КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

Кафедра вычислительной физики и моделирования физических процессов

Р.М. ХУСНУТДИНОВ, А.В. МОКШИН

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Учебно-методическое пособие

Казань – 2021

УДК 537.8

ББК 22.313

Принято на заседании учебно-методической комиссии ИФ
Протокол № 5 от 4 марта 2021 года

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры вычислительной физики КФУ **Б.Н. Галимзянов;**
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры информационных систем КФУ **Ф.М. Гафаров**

Хуснутдинов Р.М.
Электричество и магнетизм: учебно-методическое пособие / Р.М. Хуснутдинов, А.В. Мокшин. – Казань: Казан. ун-т, 2021. – 43 с.

В данном учебно-методическом пособии представлены задачи по курсу "Электричество и магнетизм", основные положения и формулы, необходимые для решения задач. Учебное пособие предназначено для студентов физических специальностей высших учебных заведений.

Оглавление

Предисловие

Решение физических задач является необходимой практической основой изучения дисциплины “Электричество и магнетизм”. Основной целью практических занятий является выработка у студентов приемов и навыков решения задач из разных разделов электродинамики. Практические занятия несут в себе функцию закрепления, развития и углубленного освоения основных положений теории. Решение задач способствует приобщению студентов к самостоятельной творческой работе. При решении задач студент должен самостоятельно осуществлять ряд мыслительных операций, опираясь на имеющиеся у него знания и умения. Практические занятия позволяют проверить степень усвоения студентами основных разделов теоретического курса.

В данном учебном пособии рассмотрены основные разделы курса “Электричество и магнетизм”, такие как: элементы векторной алгебры, электростатика и магнитостатика, явление электромагнитной индукции, переменное электромагнитное поле, релятивистская формулировка электродинамики. Каждый раздел включает необходимые теоретические сведения, основные понятия и определения, представлены примеры решения типовых задач и задания для самостоятельной работы.

§1. Элементы векторной алгебры

1. *Градиентом скалярного поля* $\mathcal{V} = \mathcal{V}(x, y, z)$ называется вектор (направление наискорейшего роста $\mathcal{V}$):

$$grad\mathcal{V} = \nabla\mathcal{V} = \vec{e}_x\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}.$$

Свойства градиента

1^o $\nabla\mathrm{C} = 0, \quad \mathrm{C} = const;$

2^o $\nabla(\alpha\mathcal{U} + \beta\mathcal{V}) = \alpha\nabla\mathcal{U} + \beta\nabla\mathcal{V}, \quad \alpha, \beta = const.$
$\mathcal{U} = \mathcal{U}(x, y, z), \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}(x, y, z);$

3^o $\nabla(\mathcal{U}\mathcal{V}) = \mathcal{U}\nabla\mathcal{V} + \mathcal{V}\nabla\mathcal{U};$

4^o $\nabla\left(\frac{\mathcal{U}}{\mathcal{V}}\right) = \frac{\mathcal{V}\nabla\mathcal{U} - \mathcal{U}\nabla\mathcal{V}}{\mathcal{V}^2};$

5^o $\nabla\mathcal{Q}(\mathcal{V}) = \frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial\mathcal{V}}\nabla\mathcal{V}.$

2. *Напряженность* $(\vec{E})$ и потенциал (φ) электростатического поля связаны соотношением:

$$\vec{E} = -grad\varphi = -\nabla\varphi.$$

3. Пусть $\mathcal{P} = \mathcal{P}(x, y, z)$, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(x, y, z)$, $\mathcal{R} = \mathcal{R}(x, y, z)$ – непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка функции. *Потоком* векторного поля $\vec{\mathcal{F}} = (\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R})$ через поверхность $\mathcal{S}$ называется поверхностный интеграл

$$\Pi = \int\int_{\mathcal{S}}(\vec{\mathcal{F}}, \vec{n})d\mathcal{S} = \int\int_{\mathcal{S}}\mathcal{P}dydz + \mathcal{Q}dxdz + \mathcal{R}dxdy.$$

4. *Дивергенцией* векторного поля $\vec{\mathcal{F}} = (\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R})$ называется скаляр

$$div\vec{\mathcal{F}} = (\nabla, \vec{\mathcal{F}}) = \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial y} + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial z}.$$

Здесь скобками $(.., ..)$ – обозначено скалярное произведение векторов. Дивергенция $div\vec{\mathcal{F}}(M)$ как плотность потока в точке M определяет силу источника (при $div\vec{\mathcal{F}}(M) > 0$) или стока (при $div\vec{\mathcal{F}}(M) < 0$) в точке M.

Свойства дивергенции

1^o $div\vec{\mathrm{C}} = 0, \quad \vec{\mathrm{C}} = const;$

2^o $div(\alpha\vec{\mathcal{A}} + \beta\vec{\mathcal{B}}) = \alpha div\vec{\mathcal{A}} + \beta div\vec{\mathcal{B}}, \qquad \alpha, \beta = const;$
$\vec{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_x\vec{e}_x + \mathcal{A}_y\vec{e}_y + \mathcal{A}_z\vec{e}_z, \quad \vec{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_x\vec{e}_x + \mathcal{B}_y\vec{e}_y + \mathcal{B}_z\vec{e}_z;$

3^o $div(\mathcal{U}\vec{\mathcal{A}}) = \mathcal{U}div\vec{\mathcal{A}} + (\nabla\mathcal{U}, \vec{\mathcal{A}}), \qquad \mathcal{U} = \mathcal{U}(x, y, z).$

5. Если контур $\mathcal{L}$ замкнутый, то линейный интеграл

$$\oint_{\mathcal{L}} (\vec{\mathcal{F}}, d\vec{r}) = \oint_{\mathcal{L}} \mathcal{P}dx + \mathcal{Q}dy + \mathcal{R}dz$$

называется *циркуляцией* векторного поля вдоль контура $\mathcal{L}$.

6. *Вихрем* (*ротором*) векторного поля $\vec{\mathcal{F}} = (\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R})$ называется вектор

$$rot\vec{\mathcal{F}} = [\nabla, \vec{\mathcal{F}}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathcal{P} & \mathcal{Q} & \mathcal{R} \end{vmatrix}.$$

Здесь скобками $[..,..]$ – обозначено векторное произведение векторов. Если для всех точек поля ротор равен нулю, то такое поле называется *потенциальным* (*безвихревым*). В потенциальном поле циркуляция всегда равна нулю.

