilde{\Phi}_k|_x = \tilde{\Phi}_k|_{-x} \quad \forall x \in [-B/2, B/2], \quad k = 1, 2, \quad (1.20)$$

и граничным условиям

$$\text{при } x = B/2: \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}_k}{\partial x} = 0, \quad k = 1, 2, \quad (1.21)$$

$$\text{при } z = -l_1: \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial z} = 0, \quad (1.22)$$

$$\text{при } z = l_2: \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial z} = 0. \quad (1.23)$$

При  $z = 0$  вместо условий (1.4), (1.5) приходим к условиям

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_*}{\partial z} = 0, \quad x \notin \Omega_p, \quad (1.24)$$

$$\tilde{\Phi}_* = i \frac{\tilde{P}_0}{\rho \omega}, \quad x \in \Omega_p, \quad (1.25)$$

а условия (1.13) в силу  $w = \tilde{w}(x) e^{i\omega\tau}$  принимают вид

$$i\omega \tilde{w} = \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial z} - V_z^*, \quad i\omega \tilde{w} = \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial z}. \quad (1.26)$$

В направлении оси  $0x$  введем в рассмотрение конечно-разностную сетку  $x = x_s$ ,  $s = 0, 1, \dots, N+1$ , с равномерным шагом  $h$  так, что  $x_1 = 0$ ,  $x_N = B/2$ ; сеточные функции и их производные

$$\tilde{\Phi}_k^s = \tilde{\Phi}_k(x = x_s, z), \quad \frac{d\tilde{\Phi}_k^s}{dz} = \frac{\partial \tilde{\Phi}_k^s}{\partial z} \Big|_{x=x_s}, \quad \frac{d^2\tilde{\Phi}_k^s}{dz^2} = \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_k^s}{\partial z^2} \Big|_{x=x_s}, \quad (1.27)$$

а также конечно-разностные аппроксимации производных

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_k^s}{\partial x} \Big|_{x=x_s} = \frac{\tilde{\Phi}_k^{s+1} - \tilde{\Phi}_k^{s-1}}{2h}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_k^s}{\partial x^2} \Big|_{x=x_s} = \frac{\tilde{\Phi}_k^{s+1} - 2\tilde{\Phi}_k^s + \tilde{\Phi}_k^{s-1}}{h^2}. \quad (1.28)$$

Тогда при использовании (1.27) и (1.28) условия (1.20), (1.21) приводят к равенствам

$$\tilde{\Phi}_k^0 = \tilde{\Phi}_k^2, \quad \tilde{\Phi}_k^{N+1} = \tilde{\Phi}_k^{N-1}, \quad (1.29)$$

при учете которых уравнения (1.19) сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений метода прямых

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{\Phi}_k^1}{dz^2} + \frac{2}{h^2} (\tilde{\Phi}_k^2 - \tilde{\Phi}_k^1) + \varkappa_k^2 \tilde{\Phi}_k^1 &= 0, \\ \frac{d^2 \tilde{\Phi}_k^s}{dz^2} + \frac{1}{h^2} (\tilde{\Phi}_k^{s-1} - 2\tilde{\Phi}_k^s + \tilde{\Phi}_k^{s+1}) + \varkappa_k^2 \tilde{\Phi}_k^s &= 0, \quad s = 2, 3, \dots, N-1, \\ \frac{d^2 \tilde{\Phi}_k^N}{dz^2} + \frac{2}{h^2} (\tilde{\Phi}_k^{N+1} - \tilde{\Phi}_k^N) + \varkappa_k^2 \tilde{\Phi}_k^N &= 0. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Если ввести обозначения для постоянных интегрирования  $\tilde{\Phi}_k^s|_{z=0} = \tilde{\Phi}_k^{s,0}$ ,  $s = 1, 2, \dots, N$ , то для вычисления сеточных функций  $\tilde{\Phi}_k^s(z)$  можно составить равенства

$$\tilde{\Phi}_k^s(z) = \tilde{\Phi}_k^{s,0} + \int_0^z \frac{d\tilde{\Phi}_k^s}{dz} d\xi, \quad s = 1, 2, \dots, N. \quad (1.31)$$

Интегрируя уравнения (1.30) от  $z$  до  $z = l$  ( $l = -l_1$  при  $k = 1$ ,  $l = l_2$  при  $k = 2$ ) и удовлетворяя граничным условиям (1.22), (1.23), при использовании равенств (1.31) приходим к системе  $N$  интегро-алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} -\frac{d\tilde{\Phi}_k^1}{dz} + \frac{2}{h^2} \int_z^l \int_0^z \frac{d\tilde{\Phi}_k^2}{dz} d\xi d\zeta + \frac{2(l-z)}{h^2} \tilde{\Phi}_k^{2,0} + \\ + \left( \varkappa_k^2 - \frac{2}{h^2} \right) \int_z^l \int_0^z \frac{d\tilde{\Phi}_k^1}{dz} d\xi d\zeta + (l-z) \left( \varkappa_k^2 - \frac{2}{h^2} \right) \tilde{\Phi}_k^{1,0} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{d\tilde{\Phi}_k^s}{dz} + \frac{1}{h^2} \int_z^l \int_0^z \frac{d\tilde{\Phi}_k^{s-1}}{dz} d\xi d\zeta + \frac{(l-z)}{h^2} \tilde{\Phi}_k^{s-1,0} + \\
& \quad + \left( \varkappa_k^2 - \frac{2}{h^2} \right) \int_z^l \int_0^z \frac{d\tilde{\Phi}_k^s}{dz} d\xi d\zeta + (l-z) \left( \varkappa_k^2 - \frac{2}{h^2} \right) \tilde{\Phi}_k^{s,0} + \\
& \quad + \frac{1}{h^2} \int_z^l \int_0^z \frac{d\tilde{\Phi}_k^{s+1}}{dz} d\xi d\zeta + \frac{(l-z)}{h^2} \tilde{\Phi}_k^{s+1,0} = 0, \quad s = 2, 3, \dots, N-1, \quad (1.32) \\
& -\frac{d\tilde{\Phi}_k^N}{dz} + \frac{2}{h^2} \int_z^l \int_0^z \frac{d\tilde{\Phi}_k^{N-1}}{dz} d\xi d\zeta + \frac{2(l-z)}{h^2} \tilde{\Phi}_k^{N-1,0} + \\
& \quad + \left( \varkappa_k^2 - \frac{2}{h^2} \right) \int_z^l \int_0^z \frac{d\tilde{\Phi}_k^N}{dz} d\xi d\zeta + (l-z) \left( \varkappa_k^2 - \frac{2}{h^2} \right) \tilde{\Phi}_k^{N,0} = 0,
\end{aligned}$$

в которых неизвестными являются величины  $d\tilde{\Phi}_k^s/dz$  и  $\tilde{\Phi}_k^{s,0}$ ,  $s = 1, 2, \dots, N$ .

