МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОУВПО «КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

АНИМАЦИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ

с помощью пакета Maple

Выпускная квалификационная работа
студентки Фатхутдиновой Д.Д
Научный руководитель: Игнатьев Ю.Г.
доктор физ.-мат. наук, профессор

Казань 2014 год

Оглавление

Введение

Темой квалификационной работы является анимация вычислений интеграла Фурье с помощью пакета Maple. Целью выпускной квалификационной работы является изложение элементов теории интегралов Фурье и обзор анимации вычислений пакете Maple. Квалификационная работа состоит из Введения, 3-х глав, Заключения и Списка литературы.

Первая глава посвящена обзору понятия интеграла Фурье. Вторая глава включает в себя обзор вычисления интеграла Фурье в пакете Maple, так же содержит конкретные примеры вычисления интеграла Фурье. В третьей главе, оригинальной главе, содержится описание авторских пользовательских процедур для вычисления интеграла Фурье,для анимации процесса вычисления интеграла Фурье.В Заключении кратко сформулированы основные результаты.

Текст квалификационной работы набран при помощи издательской системы LaTeX2ε. Она позволяет автору набрать свою рукопись с применением уже готовых форматов и распечатать ее с высоким полиграфическим качеством. При этом использовался специальный стиль профессора проф. Ю.Г.Игнатьева BIBLIO, содержащий макросы, удобные для оформления работы, особенно для импорта графики в LaTeX2ε.

В своей работе использовали книги Г.М. Фихтенгольц [1] по специальным функциям и их разложениям, Э.Ч. Титчмаршев "Введение в теорию интегралов Фурье"[2].

Глава I

Понятие интеграла Фурье

I.1 Понятие, признаки интеграла Фурье

Начало теории интегралов Фурье было положено «Аналитической теорией теплоты» Фурье. Функцию, заданную на отрезке (или периодическую), можно представить рядом Фурье на всей области определения. Если функция задана на всей вещественной оси и она непериодическая, то е. нельзя представить рядом Фурье. Вместо этого используется интеграл Фурье.

Пусть:

1) функция *f(x)* задана на всей вещественной оси;

2) на каждом конечном отрезке функция *f(x)* - кусочно-гладкая;

3)

$$\exists \int_{+\infty}^{-\infty} |f(x)|\, dx.$$

Тогда в точках своей непрерывности функция *f(x)* представима ***интегралом Фурье:***

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [\hat{f}_c(\lambda) \cos \lambda x + \hat{f}_s \sin \lambda x d\lambda.$$

Где

$$\hat{f}_c(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx,$$

$$\hat{f}_s(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx, \lambda > 0.$$

В точках разрыва функции *f(x)* интеграл Фурье сходиться к полусумме предельных значений *f(x)* слева и справа:

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

Если функция $f(x)$ - чётная, то

$$\hat{f}_s(\lambda) \equiv 0,$$

и

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \hat{f}_c(\lambda) \cos \lambda x d\lambda,$$

где

$$\hat{f}_c(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx$$

- ***косинус-образ Фурье***

$$(\lambda > 0).$$

Если функция $f(x)$ - нечётная, то

$$\hat{f}_c(\lambda) \equiv 0,$$

и

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \hat{f}_s(\lambda) \sin \lambda x d\lambda,$$

где

$$\hat{f}_s(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx$$

- ***синус-образ Фурье***

$$(\lambda > 0).$$

Интеграл Фурье для кусочно-непрерывной и абсолютно интегрируемой на

$$(-\infty; +\infty)$$

так же можно записать в виде:

$$\int_0^{+\infty} (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x d\lambda,$$

причем

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt;$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t dt.$$

Где

$$b(\lambda) = 0, a(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t dt$$

Признак Дини.

Интеграл Фурье функции $f(x)$ в точке x_0 сходится и имеет значение S_0, если при некотором $h > 0$ сходится интеграл:

$$\int_0^h \frac{|\varphi(t)|}{t} dt.$$

Признак Дирихле - Жордана.

Интеграл Фурье функции $f(x)$ в точке x_0 сходится и имеет значение S_0, если в некотором промежутке $[x_0 - h, x_0 + h]$ с центром в этой точке функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение.

I.2 Теоремы Интеграла Фурье

В теории интегралов Фурье, как и в теории рядов Фурье, фундаментальную роль играет теорема Римана– Лебега. Она формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Пусть*

$$f(x) \in L(-\infty, \infty).$$

Тогда интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x dx$$

стремятся к нулю при $\lambda \to \infty$

`Доказательство.` Рассмотрим,например, первый из этих интегралов. Пусть ε - заданное положительное число. Тогда можно выбрать столь большое X, чтобы

$$\int_X^{\infty} |f(x)| dx < \varepsilon,$$

$$\int_{-\infty}^{-X} |f(x)|dx < \varepsilon,$$

и, следовательно,

$$\left|\int_{X}^{\infty} f(x)dx \cos\lambda x dx\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\int_{-\infty}^{-X} f(x)dx \cos\lambda x dx\right| < \varepsilon,$$

для всех значений λ. Далее, можно найти функцию $\varphi(x)$, абсолютно непрерывную в интервале $(-X, X)$ и такую, что

$$\int_{-X}^{X} |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Тогда

$$\left|\int_{-X}^{X} [f(x) - \varphi(x)] \cos\lambda x dx\right| < \varepsilon$$

для всех значений λ. Наконец,

$$\int_{-X}^{X} \varphi(x) \cos\lambda x dx = \frac{\varphi(X)\sin\lambda X}{\lambda} + \frac{\varphi(-X)\sin\lambda X}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_{-X}^{X} \varphi'(x)\sin\lambda x dx,$$

и (при фиксированном X) можно выбрать столь большое λ_0, чтобы это выражение при $\lambda > \lambda_0$, было по абсолютной величине меньше, чем ε. Тогда будем иметь

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos\lambda x dx\right| < 4\varepsilon$$

$$(\lambda > \lambda_0).$$

Это доказывает теорему для интеграла, содержащего косинус. Аналогичное доказательство применимо и к интегралу, содержащему синус.

Теорема 2. *Пусть* $f(x) \in L(-\infty, \infty)$. *Тогда для того, чтобы*

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\to\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)dt = a, \tag{I.1}$$

необходимо и достаточно, чтобы для каждого фиксированного δ

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{0}^{\delta} [f(x+y) + f(x-y) - 2a]\frac{\sin\lambda y}{y}dy = 0. \tag{I.2}$$

`Доказательство.` Так как

$$|f(t)\cos u(x-t)| \leq |f(t)|,$$

то интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)dt$$

сходится равномерно в любом конечном интервале изменения u. Поэтому

$$\int_0^{\lambda} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)dt =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \int_0^{\lambda} \cos u(x-t)du =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}dt.$$

Так как функция $f(t)/(x-t)$ интегрируема на интервалах $(-\infty, x-\delta)$ и $(x+\delta, \infty)$, то из теоремы Римана–Лебега следует, что при фиксированном δ :

$$\lim_{\lambda} \to \infty \int_{-\infty}^{x-\delta} f(t)\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}dt = 0,$$
$$\lim_{\lambda} \to \infty \int_{x+\delta}^{\infty} f(t)\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}dt = 0.$$

Далее,

$$\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}dt =$$
$$\int_0^{\delta} [f(x+y)+f(x-y)]\frac{\sin\lambda y}{y}dy, \tag{I.3}$$

$$\lim_{\lambda} \to \infty \int_0^{\delta} 2a\frac{\sin\lambda y}{y}dy =$$
$$\lim_{\lambda} \to \infty 2a \int_0^{\lambda\delta} \frac{\sin v}{v}dv =$$
$$2a \int_0^{\to\infty} \frac{\sin v}{v}dv = \pi a.$$

Эти соотношения в совокупности показывают, что (I.1) и (I.2) эквивалентны.

