

**Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Кафедра теории функции и приближений

Специальность: 010100.65 – математика

Специализация: действительный анализ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Дипломная работа)

Приближенное вычисление дробной производной и метод
конечных элементов для дробно – дифференциального
уравнения

Работа завершена:

« ____ » _____ 2015 г. _____ (Литвинова Н.Н.)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель
кандидат физико –
математических наук, доцент

« ____ » _____ 2015 г. _____ (Галимянов А.Ф.)

Заведующий кафедрой:

доктор физико –
математических наук, профессор

« ____ » _____ 2015 г. _____ (Авхадиев Ф.Г.)

КАЗАНЬ — 2015

Содержание

Введение.....	3
Глава 1. Предварительные сведения	4
§1. Некоторые специальные функции.....	4
§2. Дробные интегралы и производные Римана - Лиувилля	6
§3. Некоторые результаты из общей теории приближенных методов анализа	10
§4. Обобщенные приближенные методы.....	19
Глава 2. Метод конечных элементов решения дробно-дифференциального уравнения	28
§1. Постановка задачи.....	28
§2. Метод Бубнова - Галеркина	31
§3. Метод Ритца.....	32
§4. Примеры численной реализации вычислительной схемы	33
Заключение	43
Литература	44
Приложение	45

Введение

В последние годы наблюдается растущий интерес в области дробного исчисления. Дробные дифференциальные уравнения привлекли повышенное внимание. Актуальность дипломной работы состоит в том, что дробно – дифференциальные уравнения имеют применение в различных областях науки и техники. Многие явления в механике жидкости, вязкоупругости, химии, физике, финансам и другим наукам можно описать моделями с помощью математических инструментов из теории дробного исчисления. Данные задачи, как правило, точно не решаются, поэтому весьма остро стоят вопросы разработки и применения приближенных методов решения с последующим их теоретическим обоснованием для этих уравнений. Отметим, что в последнее время в научной литературе появляются работы, в которых предложены численные методы для некоторых классов уравнений. Однако, несмотря на достигнутый успех в этом направлении, остается открытым вопрос теоретического обоснования применения приближенных методов для более общего класса подобных задач.

Целью дипломной работы является разработка вычислительной схемы для численного решения дробно – дифференциального уравнения. В работе предлагается обобщенный метод Бубнова – Галеркина и Ритца для нахождения приближенного решения дробно – дифференциальных уравнений.

Глава 1. Предварительные сведения

§1. Некоторые специальные функции

Приведем определения и простейшие свойства ряда специальных символов и функций.

Определение 1.1[1] Символ Похгаммера $(z)_n$ при целых n определяется равенством

$$(z)_n = z(z+1) \dots (z+n-1), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (z)_0 \equiv 1 \quad (1.1)$$

Очевидно, что

$$(z)_n = (-1)^n (1-n-z)_n, \quad (1)_n = n!.$$

Определение 1.2[1] Гамма – функцией $\Gamma(z)$ называется интеграл Эйлера второго рода

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad (1.2)$$

где $x^{z-1} = e^{(z-1)\ln x}$.

Этот интеграл Эйлера, очевидно, сходится при всех $z \in \mathbb{C}$, для которых $\operatorname{Re} z > 0$. На полуплоскость $\operatorname{Re} z \leq 0$, $z \neq 0, -1, -2, \dots$, гамма – функция доопределяется с помощью аналитического продолжения данного интеграла.

Формула понижения

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

получаемая из (1.2) интегрированием по частям, после многократного применения приводит к равенству

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1) \dots (z+n-1)}, \quad \operatorname{Re} z > -n, \quad n = 1, 2, \dots, z \neq 0, -1, -2, \dots,$$

разрешающему выполнить такое аналитическое продолжение в полуплоскость $\operatorname{Re} z > -n$ при любом n . Последнюю формулу можно

записать так: $(z)_n = \Gamma(z+n)/\Gamma(z)$. Это равенство можно использовать для введения символа $(z)_n$ при комплексных n .

Также заметим очевидное свойство $\Gamma(n) = (n-1)!$, $n = 1, 2, \dots$, $\Gamma(1) = 1$ и перечислим другие соотношения:

1) обобщенные формулы понижения и повышения вида

$$\Gamma(z+n) = \Gamma(z)(z)_n, \quad \Gamma(z-n) = \frac{\Gamma(z)}{(z-n)_n} = \frac{(-1)^n}{(1-z)_n} \Gamma(z);$$

2) формула дополнения

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin z\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi};$$

3) формула удвоения (формула Лежандра)

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right);$$

4) обобщенная формула Гаусса - Лежандра

$$\Gamma(mz) = \frac{m^{mz-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{m-1}{2}}} \prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{m}\right), \quad m = 2, 3, \dots;$$

5) асимптотическая формула Стирлинга

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right], \quad |arg| < \pi, z \rightarrow \infty,$$

и ее следствие

$$n! = \sqrt{2\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right], \quad n \rightarrow \infty.$$

Определение 1.3[1] Бета – функцией называется интеграл (интеграл Эйлера первого рода)

$$B(z, \omega) = \int_0^1 x^{z-1} (1-x)^{\omega-1} dx, \quad Re z > 0, Re \omega > 0. \quad (1.3)$$

Она формулируется через гамма – функцию по формуле

$$B(z, \omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}.$$

Можно придать значение интегралу (1.3) и при $Re z = 0$ или $Re \omega = 0$ ($z \neq 0, \omega \neq 0$), понимая его как условно сходящийся. Существует, в частности, предел

$$B(z, i\theta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} x^{z-1} (1-x)^{i\theta-1} dx, Re z > 0, \theta \neq 0.$$

§2. Дробные интегралы и производные Римана - Лиувилля

Определение 2.1 [2] Пусть $f(x) \in L_1(a, b)$

$$(I_{a+}^{\gamma} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\gamma}}, x > a \quad (2.1)$$

$$(I_{b-}^{\gamma} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\gamma}}, x < b \quad (2.2)$$

где $\gamma > 0$ называются дробными интегралами порядка γ . Первый из этих интегралов называется левосторонним, а второй правосторонним. Операторы $I_{a+}^{\gamma}, I_{b-}^{\gamma}$ называются операторами дробного интегрирования. Интегралы (2.1) и (2.2) принято называть также дробными интегралами Римана – Лиувилля. (2.1) и (2.2) определены на функциях, существующих почти всюду. Простейшие свойства дробных интегралов Римана – Лиувилля:

$$1. RI_{a+}^{\gamma} = I_{b-}^{\gamma} R, RI_{b-}^{\gamma} = I_{a+}^{\gamma} R, \quad (2.3)$$

$$2. \int_a^b f(x) (I_{a+}^{\gamma} g)(x) dx = \int_a^b g(x) (I_{b-}^{\gamma} f)(x) dx \quad (2.4)$$

Доказательство. Она доказывается простой перестановкой порядка интегрирования: $\int_a^b f(x) \left(\frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_a^x \frac{g(t) dt}{(x-t)^{1-\gamma}} \right) dx = \int_a^b g(x) \left(\frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(x-t)^{1-\gamma}} \right) dx = \int_a^b g(x) I_{b-}^{\gamma} f(x) dx$

Формула (2.4) объективна, если

$$f(x) \in L_r, g(x) \in L_l, \frac{1}{r} + \frac{1}{l} \leq 1 + \gamma, r \geq 1, l \geq 1 \quad (2.5)$$

$$3. I_{a+}^{\gamma} I_{a+}^{\delta} = I_{a+}^{\gamma+\delta}, I_{b-}^{\gamma} I_{b-}^{\delta} = I_{b-}^{\gamma+\delta}$$

Тождество (1.5) выполняется в любой точке, если $f(t) \in C_{[a,b]}$ и почти всюду если $f(t) \in L_1(a, b)$.

Доказательство получаем простой проверкой

$$I_{a+}^{\gamma} I_{a+}^{\delta} f = \frac{1}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)} \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\gamma}} \int_a^t \frac{f(v)dv}{(t-v)^{1-\delta}}$$

Меняем порядок интегрирования, и делая после этого во внутреннем интеграле замену $t = v + s(x - v)$, находим

$$I_{a+}^{\gamma} I_{a+}^{\delta} f = \frac{B(\gamma, \delta)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)} \int_a^x \frac{f(v)dv}{(x-v)^{1-\gamma-\delta}}$$

Перестановка порядка интегрирования здесь обосновывается с помощью теоремы Фубини. Это полугрупповое свойство дробного интегрирования.

Что касается дробного дифференцирования, то его естественно ввести как операцию, обратную к дробному интегрированию.

Определение 2.2[2] Для функции $f(x)$ заданной на отрезке $[a,b]$ каждое из выражений

$$(D_{a+}^{\gamma} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) \frac{dt}{(x-t)^{1-\gamma}} \quad (2.6)$$

$$(D_{b-}^{\gamma} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dx} \int_x^b f(t) \frac{dt}{(x-t)^{1-\gamma}} \quad (2.7)$$

называется дробной производной порядка γ , $0 < \gamma < 1$, соответственно, левосторонней и правосторонней. Дробные производные (2.6) и (2.7) называются обычно производными Римана – Лиувилля.

3.2 Дробные интегралы на оси и полуоси

Здесь будут рассматриваться дробные интегралы на бесконечном промежутке. Исследуемые функции должны быть такими, чтобы соответствующие интегралы сходились на бесконечности. Мы будем иметь

дело с функциями, убывающими, но нулевыми на бесконечности, например, с функциями из $L_r(R^1)$, где $1 < r < \frac{1}{\gamma}$ или из $L_r(R^1, \rho)$, когда условие ρ можно ослабить за счет веса $\rho(x)$ или же с гельдеровскими функциями (с весом), обращающимися в ноль на бесконечности. Интегралы дробного порядка на подобных функциях сходятся абсолютно. Трактовать интегралы дробного порядка можно в более обширном смысле, понимая их как условно сходящиеся

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{-\infty}^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\gamma}} = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x-N}^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\gamma}}$$

Можно тогда допускать локально – суммируемые функции $f(t)$, не обязательно убывающие на бесконечности, если подчинить поведение средних $\int_x^{x+t} f(t)dt$ некоторым условиям.

Легко распространить интегралы дробного порядка (2.1) и (2.2) со случая конечного отрезка $[a,b]$ на случай оси или полуоси. Само определение уже применимо благодаря переменному пределу интегрирования на полуоси (a, ∞) или $(-\infty, b)$.