Свойства ротора

1^o $rot\vec{\mathrm{C}} = 0, \quad \vec{\mathrm{C}} = const;$

2^o $rot(\alpha\vec{\mathcal{A}} + \beta\vec{\mathcal{B}}) = \alpha rot\vec{\mathcal{A}} + \beta rot\vec{\mathcal{B}}, \qquad \alpha, \beta = const;$
$\vec{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_x\vec{e}_x + \mathcal{A}_y\vec{e}_y + \mathcal{A}_z\vec{e}_z, \quad \vec{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_x\vec{e}_x + \mathcal{B}_y\vec{e}_y + \mathcal{B}_z\vec{e}_z;$

3^o $rot(\mathcal{U}\vec{\mathcal{A}}) = \mathcal{U}rot\vec{\mathcal{A}} + [\nabla\mathcal{U}, \vec{\mathcal{A}}], \qquad \mathcal{U} = \mathcal{U}(x, y, z).$

Задачи

1. Вычислить градиент скалярного поля:

- $\nabla r = ?\qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
- $\nabla r^n = ?$
- $\nabla \left(\dfrac{1}{r^n}\right) = ?$
- $\nabla (\vec{c}, \vec{r}) = ?\qquad \vec{c} = c_x \vec{e}_x + c_y \vec{e}_y + c_z \vec{e}_z$;
- $\nabla \mathcal{Q}(M) = ?\qquad \mathcal{Q} = 3x^2 + 2xyz + 5yz,\qquad M(1,1,1)$;
- $\nabla \mathcal{Q}(M) = ?\qquad \mathcal{Q} = \sqrt{4 + x^2 + y^2},\qquad M(2,1)$;
- $\nabla \mathcal{Q}(M) = ?\qquad \mathcal{Q} = 5x + 2y + 3z^2 + 2zy,\qquad M(1,1,1)$;
- $\nabla \Big(\vec{c}, \vec{a}(r)\Big) = ?$

2. Найти градиент скалярного поля $\mathcal{Q} = x^2 + y^2 - z^2$ и его модуль в точке $M(1;-1;2)$.

3. Найти градиент скалярной функции

- $\varphi = (\vec{k}, \vec{r}) \ln(br),\qquad \vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z,\qquad b = const$;
- $\varphi = \dfrac{(\vec{k}, \vec{r})^3}{r^2},\qquad \vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$;
- $\varphi = [\vec{k}, \vec{r}]^2,\qquad \vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$;
- $\varphi = \dfrac{e^{2r-1}}{3} r^a,\qquad a = const$;
- $\varphi = \dfrac{a^{-5r} + 2}{r},\qquad a = const.$

4. Вычислить напряженность поля, заданного потенциалом:

- $\varphi = \sin(\vec{k}, \vec{r}),\qquad \vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z$;
- $\varphi = (\vec{\alpha}, \vec{r}) \cos(\vec{k}, \vec{r}),\qquad \vec{\alpha}, \vec{k} = const$;
- $\varphi = \dfrac{8x + 9y + 2z}{r}$ в точке $M(1,1,1)$;
- $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{e^{\alpha/r - 1}}{r}.$

5. Вычислить напряженность поля, создаваемое диполем. *Указание:* потенциал поля диполя равен $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{(\vec{d},\vec{r})}{r^3}$.

6. Вычислить дивергенцию векторного поля $div\vec{\mathcal{A}} =?$

   - $\vec{\mathcal{A}} = \vec{r}, \qquad \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z;$
   - $\vec{\mathcal{A}} = r^2\vec{c}, \qquad \vec{c} = const;$
   - $\vec{\mathcal{A}} = \alpha\vec{r}, \qquad \alpha = const;$
   - $\vec{\mathcal{A}} = r^4\vec{r};$
   - $\vec{\mathcal{A}} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{r}}{r^3};$
   - $\vec{\mathcal{A}} = e^{-\alpha/r}\vec{r}, \quad \alpha = const.$

7. Вычислить дивергенцию векторного поля $\vec{\mathcal{A}}$ в точке M:

   - $\vec{\mathcal{A}} = xy\vec{e}_x + yz\vec{e}_y + zx\vec{e}_z, \quad M(1,2,3);$
   - $\vec{\mathcal{A}} = x(y+z^2)\vec{e}_x + (y+2xy^3)z\vec{e}_y + \sqrt{zx}\vec{e}_z, \quad M(1,1,1);$
   - $\vec{\mathcal{A}} = \dfrac{yz}{\sqrt{z+x^2}}\vec{e}_x + yx\vec{e}_y + \ln(3z)\vec{e}_z, \quad M(1,0,2e);$
   - $\vec{\mathcal{A}} = 2^{\sqrt{2yz-x}}\vec{e}_x - 5yz\vec{e}_y + (7z-xy)\vec{e}_z, \quad M(1,-1,2).$

8. Вычислить ротор векторного поля $rot\vec{\mathcal{A}} =?$

   - $\vec{\mathcal{A}} = \vec{r}, \qquad \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z;$
   - $\vec{\mathcal{A}} = r^2\vec{c}, \qquad \vec{c} = const;$
   - $\vec{\mathcal{A}} = \alpha\vec{r}, \qquad \alpha = const;$
   - $\vec{\mathcal{A}} = r^4\vec{r};$
   - $\vec{\mathcal{A}} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{r}}{r^3};$
   - $\vec{\mathcal{A}} = xy\vec{e}_x + yz\vec{e}_y + zx\vec{e}_z;$
   - $\vec{\mathcal{A}} = x(y+z^2)\vec{e}_x + (y+2xy^3)z\vec{e}_y + \sqrt{zx}\vec{e}_z.$

9. Записать в скалярной форме уравнения Максвелла:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}.$$

§2. Электростатика

1. Основные уравнения *постоянного электрического поля* в вакууме имеют вид:
$$rot\vec{E} = 0, \qquad div\vec{E} = \rho/\varepsilon_0.$$

2. *Линейная плотность электрического заряда* – предел отношения электрического заряда, находящегося в элементе линии, к длине этого элемента линии, который содержит данный заряд, когда длина этого элемента стремится к нулю.
$$\tau = \lim_{\Delta l \to \infty} \frac{\triangle q}{\triangle l} = \frac{dq}{dl}.$$

3. *Поверхностная плотность электрического заряда* – предел, к которому стремится отношение электрического заряда к площади, на которой этот заряд расположен, при условии, что площадь стремится к нулю.
$$\sigma = \lim_{\Delta S \to \infty} \frac{\triangle q}{\triangle S} = \frac{dq}{dS}.$$

4. *Объемная плотность электрического заряда* – предел, к которому стремится отношение электрического заряда к объему, в котором этот заряд расположен, при условии, что объем стремится к нулю.
$$\rho = \lim_{\Delta V \to \infty} \frac{\triangle q}{\triangle V} = \frac{dq}{dV}.$$

5. *Закон Кулона.* Сила взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме прямо пропорциональна произведению величин этих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:
$$\vec{\mathcal{F}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

6. *Теорема Гаусса:* Поток вектора электрического смещения $\vec{\mathcal{D}}$ через замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности.
$$\oint_S (\vec{\mathcal{D}}, d\vec{S}) = Q.$$

7. *Уравнение Лапласа и Пуассона:*

$$\Delta\varphi = 0, \qquad \Delta\varphi = -\rho/\varepsilon\varepsilon_0,$$

где оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$
– в декартовой системе координат;

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$
– в цилиндрической системе координат;

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}$$
– в сферической системе координат.