I.3 Комплексная форма интеграла Фурье

Рассмотрение комплексных функций вещественной переменной не доставляет никаких дополнительных затруднений, и естественно применять комплексную форму теоремы Фурье именно к таким функциям. Все нужные определения непосредственно распространяются на комплексные функции вещественного переменного: такая функция $f(x)$ интегрируема, имеет ограниченное изменение и т.д., если соответствующими свойствами обладают в отдельности её вещественная и мнимая части.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(u) e^{ixt} dt, \tag{I.4}$$

где

$$c(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut} dt$$

Выражение в форме (I.4) является комплексной формой интеграла Фурье для функции $f(x)$. Если в формуле (I.4) заменить $c(u)$ его выражением, то получим:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iu(x-t)} dt,$$

где правая часть формулы называется *двойным интегралом.*

`Теорема 3.` *Пусть $f(t)$ принадлежит к $L(-\infty, \infty)$, и пусть она имеет ограниченное изменение в окрестности точки $t = x$. Тогда*

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixu} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} f(t) dt. \tag{I.5}$$

Если $f(t)$ в окрестности точки $t = x$ удовлетворяет условиям следующей ***Теоремы 4****: Пусть $f(x) \in L(-\infty, \infty)$. Тогда при заданном x равенство*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\to\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(x-t) dt$$

имеет место, если интеграл

$$\int_0^{\delta} \left| \frac{f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)}{y} dy \right| \tag{I.6}$$

существует для некоторого положительного δ. В частности, это равенство имеет место, если $f(x)$ дифференцируема в точке x.

Таким образом левую часть формулы (I.5) можно заменить на $f(x)$.

`Доказательство.` В силу равномерной сходимости, можно обратить порядок интегрирования в правой части формулы (I.5). Тогда получим

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixu} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} f(t) dt =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-iu(x-t)} du =$$
$$2 \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin \lambda(x-t)}{x-t} dt, \tag{I.7}$$

В качестве частного случая предположим дополнительно, что $f(z)$ аналитична для $y \geq 0$, причем $f(z) \to 0$, когда $|z| \to \infty$, равномерно для $0 \leq \arg z \leq \pi$. Тогда, как следует из леммы Жордана, $F(u) = 0$ для $u > 0$. Производя замену переменных, получаем формулы Лапласа:

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx;$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} e^{sx} \varphi(s) ds = \begin{cases} f(x) & (x > 0), \\ 0 & (x < 0). \end{cases}$$

Используя функции $F_+(w)$ и $F_-(w)$, мы придем к теореме, налагающей меньшие ограничения на поведение $f(x)$ в бесконечности.

I.4 Обобщенные интегралы Фурье

Существование интеграла,определяющего F(u), накладывает некоторое ограничение на поведение функции f(x) в бесконечности.Но даже если F(u) не существует,функции

$$F_+(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{I\omega t} f(t) dt,$$
$$F_-(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{I\omega t} f(t) dt, \tag{I.8}$$

где $\omega = u + Iv$, могут, тем не менее, существовать: первая — для достаточно больших положительных v, вторая — для достаточно больших по абсолютной величине отрицательных v.

Действительно,

$$F_+(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-vt} e^{Iut} f(t) dt,$$

так что $F_+(w)$ есть трансформация Фурье функции, равной $e^{-vt}f(t)$ при $t>0$ и 0 при $t<0$.

Двойственной к (I.8) служит формула

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ixu}F_+(u+Iv)du = \begin{cases} e^{-vx}f(x) \qquad (x>0), \\ 0 \qquad (x<0), \end{cases}$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ix(u+Iv)}F_+(u+Iv)du = \begin{cases} f(x) \qquad (x>0), \\ 0 \qquad (x<0). \end{cases}$$

Аналогичная формула имеет место и для F_-. Складывая эти формулы, мы можем записать

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{Ia-\infty}^{Ia+\infty} e^{-Ix\omega}F_+ d\omega + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{Ib-\infty}^{Ib+\infty} e^{-Ix\omega}F_-(\omega)d\omega, \tag{I.9}$$

где a есть достаточно большое положительное число, а b — достаточно большое по абсолютной величине отрицательное число.

Так, например, если $f(x)=e^x$, то

$$F_+(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+I\omega},$$

$$F_-(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+I\omega}$$

В этом случае справедливость равенства (I.9) непосредственно проверяется с помощью теории вычетов. В этой обобщенной форме интегральная формула Фурье может быть применена к периодическим функциям.

Пусть $f(x)$ имеет период 2π. Тогда для $v>0$

$$F_+(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{Ix\omega}f(t)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Sigma_{n=0}^{\infty}\int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} e^{Ix\omega}f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{I(\xi+2\pi n)\omega}f(\xi)d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}\frac{e^{I\xi\omega}}{1-e^{2\pi I\omega}}f(\xi)d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\varphi(\omega)}{1-e^{2\pi I\omega}},$$

где

$$\varphi(\omega) = \int_0^{2\pi} e^{I\xi\omega}f(\xi)d\xi.$$

Аналогично,

$$F_{-}(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\varphi(\omega)}{1 - e^{2\pi I\omega}}$$

$(v < 0)$. Двойственной формулой является поэтому

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{Ia-\infty}^{Ia+\infty} e^{-Ix\omega} \frac{\varphi(\omega)}{1 - e^{2\pi I\omega}} d\omega - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{Ib-\infty}^{Ib+\infty} e^{-Ix\omega} \frac{\varphi(\omega)}{1 - e^{2\pi I\omega}} d\omega.$$

Здесь $\varphi(\omega)$ — целая функция.Если ее поведение в бесконечности позволяет вычислить правую часть непосредственным применением теоремы о вычетах, то получаем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n) e^{-Inx}.$$

Мы возвращаемся таким образом к ряду Фурье для f(x).

I.5 Вычисление интеграла Фурье

Предположим, что формула Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u - x) du$$

имеете место для всех значений x в промежутке $(-\infty, \infty)$- за возможными исключениями в конечном числе точек. Эту формулу можно себе представить, как суперпозицию таких двух формул:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{+\infty} f(u) e^{izu} du, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{+\infty} F(z) e^{-ixz} dz \qquad \text{(I.10)}$$

Функция $F(z)$, сопоставляемая по первой формуле функции $f(x)$, называемая ее преобразованием Фурье. В свою очередь, по второй формуле функция $f(x)$ является (обратным) ***преобразованием Фурье*** (разница в знаке при i) для функции $F(x)$.

Заметим, что функция F будет, вообще говоря, комплексной даже при вещественной f; впрочем, можно было бы здесь и исходную функцию f предположить комплексной. Равенство

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(z) e^{-ixz} dz,$$

где функция $f(x)$ дана, можно рассматривать, как *интегральное уравнение* относительно неизвестной функции $F(z)$, стоящей под знаком интеграла. Решение уравнения доставляется формулой

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{izu} du.$$

Естественно, эти равенства можно и поменять местами.

Глава II

Функция интеграла Фурье в пакете Maple

II.1 Функция интеграла Фурье в пакете Maple

Преобразование Фурье — операция, сопоставляющая функции вещественной переменной другую функцию вещественной переменной.

Интегральное преобразование Фурье в Maple выполняется с помощью процедур $fourier()$, $fouriercos()$ и $fouriersin()$ — соответственно, для комплексного преобразования Фурье, косинус - преобразования и синус - преобразования Фурье.

В качестве параметров процедур указываются преобразуемое выражение, переменная, по которой выполняется преобразование, а также переменная для функции-образа. Процедуры доступны при подключении пакета $inttrans$.

Для выполнения обратного преобразования. Фурье используется процедура $invfourier()$.

