Известия вузов. Математика
2008, № 9, с. 19–26

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Ф.Н. ГАРИФЬЯНОВ

СУММАРНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ ВНЕ ТРЕУГОЛЬНИКА

Аннотация. Рассматривается шестиэлементное суммарное уравнение в классе функций, аналитических вне правильного треугольника и исчезающих на бесконечности. Используется метод интегральных уравнений и теория эллиптических функций. Полученные результаты применяются для построения биортогональных систем аналитических функций и к исследованию проблемы моментов для целых функций конечной степени.

Ключевые слова: суммарное уравнение, биортогональные системы, моменты целых функций.

УДК: 517.9

Abstract. We consider the six-element summarized equation in the class of functions which are holomorphic in the exterior of a regular triangle and vanishing at infinity. We apply the method of integral equations and the theory of elliptic functions. Using the obtained results, we construct biorthogonal systems of holomorphic functions and study the problem of moments for integer functions of a finite degree.

Keywords: summarized equation, biorthogonal systems, moments of integer functions.

Введение

Пусть D — правильный треугольник с вершинами $t_1 = -\sqrt{3}/3$, $t_2 = \beta t_1$, $t_3 = \beta^2 t_1$, где $\beta = \exp(2\pi i/3)$ и сторонами l_j, $j = \overline{1,3}$, перечисленными в порядке обхода положительно ориентированной границы $\Gamma = \partial D$ $(t \in l_1 \Rightarrow \operatorname{Im} t < 0)$. Займемся исследованием уравнения

$$(Vf)(z) \equiv \sum_{m=1}^{6} f[\sigma_m(z)] = g(z), \quad z \in D, \tag{1}$$

где свободный член голоморфен в D и его граничное значение удовлетворяет условию Гёльдера $(g^+(t) \in H(\Gamma))$. Решение ищем в классе функций f, голоморфных вне D и исчезающих на бесконечности. Преобразования

$$\sigma_{2j-1}(z) = t_j + t_{j+1} - z \quad (t_4 \equiv t_1) \tag{2}$$

переводят $\overline{D}$ в треугольники, имеющие с исходным общие стороны, а преобразования

$$\sigma_{2j}(z) = 2t_j - z \tag{3}$$

Поступила 29.09.2006

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-01-81019 Бел.а).

— в треугольники, имеющие с ним общие вершины, т. е. они точку z из области переводят в ее внешность, где и определено решение $f(z)$.

В такой постановке нельзя применить к оператору V мощные методы исследования, базирующиеся на замечательных свойствах целых функций экспоненциального типа (ц. ф. э. т.) и преобразования Бореля ([1], § 1, п. 1). Дело в том, что множество

$$A = C \setminus \bigcup_{m=1}^{6} \sigma_m^{-1}(D) \qquad (4)$$

распадается на две связные компоненты, одна из которых (область D) содержит точку $z = 0$, а другая (область D_1) — бесконечно удаленную точку. Подобная интерпретация возможна только в том случае, если в соотношении (1) условие $z \in D$ заменить на условие $z \in D_1$. Тогда $g(\infty) = 0$ и $g(z)$ голоморфна в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки как конечная сумма функций с аналогичными свойствами. Умножив обе части уравнения (1) на множитель $\exp(\lambda z)\, dz$ и проинтегрировав по окружности $|z| = R$ достаточно большого радиуса, имеем

$$F(-\lambda) \sum_{m=1}^{6} \exp(a_m \lambda) = G(\lambda), \qquad (5)$$

где $F(\lambda)$ и $G(\lambda)$ — ц. ф. э. т., ассоциированные по Борелю соответственно с нижними функциями $f(z)$ и $g(z)$. Квазиполином является характеристической функцией уравнения (1) и

$$a_m = \sigma_m(0). \qquad (6)$$

Если правая часть уравнения (5) делится на квазиполином в том смысле, что их частное является целой функцией, то решение существует и восстанавливается в явном виде с помощью преобразования Бореля. В противном случае неоднородное уравнение неразрешимо. Очевидно, однородная задача имеет только тривиальное решение.

Ясно, что к исходной постановке такие рассуждения полностью неприменимы. Во-первых, функция $g(z)$ не обязана быть аналитически продолжимой через какой-либо отрезок границы Г. Во-вторых, даже если допустить подобное, как, например, в случае соответствующей однородной задачи

$$(Vf)(z) = 0, \quad z \in D, \qquad (7)$$

то это нисколько не облегчает исследование проблемы. Левая часть уравнения (7) является кусочно-голоморфной функцией, равной нулю во всех точках D. Но отсюда, вообще говоря, не следует, что она равна нулю в точках другой связной компоненты.