Мы будем использовать обозначения (2.1) и (2.2) на соответствующих полуосях, и в частности, писать

$$(I_{0+}^{\gamma} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\gamma}}, 0 < x < \infty$$

Дробные интегралы по всей прямой будем обозначать

$$(I_+^{\gamma} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{-\infty}^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\gamma}}, -\infty < x < \infty \quad (2.8)$$

$$(I_-^{\gamma} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_x^{\infty} \frac{f(t)dt}{(t-x)^{1-\gamma}}, -\infty < x < \infty \quad (2.9)$$

3.2 Свойства

$$1. RI_+^{\gamma} f = I_-^{\gamma} Rf, RI_-^{\gamma} f = I_+^{\gamma} Rf, Rf(x) = f(-x), -\infty < x < \infty$$

2. Операторы I_+^γ, I_-^γ подчиняются обычным правилам перестановочности с операциями сдвига и растяжения. Введем два поочередных обозначения:

$$(vuf)(x) = f(x - u), x, u \in R^1 \quad (2.10)$$

$$(Wcf)(x) = f(cx), x, u \in R^1 \quad (2.11)$$

Легко проверяется, что $vuI_+^\gamma f = I_+^\gamma vuf$,

$$vuI_-^\gamma f = I_-^\gamma vuf \quad (2.12)$$

$$WcI_+^\gamma f = \delta^\gamma I_+^\gamma Wcf,$$

$$WcI_-^\gamma f = \delta^\gamma I_-^\gamma Wcf \quad (2.13)$$

Доказательство. Сначала проверим (2.12)

$$\begin{aligned} vuI_+^\gamma f &= \int_{-\infty}^{x-u} \frac{f(t)dt}{(x-u-t)^{1-\gamma}} = \{t = \lambda - u\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(\lambda - u)d(\lambda - u)}{(x + u - \lambda)^{1-\gamma}} = I_+^\gamma vuf \end{aligned}$$

Аналогично доказывается $I_-^\gamma f$.

Проверим (2.13)

$$\begin{aligned} WcI_+^\gamma f &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{-\infty}^{cx} \frac{f(t)dt}{(cx-t)^{1-\gamma}} = \{t = cv\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{-\infty}^x \frac{f(cv)d(cv)}{c^{-\gamma}(x-v)^{1-\gamma}} = c^\gamma \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{-\infty}^x \frac{f(cv)d(cv)}{(x-v)^{1-\gamma}} = c^\gamma I_+^\gamma W\delta f \end{aligned}$$

Аналогично доказывается для $I_-^\gamma f$.

$$3. I_{a+}^\gamma I_{a+}^\delta = I_{a+}^{\gamma+\delta}, I_{b-}^\gamma I_{b-}^\delta = I_{b-}^{\gamma+\delta} \quad (2.14)$$

Доказательство получаем простой проверкой

$$I_{a+}^\gamma I_{a+}^\delta f = \frac{1}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)} \int_{-\infty}^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\gamma}} \int_{-\infty}^t \frac{f(v)dv}{(t-v)^{1-\delta}}$$

Изменяя порядок интегрирования, и выполняя после этого во внутреннем интеграле замену $t = v + s(x - v)$, мы находим

$$I_{a+}^{\gamma} I_{a+}^{\delta} f = \frac{B(\gamma, \delta)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)} \int_{-\infty}^x \frac{f(v)dv}{(x-v)^{1-\alpha-\delta}} = I_{+}^{\gamma+\delta} f, B(\alpha, \delta) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)}{\Gamma(\gamma) + \Gamma(\delta)}$$

Для второго случая аналогично.

Если функция f «достаточно хороша», то равенство (2.14) выполняется при всех $\gamma > 0, \delta > 0$. В $L_r(R^1)$ (2.14) выполняется для тех $\gamma > 0, \delta > 0$ при которых $\gamma + \delta < \frac{1}{r}$

4. Формула интегрирования по частям

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) (I_{+}^{\gamma} g)(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) (I_{-}^{\gamma} f)(x) dx \quad (2.15)$$

Доказательство. Она доказывается простой перестановкой порядка интегрирования в левой части по формуле Дирихле

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(\frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_{-\infty}^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\gamma}} \right) dx \\ = \int_{-\infty}^{-\infty} g(x) \left(\frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_x^{\infty} \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\gamma}} \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) (I_{b-}^{\gamma} f)(x) dx \end{aligned}$$

Формула (2.15) справедлива, если $f(x) \in L_r, g(x) \in L_l, \frac{1}{r} + \frac{1}{l} \leq 1 + \alpha$,

$$r \geq 1, l \geq 1$$

Формула (2.15) имеет место также на полуоси

$$\int_0^{\infty} f(x) (I_{0+}^{\gamma} g)(x) dx = \int_0^{\infty} g(x) (I_{0+}^{\gamma} f)(x) dx$$

§3. Некоторые результаты из общей теории приближенных методов анализа

Приведем некоторые известные определения и утверждения из общей теории приближения. [3]

Множество элементов $X = \{x\}$ называется линейным пространством, если выполняются операции сложения и умножения на число, а также восемь аксиом, связанных с этим пространством. Линейное пространство $X = \{x\}$ называется нормированным, если оно удовлетворяет следующим аксиомам:

1. $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda;$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X.$

Говорят, что некоторая последовательность элементов x_n сходится к элементу x_0 в пространстве X , если выполняется $\|x_n - x_0\|_X \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Пространство X называется полным, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится к некоторому элементу этого же пространства. Линейное нормированное и полное пространство называется банаховым. Пространство называется метрическим, когда в нем задана метрика. В нормированном пространстве метрика обычно задается формулой

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Пусть X, Y – линейные нормированные пространства. Правило, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие вполне определенный элемент $y \in Y$, называется оператором $y = Ax$, то есть $A : X \rightarrow Y$. Если Y – числовое пространство, то оператор становится функционалом. Если X, Y – числовые пространства, то оператор является функцией. Оператор в точке x_0 называется непрерывным, если для любой последовательности x_n , которая сходится $x_n \rightarrow x_0, n \rightarrow \infty$ в пространстве X , будет сходиться последовательность $Ax_n \rightarrow Ax_0$ в пространстве Y . Оператор называется непрерывным в X , если он непрерывен в каждой точке этого пространства. Оператор A называется аддитивным, если выполняется условие $A(x + y) = Ax + Ay$. Оператор A – однородный, если выполнено равенство $A(\lambda x) = \lambda Ax, \forall x, y \in X, \lambda \in \mathbb{R}$ – любое число. Аддитивный и однородный оператор называют линейным. Оператор $A : X \rightarrow Y$ называется ограниченным, если выполняется условие $\|Ax\|_Y \leq M \|x\|_X$, где M – некоторое число, не

зависящее от x . Нормой этого оператора называется наименьший из этих констант, который ограничивает оператор $\inf M = \|A\|_{X \rightarrow Y}$. Можно ввести понятие нормы оператора как равенство: $\|A\| = \sup_{x \in X, \|x\|_X=1} \|Ax\|_Y$. Для того, чтобы оператор $A: X \rightarrow Y$ был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он был ограниченным. Оператор $B: Y \rightarrow X$ называется левым обратным оператором к A , если выполняется равенство $BAx = x, \forall x \in X$, и обозначается символом A_l^{-1} . Оператор $C: Y \rightarrow X$ называется правым обратным к A , если выполняется равенство $ACy = y, \forall y \in Y$, и обозначается символом A_r^{-1} . Если у оператора существует левый и правый обратные операторы, то они совпадают и называются обратным оператором.

Рассмотрим

$$Ax = y, x \in X, y \in Y. \quad (3.1)$$

Задача решения уравнения (3.1) называется корректно поставленной, если выполнены три условия:

- решение существует;
- решение единственное;
- решение устойчиво, то есть малым изменениям исходных данных соответствует малое изменение решения.

Если нарушить любое из этих условий, то задача будет называться некорректно поставленной. Если существует A_r^{-1} , то существует решение уравнения (3.1) $x = A_r^{-1}y, \forall y$, но оно может быть не единственным и не устойчивым. Если существует A_l^{-1} , и уравнение имеет решение, то это решение единственно. В этом случае уравнение

$$Ax = 0 \quad (3.1')$$

имеет только тривиальное решение.

Если существует A^{-1} , то уравнение (3.1) при любой правой части разрешимо единственным образом. Но решение может быть не устойчивым. Решение будет устойчивым, если оператор $A^{-1}: Y \rightarrow X$ является ограниченным.

Сформулируем необходимое и достаточное условие существования левого и правого обратных операторов.

Теорема 3.1[3] Для того чтобы $A : X \rightarrow Y$ имел левый обратный A_l^{-1} , необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- 1) $Ax = 0$ имеет только тривиальное решение;
- 2) область значений оператора A допускает прямое дополнение в пространстве Y , то есть $AX \oplus Y_1 = Y$. Очень часто $Y_1 = \emptyset$.

Теорема 3.2[3] Для того чтобы $A : X \rightarrow Y$ имел правый обратный A_r^{-1} , необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- 1) уравнение (3.1) однозначно разрешимо при любой правой части;
- 2) множество нулей оператора A $N(A)$ имеет прямое дополнение в пространстве X , то есть $N(A) \oplus X_0 = X$.

Следствие. Если однородное уравнение, отвечающее уравнению (3.1), имеет только тривиальное решение и $AX = Y$, то существует A^{-1} .

Большая теорема Банаха (достаточное условие существования ограниченного обратного оператора)[3] Пусть пространства X, Y — банаховы пространства и $A : X \rightarrow Y$ осуществляет взаимнооднозначное и непрерывное отображение, тогда существует $A^{-1} : Y \rightarrow X$ и он является ограниченным.

Теорема 3.3 (необходимое условие существования ограниченного левого обратного оператора)[3] Чтобы существовал ограниченный левый обратный A_l^{-1} , необходимо и достаточно, чтобы осуществлялось следующее неравенство

$$\|Ax\|_Y \geq m \|x\|_X, \text{ при этом } \|A_l^{-1}\| \leq \frac{1}{m}.$$

Малая теорема Банаха (достаточное условие существования обратного ограниченного оператора)[3] Пусть A представляется таким образом $A = E + T$, то есть $A : X \rightarrow X$.

Тогда для того, чтобы существовал A^{-1} – ограниченный достаточно, чтобы $\|T\| = q < 1$. При этом $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{1-q}$.

Обобщение малой теоремы Банаха[3]

Пусть $A = U + U_0$ и оператор U_0 имеет ограниченный обратный U_0^{-1} . Тогда оператор A имеет ограниченный обратный и его норма $\|A^{-1}\| \leq \frac{\|U_0^{-1}\|}{1 - \|U_0^{-1}U\|}$.