II.2 Прямое и обратное преобразование Фурье в пакете Maple [1]

Прямое преобразование Фурье преобразует функцию времени $f(t)$ в функцию частот $F(w)$ и заключается в вычислении следующей интегральной функции:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jwt}dt.$$

Оно в аналитическом виде реализуется следующей функции пакета интегральных преобразований `inttrans`: $fourier(expr, t, w)$

[1] Дьяконов В.П. «Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании.» 2006

Здесь *expr* - выражение(уравнение или множество),
t- переменная, от которой зависит *expr*,
и w - переменная, относительно которой записывается результирующая функция.

Обратное преобразование Фурье задается вычислением интеграла

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{-jwt}dw.$$

Оно фактически переводит представление сигнала из частной области во временную. Благодаря этому преобразование Фурье удобны для анализа прохождения воздействий (сигналов) $si(t)$ через устройства (цепи), заданные их частотной характеристикой $K(w)$:

$$si(t) \to fourier \to s(w) \to s(w)\cdot K(w) \to invfourier \to so(t)$$

Здесь $si(t)$ и $so(t)$ - временные зависимости соответственно входного и выходного сигналов.

Определение (визуализация) преобразований Фурье и примеры их осуществления представлены ниже:

```
> restart:with(inttrans): assume(lambda>0,a>0):
>convert(fourier(f(t),t,s);int);
```

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{(-Its)}dt$$

```
>convert(invfourier(f(t),t,s);int);
```

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{(tsI)}dt\right)$$

```
>fourier(sin(t),t,w);
```

$$-I\pi Dirac(w-I) + i\pi Dirac(w+I)$$

```
>invfourier(%,w,t);
```

$$\sin(t)$$

```
>fourier(1-exp(-a* t),t,w);
```

$$2\pi Dirac(w) - fourier(e^{(-at)}, t, w)$$

```
>invfourier(%,w,t);
```

$$l - e^{(-at)}$$

>fourier$(\ln(1/sqrt(1+x^2))$,x,y);

$$\frac{\pi(e^{(-y)}Heaviside(y) - e^{y}Heaviside(-y))}{y}$$

```
>fourier(BesselJ(n,x),x,y);
```

$$\frac{2I(-1)^{(\frac{n}{2}-\frac{1}{2})}Chebyshev(n,y)(Heaviside(y+1)-(y-1))}{\sqrt{1-y^2}}$$

II.3 Косинус и синус интегралы Фурье

Разложение функции $f(t)$ в ряд Фурье требует вычисления интегралов следующего вида:

$$F(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos(st)dt,$$
$$F(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin(st)dt.$$

Они получили название косинусного и синусного интегралов Фурье и фактически задают вычисление коэффициентов ряда Фурье, в который может быть разложена функция $f(t)$. Для вычисления этих интегралов в пакете используются следующие функции:

$$fouriercos(expr, t, s)$$

$$fouriersin(expr, t, s)$$

Поскольку формат задания этих функций вполне очевиден, ограничимся примерами визуализации сути этих функций и примерами их применения:

```
> restart:
> with(inttrans):
> convert(fouriercos(f(t),t,s),int);
```

$$\frac{\sqrt{2}\int_0^\infty f(t)\cos(ts)\,dt}{\sqrt{\pi}}$$

```
> convert(fouriersin(f(t),t,s),int);
```

$$\frac{\sqrt{2}\int_0^\infty f(t)\sin(ts)\,dt}{\sqrt{\pi}}$$

```
> fouriercos(5*t,t,s);
```

$$-5\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}s^2}$$

```
> fouriersin(5*t,t,s);
```

$$-5/2\,\sqrt{2}\sqrt{\pi}\,Dirac\,(1,s)$$

```
> fouriercos(exp(-t),t,s);
```

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\,(s^2+1)}$$

```
> fouriercos(arccos(x)*Heaviside(1-x),x,y);
```

$$1/2\,\frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}\,StruveH\,(0,y)}{y}$$

```
> fouriersin(arcsin(x)*Heaviside(1-x),x,y);
```

$$1/2\,\frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}\,(\mathrm{J}\,(0,\,y)-\cos(y))}{y}$$

Нетрудно заметить, что эти преобразования нередко порождают специальные математические функции.

II.4 Дискретное преобразование Фурье

Дискретное преобразование Фурье - это одно из преобразований Фурье, широко применяемых в алгоритмах цифровой обработки сигналов, а также в других областях, связанных с анализом частот в дискретном сигнале.

Дискретное преобразование Фурье требует в качестве входа дискретную функцию. Такие функции часто создаются путём дискретизации. Дискретные преобразования Фурье помогают решать частные дифференциальные уравнения и выполнять такие операции, как свёртки.

Дискретные преобразования Фурье также активно используются в статистике, при анализе временных рядов. Существуют многомерные дискретные преобразования Фурье.

Дискретное преобразование Фурье выполняется с помощью процедуры **FourierTransform**.

Процедура доступна при подключении пакета *DiscreteTransforms.*

Последовательность вызова:

-FourierTransform(Z, [,options])
-FourierTransform(Z1, nelem [,options])
-FourierTransform(Zn, dim [,options])
-FourierTransform(X, Y [,options])
-FourierTransform(X1, Y1, nelem [,options])
-FourierTransform(Xn, Yn, dim [,options])
-InverseFourierTransform(Z, [,options])
-InverseFourierTransform(Z1, nelem [,options])
-InverseFourierTransform(Zn, dim [,options])
-InverseFourierTransform(X, Y [,options])
-InverseFourierTransform(X1, Y1, nelem [,options])
-InverseFourierTransform(Xn, Yn, dim [,options])

Параметры:

Z-Комплекс Массив данных, 1-5 мерных
Z_1- Комплекс Массив данных, 1 мерный
Z_n-Комплекс Массив данных, 2-5 мерных
X, Y-реальные массивы данных, 1-5 мерных
X_1,Y_1-реальные массивы данных, 1 мерная
X_n,Y_n-реальные массивы данных, 2-5 габаритные
$nelem$-число дискретных точек данных для использования в преобразовании
dim-размерности массива должны быть преобразованы
$options$-дополнительный аргумент команды типа параметра $=$ значение

Команды FourierTransform и InverseFourierTransform вычисляют прямое и обратное преобразование Фурье численных входных данных. Для одной форме массива данных, ввод данных Z интерпретируется как сложный комплекс. Для виде массива два данных, входы X, Y, интерпретируются как действительной и мнимой частей данных, соответственно.

Определение в использовании для 1-D N-точку прямого преобразования данных z_j дается по формуле:

$$Z_i = \sqrt{\frac{1}{N}}\left(\sum_{j=1}^{N} z_j e^{\frac{-(2I\pi(i-1)(j-1))}{N}}\right), i = 1..N$$

И определение для обратного преобразования по формуле:

$$z_j = \sqrt{\frac{1}{N}}\left(\sum_{i=1}^{N} Z_i e^{\frac{2I\pi(i-1)(j-1)}{N}}\right), j = 1..N$$

где симметричная нормализация по $\sqrt{\frac{1}{N}}$ находится в использовании (это может быть изменено с помощью опции нормализации).

Если входные данные - одномерный массив, то число элементов в массиве, который будет использоваться для преобразования могут быть определены как *nelem*. Это позволяет повторное использование одного и того же хранилища для различных размеров преобразований.

Если входные данные является массив размерности больше 1, или матрица, то по умолчанию преобразование выполняется по отношению ко всем размерам входа для всех комбинаций индексов. В этом случае длины данных не может быть указана.

Например,вызов FourierTransform или InverseFourierTransform выполняет прямое и/или обратное преобразование Фурье с совокупностью матрицы 20x30 содержащей 20 точек на графике для каждой из 30 колонок данных матрицы,сопровождаемые 30 точками данных которые преобразовывают для каждого из 20 рядов (которые уже когда-то были преобразованы) в данной матрице.