В направлении оси  $Oz$  для каждой из камер выберем сетку  $\Delta_k$ , где  $\Delta_k : \{1, \dots, j, \dots, M_k\}$ , введем векторы неизвестных  $\{d\tilde{\Phi}_k^s/dz\} = \{d\tilde{\Phi}_k^s\}$  и интегрирующие матрицы  $[J_k^1]$  (см. [5, 6]),  $[J_k^2]$  являющиеся матричными аналогами интегральных операторов

$$I_k^1(\dots) = \int_0^z (\dots) d\xi, \quad I_k^2(\dots) = \int_z^l (\dots) d\xi. \quad (1.33)$$

В результате вместо уравнений (1.32) приходим к системам алгебраических уравнений относительно неизвестных  $\{d\tilde{\Phi}_k^s\}$  и  $\tilde{\Phi}_k^{s,0}$

$$\begin{aligned}
& [A_k] \{d\tilde{\Phi}_k^1\} + 2[B_k] \{d\tilde{\Phi}_k^2\} + \{C_k\} \tilde{\Phi}_k^{1,0} + 2\{D_k\} \tilde{\Phi}_k^{2,0} = \{0\}, \\
& [B_k] \{d\tilde{\Phi}_k^{s-1}\} + [A_k] \{d\tilde{\Phi}_k^s\} + [B_k] \{d\tilde{\Phi}_k^{s+1}\} + \{D_k\} \tilde{\Phi}_k^{s-1,0} + \\
& \quad + \{C_k\} \tilde{\Phi}_k^{s,0} + \{D_k\} \tilde{\Phi}_k^{s+1,0} = \{0\}, \quad s = 2, 3, \dots, N-1, \\
& 2[B_k] \{d\tilde{\Phi}_k^{N-1}\} + [A_k] \{d\tilde{\Phi}_k^N\} + 2\{D_k\} \tilde{\Phi}_k^{N-1,0} + \{C_k\} \tilde{\Phi}_k^{N,0} = \{0\},
\end{aligned} \quad (1.34)$$

где

$$\begin{aligned}
[A_k] &= \left( \varkappa_k^2 - \frac{2}{h^2} \right) [J_k^2] [J_k^1] - [E], \quad [A_k] \in R(M_k, M_k), \\
[B_k] &= \frac{1}{h^2} [J_k^2] [J_k^1]; \quad [A_k] \in R(M_k, M_k), \quad [B_k] \in R(M_k, M_k), \\
\{C_k\} &= \left( \varkappa_k^2 - \frac{2}{h^2} \right) (l_k\{E\} - \{Z_k\}), \quad \{C_k\}, \{E\}, \{Z_k\} \in R(1, M_k), \\
\{D_k\} &= \frac{1}{h^2} (l_k\{E\} - \{Z_k\}), \quad \{D_k\} \in R(1, M_k).
\end{aligned} \quad (1.35)$$

Здесь  $\{E\}$  и  $[E]$  – единичный вектор и единичная диагональная матрица;  $\{Z_k\}$  – вектор с элементами  $\{z_k^1, z_k^2, \dots, z_k^M\}^T$ ;  $l_k = -l_1$  и  $l_k = l_2$  для камер “1” и “2” соответственно.

Уравнения, соответствующие задаче о генерации падающей на пластину звуковой волны, получаются из уравнений (1.34) при  $k = 1$  и замене неизвестных на неизвестные  $\{d\tilde{\Phi}_*^s\}$  и  $\tilde{\Phi}_*^{s,0}$ . Для их замыкания к ним необходимо добавить граничные условия (1.24), (1.25), которые в комбинированной форме относительно неизвестных запишутся в виде

$$(1 - r_s)\delta(0) \frac{d\tilde{\Phi}_*^s}{dz} + r_s \left( \tilde{\Phi}_*^{s,0} - \frac{ip_0}{\rho_1\omega} \right) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, N, \quad (1.36)$$

где  $r_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, N$ , принимают значения “0”, если в узлах конечно-разностной сетки, принадлежащих жесткому отражателю (стенке), выполняется кинематическое граничное условие (1.4), а в остальных узлах, в которых выполняются условия (1.5), имеет место  $r_s = 1$ ;  $\delta$  – дельта-функция Дирака,  $\delta(0) = 1$  при  $z = 0$  и  $\delta(0) = 0$  при  $z < 0$ .

В матричном виде уравнения (1.36) запишутся в виде

$$(1 - r_s)[E] \left\{ \tilde{\Phi}_*^s \right\} + r_s \tilde{\Phi}_*^{s,0} = r_s \frac{ip_0}{\rho_1\omega}, \quad s = 1, 2, \dots, N. \quad (1.37)$$

Здесь и далее под  $[E]$  подразумевается строка вида  $\{1, 0, 0, \dots, 0\}$ .

После завершения решения задачи о генерации моногармонической волны и нахождения узловых значений функций  $\tilde{\Phi}_*^0$ ,  $V_z^{*0}$  необходимо построить решение задачи о звукоизоляции пластины. Для этого к системе уравнений (1.32) необходимо добавить уравнение движения пластины (1.14) и условия сопряжения (1.26).

Первое из них в приближении плоской задачи в силу представлений (1.16) и (1.18) примет вид

$$\tilde{D} \frac{d^4 \tilde{w}}{dx^4} - \rho_n t \omega^2 \tilde{w} - (\tilde{p}_*^0 + \tilde{p}_1^0 - \tilde{p}_2^0) \Big|_{z=0} = 0, \quad \tilde{D} = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \left( 1 + \frac{i\delta}{\pi} \right). \quad (1.38)$$

Решение этого уравнения при  $x = 0$  необходимо подчинить условиям симметрии

$$\tilde{w}|_x = \tilde{w}|_{-x} \quad \forall x \in [-B/2, B/2], \quad (1.39)$$

а при  $x = B/2$  – граничным условиям защемления

$$\tilde{w} = 0, \quad \frac{d\tilde{w}}{dx} = 0, \quad (1.40)$$

если всю стенку между двумя камерами моделировать пластиной, имеющей кусочно-постоянную толщину.

Для получения алгебраического аналога уравнений (1.38) и условия (1.40) воспользуемся конечно-разностной аппроксимацией производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \Big|_{x=x_s} &= \frac{\tilde{w}_{s+1} - \tilde{w}_{s-1}}{2h}, \\ \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^4} \Big|_{x=x_s} &= \frac{\tilde{w}_{s-2} - 4\tilde{w}_{s-1} + 6\tilde{w}_s - 4\tilde{w}_{s+1} + \tilde{w}_{s+2}}{h^4}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Тогда условие симметрии (1.39) и граничные условия (1.40) приводят к равенствам

$$\tilde{w}_2 = \tilde{w}_0, \quad \tilde{w}_3 = \tilde{w}_{-1}, \quad \tilde{w}_{N-1} = \tilde{w}_{N+1}, \quad \tilde{w}_N = 0, \quad (1.42)$$