Вместе с некоторым решением уравнению (7) удовлетворяет и любая ее производная. Поэтому для обеспечения конечности числа решений потребуем, чтобы $\forall j \;\; f^-(t) \in H(l_j)$, а в вершинах у $f^-(t)$ могут быть только логарифмические особенности. Такой класс решений обозначим через B.

Впервые подобный подход к теории линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами был предложен в работе [2]. В дальнейшем задача обобщалась в различных направлениях, в том числе и на случай переменных коэффициентов [3], [4]. Рассмотрен также случай, когда соответствующее множество A распадается более чем на две связные компоненты. Такой подход позволил получить ряд интересных приложений к интерполяционным задачам для ц. ф. э. т., а также строить представляющие системы, инвариантные относительно дифференцирования. Были рассмотрены также приложения [5] к теории автоморфных функций и многоэлементным краевым задачам на римановых поверхностях.

Основная цель статьи – выяснить картину разрешимости уравнения (1) (теорема 1) и применить полученные результаты к исследованию проблемы моментов Гамбургера в некоторых классах ц. ф. э. т. (теорема 2).

1. Приступим к исследованию задачи (1) в классе B. Будем искать ее решения в виде интеграла типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} (\tau - z)^{-1}\varphi(\tau)\,d\tau, \quad z \notin \overline{D}, \tag{8}$$

с неизвестной плотностью

$$\varphi(\tau) \in H\left(\overline{l_j}\right). \tag{9}$$

Ясно, что $\forall j \quad \sigma_{2j-1}(t) : \overline{l_j} \to \overline{l_j}$ с изменением ориентации, т. е. кусочно-линейная функция $\alpha(t) = \{\sigma_{2j-1}(t);\ t \in l_j\}$ является на Γ обратным сдвигом Карлемана, разрывным в вершинах, причем $\alpha(\beta t) = \beta\alpha(t)$. Введем инволютивный оператор сдвига

$$W : \varphi(t) \to \varphi[\alpha(t)]. \tag{10}$$

Заметим, что плотность (9) определена с точностью до аналитически продолжимого в D слагаемого $a^{+}(\tau)$. За счет подбора этой функции считаем, что

$$W\varphi = \varphi. \tag{11}$$

Действительно, соотношение (11) интерпретируем как задачу Карлемана $a^{+}-Wa^{+}=W\varphi-\varphi$ относительно неизвестной функции $a(z)$. Эта задача не является переопределенной и безусловно разрешима [6]. Теперь перепишем (1) как функциональное уравнение

$$\Phi(z) \equiv \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \varphi(\tau)\,N(\tau + z)d\tau = g(z), \quad z \in D, \tag{12}$$

с ядерной функцией

$$N(u) = \sum_{m=1}^{6} (u - a_m)^{-1}, \tag{13}$$

где постоянные определяются формулой (6). Справедлив аналог формулы Ю.В. Сохоцкого–Й. Племеля

$$\Phi^{+}(t) = -(W\varphi)(t) + (E\varphi)(t), \quad t \in \Gamma, \tag{14}$$

причем особый интегральный оператор

$$(E\varphi)(t) \equiv \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \varphi(\tau)\,N(\tau + t)\,d\tau$$

понимается в смысле главного значения по Коши. Если $\varphi(\tau)$ — граничное значение голоморфной в D функции, то $\Phi(z) \equiv 0$, $z \in D$, и $E\varphi = W\varphi$. Единственной такой функцией, удовлетворяющей условию (11), является постоянная, как это следует из общей теории задачи Карлемана.

Заменим в формуле (14) переменные τ и t на $\alpha(\tau)$ и $\alpha(t)$ соответственно с учетом (11), изменением ориентации Γ и условия $\alpha'(t) = -1$ $(t \neq t_j)$, а затем сложим полученные соотношения с исходным. В силу (12) пришли к уравнению

$$T\varphi = g^{+} + Wg^{+}, \tag{15}$$

где $T = -2I + EW + WE$. Введем банахово пространство $\widetilde{C}(\Gamma)$ — множество функций $\varphi(t) \in C\left(\overline{l_j}\right)$, $j = \overline{1,3}$, с нормой $M = \max|\varphi(t)|$, $t \in \Gamma$.