Теперь приведем известные утверждения и теоремы из общей теории приближенных методов.

По определению С.Л. Соболева, прямыми методами решения операторных уравнений называются такие приближенные методы, которые приводят к решению конечных систем алгебраических уравнений. Этим обуславливается, в частности, та особенность, которую играют прямые методы среди других приближенных методов. Здесь, в связи с этим, приведем некоторые результаты по прямым методам решения линейных операторных уравнений.

Пусть X и Y – линейные нормированные пространства. $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$ – их произвольные фиксированные конечномерные подпространства одинаковой размерности. Пусть имеется некоторое уравнение

$$Ax = y, x \in X, y \in Y. \quad (3.2)$$

Будем называть (3.2) точным уравнением.

Рассмотрим $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{y}$, где $\tilde{A} \approx A$, $\tilde{y} \approx y$, $\tilde{x} \in X_n \subset X, \tilde{y} \in Y_n \subset Y$.

Уравнение (3.2) будем решать прямыми методами, то есть методами, которые сводят исходное уравнение (3.2) к решению конечной системы линейных алгебраических уравнений. В этом случае аппроксимирующее уравнение можно записать как

$$A_n x_n = y_n, x_n \in X_n \subset X, y_n \in Y_n \subset Y \quad (3.3)$$

Очевидно, что уравнение (3.3) равносильно системе из $m_2 = m_2(n) = \dim Y_n$ линейных алгебраических уравнений с $m_1 = m_1(n) = \dim X_n$

неизвестными, то есть мы имеем дело с прямыми методами решения уравнения (3.2). Обычно выбирают $\dim X_n = \dim Y_n = N(n) < \infty$. Следовательно мы получаем систему алгебраических уравнений с квадратной матрицей $m \times m$, что существенно облегчает численную реализацию прямых методов. Покажем, что (3.3) равносильно системе линейных алгебраических уравнений.

Так как X_n – конечномерное подпространство, то существует базис e_1, \dots, e_N . Следовательно, любой элемент из этого пространства можно представить в виде

$$x_n = \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k$$

Пространство Y_n также является конечномерным подпространством, следовательно, существует базис g_1, \dots, g_N , и любой элемент этого пространства представим в виде

$$y_n = \sum_{j=1}^N \beta_j g_j$$

Таким образом, уравнение $A_n x_n = y_n$ $\sim A_n \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k = \sum_{j=1}^N \beta_j g_j \sim \sum_{k=1}^N \alpha_k A e_k = \sum_{j=1}^N \beta_j g_j \sim \sum_{k=1}^N \alpha_k \sum_{j=1}^N \gamma_{kj} g_j = \sum_{j=1}^N \beta_j g_j \sim \sum_{j=1}^N g_j \sum_{k=1}^N \alpha_k \gamma_{kj} = \sum_{j=1}^N \beta_j g_j$.

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k \gamma_{kj} = \beta_j, \quad j = \overline{1, N} \quad (3.3')$$

– система линейных алгебраических уравнений относительно α_k .

Теорема 3.4[4] Пусть выполнены следующие условия:

- 1) оператор $A : X \rightarrow Y$ имеет A^{-1} – ограниченный;
- 2) $\|A_n x_n - A x_n\| \geq \frac{\|x_n\|}{\|A^{-1}\|} - \varepsilon_n = \|A - A_n\|_{X_n \rightarrow Y} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$;
- 3) $\dim X_n = \dim Y_n = N(n)$.

Тогда начиная с некоторых n , таких что $q_n = \|A^{-1}\| \varepsilon_n < 1$, уравнение (3.3) однозначно разрешимо, причем $\|x_n^*\| \leq \|A_n^{-1}\| \|y_n\|$,

$$\|A_n^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-q_n} \leq 2 \|A^{-1}\|.$$

Если, кроме того, выполнено

$$4) \delta_n = \|y - y_n\|_Y \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

то приближенное решение $x_n^* = A_n^{-1}y_n$ сходится к точному $x^* = A^{-1}y \in X$ по норме X , при этом погрешность приближенного решения может быть оценена неравенством

$$\|x^* - x_n^*\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-q_n} (\|y - y_n\| + q_n \|y\|).$$

Доказательство. Сначала докажем первую часть теоремы, то есть мы покажем, что существует A_n^{-1} – ограниченный. Для этого из необходимого и достаточного условия в теореме 3.3 надо получить, что выполняется $\|A_n x_n\|_{Y_n} \geq m \|x_n\|_{X_n}$. Рассмотрим $\|A_n x_n\|_{Y_n}$, вычтем и прибавим внутри слагаемое Ax_n и воспользуемся свойством нормы, получим

$$\|A_n x_n \mp Ax_n\| \geq \|Ax_n\| - \|Ax_n - A_n x_n\|.$$

Так как можно представить $\|x_n\| = \|A^{-1}Ax_n\| \leq \|A^{-1}\| \|Ax_n\|$.

Следовательно, $\|Ax_n\| \geq \frac{\|x_n\|}{\|A^{-1}\|}$.

Тогда $\|A_n x_n \pm Ax_n\| \geq \frac{\|x_n\|}{\|A^{-1}\|} - \|(A - A_n)x_n\|$. А из свойства нормы можно записать $\|(A - A_n)x_n\| \leq \|A - A_n\|_{X_n \rightarrow Y} \|x_n\|$. Таким образом, получим

$$\begin{aligned} \|A_n x_n \pm Ax_n\| &\geq \frac{\|x_n\|}{\|A^{-1}\|} - \varepsilon_n \|x_n\| = \|x_n\| \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \varepsilon_n \right) = \frac{1 - A^{-1}\varepsilon_n}{\|A^{-1}\|} \\ &\geq \|x_n\| \frac{1 - q_n}{\|A^{-1}\|}. \end{aligned}$$

Так как $\frac{1 - q_n}{\|A^{-1}\|} = m$, то получим $\exists A_n^{-1}$ – ограниченный. К тому же

$$\|A_n^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - q_n} \leq 2 \|A^{-1}\|.$$

Так как выполняется условие 3), то существует A_n^{-1} – ограниченный, и первая часть теоремы доказана. Теперь докажем оценку погрешности.

$$\begin{aligned} \text{Рассмотрим } \| A(x^* - x_n^*) \| &= \| y - Ax_n^* \pm y_n \| \leq \| y - y_n \| + \| y_n - Ax_n^* \| \\ &= \| y - y_n \| + \| A - A_n \| \cdot \| x_n^* \| \leq \| y - y_n \| + \varepsilon_n \| A_n^{-1} \| \left(\frac{\| y - y_n \|}{\| y_n \|} + 1 \right) \leq \\ &\left(1 + \frac{\varepsilon_n \| A^{-1} \|}{1 - q_n} \right) \| y - y_n \| + \frac{\varepsilon_n \| A^{-1} \|}{1 - q_n} \| y \| = \frac{1 - q_n + q_n}{1 - q_n} \| y - y_n \| + \frac{q_n}{1 - q_n} \| y \|. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем $\| x^* - x_n^* \| \leq \frac{\| A^{-1} \|}{1 - q_n} (\| y - y_n \| + q_n \| y \|)$.

Теорема доказана.

Недостатком здесь является то, что в оценке используется норма $\| A^{-1} \|$, которая бывает чаще всего неизвестна.

Теорема 3.5[4] Пусть выполнены следующие условия:

- 1) уравнение (3.2) при данной правой части имеет решение $y \in Y$,
- 2) существует A_n^{-1} – ограниченный, $P_n: Y \rightarrow Y_n$.

Тогда погрешность приближенного решения при $y_n = P_n y$ представима в виде $\| x^* - x_n^* \|_X = \| (E - A_n^{-1} P_n A)(x^* - \bar{x}_n) + A_n^{-1} (A_n - P_n A) \bar{x}_n \| \leq \| E - A_n^{-1} P_n A \|_{X \rightarrow X} \| x^* - \bar{x}_n \|_X + \| A_n^{-1} \|_{Y_n \rightarrow X_n} \| (A_n - P_n A) \bar{x}_n \|_{Y_n}$,

где $\bar{x}_n \in X$ исходя из минимальности правой части может быть выбран.

Доказательство. Рассмотрим последовательность равенств $x^* - x_n^* = x^* - A_n^{-1} y_n = x^* - A_n^{-1} P_n y_n = x^* - A_n^{-1} P_n A x^* = (E - A_n^{-1} P_n A)(x^* \pm \bar{x}_n) = (E - A_n^{-1} P_n A)(x^* - \bar{x}_n) + A_n^{-1} (A_n - P_n A) \bar{x}_n$

Необходимое равенство получим, переходя к норме. Теорема доказана.

Теорема 3.6 (достаточное условие сходимости приближенного решения к точному)[4] Пусть выполнены условия:

- 1) A – ограниченный оператор,
- 2) A_n^{-1} – ограничен,
- 3) $\| P_n \| E_n(x^*) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$,
- 4) $\| A_n - P_n A \| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Тогда приближенное решение x_n^* будет сходиться к точному решению x^* , при $n \rightarrow \infty$, в пространстве X .

Доказательство. Утверждение это следует из оценки погрешности в теореме 3.5, если в качестве \bar{x}_n выберем элемент наилучшего приближения

элемента x^* всевозможными элементами из пространства X_n . Таким образом, мы получаем $\|x^* - x_n^*\| \leq (1 + \|A_n^{-1}\| \|P_n\| \|A\|) E_n(x^*) + \|A_n^{-1}\| \|A_n - P_n A\| \|\bar{x}_n\|$. Рассмотрим $\|\bar{x}_n\|$, вычтем и прибавим элемент наилучшего приближения x^* к выражению под знаком нормы: $\|\bar{x}_n + x^* - x^*\| \leq \|\bar{x}_n - x^*\| + \|x^*\| \leq 2 \|x^*\|$, а $\|\bar{x}_n - x^*\| = E_n(x^*) = \inf_{x_n \in X_n} \|x^* - x_n\| \leq \|x^*\|$. Тогда получаем, что

$$\|x^* - x_n^*\| \leq c_1 \|P_n\| E_n(x^*) + c_2 \|A_n - P_n A\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, приближенное решение x_n^* будет сходиться к точному решению x^* . Таким образом, данная теорема доказана.

Рассмотрим частные случаи уравнения (3.2).

$$Ax = x + Hx = y, \quad x \in X, y \in Y = X, \quad A : X \rightarrow X \quad (3.4)$$

Это операторное уравнение второго рода. В данном случае пространства $X = Y$. И рассмотрим аппроксимирующее его уравнение

$$A_n x_n = x_n + H_n x_n = y_n, \quad x_n, y_n \in X_n, A : X_n \rightarrow X_n \quad (3.5)$$

Значительно упрощаются и улучшаются в этом случае теорема 3.4 и 3.5. В частности из теоремы 3.5 можно вывести следствия.