Спецификация объема утверждает,что
FourierTransform или InverseFourierTransform
выполняет преобразование только вдоль измерения множества.

Как например для матрицы 20x30 спецификация объема, равного одному, преобразовывает относительно рядов матрицы выполнение 20 точек данных преобразовывая для каждой колонки матрицы, в то время как спецификация объема, равного двум, преобразовывает относительно столбцов матрицы, совершая для каждого ряда матрицы преобразование точки 30.

Пример:

```
>with(DiscreteTransforms):
>Digits := 15:
>Z := Vector(5, proc (i) options operator, arrow;
 evalf(exp(((1/3)*I)*i)) end proc, datatype = complex[8]);
```

$$Z := \begin{cases} 0.944956946314738 + 0.327194696796152I, \\ 0.785887260776948 + 0.618369803069737I, \\ 0.540302305868140 + 0.841470984807897I, \\ 0.235237573302993 + 0.971937901363312I, \\ -0.957235480143789e - 1 + 0.995407957751765I \end{cases}$$

II.5 Вычисление интегралов Фурье в пакете Maple

Рассмотрим примеры представления некоторых функций интегралом Фурье из учебника «Сборник задач и упражнений по математическому анализу» Демидович Б.Н. 1995.

Представить интегралом Фурье следующие функции:

№3881

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } |x| < 1; \\ 0, \text{ если } |x| > 1. \end{cases}$$

Ответ:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda)}{\lambda} \cos(\lambda x) d\lambda$$

№3882

$$f(x) = \begin{cases} sgnx, \text{ если } |x| < 1; \\ 0, \text{ если } |x| > 1. \end{cases}$$

Ответ:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos(\lambda)}{\lambda} \times \sin(\lambda x) d\lambda$$

№3883 $(b > a)$

$$f(x) = sgn(x - a) - sgn(x - b).$$

Ответ:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda)(x - a) - \sin(\lambda)(x - b)}{\lambda} d\lambda$$

№3884

$$f(x) = \begin{cases} h(1 - \frac{|x|}{a}), \text{ если } |x| \le a; \\ 0, \text{ если } |x| > a. \end{cases}$$

Ответ:

$$f(x) = \frac{2h}{2\pi a} \int_0^\infty \frac{1 - \cos(a\lambda)}{\lambda^2} \cos(\lambda x) d\lambda$$

№3885 (a>0)

$$f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}$$

Ответ:
$$\frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-a\lambda}\cos(\lambda x)d\lambda$$

№3886 (a>0)

$$f(x) = \frac{x}{a^2+x^2}$$

Ответ:
$$\frac{x}{a^2+x^2} = \int_0^\infty e^{-a\lambda}\sin(\lambda x)d\lambda$$

№3887

$$f(x) = \begin{cases}\sin(x), \text{ если } |x| \le \pi;\\ 0, \text{ если } |x| > \pi.\end{cases}$$

Ответ:
$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(\lambda\pi)}{1-\lambda^2}\sin(\lambda x)d\lambda$$

№3888

$$f(x) = \begin{cases}\cos(x), \text{ если } |x| \le \frac{\pi}{2};\\ 0, \text{ если } |x| > \frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Ответ:
$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(\lambda\frac{\pi}{2})}{1-\lambda^2}\cos(\lambda x)d\lambda$$

№3890 $(a > 0)$

$$f(x) = e^{-\alpha|x|}$$

Ответ:
$$f(x) = \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(\lambda x)}{\lambda^2+\alpha^2}d\lambda$$

№3891 $(a > 0)$

$$f(x) = e^{-\alpha|x|}\cos(\beta x)$$

Ответ:
$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^\infty [\frac{1}{(\lambda-\beta)^2+\alpha^2} + \frac{1}{(\lambda+\beta)^2+\alpha^2}]\cos(\lambda x)d\lambda$$

№3892 $(a > 0)$

$$f(x) = e^{-\alpha|x|}\sin(\beta x)$$

Ответ:

$$f(x) = \frac{4\alpha\beta}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\lambda\sin(\lambda x)}{[(\lambda-\beta)^2+\lambda^2]+[(\lambda+\beta)^2+\alpha^2]}d\lambda$$

№3893

$$f(x) = e^{-x^3}$$

Ответ:

$$e^{-x^4} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{\frac{-\lambda^2}{4}}\cos(\lambda x)d\lambda$$

№3894

$$f(x) = xe^{-x^3}$$

Ответ:

$$xe^{-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\lambda e^{\frac{-\lambda^2}{4}}\sin(\lambda x)d\lambda$$

№3895 Данную функцию представить интегралом Фурье, продолжая ее

a) четным образом;

b) нечетным образом.

$$f(x) = e^{-x}, (0 < x < \infty)$$

Ответ:

$$a)e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(\lambda x)}{1+\lambda^2}d\lambda, (0 \le x < +\infty)$$

$$b)e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\lambda\sin(\lambda x)}{1+\lambda^2}d\lambda, (0 < x < +\infty)$$

Найти преобразование Фурье

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-itx}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{l\to+\infty}\int_{-l}^{l}f(t)e^{-itx}dt$$

для функции $f(t)$,если:

№3896

$$f(x) = e^{-\alpha|x|}$$

$(\alpha > 0)$

Ответ:

$$F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}$$

Продемонстрируем как эти примеры решаются в Maple:

№3881

```
> restart:
> with(inttrans):
> f:=(x)->piecewise(x>-1 and x<1,1,x<-1 and x>1,0);
```

$$f := x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{-1<x } \mathit{and} \text{ x<1} \\ 0 & \text{x<-1 } \mathit{and} \text{ 1<x} \end{cases}$$

```
> fourier(f(x),x,lambda);
```

$$2\,\frac{\sin(\lambda)}{\lambda}$$

```
> invfourier(f(x),lambda,x);
```

$$\begin{cases} 1 & \mathit{and}\,(-1 < x, x < 1) \\ 0 & \mathit{and}\,(x < -1, 1 < x) \end{cases} \mathit{Dirac}\,(x)$$

№3883

```
> restart:
> with(inttrans):
> assume(b>a):
> f:=(a,b,x)->signum(x-a)-signum(x-b);
```

$$f := (a,b,x) \mapsto -\mathit{signum}\,(-x+a) + \mathit{signum}\,(-x+b)$$

```
> fourier(f(a,b,x),x,lambda);
```

$$\mathit{fourier}\,(\mathit{signum}\,(-x+b)\,, x, \lambda) - \mathit{fourier}\,(\mathit{signum}\,(-x+a)\,, x, \lambda)$$

```
> invfourier(f(a,b,x),lambda,x);
```

$$\mathit{Dirac}\,(x)\,(-\mathit{signum}\,(-x+a) + \mathit{signum}\,(-x+b))$$

№3885

```
> restart:
> with(inttrans):
> assume(a>0):
> f:=(a,x)->1/((a)^(2)+(x)^(2));
```

$$f := (a,x) \mapsto \left(a^2+x^2\right)^{-1}$$

```
> fourier(f(a,x),x,lambda);
```

$$\frac{\pi\,\left(\mathrm{e}^{a\lambda}\mathit{Heaviside}\,(-\lambda) + \mathrm{e}^{-a\lambda}\mathit{Heaviside}\,(\lambda)\right)}{a}$$

```
> invfourier(f(a,x),lambda,x);
```

$$\frac{Dirac\,(x)}{a^2+x^2}$$

№3887

```
> restart:
> with(inttrans):
> f:=(x)->piecewise(x>=-Pi and x<=Pi,sin(x),x<-Pi and x>Pi,0);
```

$$f\ :=\ x\mapsto\begin{cases}\sin\,(x) & -\pi\le x\ and\ x\le\pi\\ 0 & x<-\pi\ and\ \pi<x\end{cases}$$

```
> fourier(f(x),x,lambda);
```

$$\frac{2\,i\sin\,(\pi\,\lambda)}{(\lambda-1)\,(\lambda+1)}$$

```
> invfourier(f(x),lambda,x);
```

$$\begin{cases}\sin\,(x) & and\,(-\pi\le x, x\le\pi)\\ 0 & and\,(x<-\pi,\pi<x)\end{cases}\ Dirac\,(x)$$

