Задача 7. Укладка плитки

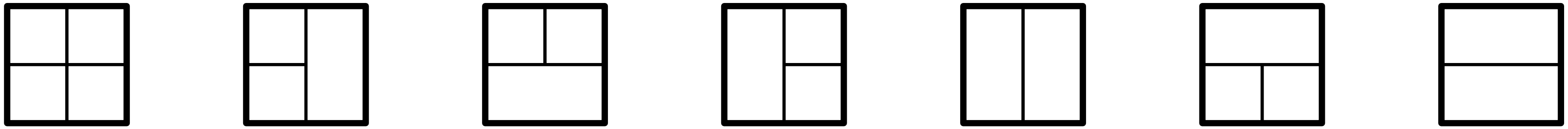
Задача 7. Укладка плитки

Определить количество способов замощения полосы $2 \times n$ с помощью плиток размерами 1×2 и 1×1, из которой удалены k единичных клеток размером 1×1.

Подзадачи 1-3. $k = 0$ $(1 \le n \le 100\,000)$.

Подзадача 4. $1 \le k \le 2n$.

Пример. $n = 2$, $k = 0$. Всего 7 способов замощения полоски 2×2.



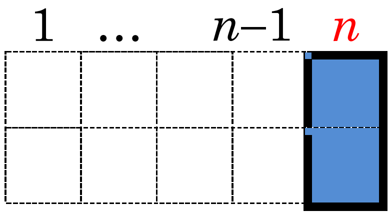
Решение основано на применении *динамического программирования*. Основная трудность — получение рекуррентного соотношения для подсчета числа способов замощения и техническая реализация подсчёта.

Решение задачи для $k = 0$.

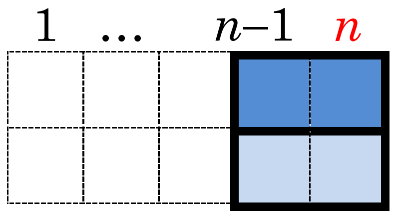
1. Числа Фибоначчи.

Определить количество способов замощения полосы $2 \times n$ с помощью плиток размерами 1×2 и 1×1.

Пусть $A(n)$ — искомое количество способов замощения. Рассмотрим столбец с номером n. Его верхняя клетка будет накрыта «вертикальной» или «горизонтальной» плиткой 1×2.



$A(n–1)$ *способов*



$A(n–2)$ *способов*

Общее число всех способов замощения равно

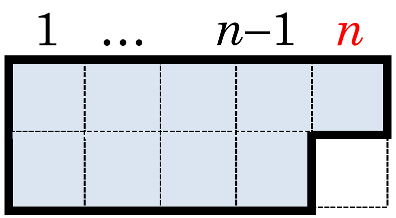
$$A(n) = A(n-1) + A(n-2).$$

Это рекуррентное соотношение для чисел Фибоначчи. Значение $A(n)$ легко находится в цикле. Сложность алгоритма — $O(n)$.

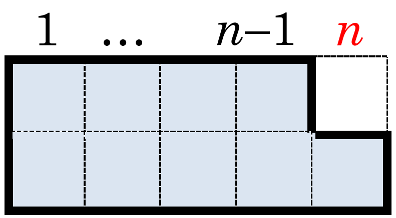
2. Замощение полоски без удаленных плиток.

Определить количество способов замощения полосы $2\times n$ с помощью плиток размерами 1×2 и 1×1.

Пусть $A(n)$ — искомое количество способов замощения. Для вывода рекуррентного соотношения понадобятся ещё два значения: $B(n)$ и $C(n)$ — количества способов замощения плитками 1×2 и 1×1 фигур, указанных на рисунках:



$B(n)$ способов

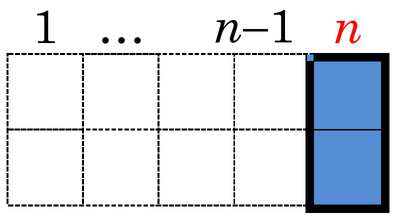


$C(n)$ способов

Рассмотрим столбец с номером n. Его верхняя клетка, как в и предыдущей задаче, будет накрыта «вертикальной» или «горизонтальной» плиткой 1×2, или плиткой 1×1.