8. *Электрическая емкость конденсатора:*

$$C = Q/U.$$

Шаровой конденсатор:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}{(R_2 - R_1)}R_1R_2.$$

Цилиндрический конденсатор:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 h}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R1}\right)}.$$

Плоский конденсатор:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}.$$

9. *Энергия электростатического поля* в вакууме определяется по одной из следующих формул:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi dV + \frac{1}{2}\int_S \sigma\varphi dS,$$

$$W = \frac{1}{2}\int_V (\vec{\mathcal{D}}, \vec{E})dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int_V E^2 dV.$$

Задачи (Закон Кулона)

1. Положительный точечный заряд 50 мкКл находится в точке с радиус-вектором $\vec{r}_0 = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$. Найти напряженность электрического поля и ее модуль в точке с радиус-вектором $\vec{r} = 8\vec{e}_x - 5\vec{e}_y$.

2. Тонкий стержень ab длиной 100 см имеет заряд 37 нКл, распределенный так, что его линейная плотность пропорциональна квадрату расстояния от конца a. Найти напряженность электростатического поля в точке b.

3. Заряд распределен с линейной плотностью заряда τ на стержне длиной L вдоль радиус-вектора, начинающегося в точке нахождения точечного заряда q. Расстояние от заряда q до ближайшей точки стержня равна R. Найти силу, действующую на точечный заряд.

4. Определить силу взаимодействия между двумя равномерно заряженными отрезками длины L, находящихся на одной прямой на расстоянии R друг от друга. Заряды распределены равномерно на каждом отрезке с линейной плотностью заряда τ.

5. Поле создается в вакууме равномерно заряженной окружностью радиуса a, заряд ее q. Вычислить напряженность поля на оси окружности в точке, находящейся на расстоянии $\mathcal{Z}$ от окружности.

6. Вычислить напряженность поля бесконечно длинной прямой нити с линейной плотностью заряда τ в точке на расстоянии R от нити.

7. Определить напряженность поля отрезка, равномерно заряженного с линейной плотностью заряда τ, в точке, удаленной от отрезка на расстоянии R, концы отрезка видны из точки под углами α_1 и α_2.

8. Полуокружность с радиусом $R = 2$ м заряжена зарядом $q = 10^{-9}$ Кл. Определить напряженность электростатического поля, созданного этим зарядом в геометрическом центре полуокружности.

9. Бесконечная прямая нить, равномерно заряженная с плотностью $\tau_1 = 3 \cdot 10^{-7}$ Кл/м, и отрезок длины $l = 20$ см, равномерно заряженный с плотностью $\tau_2 = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл/м, расположены в одной плоскости перпендикулярно друг к другу на расстоянии $R = 0.1$ м. Определить силу взаимодействия между ними.

10. Вычислить напряженность электростатического поля бесконечной равномерно заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда σ.

11. Вычислить напряженность поля на высоте h от поверхности равномерно заряженного диска в точке, лежащей на перпендикуляре к плоскости диска, проходящем через его центр. Поверхностная плотность заряда σ, радиус диска a.

12. Заряд q равномерно распределен по поверхности шарового сегмента радиуса R, видимого из центра кривизны под углом 2α. Определить напряженность в центре кривизны сегмента.

13. Вычислить потенциал электрического поля на оси равномерно заряженного диска с радиусом a с поверхностной плотностью заряда σ. Расстояние от плоскости диска до точки – h.

14. Вычислить потенциал сферы радиуса R с поверхностной плотностью заряда σ.

15. Вычислить напряженность шара радиуса R с объемной плотностью заряда ρ.

16. Вычислить напряженность поля, создаваемого бесконечно длинной согнутой нитью с линейной плотностью заряда τ, на биссектрисе угла на расстоянии R от нити. Нить согнута: а) под прямым углом; б) под углом 60^o.

17. Точечный заряд q находится на расстоянии a от бесконечного проводника, занимающего левое полупространство. Определить поле в правом полупространстве и плотность наведенных на проводнике зарядов.

18. Определить силу, с которой точечный заряд q притягивается к бесконечной проводящей поверхности.

Задачи (Теорема Гаусса)

1. Используя теорему Гаусса, вычислить напряженность поля бесконечной равномерно заряженной нити с линейной плотностью заряда τ на расстоянии r от нити.

2. Определить напряженность бесконечного цилиндра, равномерно заряженного с объемной плотностью заряда ρ. Радиус цилиндра R.

3. Бесконечно длинная цилиндрическая поверхность радиусом R равномерно заряжена электрическим зарядом с поверхностной плотностью σ. Определить напряженность электрического поля внутри поверхности и снаружи.

4. Определить напряженность шара, равномерно заряженного с объемной плотностью заряда ρ. Радиус шара R.

5. Сферическая поверхность радиусом R равномерно заряжена электрическим зарядом Q. Определить напряженность электрического поля внутри сферы и снаружи.

6. Определить напряженность электрического поля, создаваемого бесконечной тонкой плоской поверхностью, равномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда σ.

7. Плоский бесконечный слой толщиной h равномерно заряжен по объему с объемной плотностью заряда ρ. Определить зависимость напряженности электрического поля от расстояния x до среднего сечения слоя.

8. Две концентрические сферы с радиусами R_1 и R_2 $(R_1 < R_2)$ заряжены равномерно зарядами Q_1 и Q_2. Определить напряженность электрического поля на расстоянии r от центра системы, если: а) $r < R$; б) $R_1 < r < R_2$; в) $r > R_2$.

9. Определить напряженность электрического поля внутри и снаружи шара, объемная плотность заряда которого меняется по закону $\rho = \alpha r^n$. Радиус шара R.

10. Сфера радиуса R заряжена с поверхностной плотностью заряда $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$. Найти поле (потенциал) в любой точке пространства.

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{3\varepsilon_0} r\cos\theta, & r < R \\ \\ \dfrac{\sigma R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\cos\theta, & r > R. \end{cases}$$

11. Шар радиуса R заряжен с объемной плотностью заряда $\rho = \rho_0 \cos\theta$. Найти поле в любой точке пространства.

12. Круглый диск радиуса a равномерно заряжен с поверхностной плотностью σ. В какой точке на оси диска напряженность поля равна $\pi\sigma$?

13. Вычислить энергию равномерно заряженного по объему диэлектрического шара радиуса a. Диэлектрическая проницаемость шара ε. Заряд шара q. Окружающая среда вакуум.

14. Потенциал электростатического поля в вакууме

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{a}{2}\left(1 - \dfrac{r^2}{R_0^2}\right), & r < R_0 \\ \\ -a\ln\dfrac{R_0}{r}, & r > R_0, \end{cases}$$

где R_0 и a – постоянные. r – расстояние от оси. Определить распределение зарядов.

15. Вычислить поток электрического поля через поверхность сферы радиусом r, если напряженность поля в системе с началом координат в центре сферы выражается формулой $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$.

Задачи (Уравнения Лапласа и Пуассона)

1. Вывести уравнение Пуассона, используя уравнение Максвелла и формулу, связывающую напряженность и потенциал стационарного электрического поля.

2. Рассчитать поле между двумя находящимися в однородной среде бесконечными параллельными пластинами a и b, имеющими потенциалы $\varphi_a = 0$ и $\varphi_b = \varphi_0$. Расстояние между пластинами d.

3. Вычислить потенциал электростатического поля, создаваемого шаром радиуса R, по объему которого равномерно распределен заряд Q.

4. Определите потенциал, создаваемый бесконечной однородно-заряженной пластинкой с толщиной a и объемной плотностью заряда ρ.