Следствие 1. Пусть $y_n = P_n y$, $P_n^2 = P_n$.

Для приближенного решения x_n^* тогда имеет место следующая оценка погрешности

$$\begin{aligned} \|x^* - x_n^*\| &\leq \| (E - A_n^{-1} P_n H)(x^* - P_n x^*) + A_n^{-1} (H_n - P_n H) P_n x^* \| \leq \\ &\| E - A_n^{-1} P_n H \| \|x^* - P_n x^*\| + \| A_n^{-1} \| \| (H_n - P_n H) P_n x^* \|. \end{aligned}$$

Доказательство. Используя оценку из теоремы 5 и подставляя в место $\bar{x}_n = P_n x^*$, получим

$$\begin{aligned} \|x^* - x_n^*\| &= \\ &\| E - A_n^{-1} P_n (H + E)(x^* - P_n x^*) \\ &+ A_n^{-1} (E + H_n - P_n (E + H)) P_n x^* \| \leq \\ &\| E - A_n^{-1} P_n H(x^* - P_n x^*) + A_n^{-1} (H_n - P_n H) P_n x^* \|. \end{aligned}$$

Так мы получили нужную оценку.

Рассмотрим теперь уравнения, приводящиеся к уравнениям второго рода, то есть уравнения вида:

$$Ax = Gx + Tx = y, \quad x \in X, \quad y \in Y = X, \quad A : X \rightarrow Y, \quad (3.6)$$

$$A_n x_n = G_n x_n + T_n x_n = y_n, \quad x_n \in X_n \subset X, \quad y_n \in Y_n \subset Y,$$

$$A : X \rightarrow Y, \quad (3.7)$$

где оператор $G : X \rightarrow Y$, $G_n : X_n \rightarrow Y_n$.

Предполагается, что $\exists G^{-1}$. Применяя G^{-1} к (3.6) и (3.7), получим

$$G^{-1}Gx + G^{-1}Tx = G^{-1}y \quad (3.6')$$

$$G^{-1}Gx_n + G^{-1}T_n x_n = G^{-1}y_n \quad (3.7')$$

Данные уравнения уже являются уравнениями второго рода, а значит, для них будут выполняться теоремы 3.4 и 3.5.

Следствие 2. Пусть $y_n = P_n y$, $P_n^2 = P_n$.

Тогда для погрешности приближенного решения имеет место оценка

$$\|x^* - x_n^*\| \leq \|E - A_n^{-1} P_n T\| \cdot \|x^* - G^{-1} P_n G x^*\| + \|A_n^{-1}\| \cdot \|(T_n - P_n T) G^{-1} P_n G x^*\|$$

Доказательство. Также как в следствии 1, используя оценку из теоремы 5 и заменяя $\bar{x}_n = G^{-1} P_n G x^*$, получаем

$$\begin{aligned} \|x^* - x_n^*\| &= \|(E - A_n^{-1} P_n (G + T))(x^* - G^{-1} P_n G x^*) + A_n^{-1} ((G + T_n) - \\ &P_n (G + T)) G^{-1} P_n G x^*\| \leq \|(E - A_n^{-1} P_n (G + T))(x^* - G^{-1} P_n G x^*)\| + \|A_n^{-1}\| \cdot \| \\ &[G + T_n - P_n (G + T)] G^{-1} P_n G x^*\| = \|(E - A_n^{-1} P_n T)(x^* - G^{-1} P_n G x^*) - \\ &A_n^{-1} P_n G x^* + A_n^{-1} P_n G G^{-1} P_n G x^*\| + \|A_n^{-1}\| \cdot \|(T_n - P_n T) G^{-1} P_n G x^*\| \leq \| \\ &E - A_n^{-1} P_n T\| \cdot \|x^* - G^{-1} P_n G x^*\| + \|A_n^{-1}\| \cdot \|(T_n - P_n T) G^{-1} P_n G x^*\|. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

§4. Обобщенные приближенные методы

4.1 Схема алгоритмов

Пусть в гильбертовом пространстве H рассматривается уравнение

$$Mu = Cu + Su = f, \quad f \in H, \quad (4.1)$$

где C, S – линейные (т. е. аддитивные и однородные, но, может быть, неограниченные) операторы в H с областями определения $D(C), D(S)$, соответственно. Предполагается, что $D(C) \subseteq D(S)$ и $D(C)$ плотно в H . Помимо этого введем в рассмотрение некоторый оператор L с областью определения $D(L) \supseteq D(C)$. [6]

Зададим функции

$$\varphi_1^{(N)}, \varphi_2^{(N)}, \dots, \varphi_N^{(N)}, \quad N = 1, 2, \dots,$$

каждая, из которых принадлежит $D(C)$. Обозначим через H_N линейную оболочку функций $\varphi_i^{(N)}, i = 1, \dots, N$. Будем считать, что для этих функций выполнены условия: 1) при любом N функции $\varphi_1^{(N)}, \varphi_2^{(N)}, \dots, \varphi_N^{(N)}$ линейно независимы; 2) в H предельно плотна последовательность подпространств $\{H_N\}$, т. е. для любой функции $u \in H$ существуют такие элементы $\tilde{u}_N \in H_N$, $N = 1, 2, \dots$, что

$$\|u - \tilde{u}_N\| = \inf_w \|u - w\| \leq \varepsilon(u, N), \quad w \in H_N,$$

где $\varepsilon(u, N)$ – оценки погрешности аппроксимации, $\varepsilon(u, N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Будем искать приближенное решение уравнения (4.1) в виде

$$u_N = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i; \quad (4.2)$$

здесь a_i определим из системы уравнений

$$(Cu_N + Su_N - f, M\psi_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.3)$$

где (u, v) – скалярное произведение в пространстве H с нормой $\|u\| = (u, u)^{1/2}$.

4.2. Классический метод Рунца

Пусть в задаче (4.1) и в алгоритме (4.3) $S = \theta, L = I$ – тождественный оператор, $\varphi_i = \psi_i, C$ – симметричный положительно определенный оператор, т.е. $(Cu, v) = (u, Cv), (Cu, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2$, где γ – постоянная, $\gamma > 0, u, v \in D(C)$. [6] В этом случае мы приходим к задаче

$$Cu = f, \quad f \in H. \quad (4.4)$$

Общий алгоритм (4.3) при сделанных предположениях будем называть классическим методом Рунца; он состоит в следующем:

- 1) Выбирается базис $\{\varphi_i\}, \varphi_i \in D(C), i = 1, \dots, N, N = 1, 2, \dots$
- 2) Приближенное решение ищется в виде

$$u_N = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i. \quad (4.5)$$

- 3) Коэффициенты a_i находятся из системы уравнений

$$(Cu_N, \varphi_i) = (f, \varphi_i), i = 1, \dots, N, \quad (4.6)$$

.

Теорема 4.1 Если для любой функции $u \in D(C)$ можно построить такую последовательность элементов $\tilde{u}_N = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i \in H_N, N = 1, 2, \dots$, что $\|C(u - \tilde{u}_N)\| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, то приближенные решения u_N сходятся к точному решению u_0 уравнения (4.4) при $N \rightarrow \infty$ и имеет место оценка

$$\|u - u_0\| \leq c \min_{c_i} \|A(u - \tilde{u}_N)\|,$$

где c – положительная константа, не зависящая от u_0 и \tilde{u}_N .

Доказательство. Воспользуемся соотношением, справедливым для u_0 и произвольной $v \in D(C)$:

$$\begin{aligned}
(C(u_0 - v), u_0 - v) &= (Cu_0, u_0) + (Cv, v) - 2(Cu_0, v) \\
&= (Cu_0, u_0) + (Cv, v) - 2(f, v) \\
&= F(v) + (Cu_0, u_0) - F(u_0) + F(u_0) \\
&= F(v) - F(u_0) + 2(Cu_0, u_0) - 2(u_0, f) = F(v) - F(u_0);
\end{aligned}$$

следовательно,

$$(C(u_0 - v), u_0 - v) = F(v) - F(u_0).$$

Поскольку u_0 доставляет функционалу $F(v)$ минимальное значение на $D(C)$, а приближенное решение u_N минимизирует $F(v)$ на H_N , то

$$\begin{aligned}
(C(u_0 - v), u_0 - v) &= F(u_N) - F(u_0) \leq F(v_N) - F(u_0) \\
&= (C(u_0 - v_N), u_0 - v_N)
\end{aligned}$$

при произвольной функции $v_N = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i$ из H_N . По этому,

$$\begin{aligned}
\gamma^2 \|u_0 - u_N\|^2 &\leq (C(u_0 - u_N), u_0 - u_N) \leq (C(u_0 - v_N), u_0 - v_N) \leq \\
&\|C^{-1}\| \|C(u_0 - u_N)\|^2, \|u_0 - u_N\|^2 \leq \frac{\|C^{-1}\|}{\gamma^2} \|C(u_0 - v_N)\|^2.
\end{aligned}$$

В силу произвольности выбора коэффициентов $c_i, i = 1, \dots, N$, в разложении

$v_N = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i$ мы получаем утверждение теоремы, положив $v_N = \tilde{u}_N$.

Замечание. Если известна оценка

$$\min_{c_i} \|C(u_0 - \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i)\| \leq \varepsilon(u_0, N) \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty,$$

где $\varepsilon(u_0, N)$ – заданная функция от N , то оценка погрешности $\|u_0 - u_N\| \leq c\varepsilon(u_0, N)$ следует из теоремы.

4.3. Метод Ритца в энергетических пространствах

Пусть даны линейно независимые функции $\{\varphi_i\} \subset H_C$; обозначим через H_N их линейную оболочку.