№3890

```
> restart:
> with(inttrans):
> assume(alpha>0):
> f:=(alpha,x)->exp(-alpha*abs(x));
```

$$f\ :=\ (\alpha,x)\mapsto \mathrm{e}^{-\alpha\,|x|}$$

```
> fourier(f(alpha,x),x,lambda);
```

$$2\,\frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2}$$

```
> invfourier(f(alpha,x),x,lambda);
```

$$\frac{\alpha}{(\alpha^2+\lambda^2)\,\pi}$$

№3895 Данную функцию представить интегралом Фурье, продолжая ее

а)четным образом;

б)нечетным образом.

```
> restart:
> with(inttrans):
> f:=(x)->exp(-x);
```

$$f\ :=\ x\mapsto \mathrm{e}^{-x}$$

```
> assume(0<x,x<+infinity):
```

а)

```
> fouriercos(f(x),x,lambda);
```

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\,(\lambda^2+1)}$$

б)

```
> fouriersin(f(x),x,lambda);
```

$$\frac{\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{\pi}\,(\lambda^2+1)}$$

№3896 Найти преобразование Фурье:

```
> restart:
> with(inttrans):
> f:=(x)->exp(-alpha*abs(x));
```

$$f\ :=\ x \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha\,|x|}$$

```
> assume(alpha>0):
> invfourier(f(x),x,lambda);
```

$$\frac{\alpha}{(\alpha^2+\lambda^2)\,\pi}$$

№3882

```
>restart:
>with(inttrans):
>f:=(x)->piecewise(x>-1 and x<1,signum(x),x<-1 and x>1,0);
```

$$f := (x) \to piecewise(-1 < x \qquad and \qquad x < 1,$$
$$signum(x), x < -1 \qquad and \qquad 1 < x, 0)$$

```
>fourier(f(x),x,lambda);
```

$$-\frac{4Isin(\frac{1}{2}\lambda)^2}{\lambda}$$

```
>invfourier(f(x),lambda,x);
```

$$\left(\begin{cases} signum(x) \qquad -1 < x \qquad and \qquad x < 1 \\ 0 \qquad x < -1 \qquad and \qquad 1 < x \end{cases}\right) Dirac(x)$$

№3884

```
>restart:
>with(inttrans):
>f:=(x)->piecewise(x>=-a and x<=a,h*(1-abs(x)/a),x<-a and x>a,0);
```

$$f := (x) \to piecewise(-a \le x \quad and \quad x \le a,$$
$$h(\frac{1-|x|}{a}), x < -a \quad and \quad a < x, 0)$$

```
>fourier(f(x),x,lambda);
```

$$\operatorname{fourier}\left(\begin{cases} h(\frac{1-|x|}{a}) & -a \le x \quad and \quad x \le a \\ 0 & x < -a \quad and \quad a < x \end{cases}, x, \lambda\right)$$

```
>invfourier(f(x),lambda,x);
```

$$\operatorname{fourier}\left(\begin{cases} h(\frac{1-|x|}{a}) & -a \le x \quad and \quad x \le a \\ 0 & x < -a \quad and \quad a < x \end{cases}\right) Dirac(x)$$

№3886

```
>restart:
>with(inttrans):
>assume(a>0):
>f:=(a,x)->x/((a)^(2)+(x)^(2));
```

$$f := (a, x) \to \frac{x}{a^2 + x^2}$$

```
>fourier(f(a,x),x,lambda);
```

$$I\pi(e^{a\lambda}Heaviside(-\lambda) - e^{-a\lambda}Heaviside(\lambda))$$

```
>invfourier(f(a,x),lambda,x);
```

$$\frac{xDirac(x)}{a\sim^2 + x^2}$$

№3888

```
>restart:
>with(inttrans):
>f:=(x)->piecewise(x>=-Pi/2 and x<=Pi/2,
cos(x),x<-Pi/2 and x>Pi/2,0);
```

$$f := x \to piecewise(-\frac{1}{2}\pi \le x \quad and \quad x \le \frac{1}{2}\pi,$$
$$\cos(x), x < -\frac{1}{2}\pi \quad and \quad \frac{1}{2}\pi < x, 0)$$

```
>ifourier(f(x),x,lambda);
```

$$\frac{2\cos(\frac{1}{2}\pi\lambda)}{(1-\lambda)(1+\lambda)}$$

```
>invfourier(f(x),lambda,x);
```

$$\left(\begin{cases}\cos(x) & -\frac{1}{2}\pi \le x \quad and \quad x \le \frac{1}{2}\pi \\ 0 & x < -\frac{1}{2} \quad and \quad \frac{1}{2}\pi < x\end{cases}\right) Dirac(x)$$

№3891

```
>restart:
>with(inttrans):
>assume(alpha>0):
>f:=(alpha,beta,x)->exp(-alpha*abs(x))*cos(beta*x);
```

$$f := (\alpha, x) \to e^{-\alpha|x|\cos(\beta x)}$$

```
>fourier(f(alpha,x),x,lambda);
```

$$\frac{1}{2}fourier(e^{-\alpha\sim|x|-I\beta x}, x, \lambda)+$$
$$+\frac{1}{2}fourier(e^{-\alpha\sim|x|+I\beta x}, x, \lambda)$$

```
>invfourier(f(alpha,x),x,lambda);
```

$$\frac{1}{2}invfourier(e^{-\alpha\sim|x|-I\beta x}, x, lambda)+$$
$$+\frac{1}{2}invfourier(e^{-\alpha\sim|x|+I\beta x}, x, lambda)$$

№3892

```
>restart:
>with(inttrans):
>assume(alpha>0):
>f:=(alpha,x)->exp(-alpha*abs(x))*sin(beta*x);
```

$$f := (\alpha, x) \to e^{-\alpha|x|}\sin(\beta x)$$

```
>fourier(f(alpha,x),x,lambda);
```

$$-\frac{1}{2}I fourier(e^{-\alpha\sim|x|+I\beta x}, x, \lambda)+$$
$$+\frac{1}{2}I fourier(e^{-\alpha\sim|x|-I\beta x}, x, \lambda)$$

```
>invfourier(f(alpha,x),x,lambda);
```

$$\frac{1}{2}I(-invfourier(e^{-\alpha\sim|x|+I\beta x}, x, \lambda)+$$
$$+invfourier(e^{-\alpha\sim|x|-I\beta x}, x, \lambda))$$

№3893

```
>restart:
>with(inttrans):
>f:=(x)->exp(x^3);
```

$$f := x \to e^{x^3}$$

```
>fourier(f(x),x,lambda);
```

$$-\frac{1}{48}(\sqrt{3}+I)^5\sqrt{-\frac{1}{32}\lambda(\sqrt{3}+I)^5}$$
$$BesselK(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}\sqrt{3}(-\frac{1}{32}\lambda(\sqrt{3}+I)^5)^{\frac{3}{2}})$$

```
>invfourier(f(x),x,lambda);
```

$$-\frac{1}{3072}\frac{1}{\pi}((\sqrt{3}+I)^5\sqrt{32}\sqrt{\lambda(\sqrt{3}+I)^5}$$
$$BesselK(\frac{1}{3}, \frac{1}{4608}\sqrt{3}\sqrt{32}(\lambda(\sqrt{3}+I)^5)^{\frac{3}{2}}))$$