при учете которых уравнение (1.38) сводится к системе разностных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{D}_1}{h^4} (6\tilde{w}_1 - 8\tilde{w}_2 + 2\tilde{w}_3) - \rho_n t \omega^2 \tilde{w}_1 - \tilde{p}_*^{0,1} - \tilde{p}_1^{0,1} + \tilde{p}_2^{0,1} &= 0, \\ \frac{\tilde{D}_2}{h^4} (-4\tilde{w}_1 + 7\tilde{w}_2 - 4\tilde{w}_3 + \tilde{w}_4) - \rho_n t \omega^2 \tilde{w}_2 - \tilde{p}_*^{0,2} - \tilde{p}_1^{0,2} + \tilde{p}_2^{0,2} &= 0, \\ \frac{\tilde{D}_s}{h^4} (\tilde{w}_{s-2} - 4\tilde{w}_{s-1} + 6\tilde{w}_s - 4\tilde{w}_{s+1} + \tilde{w}_{s+2}) - \rho_n t \omega^2 \tilde{w}_s - \tilde{p}_*^{0,s} - \tilde{p}_1^{0,s} + \tilde{p}_2^{0,s} &= 0, \\ \frac{\tilde{D}_{N-1}}{h^4} (\tilde{w}_{N-3} - 4\tilde{w}_{N-2} + 7\tilde{w}_{N-1}) - \rho_n t \omega^2 \tilde{w}_{N-1} - \\ - \tilde{p}_*^{0,N-1} - \tilde{p}_1^{0,N-1} + \tilde{p}_2^{0,N-1} &= 0, \\ \tilde{w}_N &= 0. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Из условий равенства скоростей движения пластины и акустических сред (1.26) следуют соотношения

$$\tilde{w} = -\frac{i}{\omega} \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial z} - V_*^z \right), \quad \tilde{w} = -\frac{i}{\omega} \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial z}, \quad (1.44)$$

а из соотношений (1.6), (1.7) – зависимости

$$\tilde{p}_*^{0,s} = -i\rho_1 \omega \tilde{\Phi}_*^{0,s}, \quad \tilde{p}_1^{0,s} = -i\rho_1 \omega \tilde{\Phi}_1^{0,s}, \quad \tilde{p}_2^{0,s} = -i\rho_2 \omega \tilde{\Phi}_2^{0,s}. \quad (1.45)$$

При их использовании уравнения (1.43) для  $s$ -го сечения преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{D}_s}{h^4 \omega} \left( \frac{d\tilde{\Phi}_1^{s-2}}{dz} - 4 \frac{d\tilde{\Phi}_1^{s-1}}{dz} + 6 \frac{d\tilde{\Phi}_1^s}{dz} - 4 \frac{d\tilde{\Phi}_1^{s+1}}{dz} + \frac{d\tilde{\Phi}_1^{s+2}}{dz} \right) \Big|_{z=0} - \\ - \rho_n t \omega^2 \frac{d\tilde{\Phi}_1^s}{dz} \Big|_{z=0} - \rho_1 \omega \tilde{\Phi}_1^{s,0} + \rho_2 \omega \tilde{\Phi}_2^{s,0} = \rho_1 \omega \tilde{\Phi}_*^{s,0} + \\ + \frac{\tilde{D}_s}{h^4 \omega} \left( \tilde{V}_z^{*,s-2} - 4\tilde{V}_z^{*,s-1} + 6\tilde{V}_z^{*,s} - 4\tilde{V}_z^{*,s+1} + \tilde{V}_z^{*,s+2} \right) \Big|_{z=0} - \rho_n t \omega^2 \tilde{V}_z^{*,s} \Big|_{z=0}, \end{aligned} \quad (1.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{D}_s}{h^4 \omega} \left( \frac{d\tilde{\Phi}_2^{s-2}}{dz} - 4 \frac{d\tilde{\Phi}_2^{s-1}}{dz} + 6 \frac{d\tilde{\Phi}_2^s}{dz} - 4 \frac{d\tilde{\Phi}_2^{s+1}}{dz} + \frac{d\tilde{\Phi}_2^{s+2}}{dz} \right) \Big|_{z=0} - \\ - \rho_n t \omega^2 \frac{d\tilde{\Phi}_2^s}{dz} \Big|_{z=0} - \rho_1 \omega \tilde{\Phi}_1^{s,0} + \rho_2 \omega \tilde{\Phi}_2^{s,0} = \rho_1 \omega \tilde{\Phi}_*^{s,0}, \end{aligned}$$

где величины  $\tilde{\Phi}_*^{s,0}$ ,  $\tilde{V}_z^{*,s}$  считаем найденными из решения задачи о генерации моногармонической волны в прямоугольной области  $\Omega_1$ .

Для 1-го, 2-го и  $(N-1)$ -го сечений уравнения (1.43) запишутся по аналогии, а для  $N$ -го сечения должны выполняться равенства

$$\frac{d\tilde{\Phi}_1^N}{dz} \Big|_{z=0} = \tilde{V}_z^{*,N} \Big|_{z=0}, \quad \frac{d\tilde{\Phi}_2^N}{dz} \Big|_{z=0} = 0. \quad (1.47)$$



В матричном виде уравнения (1.46), (1.47) запишутся в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{\tilde{D}_s}{h^4\omega} [E] \left\{ d\tilde{\Phi}_1^{s-2} \right\} - 4 \frac{\tilde{D}_s}{h^4\omega} [E] \left\{ d\tilde{\Phi}_1^{s-1} \right\} + \left( 6 \frac{\tilde{D}_s}{h^4\omega} - \rho_n t \omega^2 \right) [E] \left\{ d\tilde{\Phi}_1^s \right\} - \\
& - 4 \frac{\tilde{D}_s}{h^4\omega} [E] \left\{ d\tilde{\Phi}_1^{s+1} \right\} + \frac{\tilde{D}_s}{h^4\omega} [E] \left\{ d\tilde{\Phi}_1^{s+2} \right\} - \rho_1 \omega \tilde{\Phi}_1^{s,0} + \rho_2 \omega \tilde{\Phi}_2^{s,0} = \\
& = \rho_1 \omega \tilde{\Phi}_*^{s,0} + \frac{\tilde{D}_s}{h^4\omega} \left( \tilde{V}_z^{*,s-2} - 4\tilde{V}_z^{*,s-1} + 6\tilde{V}_z^{*,s} - 4\tilde{V}_z^{*,s+1} + \tilde{V}_z^{*,s+2} \right) \Big|_{z=0} - \\
& - \rho_n t \omega^2 \tilde{V}_z^{*,s} \Big|_{z=0}, \quad (1.48) \\
& \frac{\tilde{D}_s}{h^4\omega} [E] \left\{ d\tilde{\Phi}_2^{s-2} \right\} - 4 \frac{\tilde{D}_s}{h^4\omega} [E] \left\{ d\tilde{\Phi}_2^{s-1} \right\} + \left( 6 \frac{\tilde{D}_s}{h^4\omega} - \rho_n t \omega^2 \right) [E] \left\{ d\tilde{\Phi}_2^s \right\} - \\
& - 4 \frac{\tilde{D}_s}{h^4\omega} [E] \left\{ d\tilde{\Phi}_2^{s+1} \right\} + \frac{\tilde{D}_s}{h^4\omega} [E] \left\{ d\tilde{\Phi}_2^{s+2} \right\} - \rho_1 \omega \tilde{\Phi}_1^{s,0} + \rho_2 \omega \tilde{\Phi}_2^{s,0} = \rho_1 \omega \tilde{\Phi}_*^{s,0}, \\
& [E] \left\{ d\tilde{\Phi}_1^N \right\} = \tilde{V}_z^{*,N} \Big|_{z=0}, \quad [E] \left\{ d\tilde{\Phi}_2^N \right\} = 0.
\end{aligned}$$