Предположим, что последовательность подпространств $\{H_N\}, N = 1, 2, \dots$, предельно плотна в H_C , т.е. для любой функции $u \in H_C$ существует такие элементы $\tilde{u}_N \in H_N, N = 1, 2, \dots$, что

$$[u - \tilde{u}_N] = \inf_w [u - w] \leq \varepsilon(u, N) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, w \in H_N, \quad (4.7)$$

где $\varepsilon(u, N)$ – оценки погрешности аппроксимации. Теперь метод Ритца можно сформулировать следующим образом: требуется найти элемент $u_N \in H_N$, минимизирующий $F(u)$ на подпространстве H_N . Реализация этого алгоритма состоит в следующем:

- 1) Задаются конкретные N и $\{\varphi_i\}, \varphi_i \in H_C$.
- 2) Приближенное решение ищется в виде

$$u_N = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i; \quad (4.8)$$

- 3) Коэффициенты a_i находятся из условий минимизации функционала $F(u_N)$, которые приводят к системе уравнений

$$\frac{\partial F(u_N)}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Эту систему можно записать также в виде $\hat{C}a = f$, или

$$[u_N, \varphi_i] = (f, \varphi_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.9)$$

где

$$a = (a_1, \dots, a_N)^T, \text{ и } f = (f_1, \dots, f_N)^T - N - \text{мерные векторы, причем, } f_i = (f, \varphi_i), \quad (4.10)$$

а \hat{C} – матрица Грама системы $\{\varphi_i\}$ в скалярном произведении пространства H_C с элементами

$$C_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j], \quad 1 < i, j < N. \quad (4.11)$$

Но $C_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j] = [\varphi_j, \varphi_i] = C_{ji}$, так что \hat{C} симметрична, а в силу неравенства

$$(\hat{C}b, b)_2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij} b_i b_j = \left[\sum_{i=1}^N b_i \varphi_i \right]^2 \geq \gamma^2 \left\| \sum_{i=1}^N b_i \varphi_i \right\|^2 > 0$$

при $b = (b_1, \dots, b_N)^T \neq 0$ матрица \hat{C} также является положительно определенной. Поэтому система (4.9) имеет единственное решение a , определяющее однозначно элемент u_N , для которого справедливо неравенство $[u_N] \leq \frac{\|f\|}{\gamma^2}$.

Замечание. Если $\varphi_i \in D(C)$, то C_{ij} можно также представить в виде $C_{ij} = (C\varphi_i, \varphi_j)$. Если же $\varphi_i \notin D(C)$, то данное представление, вообще говоря, не имеет места и выполняется (4.11).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.2 Если в H_C предельно плотна последовательность подпространств $\{H_N\}$, то приближенные решения u_N , построенные методом Ритца, сходятся при $N \rightarrow \infty$, к обобщенному решению задачи u_0 в метрике пространства H_C .

Доказательство. Приведем два доказательства теоремы, которые часто используются при изучении сходимости метода Ритца.

1) Каждое u_N доставляет на H_N минимум $F(u)$, поэтому при произвольном $w \in H_N$ имеем

$$[u_0 - u_N]^2 = F(u_N) - F(u_0) \leq F(w) - F(u_0) = [u_0 - w]^2.$$

Поскольку w произвольно, то, принимая во внимание (4.13) мы получаем

$$[u_0 - u_N]_C \leq \inf_w [u_0 - w] \leq \varepsilon(u_0, N), \quad w \in H_N, \quad (4.12)$$

где $\varepsilon(u_0, N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

2) Запишем для u_0 и u_N тождества:

$$[u_0, \varphi_i] = (f, \varphi_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

Вычитая второе соотношение из первого, получаем $[u_0 - u_N, \varphi_i] = 0, i = 1, \dots, N$. Следовательно, $[u_0 - u_N, \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i] = 0$ при произвольных постоянных c_1, \dots, c_N или, что одно и то же ($c_i = d_i - a_i, d_i$ произвольны),

$$[u_0 - u_N, u_0 - u_N] = \left[u_0 - u_N, u_0 - \sum_{i=1}^N d_i \varphi_i \right].$$

Воспользовавшись неравенством Коши – Буняковского для оценки правой части последнего равенства, мы получаем соотношения

$$[u_0 - u_N]^2 \leq [u_0 - u_N][u_0 - \sum_{i=1}^N d_i \varphi_i],$$

$$[u_0 - u_N] \leq [u_0 - \sum_{i=1}^N d_i \varphi_i].$$

Но d_i произвольны, поэтому

$$[u_0 - u_N] \leq \inf_{d_i} \left[u_0 - \sum_{i=1}^N d_i \varphi_i \right] \leq \varepsilon(u_0, N),$$

где $\varepsilon(u_0, N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Теорема доказана.[6]

4.4. Естественные и главные краевые условия

Рассмотрим один из важных для практического использования метода Ритца вопросов, – проблему выделения главных и естественных краевых условий. Принадлежность элемента u к области определения $D(C)$ оператора C часто предполагает, что u удовлетворяет тем или иным краевым условиям: $T_l u = 0, l = 1, \dots, L$ (здесь T_l – оператор, определяющий l - краевое условие). В результате дополнения $D(C)$ по норме $[\cdot]$ в полученном энергетическом пространстве H_C могут возникнуть элементы, которые будут удовлетворять не всем условиям $T_l u = 0$. Если в H_C найдутся элементы, не удовлетворяющие некоторому условию $T_l u = 0$, то такое краевое условие

называется естественным для оператора C . Краевое условие, которому удовлетворяют как элементы из $D(C)$, так и элементы из H_C , называется главным.

Практическая значимость умения различать эти условия состоит в том, что базисные функции $\{\varphi_i\}$ не обязательно подчинять естественным краевым условиям, так как их достаточно брать лишь из энергетического пространства (и не обязательно из $D(C)$). В значительной степени это условие облегчает выбор φ_i при решении многих практически важных задач, особенно в случае многомерной области со сложной формой границы. Заметим, что в случае главных краевых условий остается проблема построения φ_i , удовлетворяющих этим условиям.

Укажем подход, который дает возможность для конкретной задачи установить, является ли то или иное краевое условие естественным. Рассмотрим задачу о минимизации функционала $F(u)$ и допустим, что существует функция u_0 . Если окажется, что к ним относится и рассматриваемое краевое условие, то оно естественное.

В конечном итоге приведем простой признак (без его теоретического объяснения), позволяющий различать естественные краевые условия от главных и применимый для ряда краевых задач. Пусть в (4.4) C – дифференциальный оператор порядка $2m$, удовлетворяющий некоторому однородному краевому условию вида $T_l u = 0$. Краевое условие тогда будет естественным, если выражение $T_l u$ содержит производные от u порядка m и выше (при этом в $T_l u$ могут входить производные порядков, меньших чем m , а также сама функция u с некоторыми весами). Если $T_l u$ не имеет производных от u порядка m и выше, то условие $T_l u = 0$ является главным.[6]

4.5. Метод Бубнова – Галеркина

Основным недочетом метода Ритца является то, что он применим только лишь для уравнений с симметричным положительно определенным оператором. От этого недочета свободен другой алгоритм проекционного метода – метод Бубнова – Галеркина.[5]

Пусть в нашей главной схеме выполнены следующие предположения: $L = I, \varphi_i = \psi_i, M = C + S$ – линейный оператор, он может быть несимметричным, неограниченным и не быть положительно определенным. В данном случае уравнение имеет вид

$$Mu = Cu + Su = f, \quad f \in H. \quad (4.13)$$

Здесь будет рассмотрен только случай, когда C (главная часть оператора M) – самосопряженный положительно определенный оператор. Введем энергетическое пространство H_C оператора C со скалярным произведением $[u, v]$ и нормой $[u] = \sqrt{[u, u]}$. Умножим (4.13) скалярно в H на произвольную функцию $v \in D(C)$. Тогда приходим к равенствам, которым удовлетворяет решение уравнения:

$$(Cu, v) + (Su, v) = (f, v), \quad (4.14)$$

$$[u, v] + (Su, v) = (f, v). \quad (4.15)$$

Сформулируем метод Бубнова- Галеркина для решения рассматриваемой здесь задачи:

- 1) В H_C выбираются базисные функции $\{\varphi_i\}$, т.е. здесь достаточно, чтобы φ_i принадлежали H_C , а не $D(C)$.
- 2) Приближенное решение u_N ищется в виде

$$u_N = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i. \quad (4.16)$$

- 3) Коэффициенты a_i определяются из системы уравнений вида

$$[u_N, \varphi_i] + (Su_N, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.17)$$

или, в матричной форме,

$$\widehat{M}a = f, \quad (4.18)$$

где

$$\widehat{M} = (M_{ij}), M_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j] + (S\varphi_j, \varphi_i), a = (a_1, \dots, a_N)^T, f = (f_1, \dots, f_N)^T, f_i = (f, \varphi_i).$$

Теорема 4.5[6] Пусть: 1) уравнение (4.19) имеет единственное обобщенное решение $u \in H_C$; 2) форма $M(u, v) = [u, v] + (Su, v)$ является H_C – определенной и H_C – ограниченной, т.е. для нее выполнены соотношения $M(u, v) \geq \gamma_0^2 [u]^2, |M(u, v)| \leq \gamma_1^2 [u][v], \gamma_0, \gamma_1 = const$; 3) последовательность подпространств $\{H_N\}$, где H_N – линейная оболочка функций $\{\varphi_i\}, i = 1, \dots, N$, предельно плотна в H_C :

$$\min_{c_i} [u - \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i] \leq \varepsilon(u, N) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

где $\varepsilon(u, N)$ – оценка погрешности аппроксимации. Тогда при любом конечном N система (4.24) однозначно разрешима, приближенное решение u_N сходится к u при $N \rightarrow \infty$ в метрике $[\cdot]$, а также справедлива оценка погрешности

$$[u - u_N] \leq c\varepsilon(u, N).$$

Глава 2. Метод конечных элементов решения дробно-дифференциального уравнения

§1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение:

$$D^{(\alpha)}u + Tu = f, \quad u, f \in L_2[0, 2\pi], \quad (1.1)$$

где $D^{(\alpha)} = \frac{(D_+^{(\alpha)} + D_-^{(\alpha)})}{2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})}$ определяется с помощью операторов дробного дифференцирования $D_{\pm}^{(\alpha)}$, определяемых для дробных производных для функций $\varphi(x)$, заданных на отрезке $[a, b]$ по формулам:

$$(D_{a+}^{(\alpha)} \varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^\alpha}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (1.2)$$

$$(D_{b-}^{(\alpha)} \varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^\alpha}, \quad -\infty < x < \infty,$$

здесь $0 < \alpha < 1$. Производные (1.2) принято также называть производными Римана-Лиувилля порядка α , левосторонним и правосторонним, соответственно. u – неизвестная, а f – заданная функции из пространства $L_2[0, 2\pi]$. T – некоторый оператор, для которого $(D^{(\alpha)} + T)$ – линейный оператор, и, в общем случае неограниченный и не положительно определенный.

Для достаточно хороших функций оператор $D^{(\alpha)}$ совпадает с оператором Вейля для дробного дифференцирования и действует по правилу:

$$D^{(\alpha)}u \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^\alpha u_k e^{ikx}. \quad (1.3)$$

Здесь u_k – суть коэффициенты Фурье для функции u .