№3894

```
>restart:
>with(inttrans):
>f:=(x)->x*exp(x^3);
```

$$f := x \to xe^{x^3}$$

```
>fourier(f(x),x,lambda);
```

$$\frac{2}{9}\frac{1}{(\frac{1}{2}\lambda\sqrt{3}-\frac{1}{2}I\lambda)^{\frac{3}{2}}}(\lambda(3BesselK(\frac{1}{3},$$

$$\frac{2}{9}\sqrt{3}(-\frac{1}{32}\lambda(\sqrt{3}+I)^5)^{\frac{3}{2}})$$

$$-\sqrt{3}BesselK(\frac{4}{3},\frac{2}{9}\sqrt{3}(-\frac{1}{32}\lambda(\sqrt{3}+$$

$$+I)^5)^{\frac{3}{2}})(-\frac{1}{32}\lambda(\sqrt{3}+I)^5)^{\frac{3}{2}}))$$

```
>invfourier(f(x),x,lambda);
```

$$\frac{1}{1152}\frac{1}{(-2\lambda\sqrt{3}+2I\lambda)^{\frac{3}{2}}\pi}(\lambda(-$$

$$-3072BesselK(\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{4608}\sqrt{3}\sqrt{32}(\lambda(\sqrt{3}+I)^5)^{\frac{3}{2}})+$$

$$+\sqrt{3}BesselK(\frac{4}{3},$$

$$\frac{1}{4608}\sqrt{3}\sqrt{32}(\lambda(\sqrt{3}+I)^5)^{\frac{3}{2}})$$

$$\sqrt{32}(\lambda(\sqrt{3}+I)^5)^{\frac{3}{2}}))$$

Как видно, в учебнике Демидовича Б.Н. "Сборник задач и упражнений по математическому анализу"решение представляется в виде интеграла по бесконечному промежутку, тогда как в пакет Maple эти интегралы представлены в виде обобщенных функций.

Глава III

Библиотека процедур

III.1 Преобразование интеграла Фурье

```
>restart:
>Fourier:=table():
```

Интегральное преобразование Фурье в Maple выполняется с помощью процедур **fourier()**,**fouriercos()** и **fouriersin()** - соответственно, для комплексного преобразования Фурье, косинус-преобразования и синус-преобразован Фурье. Функция Фурье вычисляет преобразование Фурье **(F(w))** для **expr (f(t))** относительно **t** , используя определение:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-Iwt}dt$$

Функция **invfourier** вычисляет обратное преобразование Фурье **(F(T)) expr (F(W))** по отношению к **w** , используя определение:

$$f(t) = \frac{1}{2}\frac{\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{Itw}dw}{\pi}$$

III.2 Процедура интегрального преобразования интеграла Фурье

```
>Fourier[fourier]:=proc(f,x,k,l) local F,X:
F:=(X)->subs(x=X,f):
simplify(int(F(X)*exp(-I*k*X),X=-l..l)):
end proc:
```

Порядок обращения к этой процедуре такой: **fourier(f,x,k,l)**,где **f** - имя функции, разложение которой требуется найти, где **x** – переменная, выражение **f** преобразуется в отношении **x**, где **k** – параметр преобразования , где **-l,l** - – интервал разложения.

III.3 Обратное преобразование интеграла Фурье

```
>Fourier[invfourier]:=proc(F,omega,t,L) local f,Omega:
f:=(Omega)->subs(omega=Omega,F):
1/2*Pi*int(f(omega)*exp(I*omega*t),omega=-L..L):
end proc:
```

Порядок обращения к этой процедуре такой: **invfourier(f,t,omega)**,где **f** - имя функции, разложение которой требуется найти, где **t** – переменная, выражение **f** преобразуется в отношении **t**, где **omega** - – параметр преобразования , где **-l,l** - – интервал разложения.

III.4 Примеры

1.Представить интегралом Фурье следующую функцию.

```
>f:=(x)->piecewise(x>-1 and x<1,1,x<-1 and x>1,0);
```

$$f := (x) \to piecewise(-1 < xandx < 1, 1, x < -1and1 < x, 0)$$

```
>fourier(f(x),x,k,10);
```

$$fourier \begin{cases} 1 - 1 < x \textbf{ and } x < 1 \\ 0x < -1 \textbf{ and } 1 < x \end{cases} , x, k, 10$$

2.Найти преобразование Фурье:

```
>f:=(x)->exp(-alpha*abs(x));
```

$$f :=\to (x)e^{-\alpha|x|}$$

```
>assume(alpha>0):
```

```
>inttrans[invfourier](f(x),x,lambda);
```

$$\frac{\alpha \sim}{(\alpha \sim^2 + \lambda^2)\pi}$$

III.5 Ряд Фурье

Ряд Фурье является частным случаем преобразования Фурье, если последнее понимать в смысле обобщённых функций.

Так же как и для преобразования Фурье построим процедуру для ряда:

```
>Fourier[fourierseries]:=proc(f,x,l,n) local k, x1,x2, a, b,X,F,xx;
F:=(X)->subs(x=X,f):
x2:=l;
x1:=-l:
a[0]:=int(F(xx),xx=x1..x2)/l;
a[k]:=int(F(xx)*cos(k*Pi*xx/l),xx=x1..x2)/l;
b[k]:=int(F(xx)*sin(k*Pi*xx/l),xx=x1..x2)/l;
a[0]/2+sum(a[k]*cos(k*Pi*x/l)+
b[k]*sin(k*Pi*x/l), k=1..n);
end proc:
```

где **f** – имя функции, разложение которой требуется найти, где **x** – переменная, выражение **f**, где **l** - интервал разложения,где **n** – число членов ряда.

III.6 Процедура анимации

Создадим анимационную процедуру, предварительно выведя информацию о представленном процессе, а затем создавая последовательность всех кадров анимации и объединяя их в процедуре display:

```
>Fourier[Anim]:=proc(f,x,l,n) local k, x1,x2, a, b,X,F,xx,ff,GF,GGF,
F:=(X)->subs(x=X,f):
ff:=(k,x)->fourierseries(f,x,l,k):
GF:=plot(F(x),x=-l..l,color=blue,thickness=2):
GRFF:=(k)->plot(ff(k,x),x=-l..l,color=red,title=convert(K=k,string))
GGF:=(k)->plots[display](GF,GRFF(k)):
plots[display](seq(GGF(k),k=1..n),insequence=true):
end proc:
```

III.7 Тестирование процедур

Процедура интегрального преобразования интеграла Фурье. Пример преобразования.

```
>fourier(x^2,x,Omega,100);
```

$$\frac{1}{\Omega^3}(2(Ie^{100I\Omega}+100e^{100I\Omega}\Omega-5000Ie^{100I\Omega}\Omega^2$$
$$-Ie^{-100I\Omega}+100e^{-100I\Omega}\Omega+5000Ie^{-100I\Omega}\Omega^2))$$

Процедура обратного преобразования интеграла Фурье.Пример преобразования

```
>FF:=(t)->Re(evalf(invfourier(-(2*(-I*exp((200*I)*Omega)
-100*exp((200*I)*Omega)*Omega+(5000*I)*exp((200*I)*Omega)
*Omega^2+I-100*Omega-(5000*I)*Omega^2))*exp(-(100*I)*Omega)
/Omega^3,Omega,t,100)));
```

$$FF := t \to R(\mathit{evalf}(infourier(-\frac{1}{\Omega^3}(2(-Ie^{200I\Omega}-100e^{200I\Omega}\Omega+5000$$
$$Ie^{200I\Omega}\Omega^2+I-100\Omega-5000I\Omega^2)e^{-100I\Omega}),\Omega,t,100)))$$