## 2. Второй вариант постановки задачи и численный метод ее решения

В соответствии со вторым вариантом постановки задачи будем считать, что за счет гармонических колебаний стены  $z = -l_1$  по закону  $U = \tilde{U} e^{i\omega\tau}$  (рис. 1,  $\tilde{U}$  – амплитуда перемещения) в подобластях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  сформированы звуковые волны, которые относительно потенциалов скоростей  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  в плоском приближении описываются волновыми уравнениями (1.8). Для них в рассматриваемом случае граничные условия необходимо выбрать следующим образом:

$$\text{при } x = 0: \quad \tilde{\Phi}_k \Big|_x = \tilde{\Phi}_k \Big|_{-x} \quad \forall x \in [-B/2, B/2], \quad k = 1, 2, \quad (2.1)$$

$$\text{при } x = B/2: \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}_k}{\partial x} = 0, \quad k = 1, 2, \quad (2.2)$$

$$\text{при } z = -l_1: \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial z} = i\omega \tilde{U}, \quad (2.3)$$

$$\text{при } z = l_2: \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial z} = 0, \quad (2.4)$$

$$\text{при } z = 0: \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial z} = i\omega \tilde{w}, \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial z} = i\omega \tilde{w}. \quad (2.5)$$

Решением сформулированной задачи определяются функции давлений  $p_k = p_k(x, z)$ , и по формуле  $R_{pt} = -20 \lg |p_2/p_1|$ , аналогичной формуле (1.17), вычисляется теоретическое значение параметра звукоизоляции пластины. Алгоритм численного решения волнового уравнения, записанного для камеры “2”, остается неизменным, а для камеры “1” в связи с изменением граничных условий приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}
& - \frac{d\tilde{\Phi}_1^1}{dz} + \frac{2}{h^2} \int_z^{-l_1} \int_0^z \frac{d\tilde{\Phi}_1^2}{dz} d\xi d\zeta - \frac{2(l_1 + z)}{h^2} \tilde{\Phi}_1^{2,0} + \\
& + \left( \varkappa_1^2 - \frac{2}{h^2} \right) \int_z^{-l_1} \int_0^z \frac{d\tilde{\Phi}_1^1}{dz} d\xi d\zeta - (l_1 + z) \left( \varkappa_1^2 - \frac{2}{h^2} \right) \tilde{\Phi}_1^{1,0} = -i\omega \tilde{U},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{d\tilde{\Phi}_1^s}{dz} + \frac{1}{h^2} \int_z^{-l_1} \int_0^z \frac{d\tilde{\Phi}_1^{s-1}}{dz} d\xi d\zeta - \frac{(l_1+z)}{h^2} \tilde{\Phi}_1^{s-1,0} + \\
& \quad + \left( \varkappa_1^2 - \frac{2}{h^2} \right) \int_z^{-l_1} \int_0^z \frac{d\tilde{\Phi}_1^s}{dz} d\xi d\zeta - (l_1+z) \left( \varkappa_1^2 - \frac{2}{h^2} \right) \tilde{\Phi}_1^{s,0} + \\
& \quad + \frac{1}{h^2} \int_z^{-l_1} \int_0^z \frac{d\tilde{\Phi}_1^{s+1}}{dz} d\xi d\zeta - \frac{(l_1+z)}{h^2} \tilde{\Phi}_1^{s+1,0} = -i\omega\tilde{U}, \quad s = 2, 3, \dots, N-1, \quad (2.6) \\
& -\frac{d\tilde{\Phi}_1^N}{dz} + \frac{2}{h^2} \int_z^{-l_1} \int_0^z \frac{d\tilde{\Phi}_1^{N-1}}{dz} d\xi d\zeta - \frac{2(l_1+z)}{h^2} \tilde{\Phi}_1^{N-1,0} + \\
& \quad + \left( \varkappa_1^2 - \frac{2}{h^2} \right) \int_z^{-l_1} \int_0^z \frac{d\tilde{\Phi}_1^N}{dz} d\xi d\zeta - (l_1+z) \left( \varkappa_1^2 - \frac{2}{h^2} \right) \tilde{\Phi}_1^{N,0} = -i\omega\tilde{U},
\end{aligned}$$

которые в матричной форме примут вид

$$\begin{aligned}
& [A_1] \left\{ d\tilde{\Phi}_1^1 \right\} + 2[B_1] \left\{ d\tilde{\Phi}_1^2 \right\} + \{C_1\} \tilde{\Phi}_1^{1,0} + 2\{D_1\} \tilde{\Phi}_1^{2,0} = -i\omega\{E\}\tilde{U}, \\
& [B_1] \left\{ d\tilde{\Phi}_1^{s-1} \right\} + [A_1] \left\{ d\tilde{\Phi}_1^s \right\} + [B_1] \left\{ d\tilde{\Phi}_1^{s+1} \right\} + \{D_1\} \tilde{\Phi}_1^{s-1,0} + \\
& \quad + \{C_1\} \tilde{\Phi}_1^{s,0} + \{D_1\} \tilde{\Phi}_1^{s+1,0} = -i\omega\{E\}\tilde{U}, \quad s = 2, 3, \dots, N-1, \quad (2.7) \\
& 2[B_1] \left\{ d\tilde{\Phi}_1^{N-1} \right\} + [A_1] \left\{ d\tilde{\Phi}_1^N \right\} + 2\{D_1\} \tilde{\Phi}_1^{N-1,0} + \{C_1\} \tilde{\Phi}_1^{N,0} = -i\omega\{E\}\tilde{U},
\end{aligned}$$

Здесь матрицы  $[A_1]$ ,  $[B_1]$ ,  $\{C_1\}$ ,  $\{D_1\}$  по-прежнему определяются по формулам (1.35).