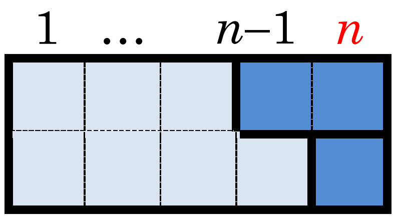
Решение задачи для $k = 0$.

1 СЛУЧАЙ. Верхняя клетка последнего столбца накрыта «вертикальной» плиткой 1×2. Число способов равно $A(n-1)$.

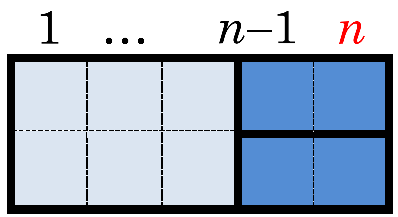


A(*n*–1) *способов*

2 СЛУЧАЙ. Верхняя клетка последнего столбца накрыта «горизонтальной» плиткой 1×2. Тогда нижняя клетка последнего столбца накрыта или плиткой 1×1, или «горизонтальной» плиткой 1×2. Число способов равно $C(n-1) + A(n-2)$.



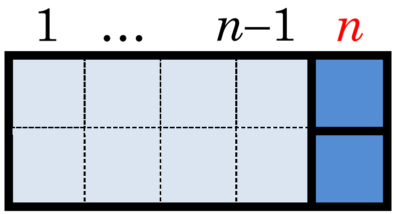
C(*n* – 1) *способов*



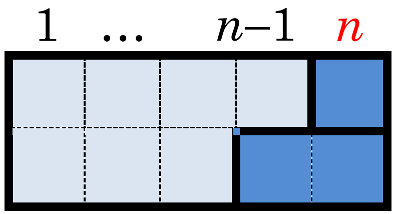
A(*n* – 2) *способов*

Решение задачи для $k = 0$.

3 случай. Верхняя клетка последнего столбца накрыта плиткой 1×1. Тогда нижняя клетка последнего столбца накрыта или плиткой 1×1, или «горизонтальной» плиткой 1×2. Число способов равно $A(n-1) + B(n-1)$.



$A(n-1)$ способов



$B(n-1)$ способов

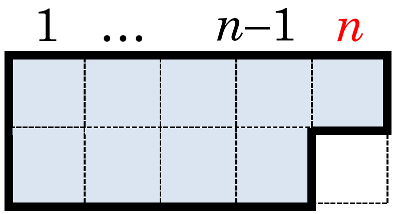
Итак, *общее количество способов замощения полосы $2\times n$ с помощью плиток размерами 1×2 и 1×1 равно*

$$A(n) = 2\cdot A(n-1) + B(n-1) + C(n-1) + A(n-2),$$

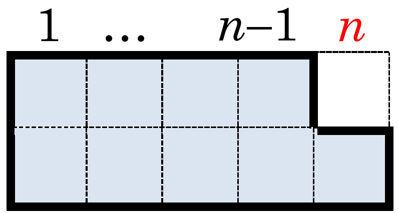
причём $A(0) = 1$, $A(1) = 2$, $B(1) = C(1) = 1$.

Найдем соотношения между $A(n)$, $B(n)$ и $C(n)$. Напомним, $B(n)$ и $C(n)$ — количества способов замощения плитками 1×2 и 1×1 фигур:

Решение задачи для $k = 0$.