Лемма 1. *Операторы W и E с точностью до компактного слагаемого антикоммутируют в $\widetilde{C}(\Gamma)$.*

Доказательство. В силу (11) имеем $EW+WE=B_1$, где
$$(B_1\varphi)(t)\equiv\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}K(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau,$$
причем
$$K(t,\tau)=N(\tau+\alpha(t))+N(\alpha(\tau)+t)\,. \tag{16}$$
Ядро (16) ограничено, что устанавливается перебором всех возможных вариантов взаимного расположения точек τ и t на сторонах треугольника (см. ниже доказательство леммы 2). Более того, любая его частная производная ограничена на Γ, причем в вершинах могут быть только точки разрыва первого рода.

Определим оператор T на пространстве $\widetilde{C}(\Gamma)$ и рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода (15). Фундаментальная система решений (ф. с. р.) однородного уравнения
$$(T\varphi)(t)=0 \tag{17}$$
содержит постоянную. Выясним, существуют ли другие решения. Все они из-за свойств ядра (16) удовлетворяют более сильному, чем (9), условию $\varphi(t)\in C^{\infty}\left(\overline{l_j}\right)$.

Лемма 2. *Ф.с.р. уравнения* (17) *состоит только из функций, удовлетворяющих условию* (11).

Доказательство. Заменяя в (17) переменные τ и t на $\alpha(\tau)$ и $\alpha(t)$ соответственно, получим $TW\varphi=0$, т. е. функция $q=\varphi-W\varphi$ — решение уравнения (17) со свойством
$$q=-Wq. \tag{18}$$
Покажем, что это тривиальное решение. Пусть $M=\|q\|$. В силу симметрии считаем без ограничения общности, что $M=|q(t)|$ при $t\in l_2$. Оценим интегральное слагаемое в соотношении (17), представив его как сумму слагаемых по сторонам треугольника. Возможны следующие случаи.

a) $\tau\in l_2$, т. е. $\tau-t=i\theta$, $\theta\in[-1,1]$. Тогда
$$K(t,\tau)=-2[(t_1-t_3)(u+(t_1-t_3)^2)^{-1}+(t_1-t_2)(u+(t_1-t_2)^2)^{-1}+3t_1(u+9t_1^2)^{-1}],\quad u=\theta^2.$$
Воспользуемся условием (18) $\Rightarrow\int\limits_{l_j}q(\tau)\,d\tau=0$ и оценим другое ядро $K_1(t,\tau)=K(t,\tau)-K(t,t)=-2u\sqrt{3}\left[u\left(u^2+u+1\right)^{-1}+3^{-1}\left(u^2+3\right)^{-1}\right]$. Имеем $\max|K_1(t,\tau)|=5\sqrt{3}/6$.

b) $\tau\in l_3$, т. е. $K(t,\tau)=(\delta-3t_1)^{-1}+(\delta+t_3-t_2)^{-1}-(\delta+t_1-t_3)^{-1}-(\delta+3t_2)^{-1}$, где $\delta=\tau-t$. Середины сторон τ_j являются неподвижными точками сдвига и в силу (18) имеем $q(\tau_j)=0$. Оценим новое ядро $K_2(t,\tau)=K(t,\tau)-K(\tau_2,\tau)=(t-\tau_2)\,K_3(t,\tau)$. Очевидно, $|t-\tau_2|\le 0,5$, а каждый из четырех слагаемых, входящих в ядро K_3, допускает следующую оценку:
$$\left|(\delta-3t_1)^{-1}(\tau-\tau_2-3t_1)^{-1}\right|\le 4/3;\quad \left|(\delta+t_3-t)^{-1}(\tau-\tau_2+t_3-t_2)^{-1}\right|<8/9;$$
$$\left|(\delta+t_1-t_3)^{-1}(\tau-\tau_2+t_1-t_3)^{-1}\right|\le 4/3;\quad \left|(\delta+3t_2)^{-1}(\tau-\tau_2+3t_2)^{-1}\right|\le 1,$$
т. е. $|K_2(t,\tau)|\le 41/18$.

c) $\tau\in l_1$. В силу симметрии имеем такую же оценку, что и в случае b).

Так как $41/9+5\sqrt{3}/6<6{,}01<2\pi$, то (17)$\Rightarrow M=0$.