Уравнения движения пластины (1.14) в рассматриваемом случае примет вид

$$\tilde{D} \frac{d^4 \tilde{w}}{dx^4} - \rho_n t \omega^2 \tilde{w} - (\tilde{p}_1^0 - \tilde{p}_2^0) \Big|_{z=0} = 0, \quad (2.8)$$

которое после конечно-разностных аппроксимаций производных, учета условий симметрии и граничных условий (1.42) сводится к системе разностных уравнений вида

$$\begin{aligned}
& \frac{\tilde{D}_1}{h^4} (6\tilde{w}_1 - 8\tilde{w}_2 + 2\tilde{w}_3) - \rho_n t \omega^2 \tilde{w}_1 - \tilde{p}_1^{0,1} + \tilde{p}_2^{0,1} = 0, \\
& \frac{\tilde{D}_2}{h^4} (-4\tilde{w}_1 + 7\tilde{w}_2 - 4\tilde{w}_3 + \tilde{w}_4) - \rho_n t \omega^2 \tilde{w}_2 - \tilde{p}_1^{0,2} + \tilde{p}_2^{0,2} = 0, \\
& \frac{\tilde{D}_s}{h^4} (\tilde{w}_{s-2} - 4\tilde{w}_{s-1} + 6\tilde{w}_s - 4\tilde{w}_{s+1} + \tilde{w}_{s+2}) - \rho_n t \omega^2 \tilde{w}_s - \tilde{p}_1^{0,s} + \tilde{p}_2^{0,s} = 0, \quad (2.9) \\
& \frac{\tilde{D}_{N-1}}{h^4} (\tilde{w}_{N-3} - 4\tilde{w}_{N-2} + 7\tilde{w}_{N-1}) - \rho_n t \omega^2 \tilde{w}_{N-1} - \tilde{p}_1^{0,N-1} + \tilde{p}_2^{0,N-1} = 0, \\
& \tilde{w}_N = 0.
\end{aligned}$$

Из условий равенства скоростей движения пластины и акустических сред (2.5) следуют соотношения

$$\tilde{w} = -\frac{i}{\omega} \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial z}, \quad \tilde{w} = -\frac{i}{\omega} \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial z}, \quad (2.10)$$

а из условий (1.2) – соотношения

$$\tilde{p}_1^{0,s} = -i\rho_1\omega\tilde{\Phi}_1^{0,s}, \quad \tilde{p}_2^{0,s} = -i\rho_2\omega\tilde{\Phi}_2^{0,s}. \quad (2.11)$$

Подчинив для  $s$ -го сечения уравнения (2.9) условиям (2.10), (2.11), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{D}_s}{h^4\omega} \left( \frac{d\tilde{\Phi}_1^{s-2}}{dz} - 4 \frac{d\tilde{\Phi}_1^{s-1}}{dz} + 6 \frac{d\tilde{\Phi}_1^s}{dz} - 4 \frac{d\tilde{\Phi}_1^{s+1}}{dz} + \frac{d\tilde{\Phi}_1^{s+2}}{dz} \right) \Big|_{z=0} - \\ & \quad - \rho_n t \omega^2 \frac{d\tilde{\Phi}_1^s}{dz} \Big|_{z=0} - \rho_1 \omega \tilde{\Phi}_1^{s,0} + \rho_2 \omega \tilde{\Phi}_2^{s,0} = 0, \\ & \frac{\tilde{D}_s}{h^4\omega} \left( \frac{d\tilde{\Phi}_2^{s-2}}{dz} - 4 \frac{d\tilde{\Phi}_2^{s-1}}{dz} + 6 \frac{d\tilde{\Phi}_2^s}{dz} - 4 \frac{d\tilde{\Phi}_2^{s+1}}{dz} + \frac{d\tilde{\Phi}_2^{s+2}}{dz} \right) \Big|_{z=0} - \\ & \quad - \rho_n t \omega^2 \frac{d\tilde{\Phi}_2^s}{dz} \Big|_{z=0} - \rho_1 \omega \tilde{\Phi}_1^{s,0} + \rho_2 \omega \tilde{\Phi}_2^{s,0} = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Для 1-го, 2-го и  $(N-1)$ -го сечений уравнения (2.9) запишутся по аналогии, а для  $N$ -го сечения должны выполняться равенства

$$\frac{d\tilde{\Phi}_1^N}{dz} \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{d\tilde{\Phi}_2^N}{dz} \Big|_{z=0} = 0. \quad (2.13)$$

В матричной форме уравнения (2.12), (2.13) запишутся в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{D}_s}{h^4\omega} [E] \left\{ d\tilde{\Phi}_1^{s-2} \right\} - 4 \frac{\tilde{D}_s}{h^4\omega} [E] \left\{ d\tilde{\Phi}_1^{s-1} \right\} + \left( 6 \frac{\tilde{D}_s}{h^4\omega} - \rho_n t \omega^2 \right) [E] \left\{ d\tilde{\Phi}_1^s \right\} - \\ & \quad - 4 \frac{\tilde{D}_s}{h^4\omega} [E] \left\{ d\tilde{\Phi}_1^{s+1} \right\} + \frac{\tilde{D}_s}{h^4\omega} [E] \left\{ d\tilde{\Phi}_1^{s+2} \right\} - \rho_1 \omega \tilde{\Phi}_1^{s,0} + \rho_2 \omega \tilde{\Phi}_2^{s,0} = 0, \\ & \frac{\tilde{D}_s}{h^4\omega} [E] \left\{ d\tilde{\Phi}_2^{s-2} \right\} - 4 \frac{\tilde{D}_s}{h^4\omega} [E] \left\{ d\tilde{\Phi}_2^{s-1} \right\} + \left( 6 \frac{\tilde{D}_s}{h^4\omega} - \rho_n t \omega^2 \right) [E] \left\{ d\tilde{\Phi}_2^s \right\} - \\ & \quad - 4 \frac{\tilde{D}_s}{h^4\omega} [E] \left\{ d\tilde{\Phi}_2^{s+1} \right\} + \frac{\tilde{D}_s}{h^4\omega} [E] \left\{ d\tilde{\Phi}_2^{s+2} \right\} - \rho_1 \omega \tilde{\Phi}_1^{s,0} + \rho_2 \omega \tilde{\Phi}_2^{s,0} = 0, \quad (2.14) \\ & [E] \left\{ d\tilde{\Phi}_1^N \right\} = 0, \\ & [E] \left\{ d\tilde{\Phi}_2^N \right\} = 0. \end{aligned}$$

Численная процедура формирования соответствующих матриц и поиска решения алгебраического аналога матричных уравнений реализована на векторном языке системы научных расчетов МАТЛАВ. Его использование позволяет решать задачи указанного класса в несколько раз быстрее, чем при написании программ с использованием скалярных языков программирования.