Рассмотрим теперь случай, когда дробная производная (1.2) порядков $\alpha \geq 1$, тогда ее выражение задается следующим образом.

Число α – дробный порядок производной можно представить в виде:

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\},$$

через сумму целой и дробной частей соответственно.

Если α – целое число, то под дробной производной будем понимать обычное дифференцирование:

$$D_{a+}^{\alpha} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, \quad D_{b-}^{\alpha} = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots$$

Если же число α – не целое, то целесообразно ввести производные:

$$D_{a+}^{\alpha} f \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D_{+}^{\{\alpha\}} f = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} I_{a+}^{1-\{\alpha\}} f,$$

$$D_{b-}^{\alpha} f \stackrel{\text{def}}{=} \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]} D_{-}^{\{\alpha\}} f = \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\alpha]+1} I_{b-}^{1-\{\alpha\}} f.$$

Таким образом, дробные производные высших порядков задаются как:

$$D_{a+}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\alpha] + 1,$$

$$D_{b-}^{\alpha} f = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [\alpha] + 1.$$

Для оператора справедливы следующие леммы.

Лемма 1.1 $D^{(\alpha)}$ – положительно определенный оператор.

Доказательство. Известно, что $D^{(\alpha)}$ будет положительно определенным оператором, если выполняется следующее условие: $(D^{(\alpha)}u, u) > 0$. Кроме того, система e^{ikx} полна в пространстве $L_2[0, 2\pi]$, то справедливо:

$$(D^{(\alpha)} \square, u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (D^{(\alpha)}u, e^{ikx}) (u, e^{ikx}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^{\alpha} u_k^2 > 0.$$

Что и требовалось доказать.

Лемма 1.2 $D^{(\alpha)}$ – симметричный оператор.

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение $D_{+}^{\alpha}u$ и v для любых $u, v \in L_2[0, 2\pi]$:

$$(D_{+}^{\alpha}u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x-t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^{\alpha} e^{ikx} dt v(x) dx =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_x^{x-2\pi} u(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^{\alpha} e^{ik(x-t)} dt v(x) dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-ik)^\alpha e^{ikx} dx u(t) dt = (u, D_-^\alpha v).$$

Аналогично для D_-^α имеем: $(D_-^\alpha u, v) = (u, D_+^\alpha v)$.

Отсюда следует, что оператор $D^{(\alpha)}$, который выражается через операторы D_+^α и D_-^α , является симметричным оператором, на основании свойства скалярного произведения.

Учитывая это, введем скалярное произведение и норму соответственно:

$$[u, v] = (D^{(\alpha)} u, v), \quad [u] = (D^{(\alpha)} u, u)^{1/2}.$$

В явном виде скалярное произведение будет выражено как:

$$[u, v] = (D^{(\square)} u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k |k|^\alpha e^{ikx} v(x) dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^\alpha u_k v_k.$$

Пополняя $D(D^{(\alpha)})$ по введенной норме, получим энергетическое пространство, обозначим которое через H_D .

Умножая исходное уравнение (1.1) на произвольную функцию $v \in D(D^{(\alpha)})$, получим следующее уравнение:

$$[u, v] + (Tu, v) = (f, v). \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) допускает обобщенную постановку задачи. Обобщенным решением уравнения (1.1) назовем функцию $u \in H_D$, удовлетворяющую уравнению (1.4) для любой функции $v \in H_D$.

§2. Метод Бубнова - Галеркина

Согласно методу Бубнова-Галеркина, в энергетическом пространстве H_D выбирается система базисных функций $\varphi_j, j = 1..N$. Приближенное решение ищется в виде многочлена по выбранной системе базисных функций в виде:

$$u_N = \sum_{j=1}^N a_j \varphi_j. \quad (2.1)$$

Неизвестные коэффициенты a_j определяются из системы уравнений вида:

$$[u_N, \varphi_k] + (Tu_N, \varphi_k) = (f, \varphi_k), \quad k = 1 \dots N. \quad (2.2)$$

Учитывая представление (2.1) и линейность введенного и обыкновенного скалярных произведений, получаем следующую СЛАУ

$$\sum_{j=1}^N a_j [\varphi_j, \varphi_k] + \sum_{j=1}^N a_j (T\varphi_j, \varphi_k) = (f, \varphi_k), \quad k = 1 \dots N. \quad (2.3)$$

Теорема 2. 1 Пусть 1) уравнение (1.1) имеет единственное решение при данной правой части. 2) Форма $L(u, v) = [u, v] + (Tu, v)$ является H_D – определенной и H_D – ограниченной, т.е. выполняются условия:

$$L(u, u) \geq \gamma_0^2 [u]^2, \quad L(u, v) \leq \gamma_1^2 [u][v], \quad \gamma_0, \gamma_1 \equiv const.$$

3) Последовательность подпространств H_N – линейных оболочек функций $\varphi_j, j = 1..N$ – является предельно плотной в H_D .

Тогда при любом конечном N однозначно разрешима система (2.2) и приближенное решение u_N сходится к точному решению u при $N \rightarrow \infty$ по метрике $[\cdot]$ и справедлива оценка погрешности:

$$[u - u_N] \leq c\varepsilon(u, N),$$

где $\varepsilon(u, N)$ – заданная функция от N (оценка погрешности приближения), удовлетворяющая неравенству:

$$\min_{c_j} \left\| D^{(\alpha)} \left(u - \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j \right) \right\| \leq \varepsilon(u, N) \rightarrow 0.$$

§3. Метод Рунца

Рассмотрим задачу:

$$D^{(\alpha)}u + qu = f(x), \quad x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (3.1)$$

Приближенное решение (3.1) будем искать методом Рунге, согласно которому в качестве базисных функций возьмем собственные функции оператора $A = D^{(\alpha)} + q$ с областью определения $D(A)$, состоящих из непрерывных на $[0,1]$ и обладающих производными до второго порядка включительно функций $u(x)$, удовлетворяющих условиям $u(0) = u(1) = 0$. Отметим, что собственное значение λ_i и соответствующая ему собственная функция φ_i оператора A , имеют вид $\lambda_i = i^2\pi^2 + q$, $\varphi_i = \sin i\pi x$, $i = 1, 2, \dots$. Тогда приближенное решение (3.1) будем искать в виде:

$$u_N(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sin i\pi x, \quad (3.2)$$

где неизвестные коэффициенты разложения (3.2) задаются явно в виде:

$$\alpha_i = \frac{2}{i^2\pi^2 + q} \int_0^1 f(x) \sin i\pi x \, dx.$$

§4. Примеры численной реализации вычислительной схемы

Рассмотрим примеры численной реализации предложенной вычислительной схемы для задачи (1.1)

Пример 1.

Возьмем для задачи (1.1) значения $\alpha = 2,5$, $q = 1$.

Тогда уравнение примет вид:

$$D^{(2.5)}u + u = f(x), \quad (4.1)$$

$$x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0,$$

где правая часть уравнения (4.1) в явном виде задана как функция: $f(x) = (1 + b^{2.5})\sin bx - (1 + (\pi - b)^{2.5})\sin(\pi - b)x$.

Легко показать, что точное решение имеет вид:

$$u(x) = \sin bx - \sin(\pi - b) x.$$

Действительно, применим точное решение к уравнению (4.1) и воспользуемся равенством $D^{(\alpha)}(\sin bx) = b^\alpha \sin bx$, получим:

$$\begin{aligned} & b^{2.5} \sin bx - (\pi - b)^{2.5} \sin(\pi - b) x + \sin bx - \sin(\pi - b) x \\ &= (1 + b^{2.5}) \sin bx - (1 + (\pi - b)^{2.5}) \sin(\pi - b) x. \end{aligned}$$

В качестве иллюстрации метода приближенные решения (4.1) будем искать в виде тригонометрического многочлена (3.2), неизвестные коэффициенты которого найдем из определенного интеграла:

$$\alpha_i = \frac{2}{i^2 \pi^2 + 1} \int_0^1 ((1 + b^{2.5}) \sin bx - (1 + (\pi - b)^{2.5}) \sin(\pi - b) x) \sin i \pi x dx$$

Подставляя в формулу $b = 1$, получим приближенное решение для $N = 10$, график которого представлен на рис 1. График соответствующего точного решения представлен на рис 2. [7]

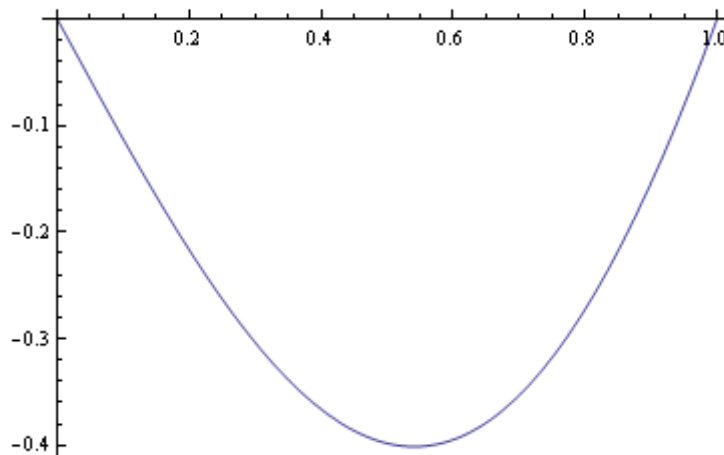


Рис 1. График точного решения $u(x)$.

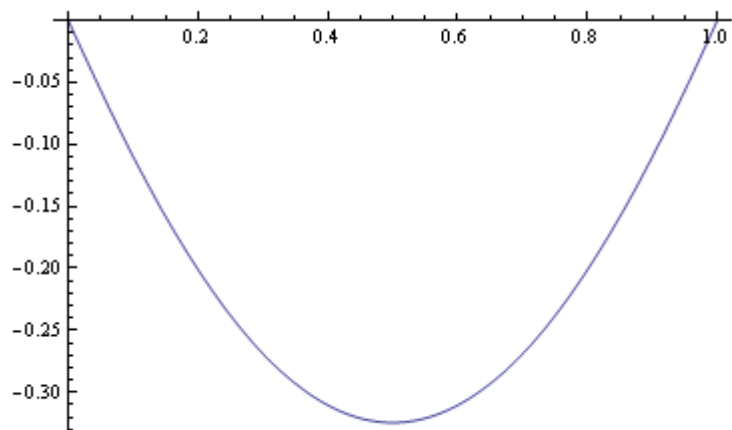


Рис. 2. График приближенного решения $u_{10}(x)$.