Отсюда следует важный результат: в случае разрешимости неоднородного уравнения (15) любое его решение удовлетворяет условию (11). Действительно, $W\varphi$ также удовлетворяет (15) и в силу леммы 2 функция $q=\varphi-W\varphi$ — тривиальное решение (17).

Лемма 3. *Ф. с. р. уравнения* (17) *не содержит функций, удовлетворяющих условию*

$$\int_{\Gamma} \varphi(\tau)\, d\tau = 0 \tag{19}$$

и отличных от постоянной.

Доказательство. Пусть φ — искомая функция. Тогда $\varphi = h^{+} + Wh^{+}$, где $h(z)$ — голоморфная в D функция, отличная от постоянной. Имеем $T\varphi = \Phi^{+} + W\varphi^{+} = 0 \Rightarrow \Phi(z) \equiv 0$, $z \in D$. В последнем равенстве ничего не изменится, если плотность φ заменить на плотность $q = Wh^{+} - h^{+}$, так как $\varphi - q = 2h^{+}$. В силу (18) имеем $Tq = W\Phi^{+} - \Phi^{+} = 0$ и $q(t) \equiv 0$ по лемме 2, т. е. $h(z)$ — постоянная. Пришли к противоречию.

Лемма 4. *Ф. с. р. уравнения* (17) *состоит из постоянной и еще одной функции* $\varphi_0(t)$*, для которой не выполнено условие* (19)*.*

Доказательство. Из леммы 3 вытекает, что ф. с. р. не содержит более двух функций. Предположим, что она содержит только постоянную. Поскольку $T' \equiv T$, то неоднородное уравнение

$$T\varphi = 2c \tag{20}$$

разрешимо. Заменим здесь переменные τ и t на $\beta\tau$ и βt соответственно. Получили, что решением уравнения (20) является и функция $\varphi(\beta t)$, т. е. $\varphi(t) - \varphi(\beta t) = \lambda$. Заменяя в этом соотношении переменную t на βt и $\beta^2 t$, а затем складывая три полученных равенства, имеем $3\lambda = 0$. Итак, любое решение уравнения (20) удовлетворяет условию

$$\varphi(t) = \varphi(\beta t)\,. \tag{21}$$

Условия (11) и (21) в совокупности означают, что $\varphi(t) \in C(\Gamma)$. Более того, данное решение принимает во всех вершинах одинаковое значение a, т. е. $\psi(t) = \varphi(t) - a$ — решение уравнения (20), равное нулю в вершинах. Продифференцируем уравнение (20), а затем применим формулу интегрирования по частям, положив $u = \psi(t)$ и воспользовавшись свойством $\partial K/\partial t = -\partial K/\partial\tau$. Внеинтегральное слагаемое исчезает и $\psi'(t)$ — решение уравнения (17) со свойством (18), так как производная функции с одним из свойств (11) или (18) удовлетворяет другому условию. По лемме 2 имеем $\psi'(t) \equiv 0$, а с учетом (21) получили $\psi(t) = \text{const}$. Но постоянная входит в ф. с. р. однородного уравнения (17). Приходим к противоречию. Итак, ф. с. р. содержит две функции. □

Лемма 5. *Ф. с. р. уравнения* (17) *можно выбрать состоящей из единицы и функции* $\psi(t)$ *со свойством* (11)*, удовлетворяющей условиям*

$$\psi(\beta t) = \beta^2 \psi(t)\,; \quad \int_{\Gamma} \psi(t)\, dt = 1, \quad \psi(t) \notin C(\Gamma)\,. \tag{22}$$

Доказательство. Ясно, что $\varphi_0(\beta t) = \lambda\varphi_0(t) + \mu$. Отсюда $\lambda = \beta^2$, так как в противном случае для функции $\varphi_0(t)$ выполняется условие (19). Заменяя здесь t на βt и вычитая из полученного соотношения исходное, имеем первое из условий (22) для функции $\psi(t) = \varphi_0(\beta t) - \varphi_0(t)$. Функция $\psi(t)$ не удовлетворяет условию (19) и выполнение второго условия (22) добьемся за счет соответствующей нормировки. Допустим, что $\psi(t) \in C(\Gamma)$. В силу условий (11) и первого из условий (22) имеем $\forall j\ \psi(t_j) = 0$. Далее $\psi'(t) \equiv 0$ (см. доказательство леммы 4) и $\psi(t)$ — кусочная постоянная, что противоречит непрерывности.