Формирование матриц фактически сводится к выполнению единообразных элементарных операций над матрицами, аппроксимирующими интегральные операторы типа Вольтерра (так называемыми интегрирующими матрицами). В алгоритмическом плане на этом этапе естественным образом выделяются параллельные ветви вычислительного процесса. Использование языка программирования системы МАТЛАВ допускает использование функций, написанных на языке С++,

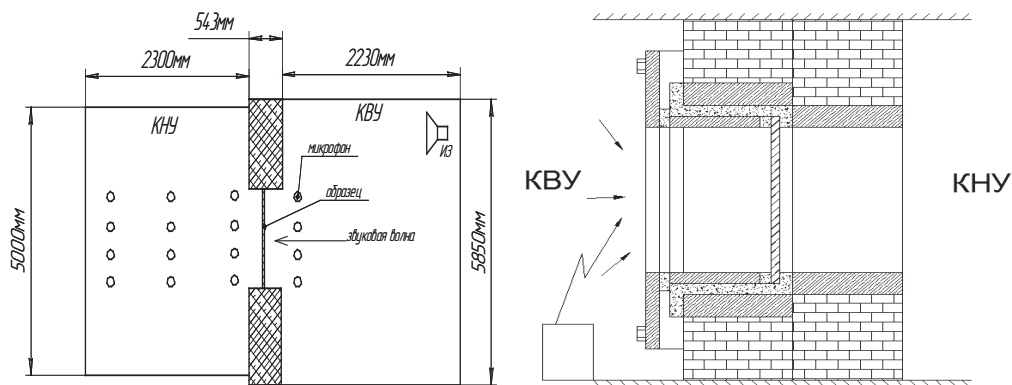


Рис. 2

которые позволяют управлять (запускать, обрабатывать и т. д.) вычислительными процессами на разных процессорах, тем самым значительно увеличивая эффективность вычислений.

Следует также отметить, что важной вычислительной особенностью системы MATLAB является возможность выполнять вычисления с комплексными числами, что существенно упрощает процесс создания программ.

### 3. Анализ результатов экспериментальных и численных исследований

С целью количественного и качественного анализа построенных теоретических решений рассматриваемой задачи были проведены экспериментальные исследования по определению параметра звукоизоляции плоской пластины, выполненной из стали 20 и имеющей толщину  $t = 3$  мм, длину  $a = 480$  мм, ширину  $b = 560$  мм. Испытания проведены в акустической лаборатории, удовлетворяющей требованиям ГОСТ 27296-87. Она включает в себя две смежные камеры высокого и низкого уровней (КВУ и КНУ), в проем между которыми устанавливается испытываемый образец (рис. 2), а также измерительно-управляющий комплекс с передающей и приемной системами. Камеры имеют следующие значения площадей  $S$  и объемов  $V$ :  $S = 13$  м<sup>2</sup>,  $V = 35$  м<sup>3</sup> (высокого уровня) и  $S = 11$  м<sup>2</sup>,  $V = 31$  м<sup>3</sup> (низкого уровня). В них в соответствии с ГОСТ 27296-87 обеспечена минимальная возможность косвенной передачи звука и проникновения посторонних звуков.

Исследование распределения звуковых давлений заключается в последовательном их измерении в камерах испытательной лаборатории и сравнении их средних уровней в определенных полосах частот с последующим вычислением показателей звукоизоляции образцов. Измерения проводились в третьоктавных полосах частот  $f$  (Гц): 50, 63, 80, 100, 125, 160, 200, 250, 315, 400, 500, 630, 800, 1000, 1250, 1600, 2000, 2500, 3150. Параметр звукоизоляции  $R_p$  воздушного шума ограждающими конструкциями в соответствии с указанным стандартом рассчитывается по формуле

$$R_p = L_1 - L_2 + \Delta R_p, \quad \Delta R_p = 10 \lg(S/A_2), \quad (3.1)$$

где  $L_1$ ,  $L_2$  – средние уровни звукового давления (дБ) в помещениях высокого и низкого уровней, соответственно;  $S$  – площадь (м<sup>2</sup>) поверхности испытываемого образца;  $A_2$  – эквивалентная площадь (м<sup>2</sup>) звукопоглощения помещения низкого уровня.

Входящие в (3.1) средние уровни звукового давления  $L_k$  находятся по формуле

$$L_k = 10 \lg \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 10^{0.1L_j} \right), \quad k = 1, 2, \quad (3.2)$$

где  $L_j$  – уровень звукового давления в  $j$ -й точке;  $n$  – число точек измерения.

Эквивалентная площадь звукопоглощения помещения низкого уровня  $A_2$  определяется по формуле

$$A_2 = \frac{0.16 V_2}{T_2}, \quad (3.3)$$

где  $T_2$  – время реверберации (с), измеряемое в соответствии с ГОСТ 26417-85;  $V_2$  – объем ( $\text{м}^3$ ) КНУ; 0.16 – эмпирический коэффициент (с/м).

Как видно из формул (3.1), (3.3), экспериментально определяемый параметр  $R_p$  зависит не только от измеряемых уровней звуковых давлений в камерах, но и от времени реверберации в камере низкого уровня. При численном же решении задачи вместо  $R_p$  по формуле

$$R_p = L_1 - L_2 \quad (3.4)$$

определяется параметр звукоизоляции  $R_{pt}$ , зависящий только от уровней звуковых давления  $L_k$  в соответствующих камерах

$$L_k = 10 \lg \left( \tilde{p}_k^2 / \tilde{p}_0^2 \right). \quad (3.5)$$

Здесь  $\tilde{p}_k$  – эффективное значение реального звукового давления в  $k$ -й камере;  $\tilde{p}_0$  – пороговое значение звукового давления в воздухе ( $\tilde{p}_0 = 2 \cdot 10^{-5}$  Па).

После подстановки (3.5) в (3.4) приходим к формуле

$$R_{pt} = -20 \lg (\tilde{p}_2 / \tilde{p}_1). \quad (3.6)$$

Из формул (3.1) и (3.6) следует, что для объективного сравнения результатов теоретических и экспериментальных исследований, помимо параметра звукоизоляции, требуется фиксировать время реверберации в КНУ, необходимое для вычисления  $\Delta R_p$ .

В табл. 1 приведены значения параметров, найденные в результате серии испытаний образца при разных температурных режимах и соответствующие измерению звукового давления микрофонами, расположенными равномерно в пределах объемов камер (рис. 2), а также вычисленного на их основании параметра звукоизоляции

$$R_p^{(2)} = R_p - dR_p, \quad (3.7)$$

аналогичного по физическому смыслу параметру  $R_{pt}$ .

На основе изложенных выше численных методик проведены теоретические расчеты для стальной пластины, имеющей параметры  $E = 200$  ГПа,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho_n = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $a = 0.56$  м,  $t = 0.003$  м и окруженной с двух сторон воздухом, характеризующимся параметрами  $c_1 = c_2 = 331$  м/с,  $\rho_1 = \rho_2 = 1.293$  кг/м<sup>3</sup>.

На рис. 3 приведены результаты найденных численных решений сформулированных задач (штриховой линией обозначен график  $R_{pt}$ , соответствующий первой постановке, пунктирной линией – второй постановке) и дано их сравнение с результатами физического эксперимента  $R_p^{(2)}$  (сплошная линия) и  $R_p$  (штрихпунктирная линия).