Нетрудно видеть, что графики приближенного и точного решений почти совпадают. Кроме того, можно сравнить точные и приближенные значения функции в точках промежутка интегрирования (таблица 1):

Таблица 1.

x_i	$u(x_i)$	$u_{10}(x_i)$
0	0	0
0.1	- 0.112693	- 0.109898
0.2	- 0.216672	- 0.201131
0.3	- 0.303631	- 0.269012
0.4	- 0.366226	- 0.310407
0.5	- 0.398157	- 0.324481
0.6	- 0.394782	- 0.310407
0.7	- 0.353214	- 0.269012
0.8	- 0.272511	- 0.201131
0.9	- 0.153749	- 0.109898
1	0	0

Сравнивая второй и третий столбцы таблицы 1, видно, что расхождения в значениях невелики. Для получения большей точности, найдем приближенное решение исходной задачи для $N = 15$.

Точные и приближенные значения заданы таблицей 2:

Таблица 2.

x_i	$u(x_i)$	$u_{15}(x_i)$
0	0	0
0.1	- 0.112693	- 0.109811
0.2	- 0.216672	- 0.20122
0.3	- 0.303631	- 0.268961
0.4	- 0.366226	- 0.310456
0.5	- 0.398157	- 0.324419
0.6	- 0.394782	- 0.310456
0.7	- 0.353214	- 0.268961
0.8	- 0.272511	- 0.20122
0.9	- 0.153749	- 0.109811
1	0	0

Дальнейшее увеличение числа N не привело к повышению точности приближения, что свидетельствует из таблицы 3.

Таблица 3.

x_i	$u(x_i)$	$u_{20}(x_i)$
0	0	0
0.1	- 0.112693	- 0.109793
0.2	- 0.216672	- 0.201197
0.3	- 0.303631	- 0.268947
0.4	- 0.366226	- 0.310455
0.5	- 0.398157	- 0.324425
0.6	- 0.394782	- 0.310455

0.7	- 0.353214	- 0.268947
0.8	- 0.272511	- 0.201197
0.9	- 0.153749	- 0.109793
1	0	0

Сравнивая значения приближенных функций при $N=10$, $N=15$, получили точность $\varepsilon = 10^{-3}$. Однако, дальнейшее увеличение N приводит к медленному увеличению точности приближения.

Пример 2.

Возьмем для задачи (1.1) значения $\alpha = 1,4$, $q = 1$.

Тогда уравнение примет вид:

$$D^{(1.4)}u + u = f(x), \quad (4.1)$$

$$x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0,$$

где правая часть уравнения (4.1) в явном виде задана как функция: $f(x) = (\pi + b^{1.4}) \sin(\pi + b)x + (b^{1.4} + 1)\sin bx$.

Легко показать, что точное решение имеет вид:

$$u(x) = \sin bx + \sin(\pi + b)x.$$

Действительно, применим точное решение к уравнению (4.1) и воспользуемся равенством $D^{(\alpha)}(\sin bx) = b^\alpha \sin bx$, получим:

$$\begin{aligned} & b^{1.4} \sin bx + (\pi + b)^{1.4} \sin(\pi + b)x + \sin bx + \sin(\pi + b)x \\ &= (1 + b^{1.4}) \sin bx + (1 + (\pi + b)^{1.4}) \sin(\pi + b)x. \end{aligned}$$

В качестве иллюстрации метода приближенные решения (4.1) будем искать в виде тригонометрического многочлена (3.2), неизвестные коэффициенты которого найдем из определенного интеграла:

$$\alpha_i = \frac{2}{i^2 \pi^2 + 1} \int_0^1 ((1 + b^{1.4}) \sin bx + (1 + (\pi + b)^{1.4}) \sin(\pi + b)x) \sin i\pi x dx$$

Подставляя в формулу $b = -1$, получим приближенное решение для $N = 10$, график которого представлен на рис 3. График соответствующего точного решения представлен на рис 4.

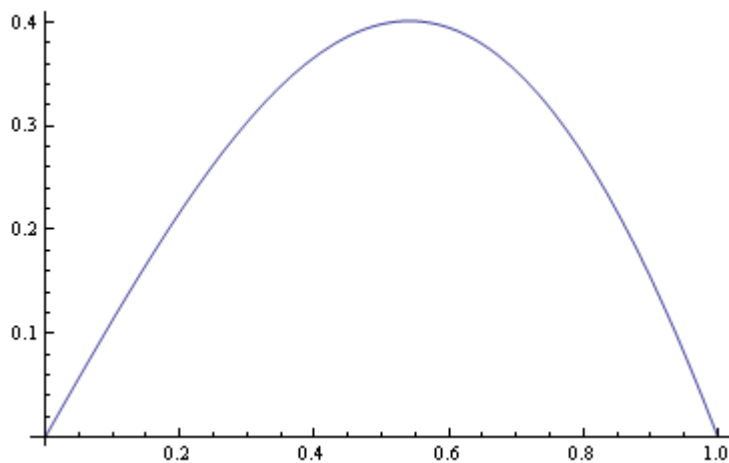


Рис 3. График точного решения $u(x)$.

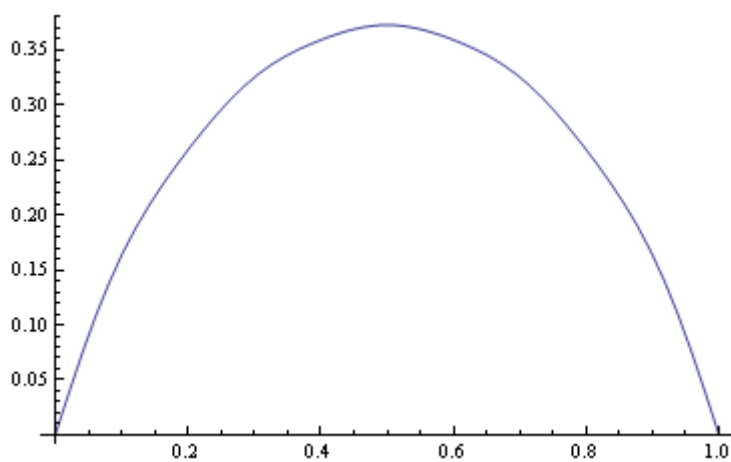


Рис. 4. График приближенного решения $u_{10}(x)$.

Сравним точные и приближенные значения функции в точках промежутка интегрирования (таблица 4):

Таблица 4.

x_i	$u(x_i)$	$u_{10}(x_i)$
0	0	0

0.1	0.112693	0.163482
0.2	0.216672	0.259163
0.3	0.303661	0.325181
0.4	0.366226	0.359034
0.5	0.398157	0.372524
0.6	0.394782	0.359034
0.7	0.353214	0.325181
0.8	0.272511	0.259163
0.9	0.153749	0.163482
1	0	0

Для получения большей точности, найдем приближенное решение исходной задачи для $N = 15$ и $N = 20$.

Точные и приближенные значения заданы таблицей 5 и 6:

Таблица 5.

x_i	$u(x_i)$	$u_{15}(x_i)$
0	0	0
0.1	0.112693	0.161488
0.2	0.216672	0.261004
0.3	0.303661	0.32437
0.4	0.366226	0.359871
0.5	0.398157	0.371315
0.6	0.394782	0.359871
0.7	0.353214	0.32437
0.8	0.272511	0.261004
0.9	0.153749	0.161488
1	0	0

Таблица 6.

x_i	$u(x_i)$	$u_{20}(x_i)$
0	0	0
0.1	0.112693	0.160934
0.2	0.216672	0.260261
0.3	0.303661	0.323877
0.4	0.366226	0.359796
0.5	0.398157	0.371439
0.6	0.394782	0.359796
0.7	0.353214	0.323877
0.8	0.272511	0.260261
0.9	0.153749	0.160937
1	0	0

Сравнивая значения приближенных функций при $N=10$, $N=15$, получили точность $\varepsilon = 10^{-3}$. Однако, дальнейшее увеличение N приводит к медленному увеличению точности приближения.

Пример 3.

Возьмем для задачи (1.1) значения $\alpha = 2.3$, $q = 1$

Тогда уравнение примет вид:

$$D^{(2.3)}u + u = f(x), \quad (4.1)$$

$$x \in (0.1), \quad u(0) = u(1) = 0,$$

где правая часть уравнения (4.1) в явном виде задана как функция: $f(x) = (2\pi - b^{2.3}) \sin(2\pi - b)x - (b^{2.3} + 1)\sin bx$.

Найдем приближенное решение задачи (4.1). Подставляя в формулу $b = 3$, получим приближенное решение для $N = 10$, график которого представлен на рис 5.

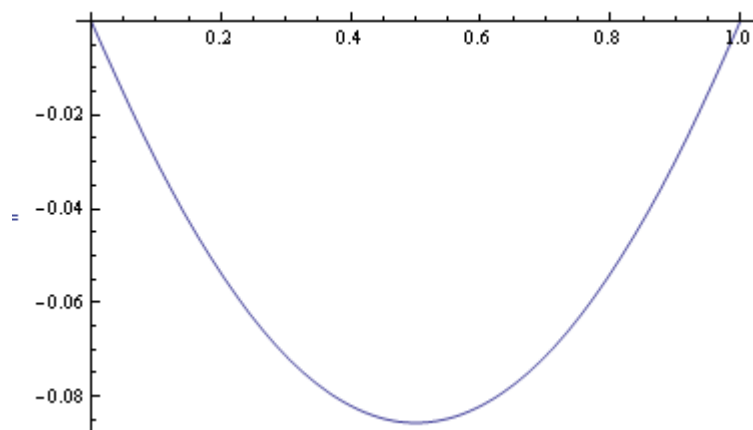


Рис. 5. График приближенного решения $u_{10}(x)$

Приближенные значения функции в точках промежутка интегрирования даны в таблице 7:

Таблица 7.

x_i	$u_{10}(x_i)$
0	0
0.1	- 0.0297384
0.2	- 0.0537611
0.3	- 0.0713964
0.4	- 0.0820146
0.5	- 0.0856333
0.6	- 0.0820146
0.7	- 0.0713964
0.8	- 0.0537611
0.9	- 0.0297384
1	0

По рисунку 5 и таблице 7 видно, что приближенные значения удовлетворяют граничным условиям, т.е. искомая функция $u(x)$ в точках $x = 0$ и $x = 1$ равна нулю.

Найдем оценку сходимости приближенного метода. Для этого вычислим приближенное значение функции для $N = 15$ и $N = 20$. Данные представлены в Таблице 8.