Теорема 1. *Условие*

$$\int_{\Gamma} g^{+}(t)\, \psi(t)\, dt = 0 \tag{23}$$

необходимо и достаточно для разрешимости задачи (1) *в классе* B*.*

Доказательство. По альтернативе Фредгольма уравнение (15) при выполнении равенства (23) разрешимо. Для решения $\varphi(t)$ со свойством (11) имеем (15)$\Leftrightarrow \Phi^+ + W\Phi^+ = g^+ + Wg^+ \Rightarrow \Phi(z) = g(z)$, $z \in D$. □

Заметим, что в классе B однородная задача (7) имеет единственное нетривиальное решение

$$f_0(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} (\tau - z)^{-1} \psi(\tau)\, d\tau, \quad z \notin \overline{D}. \tag{24}$$

Оно удовлетворяет первому из условий (22) и у него логарифмические особенности в вершинах. Это решение допускает аналитическое продолжение внутрь треугольника через любую из его сторон. Формулы аналитического продолжения определяются равенством (7). Вершины треугольника являются точками ветвления. Двубережный разрез можно считать проведенным не только по ломаной, составленной из двух сторон треугольника, но и по любой разомкнутой спрямляемой кривой, проходящей через вершины трегольника.

2. Укажем на приложения задачи (1) к интерполяционным задачам для ц. ф. э. т. Она допускает следующую трактовку: найти ц. ф. э. т. $F(z)$, если вблизи ее сопряженной индикаторной диаграммы (треугольника D) значения нижней функции связаны соотношением (1).

Введем ассоциированную по Борелю с интегралом (24) верхнюю функцию

$$\mathrm{P}(z) = -\int_{\Gamma} \psi(\tau) \exp(z\tau)\, d\tau. \tag{25}$$

Заметим, что интеграл (25) можно брать непосредственно по границе сопряженной индикаторной диаграммы в силу ранее установленных свойств его плотности (см. также теорему Пэли–Винера ([7], прил. 1, п. 3) и

$$\mathrm{P}(\beta z) = \mathrm{P}(z) \Leftrightarrow \mathrm{P}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{3j}. \tag{26}$$

Справедлива и обратная формула

$$f_0(z) = \int_0^{\infty} \mathrm{P}(t) \exp(-zt)\, dt; \quad \operatorname{Re}[z \exp(i\varphi)] > h(\varphi), \tag{27}$$

где путь интегрирования в (27) — луч $\arg t = \varphi$ ([8], § 1, п. 1). Здесь для индикатора ц. ф. э. т. (25) имеем $h(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{6}\cos\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi$, $\varphi \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$; $h\left(\varphi + \frac{2}{3}\pi\right) = h(\varphi)$. Перепишем задачу (7) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(t)\, \mathrm{sign}(t) \exp(\lambda_t t)\, M(zt)\, dt = 0, \quad z \in D, \tag{28}$$

где $\lambda_t = \{-\sqrt{3}/3,\ t \geq 0;\ 2\sqrt{3}/3,\ t \leq 0\}$ и

$$M(u) = \sum_{j=0}^{2} \beta^j \exp\left(\beta^j u\right). \tag{29}$$

При получении ядра (29) воспользовались формулой (27) и первым из условий (22). Поясним, что при $z \in D$ для любого из преобразований (2) одна из точек $\sigma(z)$, $\beta\sigma(z)$, $\beta^2\sigma(z)$ лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \sqrt{3}/6$. Аналогично для преобразований (3) одна из этих трех точек лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} z < -\sqrt{3}/3$. Раскладывая левую часть равенства (28) в ряд Маклорена, получим лакунарную проблему моментов Гамбургера

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(t) \operatorname{sign}(t) \exp(\lambda_t t)\, t^{3k+2} dt = 0,$$

или, делая замену $t^3 = \tau$, имеем

$$L(F,k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \operatorname{sign}(\tau) \exp\left(\lambda_\tau \sqrt[3]{\tau}\right) \tau^k d\tau = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \qquad (30)$$

В силу условия (26) у функции $F(t) = \mathrm{P}\left(\sqrt[3]{t}\right)$ порядок $\rho = 1/3$ и тип $\sigma = \sqrt{3}/3$. Ясно, что в классе целых функций $\left[1/3,\ \sqrt{3}/3\right)$ задача (5) имеет лишь тривиальное решение. Действительно, сопряженная индикаторная диаграмма D функции $F\left(t^3\right)$ лежит в круге $|z| \le \sigma < \sqrt{3}/3$. Поэтому множество (4) является связным, т. е. $F(z) \equiv 0$ — см. введение.