5. Вычислите потенциал и напряженность электростатического поля, создаваемого бесконечным однородно-заряженным цилиндром с объемной плотностью заряда ρ и радиусом a.

6. Потенциал электростатического поля в вакууме

   $$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha x, & x < 0 \\ -\alpha x, & x > 0. \end{cases}$$

   Определить распределение зарядов, которыми создается это поле.

7. Напряженность поля имеет вид $E = \dfrac{Ae^{-kr}}{r^2}$. Найти плотность заряда.

8. Найти потенциал, создаваемый электронным облаком в основном состоянии атома водорода с плотностью заряда

   $$\rho = -\frac{e}{\pi a^3} \exp(-2r/a).$$

9. Решая уравнение Лапласа, найти потенциал поля равномерно заряженной цилиндрической поверхности. Поверхностный заряд σ, радиус цилиндра a.

10. Найти распределение зарядов, создающих потенциал Юкавы $\varphi(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}\exp(-r/a)$.

11. Найти поле между двумя коаксиальными цилиндрами радиусов R_1 и R_2, разность потенциалов между которыми равна U.

12. В основном состоянии атома водорода заряд электрона $(-e)$ распределен с объемной плотностью $\rho = (-e/\pi a^3)\exp(-2r/a)$, где a – боровский радиус, r – расстояние до центра атома. Вычислить классические значения: а) потенциала; б) напряженности поля внутри атома; в) энергии взаимодействия между ядром и электронным облаком.

13. Найти потенциал электрического поля бесконечного цилиндра с зарядом τ на каждую единицу длины. Заряд распределен равномерно по объему цилиндра.

14. Рассчитать собственную электрическую энергию заряженного шара радиуса R, если заряд Q равномерно распределен а) по поверхности шара; б) по объему шара.

Задачи (Конденсаторы. Емкостные коэффициенты)

1. Проводящая сфера радиуса a окружена концентрическим слоем диэлектрика радиуса b. Найти емкость сферы, если проницаемость диэлектрика ε.

2. Получить выражение для электроемкости сферического конденсатора. Радиус внутренней сферы R_1, радиус внешней R_2. Полость между сферами заполнена диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε.

3. Получить выражение для электроемкости плоского конденсатора. Площадь обкладок S. Расстояние между обкладками d. Полость между обкладками конденсатора заполнена диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε.

4. Получить выражение для электроемкости сферического конденсатора. Радиус внутренней сферы R_1, радиус внешней R_2. Полость между сферами заполнена диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε (решить, используя теорему Гаусса).

5. Получить выражение для электроемкости цилиндрического конденсатора. Радиус внутреннего цилиндра a, радиус внешней b. Высота цилиндров h. Полость между цилиндрами заполнена диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε (решить, используя теорему Гаусса).

6. Вычислить емкость цилиндрического конденсатора. Длина его l, радиусы обкладок R_1 и R_2. Между обкладками два коаксиальных слоя однородных диэлектриков с проницаемостью ε_1 и ε_2, граница раздела между ними – цилиндрическая поверхность радиуса R_0. Краевыми эффектами пренебречь.

7. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено двумя диэлектриками. Диэлектрическая проницаемость первого слоя ε_1, второго – ε_2, а их толщины соответственно d_1 и d_2, причем $d_1+d_2 = d$ – толщина конденсатора. Площадь каждой обкладки S. Найти емкость конденсатора.

8. Пространство между обкладками сферического конденсатора заполнено двумя слоями диэлектриков с проницаемостями ε_1 и ε_2. Радиусы обкладок a и b. Радиус поверхности раздела диэлектриков h. Определить емкость конденсатора.

9. В цилиндрическом конденсаторе радиусы внутренней и внешней обкладок R_1 и R_2. Диэлектрическая проницаемость всех непроводников ε. Длина конденсатора l, заряд внутренней обкладки q. Пренебрегая влиянием краевых эффектов, найти напряженность и потенциал электрического поля во всех точках пространства. Определить емкость конденсатора.

Задачи (Энергия электростатического поля)

1. По объему шара (радиуса a) равномерно распределен заряд Q. Определить собственную энергию электростатического поля, возбуждаемого шаром.

2. Считая, что заряды протонов равномерно распределены по объему ядра, представляющего шар радиуса R, подсчитать энергию электростатического взаимодействия протонов в ядре атома с порядковым номером Z.

3. Вычислить энергию и емкость сферического конденсатора.

4. Для системы двух бесконечно длинных и параллельных цилиндрических проводников (произвольного сечения), имеющих заряды $\pm Q$, известен потенциал $\varphi(x, y)$, который на поверхностях проводников принимает постоянные значения φ_1 и φ_2 и всюду в пространстве между ними удовлетворяет уравнению Лапласа. Какова взаимная емкость (на единицу длины) указанной системы проводников?

5. Сфера радиусом a равномерно заряжена зарядом Q. Определить объемную плотность энергии и энергию электростатического поля, создаваемого сферой.

6. Сплошной цилиндр радиусом R и высотой h равномерно заряжен с объемной плотностью заряда ρ. Определить объемную плотность энергии и энергию электростатического поля, создаваемого цилиндром.

7. Точечный заряд q находится в центре шарового слоя из однородного диэлектрика с проницаемостью ε. Внутренний и наружный радиусы слоя равны соответственно a и b. Найти электрическую энергию, заключенную в данном диэлектрическом слое.

8. Найти энергию электрического поля точечного заряда q в пустом полупространстве, которое ограничено плоскостью, отстоящей на расстоянии a от заряда.

§3. Магнитостатика

1. *Уравнения Максвелла* для постоянного магнитного поля в вакууме имеют вид:

$$rot\vec{B} = \mu_0\vec{j}, \quad div\vec{B} = 0.$$

2. *Закон Био-Савара-Лапласа.* Индукция магнитного поля, возбуждаемого элементом линейного тока $Id\vec{l}$, определяется как

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}.$$

3. *Закон Эрстеда*: Циркуляция вектора напряженности магнитного поля определяется алгебраической суммой токов, пронизывающих площадку S, натянутую на контур интегрирования L.

$$\oint_L (\vec{H}, d\vec{l}) = \int_S j_n dS.$$

4. *Энергия магнитного поля*, возбуждаемого постоянным током I (или плотностью тока j), определяется как

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2}\int_V (\vec{A}, \vec{j})dV = \frac{1}{2}\int_V (\vec{H}, \vec{B})dV.$$

Задачи (Закон Био-Савара-Лапласа)

1. Вычислить индукцию магнитного поля, возбуждаемого бесконечным прямым током, на расстоянии r от его оси.

2. Ток 20 А течет по бесконечно длинному проводнику, согнутому под углом в $\alpha = 60^o$. Определить индукцию магнитного поля $\vec{B}$ в точке, лежащей на биссектрисе угла на расстоянии 5 см от его вершины.

3. Линейный ток I циркулирует по окружности радиуса a. Вычислить индукцию магнитного поля в точке, лежащей на перпендикуляре к плоскости тока на расстоянии x от центра окружности.

