# 8 класс

**1.** В кружке учатся отличники, которые всегда говорят правду, и хулиганы, которые всегда лгут. *Каждый* ученик сказал про *каждого* из остальных, отличник он или хулиган. Суммарно в ответах школьников было названо 50 отличников и 60 хулиганов. *а*) Сколько в кружке учеников? *б*) Известно, что отличников в кружке меньше, чем хулиганов. На сколько?

**2.** Найдите такое натуральное число $x$, чтобы выполнялось равенство

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{50}{99}.$$

**3.** Вася должен был найти сумму 11 последовательных натуральных чисел. Однако по невнимательности он пропустил какие-то два соседних числа, и его сумма оказалась равной 1000. А каков настоящий ответ?

**4.** Оля и Коля собираются купить по одной открытке и по одному конверту. В магазине продаются 10 открыток по цене от 40 рублей до 99 рублей и 10 конвертов по цене от 10 рублей до 49 рублей. Все цены разные. Стоимость каждой открытки и каждого конверта — целое количество рублей. Верно ли, что Оля и Коля всегда смогут купить два набора из открытки и конверта по одной и той же цене?

**5.** В квадрате $ABCD$ на сторонах $BC$ и $CD$ взяты точки $K$ и $M$ соответственно, причём $\angle AKB = \angle MKC = 60°$. Найдите угол $AMK$.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

# 9 класс

**1.** В кружке учатся отличники, которые всегда говорят правду, и хулиганы, которые всегда лгут. *Каждый* ученик сказал про *каждого* из остальных, отличник он или хулиган. Суммарно в ответах школьников было названо 76 отличников и 80 хулиганов. *а*) Сколько в кружке учеников? *б*) Известно, что отличников в кружке меньше, чем хулиганов. На сколько?

**2.** Вася должен был найти сумму 13 последовательных натуральных чисел. Однако по невнимательности он пропустил какие-то два соседних числа, и его сумма оказалась равной 1000. А каков настоящий ответ?

**3.** Ненулевые числа $a$ и $b$ таковы, что уравнение $a(x+b)^2 + b(x+a)^2 = 0$ имеет единственное решение. Докажите, что $|\,a\,| = |\,b\,|$.

**4.** По кругу написаны все цифры от 0 до 9 в некотором порядке так, что сумма любых трёх подряд идущих цифр не превосходит некоторого натурального числа $k$. При каком наименьшем $k$ это возможно?

**5.** Угол $A$ в треугольнике $ABC$ равен $40°$. Окружность, проходящая через $A$ и $B$ и касающаяся $BC$, пересекает медиану к стороне $BC$ (или ее продолжение) в точке $M$, отличной от $A$. Найдите угол $BMC$.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

# 10 класс

**1.** На каждой стороне квадрата записали натуральное число, а в каждой вершине — произведение двух чисел, записанных на сторонах, содержащих эту вершину. Сумма всех чисел, записанных в вершинах квадрата, оказалась равной 77. Чему равна сумма всех чисел, записанных на сторонах квадрата?

**2.** Действительные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $\dfrac{a}{b+c} = \dfrac{b}{c+a} = \dfrac{c}{a+b} = M$. Какие значения может принимать величина $M$?

**3.** По кругу написаны все целые числа от 0 до 12 в некотором порядке так, что сумма любых четырёх подряд идущих чисел не превосходит некоторого натурального числа $k$. При каком наименьшем $k$ это возможно?

**4.** Каждое из неотрицательных чисел $x$, $y$ и $z$ не больше 2. Докажите:

$$\sqrt{x^2+(2-y)^2}+\sqrt{y^2+(2-z)^2}+\sqrt{z^2+(2-x)^2} \leqslant 6.$$

**5.** В остроугольном треугольнике $ABC$ точка пересечения высот $H$ делит высоту $CC_1$ в отношении $3:1$, считая от вершины. На высоте $CC_1$ точка $M$ выбрана так, что $\angle AMB = 90°$. Найдите отношение $CM : MC_1$.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.

# 11 класс

**1.** В кружке учатся отличники, которые всегда говорят правду, и хулиганы, которые всегда лгут. *Каждый* ученик сказал про *каждого* из остальных, отличник он или хулиган. Суммарно в ответах школьников было названо 110 отличников и 100 хулиганов. *а*) Сколько в кружке учеников? *б*) Известно, что отличников в кружке меньше, чем хулиганов. На сколько?

**2.** Сколько делителей числа $10^{1000}$ не являются делителями числа $10^{999}$?

**3.** На каждой из 100 карточек записано по одному числу, отличному от нуля, при этом каждое число равно кубу суммы всех остальных. Какие это числа?

**4.** Сумма положительных чисел $a$, $b$ и $c$ не меньше 3. Докажите, что

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2} \geqslant 2.$$

**5.** В остроугольном треугольнике $ABC$ точка пересечения высот $H$ делит высоту $CC_1$ в отношении $3:1$, считая от вершины. На высоте $CC_1$ точка $M$ выбрана так, что $\angle AMB = 90°$. Найдите отношение $CM : MC_1$.

Продолжительность олимпиады — **4 часа**.
Максимальное число баллов за задачу — **7 баллов**.
Максимальное число баллов за все задачи — **35 баллов**.