Таблица 8.

x_i	$u_{15}(x_i)$	$u_{20}(x_i)$
0	0	0
0.1	- 0.0296993	- 0.029691
0.2	- 0.0538001	- 0.053789
0.3	- 0.0713748	- 0.0713677
0.4	- 0.0820357	- 0.0820351
0.5	- 0.0856064	- 0.0856089
0.6	- 0.0820357	- 0.0820351
0.7	- 0.0713748	- 0.0713677
0.8	- 0.0538001	- 0.053789
0.9	- 0.0296993	- 0.029691
1	0	0

Сравнивая значения приближенных функций при $N=10$, $N=15$, получили точность $\varepsilon = 10^{-3}$. Однако, дальнейшее увеличение N приводит к медленному увеличению точности приближения.

Заключение

В работе представлены результаты теоретического обоснования применения метода Бубнова – Галеркина и Ритца для нахождения численного решения уравнений с операторами дробного дифференцирования. Задана структура численного решения и получена оценка погрешности приближенного решения по метрике энергетического пространства, порожденного оператором дробного дифференцирования. Для частного случая дробно-дифференциального уравнения построена вычислительная схема метода, получены приближенные решения и дан анализ сходимости приближенного решения к точному решению исходной задачи.

Литература

1. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами под ред. Абрамовица М., Стигана И. – Москва: Наука. Главная редакция физико – математической литературы, 1979. – 832с.
2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688с.
3. Самарский А.А. Введение в численные методы. – Москва: Наука. Главная редакция физико – математической литературы, 1982. – 272с.
4. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М. : Гостехиздат, 1949.
5. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. - Казань: издательство Казан.ун – та, 1980. - 232с.
6. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычисления, том 1. - Москва: Наука. Главная редакция физико – математической литературы, 1996.- 632с.
7. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно – сеточные методы. - М. :Наука. Главная редакция физико – математической литературы, 1981. – 416с.
8. Половко А.М. Mathematica для студента. – СПб. :БХВ – Петербург, 2007. – 368с.
9. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами под ред. Абрамовица М., Стигана И. – Москва: Наука. Главная редакция физико – математической литературы, 1979. – 832с.
10. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 201с.
11. Нигматуллин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация. Теоретическая и математическая физика, 1992, Т.90, №3, с. 354 – 368.

12. Marinov T.M., Ramirez N., Santamaria F. Fractional Integration toolbox// Fractional Calculus and Applied Analysis, 2013. V.16, №3. – P. 670 – 681.
13. Barton T.A., Purnaras I.K. L_p -solutions of singular integro-differential equations // J. Math. Anal. Appl., 2012, № 386. – P. 830-841.
14. Zhu L., Fan Q. Numerical solution of nonlinear fractional-order Volterra integro-differential equations by SCW // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2013. № 18. –P. 1203-1213.
15. Ma X., Huang X. Ma, Huang C. Numerical solution of fractional integro-differential equations by a hybrid collocation method // Applied Mathematics and Computation, 2013. № 219. – P. 6750-6760.
16. Saeed R. K., Ahmed C. Approximate solution for the system of non-linear Volterra integral equations of the second kind by using block-by-block method // Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 2008.V. 2, №. 1. – P. 114-124.
17. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. – Москва: Мир, 1985. – 590с.
18. Архипов Г.И., Садовничий В.И., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. – Москва: Высшая школа, 1999. – 695с.

Программная реализация вычислительной схемы в пакете Wolfram Mathematica.

Пример 1.

`b=1;a=2.5;q=1; (*вводим значения переменных*)`

`f[x_]=b^a*Sin[b*x]+q*Sin[b*x]-(Pi-t)^a*Sin[(Pi-b)*x]-q*Sin[(Pi-b)*x];`

`(*известная функция*)`

`For[i=0,i<10,i++;`

`x=0.1*i;`

`Print[x," ",Sin[b*x]-Sin[(Pi-b)*x]," " ,`

`Sum[2*Integrate[f[y]*Sin[n*Pi*y],{y,0,1}]/((n*Pi)^a+q)*Sin[n*Pi*x],{n,10}]]]`

`(*находим точное значение искомой функции и приближенное значение при n =10*)`

0.1 -0.11269255845196582 -0.10989767969758871

0.2 -0.21667248505047115 -0.20113138888410692

0.3 -0.30366082915781356 -0.26901241643233903

0.4 -0.36622583224839106 -0.3104068726030744

0.5 -0.39815702328616964 -0.3244809471167703

0.6 0.39478246132025163 -0.3104068726030745

0.7 -0.35321429611464616 -0.26901241643233903

0.8 -0.2725111065840531 -0.20113138888410695

0.9 -0.15374929623158673 -0.10989767969758875

1 -1.110223024625156×10⁽⁻¹⁶⁾ -4.453506740895705×10⁽⁻¹⁷⁾

b=1;a=2.5;q=1; (*вводим значения переменных*)

f[x_]=b^a*Sin[b*x]+q*Sin[b*x]-(Pi-t)^a*Sin[(Pi-b)*x]-q*Sin[(Pi-b)*x];

(*известная функция*)

For[i=0,i<10,i++;

x=0.1*i;

Print[x," ",Sin[b*x]-Sin[(Pi-b)*x]," " ,

Sum[2*Integrate[f[y]*Sin[n*Pi*y],{y,0,1}]/((n*Pi)^a+q)*Sin[n*Pi*x],{n,10}]]]

(*находим точное значение искомой функции и приближенное значение при n =15*)

0.1 -0.11269255845196582 -0.10981070925994885

0.2 -0.21667248505047115 -0.2012199585292223

0.3 -0.30366082915781356 -0.2689614297807716

0.4 -0.36622583224839106 -0.3104562738279125

0.5 -0.39815702328616964 -0.32441910936246715

0.6 -0.39478246132025163 -0.3104562738279126

0.7 -0.35321429611464616 -0.2689614297807716

0.8 -0.2725111065840531 -0.20121995852922234

0.9 -0.15374929623158673 -0.10981070925994889

1 -1.110223024625156×10⁽⁻¹⁶⁾ -4.498095765014677×10⁽⁻¹⁷⁾

b=1;a=2.5;q=1; (*вводим значения переменных*)

```
f[x_]=b^a*Sin[b*x]+q*Sin[b*x]-(Pi-t)^a*Sin[(Pi-b)*x]-q*Sin[(Pi-b)*x];
```

```
(*известная функция*)
```

```
For[i=0,i<10,i++;
```

```
x=0.1*i;
```

```
Print[x," ",Sin[b*x]-Sin[(Pi-b)*x]," " ,
```

```
Sum[2*Integrate[f[y]*Sin[n*Pi*y],{y,0,1}]/((n*Pi)^a+q)*Sin[n*Pi*x],{n,20}]]]
```

```
(*находим точное значение искомой функции и приближенное значение при  
n =20*)
```

```
0.1 -0.11269255845196582 -0.10979312300224729
```

```
0.2 -0.21667248505047115 -0.20119665775682954
```

```
0.3 -0.30366082915781356 -0.268946627702567
```

```
0.4 -0.36622583224839106 -0.3104552964354816
```

```
0.5 -0.39815702328616964 -0.32442467772146105
```

```
0.6 -0.39478246132025163 -0.31045529643548164
```

```
0.7 -0.35321429611464616 -0.268946627702567
```

```
0.8 -0.2725111065840531 -0.20119665775682957
```

```
0.9 -0.15374929623158673 -0.10979312300224733
```

```
1 -1.110223024625156×10(-16) -4.502435118361172×10(-17)
```

Пример 2.

```
b=-1;a=1.4;q=1; (*вводим значения переменных*)
```

```
f[x_]=((Pi+b)^a)*Sin[(Pi+b)*x]+(1+b^a)*Sin[b*x];
```

```
(*известная функция*)
```



```

For[i=0,i<10,i++;
x=0.1*i;
Print[x," ",Sin[(Pi+b)*x]+Sin[b*x]," ",
Re[Sum[2*Integrate[f[y]*Sin[n*Pi*y],{y,0,1}]/((n*Pi)^a+q)*Sin[k*Pi*x],{k,10}]]
]]
(*находим точное значение искомой функции и приближенное значение при
n =10*)

```

0.1	0.11269255845196582	0.16348190101914137
0.2	0.21667248505047115	0.2591630290022561
0.3	0.30366082915781356	0.32518056939363743
0.4	0.36622583224839106	0.3590342943284184
0.5	0.39815702328616964	0.3725243151243092
0.6	0.39478246132025163	0.35903429432841844
0.7	0.35321429611464616	0.32518056939363743
0.8	0.2725111065840531	0.2591630290022561
0.9	0.15374929623158673	0.16348190101914142
1.	$1.110223024625156 \times 10^{-16}$	$7.318991699213675 \times 10^{-17}$

```

b=-1;a=1.4;q=1; (*вводим значения переменных*)
f[x_]=((Pi+b)^a)*Sin[(Pi+b)*x]+(1+b^a)*Sin[b*x];
(*известная функция*)
For[i=0,i<10,i++;
x=0.1*i;

```

```
Print[x, " ", Sin[(Pi+b)*x]+Sin[b*x], " ",
Re[Sum[2*Integrate[f[y]*Sin[n*Pi*y],{y,0,1}]/((n*Pi)^a+q)*Sin[k*Pi*x],{k,15}]]
]]
```

(*находим точное значение искомой функции и приближенное значение при n =15*)

0.1	0.11269255845196582	0.16148790091743784
0.2	0.21667248505047115	0.26100359595050704
0.3	0.30366082915781356	0.3243695383100539
0.4	0.36622583224839106	0.3598705259187092
0.5	0.39815702328616964	0.3713146275976699
0.6	0.39478246132025163	0.35987052591870927
0.7	0.35321429611464616	0.3243695383100539
0.8	0.2725111065840531	0.26100359595050704
0.9	0.15374929623158673	0.1614879009174379
1	$1.110223024625156 \times 10^{-16}$	$8.242770149508152 \times 10^{-17}$

b=-1;a=1.4;q=1; (*вводим значения переменных*)

f[x_]=((Pi+b)^a)*Sin[(Pi+b)*x]+(1+b^a)*Sin[b*x];

(*известная функция*)

For[i=0,i<10,i++;

x=0.1*i;

```
Print[x, " ", Sin[(Pi+b)*x]+Sin[b*x], " ",
Re[Sum[2*Integrate[f[y]*Sin[n*Pi*y],{y,0,1}]/((n*Pi)^a+q)*Sin[k*Pi*x],{k,20}]]
]]
(*находим точное значение искомой функции и приближенное значение при
n =20*)
```