4. Определить магнитное поле отрезка, по которому течет ток I, в точке A, которая находится на расстоянии R от отрезка. Концы отрезка видны под углами α_1 и α_2.

5. Вычислить индукцию магнитного поля в центре тяжести равностороннего треугольника, по сторонам которой течет ток I.

6. Вычислить индукцию магнитного поля в центре квадрата со сторонами a, по которым течет ток I.

7. Вывести выражение для индукции магнитного поля кругового тока.

8. Ток I течет по тонкому проводнику, который имеет вид правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса R. Найти индукцию $\vec{B}$ в центре этого контура.

9. Вывести выражение для напряженности магнитного поля прямоугольного контура со сторонами a и b, по которым течет ток I.

10. По сплошному цилиндрическому проводнику радиуса R течет ток с плотностью j. Найти напряженность магнитного поля внутри и вне проводника как функцию расстояния r от оси.

11. Два параллельных бесконечно длинных провода, по которым текут в одном направлении токи $I_1 = 60$ А и $I_2 = 30$ А, расположены на

расстоянии $d = 10$ см друг от друга в воздухе. Определить магнитную индукцию $\vec{B}$ в точках:

- A_1, расположенной между проводниками с током на расстоянии $d/2$ от каждого из них;
- A_2, расположенной на расстоянии $d/2$ от проводника с током I_1 и на расстоянии $3d/2$ от проводника с током I_2.

12. Длинный провод с током $I = 50$ А изогнут под углом $\alpha = 2\pi/3$ и находится в воздухе. Определить магнитную индукцию в точке A_1, находящейся на продолжении одной из сторон угла на расстоянии $d =$ 5 см от его вершины, и в точке A_2, находящейся на биссектрисе угла на расстоянии $d = 5$ см от его вершины.

13. На сколько отличается напряженность магнитного поля, созданного круглой петлей длиной $L = 628$ см в центре петли и прямым проводником той же длины в точке, равноудаленной от концов проводника, на расстоянии, равном радиусу петли, если они находятся в воздухе. По петле и проводнику проходит одинаковый ток, равный 50 А.

14. По проводнику, согнутому в виде кольца, находящегося в воздухе, радиусом 1 м, течет ток 1 А. Найти напряженность и индукцию магнитного поля в точке, лежащей на перпендикуляре к плоскости кольца, восстановленном из его центра, на расстоянии 200 см от центра кольца.

15. По проводнику, изогнутому в виде окружности, течет ток. Напряженность магнитного поля в центре окружности $H = 20$ А/м. Не изменяя силы тока в проводнике, ему придали форму квадрата. Определить напряженность магнитного поля в точке пересечения диагоналей квадрата.

16. Два одинаковых витка радиусом 0.5 м расположены вертикально и горизонтально так, что их центры совпадают. По ним протекают токи 5

А и 10 А соответственно. Определить величину и направление к вертикали результирующего вектора напряженности магнитного поля в центре витков. Магнитное поле Земли не учитывать.

17. Определить магнитное поле в центре шара радиуса R, равномерно покрытого очень большим числом N параллельных витков, толщина которых τ такова, что $N\tau = 2R$.

Задачи (Энергия магнитного поля)

1. Ток I течет вдоль коаксиального кабеля длиной l. Радиусы внутреннего и внешнего цилиндров равны соответственно a и b. Определить энергию магнитного поля, создаваемого данным проводником с током.

2. Внутри тонкой проводящей цилиндрической оболочки радиуса b находится коаксиальный провод радиуса a. Найти самоиндукцию L на единицу длины.

3. Найти самоиндукцию L единицы длины бесконечного цилиндрического соленоида с густой намоткой и с произвольной формой сечения. Площадь сечения S, число витков на единицу длины n.

4. Вычислить индуктивность кабеля длиной l. Радиусы жилы и оболочки, соответственно, равны a и b.

5. Постоянный ток I течет по цилиндрическому проводу длиной l и радиусом R. Определить объемную плотность энергии и энергию магнитного поля, создаваемого данным проводником с током.

§4. Явление электромагнитной индукции

1. *Закон электромагнитной индукции.* Циркуляция напряженности для вихревой составляющей электрического поля носит название *электродвижущей силы индукции.*

$$\mathcal{E} = \oint_L \left(\vec{E}, \vec{dl}\right).$$

Используя вторую группу уравнений Максвелла в интегральной форме, получим *закон электромагнитной индукции Фарадея*:

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\vec{B}} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right).$$

С другой стороны, данное выражение может быть представлено в следующем виде. Для этого рассмотрим магнитную составляющую силы Лоренца

$$\vec{F} = q[\vec{\vartheta}, \vec{B}].$$

Относя силу к величине заряда, получаем некоторое эффективное электрическое поле с напряженностью

$$\vec{E}_{eff} = [\vec{\vartheta}, \vec{B}].$$

Подставляя данную величину в выражение для ЭДС индукции, получим:

$$\mathcal{E} = \oint_L \left(\vec{E}_{eff}, \vec{dl}\right) = \oint_L \left([\vec{\vartheta}, \vec{B}], \vec{dl}\right).$$

Задачи

1. Железнодорожные рельсы, изолированные друг от друга и от земли, соединены через вольтметр. Каково показания прибора, если по рельсам проходит поезд со скоростью 100 км/ч. Вертикальную составляющую вектора магнитной индукции $\vec{B}$ земли принять равной $1.5 \cdot 10^{-5}$ Тл, а расстояние между рельсами $l = 1540$ мм.

2. Проводящий угол $XOY = 2\alpha$ помещен в однородное магнитное поле, перпендикулярное к его плоскости. Проводник AB перпендикулярен к биссектрисе угла XOY и движется равномерно со скоростью ϑ. Определить величину тока, наводимого в контуре AOB, если все проводники обладают сопротивлением ρ на единицу длины.

3. Тяжелый горизонтальный стержень AB массой M скользит без трения по двум вертикальным рельсам AM и BN, замкнутым на сопротивление R. Определить закон падения стержня AB в однородном поперечном магнитном поле $\vec{B}$, сопротивлением стержня и самоиндукцией контура пренебречь.

4. Стержень длиной l и массой M, сопротивление которого мало, скользит без трения по двум длинным проводникам с сечением S и удельным сопротивлением ρ, расположенным на расстоянии l друг от друга. Проводники замкнуты сопротивлением R. Система находится в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной плоскости контура. В момент времени $t = 0$ стержню сообщили скорость ϑ_0 в положительном направлении оси X. Пренебрегая самоиндукцией, найти расстояние, пройденное стержнем до остановки. Считать, что в начальный момент времени $t = 0$, $x = x_0$.

5. Два параллельных стержня лежат в одной плоскости с бесконечным прямолинейным током I на расстояниях a и b по одну сторону от него ($a < b$). Вдоль стержней скользит со скоростью ϑ поперечный проводник AB по направлению к сопротивлению R, на которое замкну-

ты стержни. Определить силу тока в контуре ABR. Сопротивлением стержней и проводника AB пренебречь.

6. Плоский контур вращается с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле вокруг оси, перпендикулярной к полю. Индукция поля равна $\vec{B}$. Определить ЭДС индукции в этом контуре. Площадь, ограниченная контуром, равна S.