Как видно из графиков (рис. 3), оба варианта постановок задач практически эквивалентны, приводят к физически приемлемым результатам, а влияние параметра

Табл. 1

$f$ , Гц	$T_2$ , с	$A_2$ , м <sup>2</sup>	$dR_p$ , дБ	$R_p$ , дБ	$R_p^{(2)}$ , дБ
50	1.2	4.13	-10.7	43.1	53.8
63	1.23	4.03	-10.6	38.9	49.5
80	0.96	5.19	-11.7	37.6	49.3
100	0.59	8.46	-14	33	47
125	0.72	6.85	-13.1	20.1	33.2
160	0.9	5.51	-12.1	17.2	29.3
200	0.61	8.16	-13.8	8.9	22.7
250	0.95	5.2	-11.9	18.1	30
315	0.98	5.09	-11.8	20.1	31.9
400	0.65	7.69	-13.6	19.4	33
500	0.52	9.47	-14.5	24.2	38.7
630	0.54	9.11	-14.3	25.9	40.2
800	0.12	40.46	-20.8	22.2	43
1000	0.09	52.72	-21.9	23.4	45.3
1250	0.13	38.9	-20.6	27	47.6
1600	0.05	103.13	-24.8	25.7	50.5
2000	0.04	128.69	-25.8	26.1	51.9
2500	0.04	127.78	-25.8	28	53.8
3150	0.02	209.2	-27.9	24.7	52.6

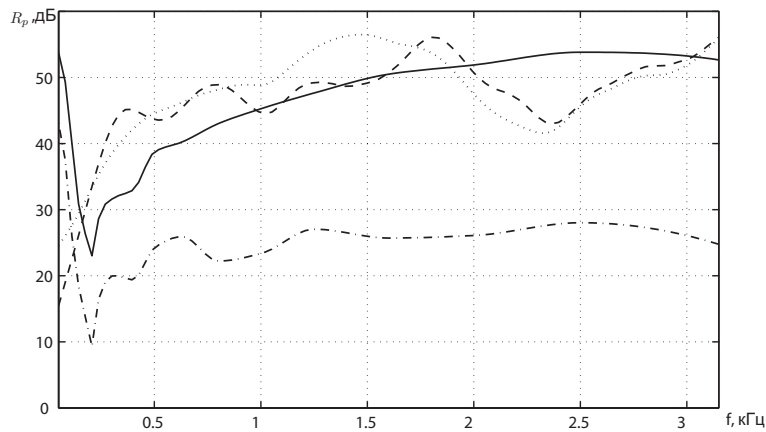


Рис. 3

$dR_p$ , абсолютно не учитываемого в рамках используемых математических моделей, на определяемый параметр  $R_p^{(2)}$  является весьма существенным (особенно на частотах  $f > 200$  Гц). Сравнивая результаты теоретических и экспериментальных исследований, можно видеть, что практически приемлемую точность рассматриваемые постановки задач обеспечивают при частотах  $f > 100$  Гц.

Были проведены также экспериментальные исследования по установлению в камере низкого уровня закона распределения звукового давления в точках горизонтальной плоскости, проходящей через центр испытываемой пластины. Для этого при проведении эксперимента микрофоны поочередно располагались в 25 точках КНУ при неизменном расположении микрофонов в КВУ вблизи испытываемого образца (рис. 2). В результате была получена экспериментальная зависимость  $R_p^{(2)}(x, z)$ . Определялись также теоретические значения параметра  $R_{pt}(x, z) =$

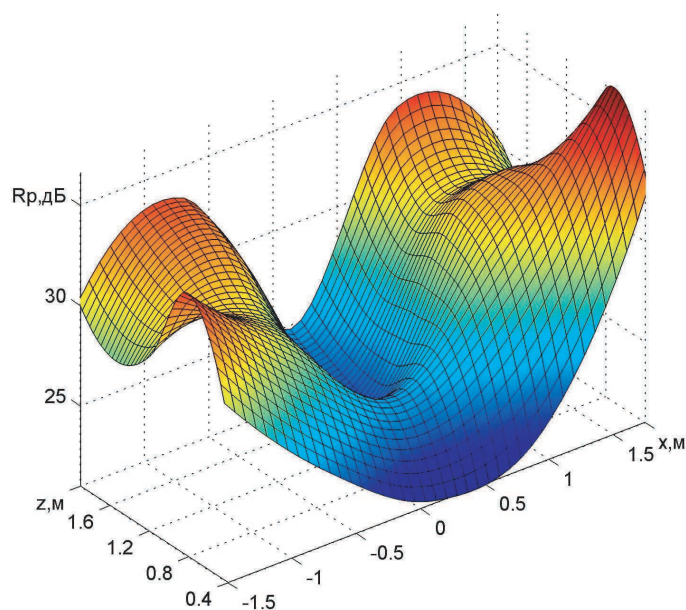


Рис. 4

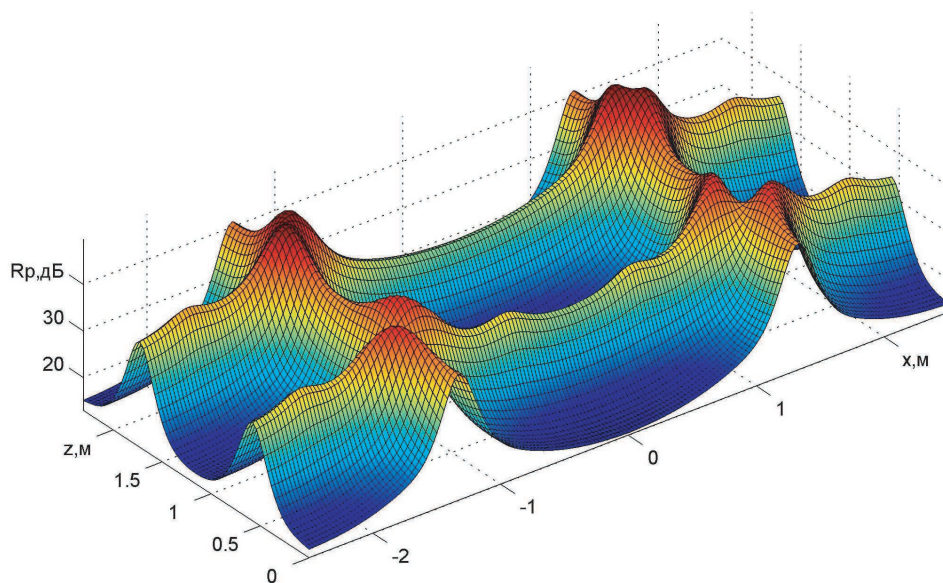


Рис. 5

$= -201g(\tilde{p}_2/\tilde{p}_1^{\text{CP}})$ , где  $\tilde{p}_1^{\text{CP}}$  – среднее значение давления в КВУ. Характер данных кривых для первой и второй постановок практически идентичен, имеются лишь незначительные отличия при частотах  $f > 1000$  Гц.

На рис. 4, 6 представлены экспериментальные зависимости  $R_p^{(2)}(x, z)$ , найденные для частот  $f = 160$  и  $315$  Гц соответственно. На рис. 5, 7 приводятся аналогичные данные, полученные при численном решении задачи в рамках ее первой постановки.