Построение графиков

```
>plot([x^2,FF(x)],x=0..1,color=black,thickness=[2,2],
legend = ['x^2','FF'],linestyle=[dash,solid],
caption="График функции x^2 и ее обратное преобразование Фурье",
captionfont=[TIMES,ROMAN,14]);
```

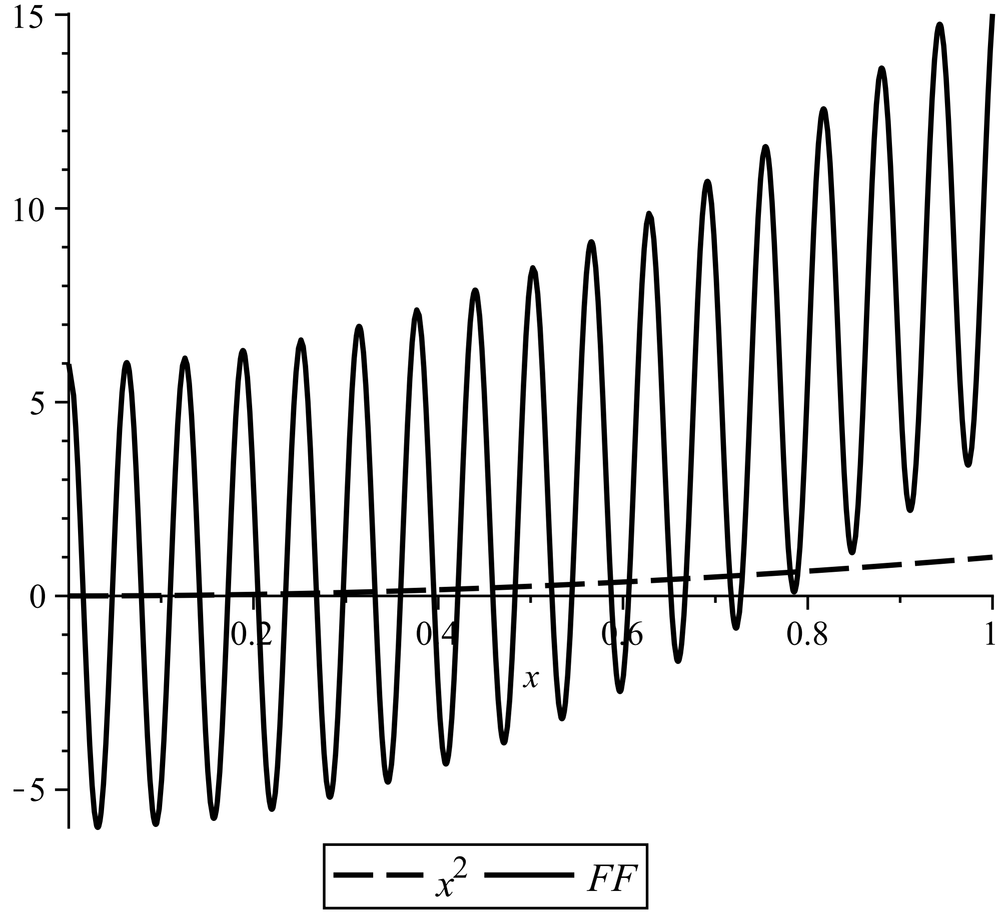

График функции x^2 и ее обратное преобразование Фурье

Рис. 1

Применение анимации

```
>f:=(x)->x^2;
```

$$f := (x) \to x^2$$

```
>fourierseries(x^2,x,2,10);
```

$$\frac{4}{3} - \frac{16\cos(\frac{1}{2}\pi x)}{\pi^2} + \frac{4\cos(\pi x)}{\pi^2} - \frac{16}{9}\frac{\cos(\frac{3}{2})\pi x}{\pi^2} + \frac{\cos(2\pi x)}{\pi^2} - \frac{16}{25}\frac{\cos(\frac{5}{2}\pi x)}{\pi^2} + \frac{4}{9}\frac{\cos(3\pi x)}{\pi^2} - \frac{16}{49}\frac{\cos(\frac{7}{2}\pi x)}{\pi^2} + \frac{1}{4}\frac{\cos(4\pi x)}{\pi^2} - \frac{16}{81}\frac{\cos(\frac{9}{2}\pi x)}{\pi^2} + \frac{4}{25}\frac{\cos(5\pi x)}{\pi^2}$$

```
>plot([fourierseries(x^2,x,5,10),x^2],x=0..1,color=black,
thickness=[2,2],legend = ['fourierseries','x^2'],
linestyle=[dash,solid],
caption="График функции x^2 и ее разложение в ряд Фурье",
captionfont=[TIMES,ROMAN,14]);
```