7. Определить силу тока в контуре, рассмотренном в предыдущей задаче. Самоиндукция контура L, сопротивление его R.

§5. Переменное электромагнитное поле

1. *Сила Лоренца.* Сила, действующая на движущийся электрический заряд со стороны магнитного поля, равна

$$\vec{F} = e[\vec{\vartheta}, \vec{B}].$$

2. *Закон электромагнитной индукции Фарадея:*

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt}.$$

Здесь Φ_m – магнитный поток, пронизывающий площадку, натянутую на замкнутый контур интегрирования.

3. *Полная система уравнений Максвелла* для переменного электромагнитного поля:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad div\vec{\mathcal{D}} = \rho,$$
$$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}, \quad div\vec{B} = 0.$$

4. *Плотность энергии* электромагнитного поля равна

$$\omega = \frac{1}{2}\left[(\vec{E}, \vec{\mathcal{D}}) + (\vec{B}, \vec{H})\right].$$

5. Для однородных изотропных сред электромагнитные потенциалы φ и $\vec{A}$ определяются из следующих *уравнений Даламбера*:

$$\Delta\varphi - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0},$$
$$\Delta\vec{A} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\mu_0\vec{j},$$

при условии, что потенциалы φ и $\vec{A}$ калиброваны по Лоренцу, т.е.

$$div\vec{A} + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

Задачи

1. Перпендикулярно к поверхности проводника с электропроводностью λ и магнитной проницаемостью μ падает плоская электромагнитная волна частоты ω. Пренебрегая токами смещения по сравнению с токами проводимости, определить, на какой глубине внутри проводника электромагнитное поле волны ослабевает в e раз.

2. Плоская электромагнитная волна, у которой $E_x = E_z = 0$; $H_x = H_y = 0$; $E_y = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H_z = a\sin(2\pi\nu[t - x/c])$, падает при $x = 0$ на нормальную к оси X плоскую поверхность проводника, простирающегося вправо до бесконечности. Пренебрегая отражением, определить производимое электромагнитной волной давление.

3. Плоскополяризованная волна падает на границу раздела двух прозрачных ($\mu \cong \mu_0$) сред с показателями преломления n_1 и n_2. Электрический вектор волны параллелен плоскости раздела сред. Найти коэффициент прохождения света во вторую среду.

4. Плоская электромагнитная волна задана векторным потенциалом
$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}, \qquad \varphi = 0.$$
Найти напряженность электрического поля и индукцию магнитного поля волны.

5. Показать, что уравнение $div\vec{B} = 0$ может быть получено из уравнения $rot\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ и дополнительного условия, которое следует установить.

6. Плоский конденсатор состоит из двух параллельных слоев различных веществ. Первый слой толщиной d имеет диэлектрическую проницаемость ε и электропроводность, равную нулю; для другого слоя толщиной kd диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_2 = 0$, а электропроводность λ имеет конечное значение. Показать, что в отношении распространения монохроматических плоских волн этот конденсатор ведет себя,

как если бы все пространство между его пластинами было заполнено однородной средой с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon^* = \varepsilon(1+k)\left(1 + i\frac{\varepsilon\omega k}{\lambda}\right)^{-1}.$$

7. Показать, что в плоской электромагнитной волне, распространяющейся в однородной среде, векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ взаимно перпендикулярны между собой и каждый из них перпендикулярен к направлению распространения волны. Показать также, что у плоской электромагнитной волны $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}|\vec{E}| = \sqrt{\mu\mu_0}|\vec{H}|$.

§6. Релятивистская формулировка электродинамики

Релятивистский характер электромагнитных явлений формально отражается в ковариантности основных законов электродинамики и в определенных трансформационных свойствах электромагнитных величин по отношению к *преобразованиям Лоренца*. Запишем преобразования в виде:

$$x'_\alpha = \sum_{\beta=0}^{3} \Lambda_{\alpha,\beta} x_\beta, \qquad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3.$$

Здесь

$$x_\alpha = (ict, x, y, z) = (ict, \vec{r}),$$

$\Lambda_{\alpha,\beta}$ – элементы матрицы преобразований Лоренца:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} & \dfrac{-i\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \dfrac{i\dfrac{V}{c}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Ковариантность уравнений означает, что величины, характеризующие систему *электромагнитное поле–заряды*, должны быть или скалярами, или векторами, или тензорами преобразований Лоренца, преобразующимися при переходе от нештрихованной системы к штрихованной по закону:

а) для скаляра

$$f' = f,$$

б) для вектора

$$A'_\alpha = \sum_{\beta=0}^{3} \Lambda_{\alpha,\beta} A_\beta,$$

в) для тензора (второго ранга)

$$F'_{\alpha,\beta} = \sum_{\gamma,\delta} \Lambda_{\alpha,\gamma}\Lambda_{\beta,\delta}F_{\gamma,\delta}.$$

Задачи

1. Записать преобразование 4-вектора плотности тока при переходе от одной ИСО к другой.

2. Записать преобразование для потенциалов поля.

3. Записать преобразование силы Лоренца при переходе от одной ИСО к другой.

4. Найти закон преобразования векторов поля при $V \ll c$ и записать его в векторной форме.

5. С помощью результата предыдущей задачи показать, что для случая $E = 0$, а $B \neq 0$ векторы $\vec{E}'$ и $\vec{B}'$ перпендикулярны.

6. Точечный заряд движется равномерно со скоростью $\vec{\vartheta}$. Найти потенциалы и векторы поля при $\vartheta \ll c$.

7. Определить скорость системы отсчета, в которой электрическое и магнитное поля параллельны.

8. Пользуясь определениями тензора поля, 4-потенциала A_α и формулами $\vec{E} = -grad\varphi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, $\vec{B} = rot\vec{A}$, получить все элементы тензора $F_{\alpha,\beta}$.

9. Доказать эквивалентность ковариантной системы уравнений Максвелла, используя компоненты тензора поля, заданные через проекции векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

10. Пользуясь инвариантами поля $B^2 - \dfrac{E^2}{c^2} = Inv^{(1)}$, $(\vec{E}, \vec{B}) = Inv^{(2)}$, доказать, что перпендикулярность векторов поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ и отношение их модулей в электромагнитной волне сохраняются во всех ИСО.

11. Выполнить непосредственную проверку инвариантности величин $Inv^{(1)}$ и $Inv^{(2)}$ с помощью преобразований Лоренца.

12. Показать, что в случае $Inv^{(2)} > 0$ и $Inv^{(1)} = 0$ найдется система отсчета, в которой имеет место только магнитное поле, а при $Inv^{(2)} < 0$ и $Inv^{(1)} = 0$ – только электрическое.

Ответы и указания

§1. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1. $\dfrac{\vec r}{r}$; $\quad nr^{n-2}\vec r$; $\quad -\dfrac{n\vec r}{r^{n+2}}$; $\quad \vec c$; $\quad 8\vec e_x + 7\vec e_y + 7\vec e_z$; $\quad \dfrac{1}{3}(2\vec e_x + \vec e_y)$;
$5\vec e_x + 4\vec e_y + 8\vec e_z$; $\quad \left(\vec c, \dfrac{\partial \vec a}{\partial r}\right)\dfrac{\vec r}{r}$.