$B(n)$ *способов*



$C(n)$ *способов*

Каждая из этих фигур имеет «угловую» клетку, которая накрывается или плиткой 1×1, или «горизонтальной» плиткой 1×2. Например, для первой фигуры количество способов замощения равно

$$B(n) = A(n-1) + C(n-1).$$

Аналогично для второй фигуры: $C(n) = A(n-1) + B(n-1)$. Можно упростить эту систему условий, например, так. Складывая два последних соотношения, получим равенство:

$$B(n) + C(n) = 2 \cdot A(n-1) + B(n-1) + C(n-1).$$

Возвращаясь к основному рекуррентному соотношению

Решение задачи для $k = 0$.

$$A(n) = 2 \cdot A(n-1) + B(n-1) + C(n-1) + A(n-2),$$

заменим сумму первых трёх слагаемых в левой части равенства:

$$A(n) = B(n) + C(n) + A(n-2),$$

и значит, $B(n) + C(n) = A(n) - A(n-2)$. Отсюда

$$B(n-1) + C(n-1) = A(n-1) - A(n-3).$$

Наконец, еще раз подставив эту сумму в основное равенство, получим:

$$A(n) = 3 \cdot A(n-1) + A(n-2) - A(n-3),$$

начальные значения: $A(0) = 1$, $A(1) = 2$, $A(2) = 7$ (пример из условия).

Это линейное рекуррентное соотношение (третьего порядка). Значение $A(n)$ легко находится в цикле. Сложность алгоритма — $O(n)$.

Замечание. В энциклопедии http://oeis.org количество замощений $A(n)$ задаётся последовательностью A030186.

Решение для $k > 0$.

3. Замощение полоски с установленными плитками.

Определить количество способов замощения полосы $2 \times n$, содержащей уже k установленных плиток 1×1.

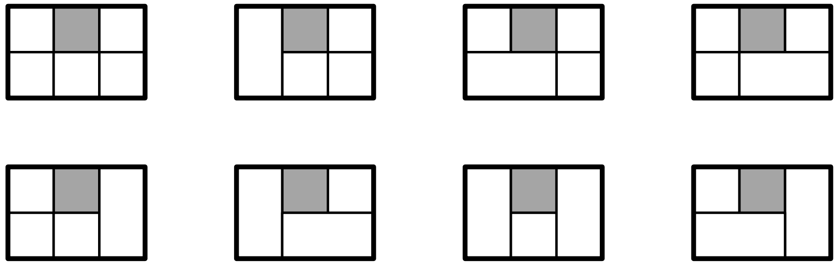
Пусть $A(n)$ — искомое количество способов замощения. Пусть уже подсчитаны значения $A(i-1)$, $A(i-2)$, $B(i-1)$ и $C(i-1)$ для предыдущих $i-1$ столбцов. При вычислении очередного i-го значения $A(i)$ используем основное рекуррентное соотношение

$$A(i) = 2 \cdot A(i-1) + B(i-1) + C(i-1) + A(i-2).$$

Если в столбцах с номерами $i-1$ или i есть установленные плитки 1×1, скорректируем коэффициенты соотношения с учётом взаимного расположения установленных плиток. На третьем примере из условия задачи покажем, как это можно сделать.

Решение для $k > 0$.

Пример. $n = 3$, $k = 1$. *Координаты установленной плитки* $(2; 1)$. *Всего* 8 *способов замощения.*



Количество способов замощения первого столбца равно $A(1) = 2$. Во втором столбце верхняя клетка занята плиткой 1×1. Поэтому число способов равно $A(2) = C(2) = A(1) + C(1) = 2 + 1 = 3$. Подсчитаем $A(3)$. В третьем столбце нет установленных плиток. Однако с учётом установленной плитки 1×1 во втором (соседнем) столбце корректируем коэффициенты рекуррентного соотношения:

$$A(3) = 2 \cdot A(2) + A(1) = 2 \cdot 3 + 2 = 8.$$

В общем случае для каждого из 16 вариантов взаимного расположения удалённых плиток в столбцах с номерами $i - 1$ и i находим корректирующие коэффициенты и вычисляем $A(i)$.