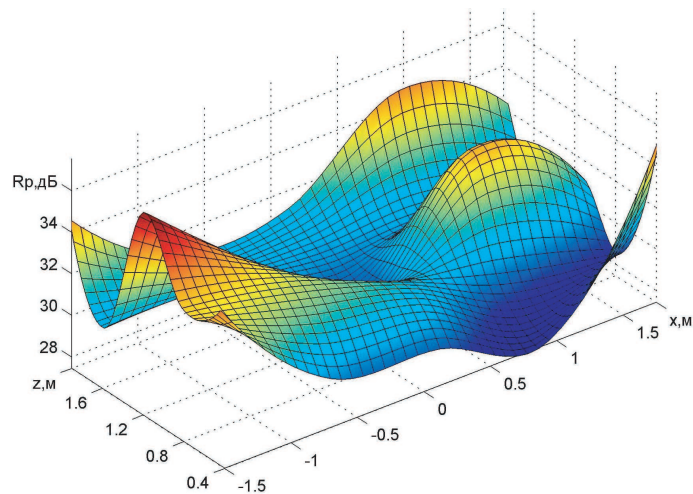


Рис. 6

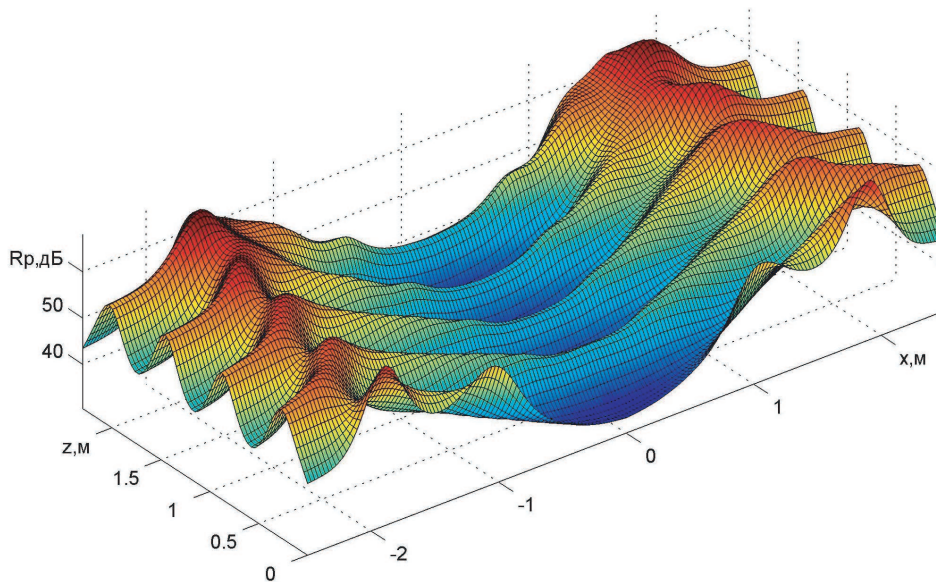


Рис. 7

Результаты, приведенные на рис. 4–7, указывают на весьма сложный закон распределения звукового давления в объеме КНУ.

### Заключение

Полученные результаты, дополняющие результаты проведенных ранее исследований [2, 7, 8], показывают, что рассмотренные выше две постановки задачи (в плоском приближении) по теоретическому определению параметра звукоизоляции пластины, находящейся между двумя камерами, приводят к практически одинаковым результатам на всем диапазоне изменения частоты падающей на пластину звуковой волны. Такие теоретические результаты достаточно близки



к экспериментальным результатам при частотах  $f > 100$  Гц. Следует заметить, что при проведении физических экспериментов по определению параметра звукоизоляции тонкостенных элементов конструкций в виде пластин и оболочек должен наблюдаться значительный разброс измеряемых шумомерами уровней звукового давления при различных способах размещения шумомеров в пределах объемов камер акустической лаборатории. Внутреннее демпфирование материала пластины практически не влияет на ее звукоизоляционные свойства.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-19-00667), а также при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-08-90435).

### Summary

*V.N. Paimushin, R.K. Gazizullin, A.A. Sharapov.* Mathematical Modeling and Experimental Investigation of Sound Wave Propagation through a Deformable Plate Placed between Two Chambers.

This paper gives a numerical solution of the plane problem of propagation of a sound wave formed by a sound source in a high-pressure chamber through a deformable thin plate, and of formation of a wave emitted by the plate in a low-pressure chamber. The problem under study is related to the mathematical modeling of experimental determination of sound-insulating properties of thin-walled structures by the method of adjacent reverberation chambers in acoustic laboratories. Two statements of the problem, which differ in the way of specification of a sound source in the high-pressure chamber, are investigated based on the use of wave equations in a two-dimensional approximation. It is proved that both of the two considered statements lead to almost equal results in determination of the sound transmission loss of the plate. Theoretical results are compared with experimental research data.

**Keywords:** deformable plate, Kirchhoff–Love model, internal friction, Voigt–Thompson–Kelvin model, acoustic insulation, wave equation, numerical method, experimental and theoretical investigations.

### Литература

1. СП 51.13330.2011. Защита от шума. Актуализированная ред. СНиП 23-03-2003. – М., 2011. – 46 с.
2. *Паймушин В.Н., Газизуллин Р.К.* Исследование звукоизоляционных свойств абсолютно жесткой пластины, помещенной на деформируемых опорных элементах между двумя преградами // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2013. – Т. 155, кн. 3. – С. 126–141.
3. *Пановко Я.Г.* Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. – М.: Физматгиз, 1960. – 193 с.
4. *Хильчевский В.В., Дубенец В.Г.* Рассеяние энергии при колебаниях тонкостенных элементов конструкций. – Киев: Вища шк., 1977. – 252 с.
5. *Вахитов М.Б.* Интегрирующие матрицы – аппарат численного решения дифференциальных уравнений строительной механики // Изв. вузов. Авиац. техника. – 1966. – № 3. – С. 50–61.
6. *Даутов Р.З., Паймушин В.Н.* О методе интегрирующих матриц решения краевых задач для обыкновенных уравнений четвертого порядка // Изв. вузов. Матем. – 1996. – № 10. – С. 13–25.
7. *Паймушин В.Н.* О задачах излучения звуковой волны при динамическом процессе деформирования пластин с учетом внешнего и внутреннего демпфирования // Матем. методы та физ.-мех. поля. – 2013. – Т. 56, № 2. – С. 72–85.

8. *Игумнов Л.А., Локтева Н.А., Паймушин В.Н., Тарлаковский Д.В.* Звукоизоляционные свойства одномерной трехслойной пластины // Матем. методы та физ.-мех. поля. – 2013. – Т. 56, № 2. – С. 86–93.

Поступила в редакцию  
17.04.14

---

**Паймушин Виталий Николаевич** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прочности конструкций, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева; главный научный сотрудник, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *dsm@dsm.kstu-kai.ru, vpajmushin@mail.ru*

**Газизуллин Руслан Камилевич** – аспирант кафедры прочности конструкций, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева, г. Казань, Россия.

E-mail: *gazizullin.rk@yandex.ru*

**Шарапов Адель Альбертович** – аспирант кафедры прочности конструкций, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева, г. Казань, Россия.

E-mail: *dsm@dsm.kstu-kai.ru*