2. $\nabla\mathcal{Q} = 2x\vec e_x + 2y\vec e_y - 2z\vec e_z$; $\quad |\nabla\mathcal{Q}(M)| = 2\sqrt{6}$.

4. $\vec E = -\vec k\cos(\vec k, \vec r)$; $\quad \vec E = -\vec\alpha\cos(\vec k, \vec r) + \vec k(\vec\alpha, \vec r)\sin(\vec k, \vec r)$;
$\vec E = -\dfrac{5\vec e_x + 8\vec e_y - 13\vec e_z}{3\sqrt{3}}$.

5. $\vec E = -\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{\vec d}{r^3} - 3\dfrac{(\vec d, \vec r)}{r^5}\vec r\right]$.

6. 3; $\quad 2(\vec r, \vec c)$; $\quad 3\alpha$; $\quad 7r^4$; $\quad 0$; $\quad e^{-\alpha/r}\left[3 - \dfrac{x+y+z}{r}\right]$.

9.
$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_x}{\partial t}; \\[2ex] \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t}; \\[2ex] \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = -\dfrac{\partial B_z}{\partial t}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H_z}{\partial y} - \dfrac{\partial H_y}{\partial z} = j_x + \dfrac{\partial D_x}{\partial t}; \\[2ex] \dfrac{\partial H_x}{\partial z} - \dfrac{\partial H_z}{\partial x} = j_y + \dfrac{\partial D_y}{\partial t}; \\[2ex] \dfrac{\partial H_y}{\partial x} - \dfrac{\partial H_x}{\partial y} = j_z + \dfrac{\partial D_z}{\partial t}. \end{cases}$$

§2. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

§2.1 Закон Кулона

1. $E = 4500$ В/м.

2. $E = \dfrac{3kq}{l^2} = 999$ В/м.

3. $F = \dfrac{kq\tau L}{R(R+L)}$.

4. $F = k\tau^2 \ln\left|\dfrac{(R+L)^2}{R(R+2L)}\right|$.

5. $E = \dfrac{q\mathcal{Z}}{4\pi\varepsilon_0(a^2+\mathcal{Z}^2)^{3/2}}$.

6. $E = \dfrac{2k\tau}{R}$.

7. $E = \dfrac{k\tau}{R}\sqrt{2[1-\cos(\alpha_1+\alpha_2)]}$.

8. $E = \dfrac{2kq}{\pi R^2}$.

9. $F = \dfrac{\tau_1\tau_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|1+\dfrac{l}{R}\right|$.

10. $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

11. $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2/h^2}}\right)$.

12. $E = \dfrac{q\cos^2(\alpha/2)}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$.

13. $\varphi = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2+h^2}-h\right)$.

14. $\varphi = \begin{cases} \dfrac{\sigma R}{2\varepsilon_0}\left(3-\dfrac{r^2}{R^2}\right), & r \le R; \\[2ex] \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}, & r \ge R. \end{cases}$

§2.2 Теорема Гаусса

1. $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$.

2. $E(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}, & r < R \\ \\ \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}, & r > R. \end{cases}$

3. $E(r) = \begin{cases} 0, & r < R \\ \\ \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}, & r > R. \end{cases}$

4. $E(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}, & r < R \\ \\ \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}, & r > R. \end{cases}$

5. $E(r) = \begin{cases} 0, & r < R \\ \\ \dfrac{kQ}{r^2}, & r > R. \end{cases}$

6. $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

7. $E(x) = \begin{cases} \dfrac{\rho x}{\varepsilon_0}, & x < h/2 \\ \\ \dfrac{\rho h}{2\varepsilon_0}, & x > h/2. \end{cases}$

8. а) $E = 0$; б) $E = kQ_1/r^2$; в) $E = k\dfrac{Q_1 + Q_2}{r^2}$.

9. $\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\varepsilon_0}\dfrac{r^n}{n+3}\vec{r}, & r < R \\ \\ \dfrac{\alpha}{\varepsilon_0(n+3)}\dfrac{R^{n+3}}{r^3}\vec{r}, & r > R. \end{cases}$

§2.3 Уравнения Лапласа и Пуассона

1. $\Delta\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}.$

2. $\varphi = \dfrac{\varphi_0}{d}x.$

3. $\varphi = \begin{cases} \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R^2 - \dfrac{r^2}{3}\right), & r \le R \\ \\ -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r \ge R. \end{cases}$

4. $\varphi = \begin{cases} \dfrac{\rho a}{2\varepsilon_0}\left(z + \dfrac{a}{4}\right), & z \le -\dfrac{a}{2} \\ \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}z^2, & -\dfrac{a}{2} < z < \dfrac{a}{2} \\ \\ -\dfrac{\rho a}{2\varepsilon_0}\left(z - \dfrac{a}{4}\right), & z \ge \dfrac{a}{2}. \end{cases}$

5. $\varphi = \begin{cases} -\dfrac{1}{4}\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}r^2, & r \le a \\ \\ -\dfrac{1}{4}\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}a^2\left[2\ln\left(\dfrac{a}{r}\right) + 1\right], & r \ge a. \end{cases}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho r}{\varepsilon_0}\dfrac{\vec{r}}{r}, & r \le a \\ \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\rho a^2}{\varepsilon_0 r}\dfrac{\vec{r}}{r}, & r \ge a. \end{cases}$$

§2.4 Конденсаторы. Емкостные коэффициенты

1. $C = \dfrac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}{1 + \dfrac{a}{b}(\varepsilon - 1)}.$

2. $C = \dfrac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$

3. $C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}.$

4. $C = \dfrac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$.

5. $C = \dfrac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 h}{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}$.

6. $C = \dfrac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 h}{\dfrac{1}{\varepsilon_1}\ln\left(\dfrac{R_0}{R_1}\right) + \dfrac{1}{\varepsilon_2}\ln\left(\dfrac{R_2}{R_0}\right)}$.

7. $C = \dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2 S}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}$.

8. $C = \dfrac{\varepsilon_1\varepsilon_2 h}{\varepsilon_1(b-h)/b + \varepsilon_2(h-a)/a}$.

§2.5 Энергия электростатического поля

1. $W = \dfrac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 a}$.

2. $U = \dfrac{3Z(Z-1)}{20\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{e^2}{R}$.

3. $W = \dfrac{e^2(R_2 - R_1)}{8\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}$, $C = 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$.

4. $C = \dfrac{\varepsilon_0}{\varphi_1 - \varphi_2} \oint_{L_2} \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}}, \vec{dl}\right)$.

7. $W = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\dfrac{b-a}{ab}\right)$.

8. $W = \dfrac{q^2}{32\pi\varepsilon_0 a}$.

§3. МАГНИТОСТАТИКА

§3.1 Закон Био-Савара-Лапласа

1. $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

2. $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}\left(2+\sqrt{3}\right) = 2.986\cdot 10^{-4}$ Тл.

3. $B = \dfrac{\mu_0 I}{2a}$.

§3.2 Энергия магнитного поля

1. $W = \dfrac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

2. $L = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

3. $L = \mu_0 n^2 S$.