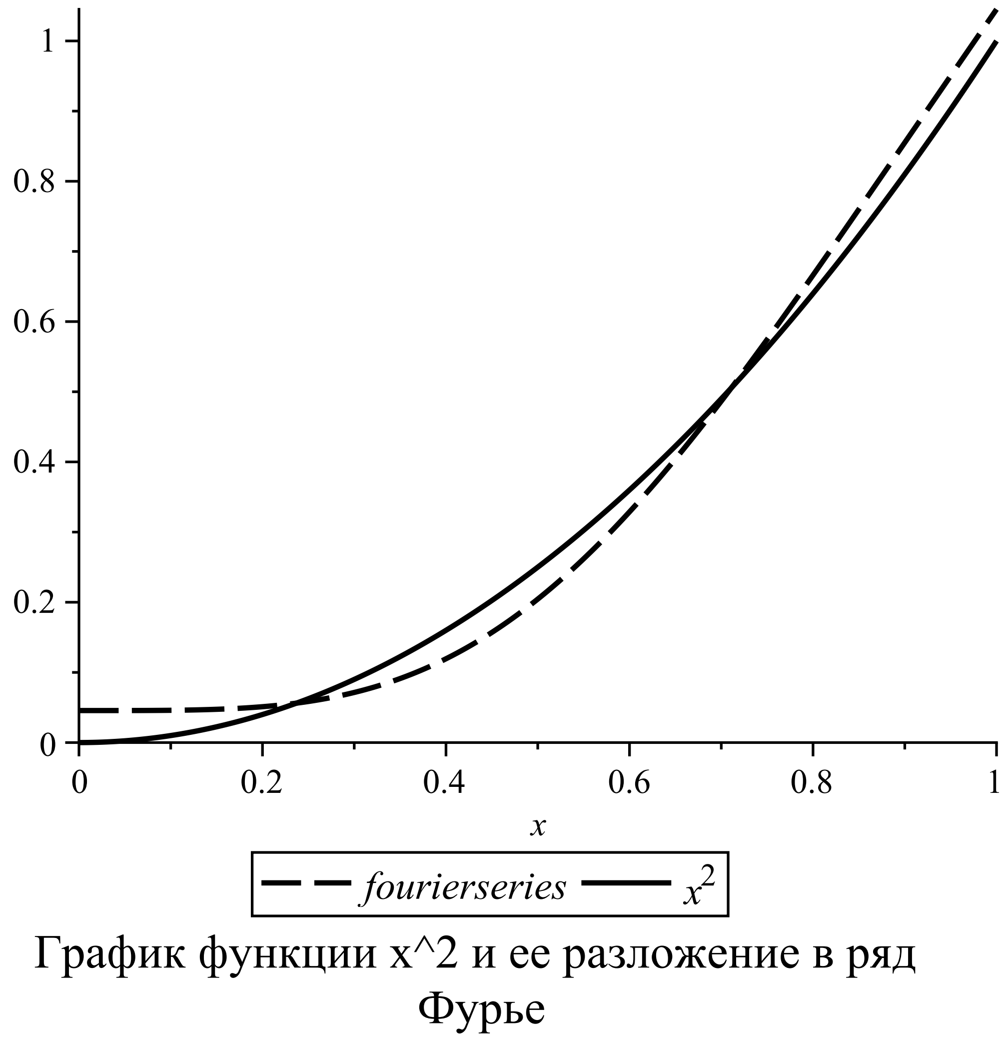

Рис. 2

```
>Anim(x^2,x,5,20);
```

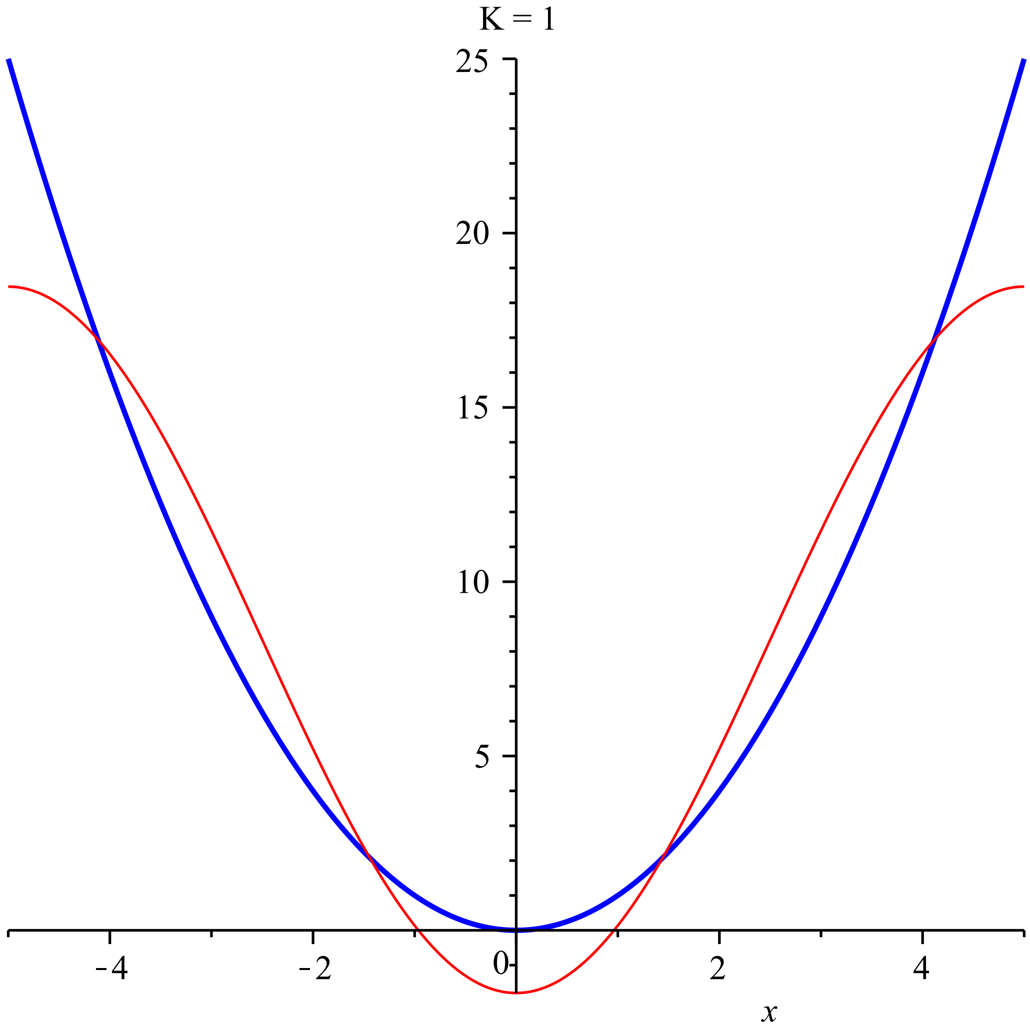

Рис. 3 *Пример применения анимационных процедур*

Заключение

В данной работе решены следующие задачи:
1. Составлен обзор понятия интеграла Фурье
2. Составлен обзор вычисления интеграла Фурье в пакете Maple
3. Рассмотрены конкретные примеры вычисления интеграла Фурье
4. Составлены процедуры преобразования интеграла Фурье в пакете Maple
5. Составлена процедура анимации интеграла Фурье в пакете Maple

Таким образом, задачи, поставленные в квалификационной работе, полностью выполнены.

Литература

[1] Г.М. Фихтенгольц. *Дифференциальная геометрия.* Москва.: Учпедгиз. – 1948. – 450 с.

[2] Э. Ч. Титчмарш. *Введение в теорию интегралов Фурье.* Москва.:О Г И З. – 1948. – 398 с.

[3] А.П.Норден. *Краткий курс дифференциальной геометрии.* Москва.:“Наука”. – 1962. – 244 с.

[4] В. П. Дьяконов. *Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании.* Москва.: СОЛОН-Пресс. – 2006. – 721 с.

[5] Ю.Г. Игнатьев. *Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей в евклидовом пространстве. Курс лекций. IV семестр.* Казань.: Казанский университет. – 2013. – 204 с.

[6] В.Т.Воднев.*Сборник задач и упражнений по дифференциальной геометрии.* Минск.:“Высшая школа”.– 1970. – 376 с.

[7] В.Н. Говорухин, В. Г. Цибулин. *Введение в Maple. Математический пакет для всех.* Москва.: Мир. – 1997.– 213 с.

[8] А. В. Матросов. *Maple 6. Решение задач высшей математики и механики.* Санкт-Петербург.:Изд-во “БХВ-Петербург”.– 2001.– 526 с.

[9] Р. В. Загретдинов, Ф. М. Аблаев, Т. М. Гаврилова, С. Н. Перфилов.*Издательская система LaTeX.* Казань.:КГУ. – 1994.– 96 с.

[10] С.М. Львовский.*Набор и верстка в системе LaTeX. 3-издание.* Москва.: МЦНМО. – 2003. – 448 с.

[11] Н.П. Семенчук, Н.Н. Сендер. *Интегралы Фурье. Преобразование Фурье.* Брест.:БрГУ.– 2011.– 42 с.

[12] А.М. Будылин.*Ряды и интегралы Фурье.* Москва.:СПбГУ.–2002.– 127 с.

[13] П.Н.Князев.*Интегральные преобразования.* Минск.:Высшая шк.– 1985.– 206 с.

[14] Р. Эдвардс. *Ряды Фурье в современном изложении.* Москва.: МИР.– 1985. – 264 с.

[15] А.А.Косарев , Е.А. Вервейко. *Ряды Фурье. Интеграл Фурье. Преобразования Фурье: Методические указания по решению задач математического анализа.* Воронеж.: ВГУ.– 2002.– 28 с.

[16] М. В.Федорюк. *Асимптотика: Интегралы и ряды.* Москва.:Наука. – 1987. – 544 с.

[17] В.А.Александров. *Преобразование Фурье.* Новосибирск.:НГУ. – 2003. – 61 с.

[18] Дж.Гудмен. *Введение в Фурье-оптику.* Москва.:МИР. – 1970. – 364 с.

[19] Н. Винер *Интеграл Фурье и некоторые его приложения.* Москва.: Физматгиз.– 1963.– 256 с.

[20] А.Н.Колмогоров , С.В. Фомин. *Элементы теории функций и функционального анализа.* Москва.: ФИЗМАТЛИТ.– 2004. – 572 с.

[1]

Заключительный лист

Подпись автора работы ________________
Дата ____________

Квалификационная работа допущена к защите

Назначен рецензент

____

Заведующий кафедрой ____________

Дата____________

Защищена в ГАК с оценкой
"________"
Дата ____________
Секретарь ГАК
____