Замечание. Рассуждениями, аналогичными проведенным в ([5], гл. 2, § 9), можно показать, что у задачи (30) существуют нетривиальные решения с типом $\sigma \in \left[\sqrt{3}/3,\ 2\sqrt{3}/3\right)$. При $\sigma > 2\sqrt{3}/3$ задача теряет смысл, поскольку несобственный интеграл расходится. Таким образом, остался открытым вопрос о существовании решения с типом $\sigma = 2\sqrt{3}/3$.

Теорема 2. *Неоднородная проблема моментов $L(F,k) = c_k$ при условии, что радиус сходимости ряда*

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k z^{3k+2}}{(3k+2)!}$$

больше, чем $\sqrt{3}/3$, разрешима в классе целых функций $[1/3,\ \sigma)$, где $\sqrt{3}/3 \le \sigma \le 2\sqrt{3}/3$, тогда и только тогда, когда выполнено условие разрешимости (23).

Из этой теоремы вытекает существование системы целых функций $\{F_m(z)\}$, $m = \overline{0,\infty}$, порядка $\rho = \frac{1}{3}$ и типа $\sigma = \sqrt{3}/3$, удовлетворяющих условию $L(F_m, k) = \delta_{m,k}$.

В заключение заметим, что интеграл (25) является целой функцией вполне регулярного роста (в. р. р.). Действительно, дважды интегрируя по частям, получим

$$\mathrm{P}(z) = -z^{-1}\psi(\tau)\exp(z\tau)\,|_\Gamma + z^{-2}\left[\psi'(\tau)\exp(z\tau)\,|_\Gamma - \int_\Gamma \psi''(\tau)\exp(z\tau)\,d\tau\right].$$

Луч $\arg z = \pi/3$ является одним из трех лучей, на котором значение индикатора равно типу (направление наибольшего роста). Первое из приращений не исчезает в силу третьего из условий (22). Именно оно определяет асимптотическое поведение целой функции на данном луче, поскольку любая производная $\psi^{(k)}(t)$ ограничена. Итак, функция (25) в. р. р. на луче $\arg z = \pi/3$. Поскольку у нее тригонометрический индикатор в угле $(0, 2\pi/3)$, то она в. р. р. внутри этого угла ([7], гл. III, § 7, теорема 6). А поскольку множество лучей в. р. р. всюду плотно в силу условия симметрии (26), то функция (25) в. р. р. во всей плоскости ([7], с. 186). Другими словами, множество корней ц. ф. э. т. (25) имеет нулевую плотность ([7], с. 202) внутри каждого из трех углов, где у нее тригонометрический индикатор.

Литература

[1] Напалков В.В. *Уравнения свертки в многомерных пространствах.* – М.: Наука, 1982. – 240 с.

[2] Гарифьянов Ф.Н. *Проблема обращения особого интеграла и разностные уравнения для функций, аналитических вне квадрата* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 7. – С. 7–16.

[3] Гарифьянов Ф.Н. *О регуляризации некоторых разностных уравнений* // Актуальные проблемы математического анализа. – Ростов-на-Дону. Изд-во "ГинГо", – 2000. – С. 67–72.

[4] Гарифьянов Ф.Н. *О регуляризации одного класса разностных уравнений* // Сиб. матем. журн. – 2001. – Т. 42. – № 5. – С. 1012–1017.
[5] Гарифьянов Ф.Н. *Функциональные уравнения, связанные с автоморфными формами.* – Казань: Изд-во КГЭУ, 2003. – 134 с.
[6] Зверович Э.И. *Двухэлементные краевые задачи и метод локально-конформного склеивания* // Сиб. матем. журн. – 1973. – Т. 14. – № 1. – С. 64–85.
[7] Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* – М.: ГИТТЛ, 1956. – 632 с.
[8] Бибербах Л. *Аналитическое продолжение.* – М.: Наука, 1967. – 239 с.

Ф.Н. Гарифьянов

профессор, кафедра высшей математики,
Казанский государственный энергетический университет,
420066, г. Казань, ул. Красносельская, д. 51,

`e-mail:` f.garifyanov@mail.ru

F.N. Garif'yanov

Professor, Chair of Higher Mathematics,
Kazan State Energy University,
51 Krasnosel'skaya str., Kazan, 420066 Russia,

`e-mail:` f.garifyanov@mail.ru