4. $L = \dfrac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{1}{4}\right)$.

§4. ЯВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

1. $\mathcal{E} = -0.64$ мВ.

2. $I = \dfrac{B\vartheta\sin\alpha}{\rho(1+\sin\alpha)}$

3. $\vartheta(t) = \dfrac{mgR}{B^2l^2}\left[1-\exp\left(-\dfrac{B^2l^2}{mR}t\right)\right]$.

4. $\Delta x = x - x_0 = \dfrac{S}{2\rho}\left[\left(R+2\rho\dfrac{x_0}{S}\right)\exp\left(\dfrac{2\rho\vartheta_0}{l^2B^2S}\right)-R\right]-x_0$.

5. $I_i = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}\vartheta\ln\left|\dfrac{b}{a}\right|$.

6. $\mathcal{E}_i = BS\omega\sin(\omega t)$.

§5. ПЕРЕМЕННОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

1. $x = \sqrt{\dfrac{2}{\lambda\mu\omega}}$.

2. $p = \dfrac{\varepsilon_0 a^2}{2}$.

3. $D = \dfrac{2\sin\psi\cos\varphi\sin 2\varphi}{\sin^2(\varphi+\psi)}$.

4. $\vec{E} = -i\omega\vec{A}; \quad \vec{B} = -i[\vec{k}, \vec{A}]$.

§6. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

1. $\underline{j}' = \left(\dfrac{ic\varrho}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \dfrac{-\varrho\vec{V}}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\right)$.

2. $\varphi' = \dfrac{\varphi - VA_x}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$, $A'_x = \dfrac{A_x - \dfrac{V}{c^2}\varphi}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$, $A'_y = A_y$, $A'_z = A_z$.

3. $F_x = \dfrac{F'_x + (\vec{\vartheta}', \vec{F}')\dfrac{V}{c^2}}{1 + \dfrac{V\vartheta'_x}{c^2}}$, $F_y = \dfrac{F'_y\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{V\vartheta'_x}{c^2}}$, $F_z = \dfrac{F'_z\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{V\vartheta'_x}{c^2}}$.

4. $\vec{E}' = \vec{E} + [\vec{V}, \vec{B}]$, $\vec{B}' = \vec{B}$.

6. $\varphi(\vec{r}) = k\dfrac{q}{R}$, $\vec{A} = f\dfrac{q\vec{\vartheta}}{R}$, $\vec{E} = kq\dfrac{\vec{R}}{R^3}$, $\vec{B} = \dfrac{1}{c^2}[\vec{\vartheta}, \vec{E}]$,
где $\vec{R}$ – вектор, проведенный из точки, где находится заряд, в точку, где измеряются характеристики поля: $R = \sqrt{(x-\vartheta t)^2 + y^2 + z^2}$.

7. $\dfrac{\vec{\vartheta}}{1+\vartheta^2/c^2} = \dfrac{[\vec{E}, \vec{B}]}{E^2/c^2 + B^2}$.

Приложение

Формула Стокса

Пусть $\mathcal{L}$ – замкнутый контур, ограничивающий поверхность $\mathcal{S}$. Направляющие косинусы нормали к поверхности $\mathcal{S}$ – $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (со стороны нормали обход по контуру $\mathcal{L}$ осуществляется против часовой стрелки).

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathcal{P}dx + \mathcal{Q}dy + \mathcal{R}dz = \int\int_{\mathcal{S}} \left[\left(\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial y} - \frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial z} - \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x}\right)\cos\beta \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial x} - \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]d\mathcal{S}.$$

Формула Стокса в векторной форме: циркуляция вектора вдоль замкнутого контура $\mathcal{L}$, ограничивающего некоторую поверхность $\mathcal{S}$ равна потоку вихря через эту поверхность.

$$\oint_{\mathcal{L}} (\vec{\mathcal{F}}, d\vec{r}) = \int\int_{\mathcal{S}} \left(\vec{n}, rot\vec{\mathcal{F}}\right)d\mathcal{S}.$$

Формула Гаусса-Остроградского

Пусть $\mathcal{T}$ – замкнутая область (объем), ограниченная замкнутой гладкой поверхностью $\mathcal{S}$. $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности $\mathcal{S}$.

$$\int\int_{\mathcal{S}} \left(\mathcal{P}\cos\alpha + \mathcal{Q}\cos\beta + \mathcal{R}\cos\gamma\right)d\mathcal{S} =$$
$$\int\int\int_{\mathcal{T}} \left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial y} + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial z}\right)dxdydz.$$

Формула Гаусса-Остроградского в векторной форме: интеграл от дивергенции векторного поля $\mathcal{F} = (\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R})$, распространенный по некоторому объему $\mathcal{T}$, равен потоку вектора через поверхность $\mathcal{S}$, ограничивающую данный объем.

$$\int\int_{\mathcal{S}} (\vec{\mathcal{F}}, \vec{n})d\mathcal{S} = \int\int\int_{\mathcal{T}} div\vec{\mathcal{F}}dV.$$

Формула Грина

Пусть $\mathcal{L}$ – граница области $\mathcal{D}$ и функции $\mathcal{P}(x, y)$, $\mathcal{Q}(x, y)$ непрерывны со своими частными производными $\partial\mathcal{Q}/\partial x$, $\partial\mathcal{P}/\partial y$ в замкнутой области $\mathcal{D}$.

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathcal{P}dx + \mathcal{Q}dy = \int\int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial x} - \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial y}\right)dxdy.$$

Формула Грина в векторной форме: Циркуляция векторного поля $\mathcal{F} = (\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R})$ по замкнутому контуру $\mathcal{L}$ равна потоку ротора векторного поля $\mathcal{F} = (\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R})$ через поверхность $\mathcal{S}$, охватываемая данным контуром.

$$\oint_{\mathcal{L}}(\vec{\mathcal{F}}, d\vec{l}) = \int\int_{\mathcal{S}}(rot\vec{\mathcal{F}}, \vec{n})dxdy.$$

Литература

[1] Ландау Л.Д. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. - М.: Физматлит, 2012.

[2] Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике. Том 6. Электродинамика / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. - М.: Либроком, 2014.

[3] Батыгин В.В. Сборник задач по электродинамике и специальной теории относительности / В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин. - С.-Пб.: Лань, 2010.

[4] Ландау Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. - М.: Наука, 2005.

[5] Тамм И.Е. Основы теории электричества / И.Е. Тамм. - М.: Физматлит, 2003.

[6] Гильденбург Б.В. Сборник задач по электродинамике / Б.В. Гильденбург, М.А. Миллер. - М.: Физматлит, 2001.

[7] Алексеев А.И. Сборник задач по классической электродинамике / А.И. Алексеев. - С.-Пб.: Лань, 2008.

[8] Иродов И.Е. Основные законы электромагнетизма / И.Е. Иродов. - М.: Бином. Лаборатория знаний, 2010.

[9] Иванов А.Е. Электродинамика / А.Е. Иванов, С.А. Иванов. - М.: КноРус, 2012.

[10] Васильев А.Н. Классическая электродинамика. Краткий курс лекций / А.Н. Васильев. - С.-Пб.: БХВ-Петербург, 2010.